Realschule in der Nordstadt zu Elberfeld.

# Wie kann die Einführung in das mathematische Rechnen erleichtert werden?

(Mit einem Anhang über abgekürztes Rechnen.)

Von

**Bruno Buchrucker,**
Professor.

1895. Progr.-Nr. 508.

Elberfeld 1895.

Gedruckt bei A. Martini u. Grüttefien.

Die höheren Schulen durchleben in unseren Tagen eine bewegte Zeit. Die Ziele, die Stundenzahlen sind vielfach verändert worden, und auch das Lehrverfahren hat man fast in keinem Fache unbeanstandet gelassen. Unter der Losung: dem Schüler muß Erleichterung verschafft werden! ist man dann freilich mitunter zu Sonderbarkeiten gelangt, z. B. zu der Erwartung, der Schüler werde bei reichlichem mündlichem Gebrauche einer fremden Sprache auch ohne vielfache schriftliche Übung die Sprache schriftlich gebrauchen lernen — wo doch die eigenhändigen Briefe Friedrichs des Großen jedem beweisen, daß man des Französischen bis zu schriftstellerischer Beherrschung mächtig sein und den Forderungen unserer Schulen doch nur „mangelhaft" entsprechen kann. So ist erklärlich, daß jetzt jeder, der weitere Erleichterung des Schülers für möglich hält, zunächst die Meinung gegen sich hat.

Allein man bedenke, daß noch vor einem Menschenalter für die Schulmathematik nicht selten eine besondere Beanlagung des Schülers gefordert wurde. Man bedenke ferner die eigentümliche Thatsache, daß über die Grundlagen der sichersten aller Wissenschaften bis heute keine Klarheit herrscht; daß viele über das Wesen des Imaginären, des Negativen, ja über den Begriff der Division im Unklaren sind; daß man in der Lehre von den Winkeln an Parallelen einen dunkeln Punkt findet — von den Grundlagen der höheren Mathematik, den Differentialen, ganz zu schweigen.

Aus dem ersten geht hervor, daß die Überlieferung in der Schulmathematik noch keine große Macht sein kann; aus dem zweiten, daß möglicherweise die Unsicherheit der Gelehrten über die Grundlagen einen übeln Einfluß auf die schulmäßige Gestaltung der Grundlagen ausgeübt hat.

In der That scheint mir die Schulmathematik unter dieser Unsicherheit zu leiden; außerdem wird sie noch immer teilweise behandelt, als strebte man Mathematiker auszubilden. Dies gilt sowohl in Bezug auf die Begriffsbestimmungen, als auf die Auswahl der Sätze, Beispiele und auf den Lehrgang. Die Schulmathematik hat sich noch nicht rücksichtslos nach ihren besonderen Bedürfnissen eingerichtet. Was haben beispielsweise die Determinanten in der Schule zu suchen? Eingestandenermaßen braucht sie kein Mensch beim Lösen von Gleichungen, sie haben nur Wert für die höhere Algebra, und doch findet man sie in vielen Schulbüchern ziemlich ausführlich behandelt.

Fast überall bereitet der Übergang zum mathematischen Rechnen — so sollte man anstatt Arithmetik sagen und damit bei dem Neuling gleich die Vorstellung beseitigen, als handle es sich nun um etwas ganz Neues und ganz Besonderes — dem Schüler mehr Schwierigkeit, als man erwarten müßte. Denn es geschieht doch thatsächlich nichts weiter, als daß man nun mit unbestimmten Zahlen genau nach denselben Regeln rechnet, wie man vorher mit bestimmten, nur etwas unbequemer, gerechnet hat, und daß die Formelsprache etwas bereichert wird. Trotzdem vermag mancher Schüler, der bisher im Rechnen Befriedigendes leistete, der Schwierigkeiten nicht Herr zu werden. Und diesem Umstande verdanken wir die

Ansicht, daß für Quartaner die Arithmetik zu schwer sei, und die Thatsache, daß durch die neuen Lehrpläne der Beginn des mathematischen Rechnens in die Untertertia verlegt worden ist. Ich glaube diese Änderung bedauern zu müssen und hätte lieber gesehen, daß man die mathematische Behandlung des Rechnens vielmehr nach östreichischem Vorbilde weiter zurückgeschoben hätte; denn es wäre doch merkwürdig, wenn die Mathematik in richtiger Weise verwendet nicht überall erleichterte. Sie thut es auch in der That, und sicherlich könnte man z. B. das bürgerliche Rechnen in Quinta mit großem Vorteil unter Anwendung der Gleichungen behandeln, wie man in Östreich thut. Die Gleichung ist und bleibt einmal die bequemste Form für die Lösung aller auch nur einigermaßen verwickelten Aufgaben; wer von uns wird je eine solche anders anfassen?

Wenn aber erhebliche Schwierigkeiten nicht in der Natur der Sache liegen, so müssen sie in der Behandlung derselben zu finden sein. Ich glaube, daß sie doppelter Art sind.

Zunächst geschieht die Einführung der unbestimmten Zahlen wohl vielfach zu unvermittelt. Der an ihren Gebrauch Gewöhnte, der sie als ein ausgezeichnetes Werkzeug würdigt, übersieht leicht, daß sie den Schüler anfangs sehr fremd anmuten müssen. Es ist deshalb in Quarta eine Vorbereitung nötig, wie sie ja auch in den Lehrplänen mit den Worten „Anfänge der Buchstabenrechnung" vorgeschrieben ist. Hierfür empfiehlt es sich aber nicht, einige Abschnitte aus dem Gebiete der 4 Grundrechenarten vorweg zu nehmen, sondern man benutze einen Abschnitt aus dem bürgerlichen Rechnen, am besten die Zinsrechnung. Diese ist den Schülern schon bekannt, und so kann man ihnen leicht die Zinsformel $z = \frac{p\,j\,k}{100}$ entwickeln, wobei man p ganz genau erklärt als „die Anzahl der Mark, welche 100 ℳ in 1 Jahre einbringen" (nicht „die Mark" oder „die Zinsen"), j als „die Anzahl der Jahre, während deren u. s. w." (nicht „die Jahre"), k als „die Anzahl der Mark, die auf Zins stehen", z als „die Anzahl der Mark, welche k Mark in j Jahren zu p von Hundert Zins bringen". Mit Hülfe der Zinsformel rechnet man dann Zinsaufgaben, und nun sehen die Schüler, wie überaus leicht die Lösung gefunden wird; sie sehen, daß ihnen die Formel alle Mühe abnimmt, daß eine Aufgabe genau wie die andere behandelt werden kann, während in der Regeldetri 4 verschiedene Wege einzuschlagen waren; sie überzeugen sich, daß die Rechnung mit Buchstaben keine müßige Spielerei ist, sondern dem Rechner die Arbeit erleichtert. Auch nach solcher Vorbereitung werden in der Tertia die unbestimmten Zahlen häufig durch bestimmte ersetzt, die Formeln und besonders die Beweise unter Anwendung bestimmter Zahlen behandelt, damit die Schüler das Bewußtsein behalten, mit wirklichen Zahlen umzugehen; das ist ganz selbstverständlich, aber ich fürchte, es geschieht dennoch nicht hinreichend.

Sodann ist, wenigstens nach den Lehrbüchern zu urteilen, der Lehrgang selbst in mehreren Beziehungen nicht faßlich genug gestaltet. Im Folgenden versuche ich meine Meinung darüber auseinanderzusetzen und anzudeuten, wie vielleicht abzuhelfen wäre.

## Auffassung der Rechnung.

Jede Rechnung besteht darin, daß aus einer Zahl nach bestimmter Regel mit Hülfe einer zweiten eine dritte Zahl hergestellt wird; die ersten zwei kann man daher die Rechenzahlen nennen. Zweckmäßig stellt man die erste, die Hauptzahl, vor; die zweite, die Nebenzahl, nach. Die Art der Rechnung wird durch das zwischengestellte Rechenzeichen angegeben. Mehr als zwei Zahlen sind für eine Rechnung weder nötig, noch möglich. Sobald anscheinend mit mehr als zwei Zahlen auf einmal gerechnet wird, liegen in Wahrheit mehrere Rechnungen vor, und zwar so viele als Rechenzeichen vorkommen. Wenn man will, kann man zwischen einfachen Rechnungen (mit 2 Zahlen) und zusammengesetzten Rechnungen (aus mehreren einfachen Rechnungen zusammengesetzt) unterscheiden.

Die besonderen Bezeichnungen Augend, Addend, Minuend, Subtrahend, Multiplikand, Multiplikator, Dividend, Divisor werden durch Einführung der Namen Hauptzahl und Nebenzahl entbehrlich. In den allermeisten Fällen wurde bisher die betr. Rechenart so wie so genannt oder angedeutet, z. B. in den Sätzen: „Produkte von gleichem Multiplikator können subtrahiert werden, indem man . . ." oder „Beim Multiplizieren darf man Multiplikand und Multiplikator vertauschen"; hier kann also ohne weitere Änderung Multiplikand und Multiplikator durch Hauptzahl und Nebenzahl ersetzt werden.

Damit spart man die Einübung schwieriger Wörter und gewinnt die sehr schätzbare Möglichkeit, Sätze folgender Art auszusprechen: „Die Nebenzahlen einer zusammengesetzten Rechnung gleicher Stufe dürfen beliebig geordnet werden" (daß die Nebenzahlen zu ihren Rechenzeichen gehören, und sie deshalb mitnehmen, als bekannt vorausgesetzt).

Wichtiger aber als diese Vorteile ist die Gleichförmigkeit, welche in das gesamte Rechnen kommt, wenn man die 4 Grundrechenarten dem oben aufgestellten Grundsatze scharf entsprechend versteht.

## Addieren.

Will man dies Wort übersetzen, so darf man es nicht durch „zusammenzählen" versuchen, sondern durch „zuzählen". „Zähle 3 und 5 zusammen" kann heißen $3 + 5$ oder $5 + 3$; das sind aber zwei verschiedene Rechnungen; die eine lautet: 4, 5, 6, 7, 8; die andere: 6, 7, 8. Das Ergebnis ist in beiden Fällen dasselbe, aber darauf kommt es nicht an; es kommt nur darauf an, daß auch die geringste Zweideutigkeit vermieden werde.

„Plus" mit „und" zu übersetzen ist nicht empfehlenswert; zwar ist eine Verwechselung mit dem Bindeworte nirgends zu fürchten, aber die Sprache wendet „und" als Rechenwort so an, daß man nicht zu erkennen vermag, was Hauptzahl und was Nebenzahl sein soll. Deshalb sage man lieber „vermehrt um" oder „dazu gezählt", abgekürzt: „dazu".

## Subtrahieren.

„Subtrahieren heißt eine Zahl suchen, die zur Nebenzahl addiert die Hauptzahl giebt." Diese Erklärung ist aus zwei Gründen nicht zu billigen. Erstens ist — wie schon öfter hervorgehoben worden ist — wohl gesagt „suchen", jedoch nicht, wie man „findet". Zweitens aber wird damit die Subtraktion von der Addition abhängig gemacht und gedacht — als ob die Subtraktion unmöglich wäre ohne Addition, während doch thatsächlich die eine Rechenart von der andern ganz und gar unabhängig ist. Sie haben beide eine einzige und zwar dieselbe Vorbedingung, nämlich die Zahlenreihe. Wer diese kann, vermag genau so gut (wenn auch nicht so bequem, weil wir gewohnt sind, vorwärts zu zählen) 5 abzuzählen wie zuzuzählen.

Man sage nicht, das sei gleichgültig; wenn wir in der Mathematik nicht auf peinliche Strenge halten, so verlieren wir eine Hauptwirkung. Ueberdies weiß jeder Lehrer, wie schwer es den Schülern wird, den an die Spitze gestellten Satz als „Definition" zu verstehen; es ist eben gar keine, nur als „Probe" kann sie ein Recht auf Dasein beanspruchen.

Subtrahieren oder abziehen heißt abzählen, rückwärts zählen, und zwar um so viel, wie die Nebenzahl angiebt, und wie die kleinen Vorschüler in richtiger Erkenntnis der Sachlage thun, indem sie die Nebenzahl mit Hülfe der Finger darstellen.

Ja, aber wenn man nun (—a) abziehen soll? Da versagt doch diese Vorschrift!

Das ist richtig, aber kein Unglück; steht denn die Sache anders, wenn man (—a) zuzählen soll? Oder ja, sie steht anders, nämlich schlimmer, dieweil die Definition „Addieren heißt eine Zahl suchen, die um die Nebenzahl vermindert, die Hauptzahl giebt" noch ziemlich unbekannt ist.

„Minus", wörtlich mit „weniger" zu verdeutschen, hat ein Bedenken. „Sechs mehr", „sechs weniger" heißt nach dem Sprachgebrauche, man soll 6 zuzählen, 6 abziehen; mithin steht die Nebenzahl vor, was nicht mit dem mathematischen Gebrauche übereinstimmt. Man sage deshalb lieber „vermindert um", oder „davon abgezogen", abgekürzt „davon".

Daß man a—b niemals lesen lassen darf „b von a", scheint mir festzustehen.

## Multiplizieren.

Über den Begriff herrscht keine Unklarheit, auch darüber ist man jetzt einverstanden, daß a · b als a+a+a+ . . ., nicht als b+b+b+ . . . zu verstehen ist. Wohl aber sind die Meinungen über die mündliche und die schriftliche Bezeichnung verschieden, und nimmt man ohne Grund Rücksicht auf benannte Zahlen.

Die Bezeichnung „mal" ist durch die Sprache unwiderruflich hinter die Nebenzahl gestellt worden; vergleiche etwa den Satz: Ich bin auf meinem Wege dreimal zwei Männern begegnet. Daraus ergiebt sich, daß nach dem Willen der Sprache „dreimal zwei" nur bedeuten kann 2+2+2; nun wird man doch nicht zwischen „dreimal zwei" und „drei mal zwei" unterscheiden wollen; also müßte in der Mathematik a mal b bedeuten b+b+b+ . . . Da dies nun nach allgemeiner Ansicht nicht angeht, und da sich ferner ebensowenig empfiehlt, „mal" in der Mathematik anders zu verstehen als im herrschenden Sprachgebrauche, so bleibt leider kein anderer Ausweg, als auf das bequeme Wörtchen in der mathematischen Fachsprache zu verzichten. Denn die Quellen der Zweideutigkeit, der Unbestimmtheit müssen so weit irgend möglich verstopft werden. Man hat nun schon vorgeschlagen, a · b zu lesen: a multipliziert mit b; allein das ist offenbar zu lang. Ich möchte aber dafür eintreten, einfach zu sagen „a mit b". Das läßt sich ohne Umstände einführen, wenn man zunächst „multipliziert mit" oder „vervielfacht mit" sagen läßt und nachher das „mit" als handlichere Abkürzung vorstellt. Eine Probe, die ich auf diese Art in Sexta und Tertia gemacht habe, gelang ohne jede Schwierigkeit. „Mit" hat im Rechnen noch keine Bedeutung; daß es als „plus" verstanden wird, kann wie gesagt leicht vermieden werden, und für die vier Grundrechnungen hätte man dann die gleichmäßigen Bezeichnungen plus, minus, mit, durch (ebenfalls eingeführt als Abkürzung von „dividiert durch").

In der schriftlichen Bezeichnung ist freilich wohl unmöglich, Einheitlichkeit durchzusetzen. Da 3 kg für alle Zeit bedeutet 1 kg + 1 kg + 1 kg, wird 3a ebensolange a + a + a bedeuten müssen; a · 3 ist also dasselbe wie 3a, mithin muß auch ax dasselbe sein wie x · a und 2abx ≡ x · b · a · 2. Beißen wir also in den sauern Apfel und setzen fest: Wenn 2 Zahlen durch einen Punkt verbunden sind, so steht die Hauptzahl vorn, wenn sie ohne Punkt neben einander gestellt sind, so steht die Hauptzahl hinten. Will man aber, wozu m. E. in der Schule keine Veranlassung sein wird, die Hauptzahl nachstellen und doch ein Rechenzeichen anwenden, so wähle man dafür das fast ausgestorbene, aber früher in demselben Sinne gebrauchte liegende Kreuz. Dann ist $3a = 3 \times a = a \cdot 3$ — aller guten Dinge sind drei. Ich weiß wohl, daß meine Vorschläge nicht gründlich helfen, aber sie bringen wenigstens Ordnung und Bestimmtheit in die Sache, und damit scheint mir viel gewonnen zu sein.

Fast in allen Rechenbüchern wird betont, daß der Multiplikator keine benannte Zahl sein dürfe. Mir scheint das nicht angebracht. 1 Arbeiter verdient täglich 3 ℳ; wie teuer ist eine Arbeit, an der 4 Arbeiter 5 Tage lang arbeiten? Natürlich $3 \cdot 4 \cdot 5$ Mark. Sind denn aber 4 und 5 nicht (in der Aufgabe) benannte Zahlen, obwohl Multiplikatoren? Beim Rechnen ist 3 auch unbenannt; $3 \cdot 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$ wird gerechnet. Und wie steht's, wenn der Inhalt eines Rechtecks von 5 und 7 Meter Seitenlänge berechnet wird; welche Zahl muß da unbenannt gedacht werden? Freilich weiß ich, wie man sich dagegen zu verteidigen pflegt; aber ich weiß auch, daß man mit solchen Künstlichkeiten den Schüler nicht überzeugt, sondern verwirrt. Übrigens wird diese Angelegenheit später ausführlicher besprochen werden.

## Dividieren.

Bei dieser Rechenart begegnet uns die auffällige Erscheinung, daß es von ihr zwei verschiedene Definitionen geben soll: 1. eine Zahl suchen, die mit der Nebenzahl multipliziert die Hauptzahl giebt — teilen; 2. eine Zahl suchen, mit der die Nebenzahl multipliziert werden muß, um die Hauptzahl zu erhalten — messen. Man geht dabei von der Ansicht aus, die Hauptzahl sei ein Produkt, und es handle sich darum, 1. aus Produkt und Multiplikanden den Multiplikator, 2. aus Produkt und Multiplikator den Multiplikanden zu finden. Nun ist von vorn herein unwahrscheinlich, daß dies sachgemäß sei. Denn Dividieren ist doch e i n Verfahren, nicht zwei; wie können aber für ein Rechenverfahren zwei Begriffsbestimmungen nötig, oder auch nur möglich sein? In der That sind die zwei nicht anders zu gewinnen, als wenn man die benannten Zahlen als Krücken benutzt. 12 kg : 3 = 4 kg — teilen; 12 kg : 4 kg = 3 — messen. Das Dividieren soll nur in drei Fällen einen Sinn haben; wenn entweder beide Rechenzahlen unbenannt sind; oder wenn die Hauptzahl benannt, die Nebenzahl unbenannt ist; oder endlich, wenn die Rechenzahlen gleichbenannt sind. Betrachten wir jedoch folgende Aufgabe: Eine galvanische Kette hat 48 Volt Spannung und 8 Ohm Widerstand; wie groß ist ihre Stromstärke? Ich dächte, 6 Amp. Ohne Zweifel findet man das Ergebnis durch Division; da hätten wir ja aber einen vierten Fall. Allerdings wird man sagen: Ei, bewahre, das ist ja der erste! Du dividierst nicht 48 Volt durch 8 Ohm, sondern 48 durch 8, und dann weißt du eben, daß die 6 des Ergebnisses die Benennung Ampère bekommen muß; durch bloße Division läßt sich das Ergebnis 6 Amp. gewiß nicht finden. Dagegen behaupte ich, daß hier 48 Volt durch 8 Ohm gerade so gut, wie 48 kg durch 8 kg dividiert werden, nämlich eins so wenig wie das andere; in beiden Fällen wird einfach 48 durch 8 dividiert. Gesetzt jedoch den Fall, ich hätte darin Unrecht, so wird man zugeben müssen, daß Dinge, über die sich die Herren Lehrer streiten, in der Schule möglichst zu vermeiden sind. Lassen wir also die benannten Zahlen aus dem Spiele, dann bekommen wir eine dritte Definition, aber wenigstens nur e i n e: Dividieren heißt eine Zahl suchen, die so groß ist, daß das Produkt aus ihr und der Nebenzahl die Hauptzahl giebt.

Aber auch diese Bestimmung ist mangelhaft, gerade wie die gebräuchliche des Abziehens. Wieder wird „gesucht“ ohne die Angabe, wie „gefunden“ wird; und wieder wird die Division auf die gleichstufige Multiplikation bezogen, als ob diese die Voraussetzung jener wäre. Es braucht aber jemand durchaus nicht multiplizieren zu können, wenn er dividieren soll; das scheint nur so, weil unser Verfahren beim Dividieren der Bequemlichkeit halber das Multiplizieren anwendet, da wir doch einmal das Einmaleins können, das Eininseins aber nicht gelernt haben. Die einzige Voraussetzung des Dividierens ist vielmehr das Subtrahieren, und danach lautet die nach meiner Meinung einzig stichhaltige Erklärung:

Dividieren heißt untersuchen, wie oft sich von der Hauptzahl die Nebenzahl abziehen läßt.

Die Aufgabe 38 : 7 wird so gelöst: $38 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3$; man kann die Nebenzahl fünfmal abziehen, also ist 5 das Ergebnis. Wenn die Rechenzahlen groß sind, ist allerdings dieses Verfahren unanwendbar; aber dann wird die Lösung überhaupt nicht durch eigentliche Rechnung, sondern dadurch gefunden, daß man den Quotienten nach Schätzung annimmt und durch die Probe feststellt, ob die Schätzung richtig war: wobei sich dann mitunter findet, daß man falsch geschätzt hatte. Darf man darauf aber die Definition des Dividierens gründen?

Im Unterricht habe ich erfahren, daß man mit der obigen Bestimmung vorzüglich arbeitet. Sie wird leicht begriffen, da sie sachgemäß ist; sie erlaubt schon in der Sexta das Divisionsverfahren ganz verständlich zu erklären; sie zeigt anschaulich, daß das Ergebnis größer, bez. kleiner sein muß als die Hauptzahl, wenn die Nebenzahl kleiner, bez. größer als 1 ist; sie lehrt ohne weiteres, daß $a : 0$ unausführbar ist u. s. w.

Aber, so höre ich einwerfen, das ist ja nichts weiter als eine etwas mangelhafte Definition des bekannten „Messens"; wo bleibt das „Teilen"?

Diesem Einwurf gegenüber behaupte ich, daß er auf einer unrichtigen Annahme beruht; man vermischt die Rechenart mit ihren Anwendungen. Gewiß ist eine Division nötig, wenn man in obigem Sinne messen, oder wenn man eine Zahl in eine gegebene Anzahl gleicher Teile teilen will. Aber sehr oft ist eine Division auch notwendig, wenn eine Aufgabe gelöst werden soll, die sich nur auf überaus künstliche Weise als Messung oder Teilung deuten läßt.

Zudem ist wirklich das Messen die eigentliche Division — trotz des Namens. Sogar das Teilen wird messend ausgeführt. Wie teilt denn ein Vorarbeiter den gemeinsamen Lohn unter seine Arbeiter, wenn keiner von allen rechnen gelernt hat? Er giebt zunächst jedem 1 *M.*, dann wieder 1 *M.* u. s. f., bis er am Ende seiner Markrolle angelangt ist; d. h. er zieht Markstücke in der Anzahl der Teilnehmer so oft ab, als es möglich ist.

Jeden Dividenden als ein Produkt auffassen, von dem ein Faktor gegeben ist, während der andere gesucht wird, das entspricht der Natur der Sache ebensowenig, wie die Auffassung eines jeden Minuenden als Summe zweier Posten, deren einer gegeben ist. Die 48 Volt Spannung, von denen oben die Rede war, geben gar keinen Anlaß, die 48 aus 8 und 6 entstanden zu denken; in der Kette, die ich im Auge habe, ist sie z. B. aus 24 und 2 entstanden.

Die Erklärung mittels des Abziehens ist ohne Zweifel einfacher als jede andere, und schon deshalb mußte man sich ihr nach meiner Ansicht für die Schule zuneigen. Nun könnte man noch ihre Unzulänglichkeit behaupten für Fälle wie $(+ am) : (- a)$; allein selbst wenn sie da nicht zulangte — was übrigens nicht der Fall ist —, wird denn bei der allgemein angenommenen Erklärung der Multiplikation auf die entsprechenden Fälle Rücksicht genommen? Nein. Dann ist es aber hier auch nicht nötig.

Daß $a : b$ auch „b dividiert in a" gelesen werde, scheint mir grundsätzlich nicht geduldet werden zu dürfen; dadurch wird die Regel durchbrochen, daß die Hauptzahl vor die Nebenzahl gehört, die Einheitlichkeit geht verloren, und Verwechselungen wird Thür und Thor geöffnet.

## Auffassung der algebraischen Ausdrücke.

Der Schüler hat früher gelernt, daß 36 die Summe von 17 und 19, daß 323 das Produkt von 17 und 19 ist; das Ergebnis des Zuzählens, 36 heiße Summe, 323 heiße Produkt. Nun soll der Schüler aber $a + b$ als Summe, $a \cdot b$ als Produkt ansehen, wo doch nach dem bisherigen Gebrauch die Summe oder das Produkt noch gar nicht vorhanden, sondern erst zu suchen ist. Die Bemerkung, daß eine Ausrechnung nach Lage der Sache unausführbar ist, hilft nichts; der Schüler versteht nicht, wie vor vollzogener Ausrechnung das Ergebnis da sein soll. Man kann ihn ja freilich daran gewöhnen, aber die Thatsache bleibt, daß ein und derselbe Ausdruck zwei verschiedene Bedeutungen hat; daß $a + b$ erstens heißt, es soll zur Zahl $a$ die Zahl $b$ zugezählt werden, und daß $a + b$ zweitens die Zahl bedeutet, die bei dieser Zuzählung entsteht. Es liegt auf der Hand, daß eine solche Zweideutigkeit beim ersten Bekanntwerden mit derartigen Dingen unzweckmäßig ist und verwirrend wirken muß. Gar nun bei zusammengesetzten Ausdrücken. Den Ausdruck $(17 + 5 \cdot 19 - 3) : 8 - 27 \cdot 13 + 19 - 2$ als Differenz fassen, deren Minuend $(17 + 5 \cdot 19 - 3) : 8 - 27 \cdot 13 + 19$ ist, das ist eine Zumutung, mit der man den Anfänger verschonen sollte — die mir übrigens auch sonst nicht nötig scheint. Man stellt dabei die Sache geradezu auf den Kopf. Wenn der Wert des Ausdrucks bestimmt wird, kommt die Subtraktion der 2 zuletzt; sie ist nicht wichtiger als die andern 7 Rechnungen; warum soll sie gerade den Namen geben?

Es scheint mir deshalb vorzuziehen, daß man einen algebraischen Ausdruck vor Anfängern nicht als ein Ergebnis, sondern als eine Rechenaufgabe auffaßt. Man erklärt, $a : b$ bedeute die Aufgabe, $a$ durch $b$ zu teilen; $(a + b)(c - d)$ bedeute die Aufgabe: zu $a$ zähle $b$, von $c$ ziehe $d$ ab, dann vervielfache das erste Ergebnis mit dem zweiten. Soll die im Ausdruck angedeutete Rechnung als vollzogen angesehen werden, so müßte dies durch ein besonderes Zeichen angedeutet sein, wozu sich vielleicht der übergesetzte Strich eignet, der früher die Stelle der Klammer vertrat, jetzt aber kaum noch in diesem Sinne angewendet wird. Dann würde $a : b \cdot c$ die Aufgabe, $\overline{a : b \cdot c}$ das Ergebnis vorstellen, und die störende Zweideutigkeit wäre vermieden.

Welche weiteren Vorteile die vorgeschlagene Auffassung der Ausdrücke bringen kann, wird aus dem Folgenden hervorgehen; nach meinem Urteil ermöglicht *sie* namentlich erst eine der Anfangstufe angemessene Führung der Beweise.

## Algebraische Zahlen.

Die positiven und die negativen Zahlen müssen dem Anfänger große Schwierigkeiten bereiten, wenn sie eingeführt werden ähnlich wie: Eine negative Zahl ist eine Zahl mit der Beziehung, daß sie, zu einer absoluten Zahl hinzugefügt, diese um ihren Wert vermindert. Es ist unbegreiflich, wie solche Verschnörkelungen haben für schulgerecht gehalten werden können. Genügt es doch vollständig, wenn man kurz und bündig sagt: Eine positive Zahl ist eine Zahl, die zugezählt, eine negative Zahl eine Zahl, die abgezogen werden soll. Dadurch wird zugleich dem Anfänger klar gemacht, daß algebraische Zahlen nicht etwa eine besondere Art von Zahlen, von ganz besonderer Schwierigkeit sind.

Der beliebte Gebrauch, den Gegensatz der positiven und negativen Zahlen durch Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust o. ä. zu erklären, führt auf der Stufe, um die es sich handelt, sicher irre; er bewirkt ungenaue oder falsche Vorstellungen, während die einfache Übersetzung „zuzuzählende Zahl" und „abzuziehende Zahl" vor solchen bewahrt.

Vielfach wird für $+6$ ohne weiteres $6$ gesetzt, oder umgekehrt; es leuchtet jedoch ein, daß das nicht gestattet sein kann; $+6$ ist etwas anderes als $6$, und niemals darf man ohne Begründung eins für das andere setzen. Man sollte also im Anfange nicht sagen: $a + x - a$ ist gleich $+ x$ oder gleich $x$, sondern: es ist gleich $0 + x$ oder gleich $x$. Noch weniger sollte man, wie leider geschieht, die Schüler anweisen, die erste Zahl in einer Klammer regelmäßig als eine positive zu betrachten, wenn sie kein Vorzeichen hat, und danach die Umwandlung von $(a + b)(c + d)$ beginnen lassen: $+ a$ mit $+ c$ giebt $+ ac$ oder $ac$. Solche Ungenauigkeiten verderben die makellose Strenge und richten Verwirrung an; dadurch schaden sie mittelbar noch viel mehr als unmittelbar. Im besondern wird hier dem $+$ seine Eigenschaft als Zeichen des Zuzählens genommen, und die positiven Zahlen erscheinen dem Schüler natürlich wesentlich anders geartet als die negativen, deren Vorzeichen nicht so ohne weiteres weggelassen werden kann, — was aber ganz unberechtigt ist.

Obwohl die Potenzen erst auf höherer Stufe behandelt werden, möchte ich hier erwähnen, daß ich es auch für ungenau halte, $a^{+x}$ gleich $a^x$ zu setzen; es ist gleich $\cdot a^x$, gerade wie $a^{-x} = : a^x$ ist. Überhaupt greifen die meisten der berührten Fragen, wie jeder Kenner der Sache sieht, auf die oberen Stufen weiter.

Was die Erklärung der Multiplikation und der Division in algebraischen Zahlen betrifft, so geschieht sie am besten in der Art, daß man auseinandersetzt, es seien hier zwei Rechnungen vereinigt; also $\cdot(-a)$ bedeute, es solle mit $a$ vervielfacht und das Ergebnis abgezogen werden. Zweckmäßiger wird man freilich zunächst derartiges vermeiden; ich wüßte nicht, wozu es nötig wäre. Die gebräuchlichen Beispielsammlungen bringen allerdings solche Beispiele sehr bald; man mag sie ruhig überschlagen.

## Benannte Zahlen.

Diese Bezeichnung ist eine unglückliche, da sie den Irrtum erweckt, als handle es sich um eine besondere Art Zahlen, während es gar keine Zahlen sind. 5 kg, 6 *M*, 7 Wörter, 8 Menschen sind durchaus keine Zahlen, sondern bez. ein Gewicht, ein Preis, eine Wortfolge, ein Trupp Leute. Zahlen kommen dabei vor, aber das sind Zahlen wie alle sonstigen Zahlen; außerdem ist die zugehörige Einheit hinzugefügt, d. h. es ist gesagt, was die Zahlen bedeuten. In der Wirklichkeit giebt es überhaupt nur „benannte Zahlen", giebt es keine reinen Zahlen; wo man eine Zahl ohne Angabe ihrer Einheit findet, da ist letztere nicht etwa nicht vorhanden, sondern nur weggelassen, meist weil sie selbstverständlich ist. Die 49 an der Mütze des Dienstmanns sagt: dies ist der 49ste unter seinen Genossen; die 35 an einem Meilensteine sagt: vom Anfange bis hierher ist die Straße 35 km lang. Man kann nichts zählen, was nicht da ist, oder nicht als vorhanden gedacht wird, mithin kann keine Zahl ohne Einheit entstehen, also sind alle Zahlen „benannte". Dabei lasse man sich nicht dadurch täuschen, daß wir die Zahlenreihe ohne Einheit sagen oder denken können; die Zahlenreihe ist nichts als eine auswendig gelernte Reihe von Wörtern. Die Zahlen sind abgezogene Vorstellungen, Abstraktionen, ohne Wirklichkeit; sie sind freilich trotzdem oder besser: gerade deshalb ein ausgezeichnetes Hülfsmittel unseres Vorstellens und Denkens. Reine Zahlen kommen nur beim Rechnen vor, und auch da nur, so lange es sich um Vorübungen, um die Behandlung der Zahlen handelt, nicht um die Lösung einer wirklichen Aufgabe. In letzterer giebt es sofort keine reine Zahlen mehr.

Jede Rechnung aber findet in reinen Zahlen statt; man täuscht sich, wenn man meint, man rechne mit benannten Zahlen. Die eigentliche, die zahlenmäßige Rechnung geschieht immer in reinen Zahlen. $17\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m} = 22\,\mathrm{m}$ wird so gerechnet, daß man überlegt: $17 + 5 = 22$ und weiter, 22 bedeutet hier Meter. Gerade hierin liegt die Stärke des Rechnens; denn hieraus folgt die unumschränkte Anwendbarkeit der Ergebnisse. Die Gleichungen $17 + 5 = 22$, $3 \cdot 4 = 12$ dienen zur Lösung unzähliger Aufgaben.

Wozu aber all diese selbstverständlichen Dinge? Daß man sie dem Tertianer beibringen soll? Nein, wenigstens nur gelegentlich und vorsichtig; sie werden auf dieser Stufe nicht so ohne weiteres verstanden. Sondern wegen zweier Folgen.

Ist das Gesagte wirklich selbstverständlich, so geht aus ihm hervor, daß die Benennungen, die Einheiten nichts in der Rechnung zu suchen haben. Wie man sich längst gewöhnt hat, von den Gleichungen die Benennungen fern zu halten, so sollte man es bei allen Rechnungen thun, zumal jeder Lehrer erfahren hat, daß man sich in vielen Fällen vergeblich bemüht, die Benennungen in angemessener Weise durch die Rechnung mitzuführen. Man sollte deshalb die Schüler von vorn herein daran gewöhnen, daß sie in den Ergebnissen der Zifferrechnung nicht das wirkliche Ergebnis, die Lösung der Aufgabe sehen, sondern nur eine Zahl, und daß die Deutung des Rechenergebnisses in besonderer Überlegung geschehen muß.

Ferner aber, und das ist hier wichtiger, geht daraus hervor, daß die Rücksicht auf Benennungen niemals ins Spiel kommen kann, wenn es sich um Dinge handelt, welche die eigentliche Rechnung betreffen, also z. B. um die Begriffsbestimmung der Rechenarten oder um die Erklärung der Rechenverfahren.

## Klammern.

Klammern sind Zeichen, durch welche angedeutet wird, daß die eingeschlossenen Rechnungen **vor** den übrigen ausgeführt werden sollen. Diese Erklärung, die auch für Quinta die meiste Empfehlung verdient, ist so sachgemäß und verständlich wie erschöpfend. Man thut wohl, wenn man so von vorn herein der Meinung entgegentritt, als wären die Klammern nur da, um aufgelöst zu werden, — wie es sich die Schüler leicht vorstellen; denn wer wird in Ausdrücken wie $25 \cdot (97 - 92)$ die Klammer auflösen? Sehr brauchbar ist dann folgende Unterscheidung:

*Klammern erster Stufe* sind solche, die Zeichen erster Stufe einschließen und keine höheren vor oder hinter sich haben.

*Klammern zweiter Stufe* sind solche, die Zeichen zweiter Stufe einschließen (und keine höheren vor oder hinter sich haben).

Andere Klammern heißen *gemischte*.

Man kann dann die folgenden Sätze aussprechen, deren zweiten ich freilich noch nirgends gefunden habe, obwohl er u. a. die Multiplikation und Division der Brüche mit einem Schlage erledigt.

1. Klammern erster Stufe darf man weglassen; nach dem Klammerzeichen „minus“ muß man jedoch die Zeichen in der Klammer umkehren.

2. Klammern zweiter Stufe darf man weglassen; nach dem Klammerzeichen „durch“ muß man jedoch die Zeichen in der Klammer umkehren.

3. Gemischte Klammern werden nach besonderen Regeln aufgelöst.

Der Bruchstrich ersetzt eine, zwei, oder drei Klammern, je nachdem Zähler und Nummer eingliedrig, oder einer eingliedrig und der andere mehrgliedrig, oder beide mehrgliedrig sind.

$$m : \frac{a}{b} \equiv m : (a : b)$$

$$m : \frac{a + b}{c} \equiv m : [(a + b) : c]$$

$$m : \frac{a + b}{c + d} \equiv m : [(a + b) : (c + d)]$$

Das Ersetzen des Bruchstrichs durch Klammern, und umgekehrt, ist zu üben. Die Beliebtheit des Bruchstrichs rührt davon her, daß er Klammern ersetzt.

Ausdrücke, die durch Nebeneinanderstellung von Zahlen ohne Rechenzeichen gebildet werden, sind zu behandeln, als ob sie in Klammern stünden.

$$9 - 7\,{}^2/_3 \equiv 9 - (7 + {}^2/_3)$$
$$m : a\,b \equiv m : (b \cdot a)$$

Das ist alles, was für das Verständnis der mathematischen Zeichensprache in Betracht kommt. Für das Verständnis der Ausdrücke gibt es nur drei Regeln:

1. Rechnungen in Klammern sollen zuerst ausgeführt werden.
2. Rechnungen höherer Stufe sollen vor den niedrigeren ausgeführt werden.
3. Rechnungen gleicher Stufe sollen von links ab der Reihe nach ausgeführt werden.

## Lehrstoff der untersten Stufe.

Der Lehrstoff sei so knapp wie möglich zugeschnitten; je knapper, desto übersichtlicher, desto verständlicher. Dieser allgemeinen Forderung kann man wohl nirgends so gut entsprechen, als im vorliegenden Falle. Allerdings würde man gegen die unbedingt erforderliche Strenge verstoßen, wenn man irgend ein Rechenverfahren ohne ausdrücklichen Beweis anwenden wollte, sogar ein selbstverständlich scheinendes. Allein man sollte andrerseits auch nur das durchaus Notwendige bringen — beispielsweise die 0 aus dem Spiele lassen —, und dies in der kürzesten Form. Notwendig und hinreichend sind wohlgezählt 10 Sätze; 4 für die erste Stufe, 4 für die zweite Stufe, 2 für gemischte Rechnungen. Alles andere sind naheliegende Anwendungen dieser 10 Sätze.

1. Beim Zuzählen darf man die Rechenzahlen vertauschen.
2. Die Reihenfolge der Rechnungen erster Stufe darf verändert werden.
3. Klammern erster Stufe darf man weglassen; nach dem Klammerzeichen „minus" muß man jedoch die Zeichen in der Klammer umkehren.
4. Bei gleicher Nebenzahl zerstört sich Zuzählung und Abziehung.
5. Beim Vervielfachen darf man die Rechenzahlen vertauschen.
6. Die Reihenfolge der Rechnungen zweiter Stufe darf verändert werden.
7. Klammern zweiter Stufe darf man weglassen; nach dem Klammerzeichen „durch" muß man jedoch die Zeichen in der Klammer umkehren.
8. Bei gleicher Nebenzahl zerstört sich Vervielfachung und Teilung.

9. Man vervielfacht einen mehrgliedrigen Ausdruck mit einem andern, indem man jedes Glied des einen mit jedem Glied des andern vervielfacht. (Im Satze von den Vorzeichen zu sprechen ist überflüssig und unbequem; der Satz wird dadurch zu unbeholfen.)

10. Man teilt einen mehrgliedrigen Ausdruck, indem man jedes Glied teilt.

---

Wenn aber diese 10 Sätze noch zu viel sind, der kann sie sogar in 5 zusammenfassen:

1. Bei aufsteigenden Rechnungen darf man die Rechenzahlen vertauschen. (Bei absteigenden nicht.)
2. Die Reihenfolge gleichstufiger Rechnungen darf verändert werden.
3. Ungemischte Klammern darf man weglassen, nach absteigenden Klammerzeichen muß man jedoch die Zeichen in der Klammer umkehren.
4. Bei gleicher Nebenzahl zerstören sich die entgegengesetzten Rechnungen gleicher Stufe.
5. Rechnungen zweiter Stufe mit mehrgliedrigen Ausdrücken werden gliedweise ausgeführt.

---

Wir betrachten leicht den Schüler zu sehr als unmündig, indem wir nicht für nötig halten, ihm über Grund und Zweck der Übungen u. s. w. ein Wort zu gönnen. Darin liegt ein Fehler; denn offenbar thut jeder Mensch, auch ein Schüler, etwas lieber, wenn er einsieht, wozu es gut ist. Deshalb ist vorteilhaft, ihn von vorn herein darüber aufzuklären, daß alle Umformungen der Ausdrücke den Zweck haben, die Ausrechnung derselben entweder zu erleichtern oder erst zu ermöglichen. Die Umformung besteht darin, daß teils die Reihenfolge der (einfachen) Rechnungen, teils ihre Anzahl, teils ihre Art zweckmäßig geändert wird.

## Beweise.

Ich weiß nicht, ob ich mich irre, wenn ich den Widerwillen der Schüler gegen die Arithmetik zum größten Teile aus der Art ableite, in welcher meist die Beweise geführt werden. Eine gewisse Trockenheit läßt sich ja wohl nicht vermeiden, aber ich habe den Eindruck, daß man doch etwas mildern könnte. Vor allem sollten die Beweise nach Möglichkeit auf das Wesen der Sache eingehen, also nicht durch Gleichungen geführt werden. Bekanntlich hat sich Schopenhauer einmal gegen die „Mausefallenbeweise" der Mathematiker ausgesprochen, durch die man gefangen und zum Zugeständnisse der Richtigkeit gezwungen würde, ohne zu wissen wie. Er hat meines Erachtens im Grunde nicht unrecht; freilich war er nicht Sachkenner genug, um seine Meinung scharf begründen zu können und die Grenzen zu sehen, innerhalb deren seine Meinung nur gelten kann.

Nehmen wir als Beispiel den Satz $a - (b - c) = a - b + c$. Er wird in der Regel so bewiesen: $a - (b - c)$ ist die Zahl, zu der $(b - c)$ addiert werden muß, um $a$ zu geben; also muß $a - (b - c) + (b - c) = a$ sein; die letzte Klammer kann man, wie da und da bewiesen ist, fortlassen; mithin ist $a - (b - c) + b - c = a$; lasse ich nun die erste Klammer fort, so muß $- b + c$ dafür gesetzt werden, damit $- b$ und $+ b$, sowie $+ c$ und $- c$ sich zerstören; dann ist $a - b + c + b - c = a$ und $a - (b - c) = a - b + c$.

Gegen die Strenge der Schlußfolgerung läßt sich nichts einwenden, und doch scheint mir der folgende Weg weitaus vorzuziehen.

a — (b — c) ist auszurechnen; also von b ist erst c, und das Ergebnis nachher von a abzuziehen; wir wollen nun von a erst b abziehen, wobei wir $\overline{a - b}$ erhalten; dabei haben wir aber b anstatt $\overline{b - c}$, also c zuviel abgezogen; das Ergebnis ist demnach um c zu klein geworden und wird also nur richtig werden, wenn wir c zuzählen; so erhalten wir $\overline{a - b + c}$.

Hoffentlich spricht man auch dieser Beweisführung die Strenge nicht ab. Dann aber hat sie erstens den Vorzug, unmittelbar den Nerv bloßzulegen, daß nämlich zu wenig übrig bleibt, wenn man zu viel abzieht; zweitens, daß sie sich weder auf eine frühere Erklärung, noch auf einen früheren Satz stützt, da sie nur das Verständnis des vorliegenden Ausdrucks verlangt. Vergleicht man den ersten Beweis mit dem zweiten, so sieht man, daß dort das + c gewissermaßen geraten und durch Probe als richtig nachgewiesen wird, während im zweiten + c durch die Notwendigkeit des Zuzählens handgreiflich gefordert wird.

Wenn sich die Mausefallen auch nicht überall vermeiden lassen, so doch sicherlich auf der Unterstufe, wie ich nun zu zeigen versuchen will.

Satz 1. a + b = b + a

(• • • • •) (• • •)
(• • •) (• • • • •)
• • • • • • • •

Satz 2. Folgende 3 Fälle sind zu beweisen:

1. a + b + c = a + c + b
2. a + b — c = a — c + b
3. a — b — c = a — c — b

1. (• • • • •) (• • • •) (• • •)
(• • • • •) (• • •) (• • • •)
• • • • • • • • • • • •

2. (• • • • •) (• • • •)
— (• • •)
(• • • • •) (• • • •)
— (• • •)
• • • • • •

3. • • • • • • • • • • • •
— (• • • •) (• • •)
— (• • •) (• • • •)
• • • • •

Ausdrücke von mehr als 3 Gliedern lassen sich beliebig umgestalten, wenn man je 2 benachbarte Glieder so oft als nötig vertauscht.

a — b — c + d + e
a — b + d — c + e
a + d — b — c + e
a + d — b + e — c
a + d + e — b — c

Satz 3. Folgende 4 Fälle sind zu beweisen:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (b - c) = a + b - c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Sie werden einzeln behandelt, in der Art wie der letzte von ihnen auf S. 14 behandelt ist. An ein paar Beispielen wird dann gezeigt, daß es nichts ändert, wenn mehr als 2 Glieder in der Klammer stehen; etwa so:

$a - (b + c - d)$; ich ziehe erst b ab; $\overline{a - b}$, habe zu wenig abgezogen, muß noch c abziehen; $\overline{a - b - c}$; habe jetzt zu viel abgezogen, muß deshalb d wieder zuzählen; $\overline{a - b - c + d}$.

Satz 4. $a + b - b = a$

(• • • • •) (• • • •)
—(• • • •)

• • • • •

Satz 5. $a \cdot b = b \cdot a$

• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

Zähle ich die Punkte zeilenweise, so erhalte ich $5 + 5 + 5 + 5 = 5 \cdot 4$; zähle ich sie spaltenweise, so erhalte ich $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 5$.

Satz 6. Folgende 3 Fälle sind zu beweisen:

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$$
$$a \cdot b : c = a : c \cdot b$$
$$a : b : c = a : c : b$$

Erster Fall.

$a \cdot b \cdot c = (a + a + a + \ldots) + (a + a + a + \ldots) + (a + a + a + \ldots) + \ldots$

Alle Klammern darf ich fortlassen, die a in beliebiger Reihenfolge zuzählen; das erste a aus jeder Klammer giebt $a \cdot c$; das zweite a aus jeder Klammer giebt wieder $a \cdot c$; das dritte ebenso $a \cdot c$ u. s. f.; da die Anzahl der a in jeder Klammer b ist, kommt $a \cdot c$ b mal vor; $a \cdot c + a \cdot c + a \cdot c + \ldots$; mithin $a \cdot c \cdot b$.

Zweiter Fall.

$a \cdot b : c$ heißt, a soll mit b vervielfacht, darnach soll untersucht werden, wie oft sich vom Ergebnis c abziehen läßt.

$$a \cdot b = a + a + a + \ldots$$

Vom ersten a läßt sich c $\overline{a : c}$ mal abziehen, ebenso oft vom zweiten, dritten u. s. f.; von $a \cdot b$ läßt es sich also $\overline{a : c} + \overline{a : c} + \overline{a : c} + \ldots = \overline{a : c} \cdot b$ mal abziehen; also ist $a \cdot b : c = a : c \cdot b$.

Dritter Fall.

$$a : b : c = a : c : b$$

120 teile ich durch 5; ich erhalte 24, das 5 mal so klein ist als 120; die 24 teile ich durch 4; ich erhalte 6, das 4 mal so klein ist als 24. Da 24 5 mal so klein ist als 120 und 6 4 mal so klein

als 24, ist 6 $\overline{5 \cdot 4}$mal so klein als 120; ich würde 6 aber auch erhalten haben, wenn ich 120 $\overline{4 \cdot 5}$ mal so klein gemacht, d. h. wenn ich erst durch 4 und dann durch 5 geteilt hätte. Mithin ist $120 : 5 : 4 = 120 : 4 : 5$. Und da auf die Größe der verwendeten Zahlen für den Beweis nichts ankommt, da vielmehr das Wesentliche des Beweises darin liegt, daß $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$ ist, so hat die Betrachtung allgemeine Gültigkeit, und ist der Satz bewiesen.

Ausdrücke zweiter Stufe von mehr als 3 Beiträgen*) lassen sich in beliebiger Weise umgestalten, wenn man je 2 benachbarte Beiträge so oft als nötig vertauscht.

$$a : b : c \cdot d \cdot e$$
$$a : b \cdot d : c \cdot e$$
$$a : b \cdot d \cdot e : c$$
$$a \cdot d : b \cdot e : c$$
$$a \cdot d \cdot e : b : c$$

Gewöhnlich werden Fall 2 und 3 mit Hülfe von Brüchen bewiesen; wie man sieht, ist das aber nicht nötig. Und ich meine, die Hereinziehung des Bruchbegriffs in Dinge, die mit Brüchen doch nichts zu thun haben, schädigt die Sauberkeit des Lehrganges und sollte deshalb vermieden werden. Ein Umweg wird beim Einschlagen des obigen Weges nicht gemacht; denn die Bruchrechnung kann sich nun ihrerseits auf den bewiesenen Satz stützen.

Satz 7. Folgende 4 Fälle sind zu beweisen:

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$
$$a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$$
$$a : (b \cdot c) = a : b : c$$
$$a : (b : c) = a : b \cdot c$$

Erster Fall.

$a \cdot (b \cdot c)$ heißt, ich soll $b \cdot c$ ausrechnen und a mit dem Ergebnis vervielfachen. Vervielfache ich a mit b, so erhalte ich $\overline{a \cdot b}$; ich soll aber nicht mit b, sondern mit $\overline{b \cdot c}$, d. h. mit einer c mal so großen Zahl vervielfachen; ich habe demnach mit einer c mal zu kleinen Zahl vervielfacht und demgemäß ein c mal zu kleines Ergebnis erhalten; dieses muß ich also c mal so groß machen, d. h. noch mit c vervielfachen; dabei erhalte ich $\overline{a \cdot b \cdot c}$.

Ähnlich die andern Fälle; um die Ausdrucksweise anzugeben, folge noch

Vierter Fall.

$a : (b : c)$ heißt, ich soll $b : c$ ausrechnen und a durch das Ergebnis teilen. Teile ich a durch b, so erhalte ich $\overline{a : b}$; ich soll aber nicht durch b, sondern durch $\overline{b : c}$, d. h. durch eine c mal so kleine Zahl teilen; ich habe demnach durch eine c mal zu große geteilt und demgemäß ein c mal zu kleines Ergebnis erhalten; dieses muß ich also c mal so groß machen, d. h. noch mit c vervielfachen; dabei erhalte ich $\overline{a : b \cdot c}$.

An ein paar Beispielen wird dann gezeigt, daß sich nichts ändert, wenn mehr als 2 Beiträge in der Klammer stehen; etwa so: $a : (b \cdot c : d)$; ich teile durch b; $\overline{a : b}$; habe durch zu wenig geteilt, muß noch durch c teilen; $\overline{a : b : c}$; habe jetzt durch zu viel geteilt, muß mit d vervielfachen; $\overline{a : b : c \cdot d}$.

*) Ein Wort für diesen Begriff, der dem „Glied" der ersten Stufe entspricht, fehlt bisher; doch scheint es mir sehr wünschenswert und verwendbar. Findet das obige vielleicht Beifall?

Die vollkommene Ebenmäßigkeit der Beweise für Satz 3 und Satz 7 entspricht der nahen Verwandtschaft der Sätze, ist also sachgemäß und bildet zudem einen vortrefflichen Anhalt für das Gedächtnis.

Satz 8. $a \cdot b : b = a$

Durch die Vervielfachung mit b entsteht ein Ergebnis das b mal so groß ist als die Hauptzahl; bei der Teilung durch b wird dieses Ergebnis wieder b mal so klein gemacht, mithin auf die erste Hauptzahl zurückgeführt.

Satz 9. Folgende 4 Fälle sind zu beweisen:

$$(a + b) \cdot (b + d) = ac + bc + ad + bd$$
$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd$$
$$(a - b) \cdot (c + d) = ac - bc + ad - bd$$
$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd$$

Erster Fall.

$$(a + b) \cdot (c + d) \equiv (a + b) + (a + b) + (a + b) + \cdots$$

bis $\overline{c + d}$ Klammern vorhanden sind; ich lasse die Klammern weg:

$$a + b + a + b + a + b + \cdots$$

ich ändere die Reihenfolge der Glieder:

$$a + a + a + \cdots + b + b + b + \cdots$$

ich fasse die ersten c Glieder zusammen, dann die nächsten d, c, d Glieder; dadurch erhalte ich

$$a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Ähnlich die andern Fälle; um die Ausdrucksweise anzugeben, folge noch

Vierter Fall.

$$(a - b) \cdot (c - d) \equiv (a - b) + (a - b) + (a - b) + \cdots$$

bis $\overline{c - d}$ Klammern vorhanden sind; ich lasse die Klammern weg:

$$a - b + a - b + a - b + - \cdots$$

ich ändere die Reihenfolge der Glieder:

$$a + a + a + \cdots - b - b - b - \cdots$$

ich setze die a und die b in Klammern

$$(a + a + a + \cdots) - (b + b + b + \cdots)$$

wo jede Klammer $\overline{c - d}$ Glieder einschließt. Stünden in der ersten Klammer c Glieder, so könnte ich sie durch $a \cdot c$ ersetzen; es sind aber nur $\overline{c - d}$ Glieder, also ist $a \cdot c$ um d Glieder zu groß; diese muß ich demnach abziehen, mithin erhalte ich $a \cdot c - a \cdot d$. Stünden in der zweiten Klammer c Glieder, so könnte ich sie durch $b \cdot c$ ersetzen, müßte $b \cdot c$ von $a \cdot c - a \cdot d$ abziehen und erhielte $a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c$; es sind aber nur $\overline{c - d}$ Glieder; mithin habe ich d Glieder zu viel abgezogen; diese muß ich demnach wieder zuzählen, also erhalte ich $a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$.

Bei dieser Behandlung des Beweises tritt wiederum die Ursache des Vorzeichens von $b \cdot d$, nämlich die Notwendigkeit, das zu viel Abziehen durch Zuzählen zu berichtigen, sehr deutlich hervor.

Als Einleitung und zur Vorbereitung wird man die Sätze $(a \pm b) \cdot m = a \cdot m \pm b \cdot m$ und $m \cdot (a \pm b) = m \cdot a \pm m \cdot b$ in ähnlicher Art bewiesen haben; und zwar am besten beide unmittelbar, nicht so, daß man den Satz $a \cdot b = b \cdot a$ benutzt, wie meist geschieht. Denn daß der letztere richtig ist, wurde nur für reine Zahlen bewiesen; er ist mithin genau genommen nicht ohne weiteres auf Fälle anwendbar, wo ein Faktor, wie hier $a - b$, negativ sein kann.

Satz 10.

Erster Fall. $(a + b) : m = a : m + b : m$.

Es soll untersucht werden, wie oft m von $\overline{a + b}$ abgezogen werden kann; $\overline{a : m}$ mal von a; dann ist es aber von einer um b zu kleinen Zahl abgezogen worden; es muß also auch von b abgezogen werden; dies ist $\overline{b : m}$ mal möglich; das erste Ergebnis ist demnach um $\overline{b : m}$ zu klein ausgefallen, das richtige Ergebnis heißt also $a : m + b : m$.

Zweiter Fall. $(a - b) : m = a : m - b : m$.

Es soll untersucht werden, wie oft m von $\overline{a - b}$ abgezogen werden kann; $\overline{a : m}$ mal von a; dann ist es aber von einer um b zu großen Zahl abgezogen worden; von b läßt es sich $\overline{b : m}$ mal abziehen; um so viel ist die erste Zahl zu groß ausgefallen; das richtige Ergebnis heißt also $a : m - b : m$.

An ein paar Beispielen wird endlich gezeigt, daß die Betrachtung gerade so fortgeführt werden kann, wenn mehr als 2 Glieder in der Klammer stehen.

## Sprache.

Die in der Sache liegenden Schwierigkeiten können durch die Ausdrucksweise vermehrt werden; das sollte man aber nach Kräften vermeiden. Die Sprache muß deshalb in jeder Richtung möglichst einfach und verständlich sein, selbst auf die Gefahr, daß sie dann nicht mit der in der gelehrten Mathematik gebrauchten übereinstimmte. Die Schule darf auf die Gelehrten keine Rücksicht nehmen; es verschlägt durchaus nichts, wenn die wenigen Schüler, die später Mathematik weiter treiben, einiges umlernen oder neulernen müssen. So gefällt mir das Wort „Größe" in der Schule gar nicht; es ist zu abstrakt. Die Größen sind, soweit sie in den Rechnungen vorkommen, nichts Anderes als „Zahlen" oder aus Zahlen gebildete „Ausdrücke". Ebensowenig gefällt mir aus anderem Grunde der „Koëffizient"; ein häßliches Wort, und besonders für Schüler, die kein Latein lernen, unverständlich und schwer zu behalten. Warum nicht „Anzahl"? In $2\,a\,b\,x$ ist 2 doch die Anzahl der $a\,b\,x$, nicht mehr und nicht weniger. Allerdings klingt es nicht so gelehrt, wie der mit einem gewissen Duft des Geheimnisvollen umgebene Koëffizient, aber dafür giebt es einen guten Anhalt für das Verständnis, und das ist wohl mehr wert. Aus diesem Grunde sind überhaupt die fremden Fachwörter sämtlich Hindernisse für das Verständnis. Nach meiner Ansicht sollte man das nicht unterschätzen. Mag auch ein solches Hindernis an sich nicht groß sein; in vielen Fällen dürfte es bei einem schwächeren Schüler die sachlichen Hindernisse des Verstehens gerade genug vermehren, daß ihm nun das Verständnis unmöglich wird. Den Lehrern, denen die fraglichen Wörter tausendmal vorgekommen sind, fehlt dafür leicht der Blick. Den Schülern vergehen Jahre, bis ihnen solche Wörter so vertraut werden wie einheimische; „Minuend" und „Subtrahend" werden bis in Prima verwechselt; „Vollzahl" und „Abzug" würden sehr bald festes Eigentum sein. Und wozu eigentlich die Mühe des Einübens? Als Teile des Sprachschatzes haben die Fachwörter gar keinen Wert; sie sind nur für den Fachmann notwendig.

Bei der Würdigung der sich bietenden deutschen Ersatzwörter sei man nicht zu peinlich; es ist nicht nötig, daß ein solches das fremde genau deckt. So wird z. B. für „dividieren" ganz wohl „teilen" gesagt werden können; die Verwechselung mit dem Begriff „in gleiche Teile teilen" ist ausgeschlossen, wenn man „a durch b teilen" sagt; denn jenes „einteilen" wird niemals mit „durch" zusammengesetzt.

Mindestens aber lasse man kein fremdes Fachwort brauchen, ohne dem Schüler die Übersetzung fest einzuprägen. Jeder Schüler muß wissen, daß Centimeter Hundertstelmeter, Dividuus Vielfaches, negativ abzuziehend, Multiplizieren vervielfachen bedeutet.

Auch abgesehen von den Fachwörtern bietet die Sprache der Lehrbücher oft Veranlassung zur Unzufriedenheit. Wie viele eingekleidete Aufgaben werden hauptsächlich wegen der Ausdrucksweise nicht verstanden! Wenn man auf die Sprache so achtete, wie wünschenswert ist, wäre es schwerlich möglich, daß in der 93. Auflage einer Sammlung sich folgender Satz fände: „Eine Frau wollte aus einer Quantität Flachs ein Stückchen Leinwand spinnen lassen.“ Gesponnen wird Garn, Leinwand wird gewoben; ferner ist ein „Stückchen Leinwand“ etwas anderes als hier gemeint ist; es muß ein „Stück“ heißen. In gutem Deutsch würde man sagen: Eine Frau wollte einen Vorrat an Flachs (zu Garn) spinnen lassen.

## Abgekürztes Zifferrechnen.

Obwohl dies nicht in den Rahmen der Aufgabe gehört, die ich mir gesteckt habe, ist es vielleicht einem oder dem andern Fachgenossen erwünscht, eine bewährte schulmäßige Form des abgekürzten Rechnens zu vergleichen, zumal meines Wissens der Gegenstand sich nirgends erschöpfend behandelt findet. Außerdem gehört er wenigstens in dieselbe Klasse, auf welche sich die bisherigen Ausführungen beziehen; denn in der Quarta wird nach den neuen Lehrplänen das Rechnen mit Decimalbrüchen erst gelehrt, und man wird die Schüler einige Sicherheit in der Handhabung der ausgeführten Rechnungen erwerben lassen müssen, ehe man die Abkürzungen lehren kann, ohne zu verwirren.

Abgekürzte Rechnungen werden in zwei Fällen angewendet: Erstens, wenn man im Ergebnis nicht so viele Stellen haben *will*, als man ausrechnen könnte; zweitens, wenn *abgebrochene* Rechenzahlen auftreten, d. h. solche, die nur näherungsweise richtig sind, und man also nur eine beschränkte Zahl von Stellen berechnen *kann*. Der erste Fall tritt immer ein, wenn man mit sog. unendlichen Decimalbrüchen — vielleicht besser *ungeschlossene* genannt — rechnen muß. Der zweite Fall tritt sehr häufig ein, besonders fast überall, wo mit Maßzahlen gerechnet wird; man muß schon früh darauf aufmerksam machen, daß 3 m 25 cm im allgemeinen nur heißt 3 m 25 cm $\left\{\begin{matrix} +\ 4\text{ mm} \\ -\ 5\text{ mm} \end{matrix}\right.$, nicht aber 3 m 25 cm 0 mm, und daß es also verkehrt ist, wenn man so rechnet, als wäre die Maßzahl haarscharf richtig, — was freilich sehr oft geschieht.

Man thut wohl, durch ein besonderes Zeichen darauf hinzuweisen, daß und an welcher Stelle eine Zahl als abgebrochen anzusehen ist; etwa durch einen übergesetzten Strich. Die obengenannte Maßzahl würde man dann $3{,}2\overline{5}$ schreiben; $8\overline{7}000$ würde bedeuten $87000 \left\{\begin{matrix} +\ 499 \\ -\ 500 \end{matrix}\right.$; $870\overline{0}\overline{0} \equiv 87000 \left\{\begin{matrix} +\ 4 \\ -\ 4 \end{matrix}\right.$; $7{,}2\overline{0} \equiv 7{,}20 \equiv 7{,}2 \left\{\begin{matrix} +\ 0{,}004 \\ -\ 0{,}005 \end{matrix}\right.$. Ich wundere mich, daß ein solches Zeichen nicht schon eingeführt ist; seine Zweckmäßigkeit liegt auf der Hand; oder ist es geschehen?

Bei jedem Abbrechen gilt die Regel, daß die letzte Stelle um 1 erhöht wird, wenn in der folgenden, der ersten, die weggelassen wurde, eine 5, 6, 7, 8 oder 9 steht, weil man bei dieser Maßnahme den geringeren Fehler macht.

Ein Ergebnis, das durch abgekürzte Rechnung gefunden worden ist, darf nicht als genau betrachtet werden; seine letzte Stelle muß aber um weniger als ½ m falsch sein. m ist bei der Addition und Subtraktion die Anzahl der verwendeten Rechenzahlen; bei der Multiplikation die Anzahl der Teilprodukte; bei der Division die Anzahl der verwendeten Stellen des Divisors, geteilt durch die erste derselben. In der Regel wird man deshalb, wenn man kann, eine Stelle mehr ausrechnen, als man richtig haben will.

### 1. Addition und Subtraktion.

Darüber ist nur zu sagen, daß die erreichbare Genauigkeit durch die abgebrochene Zahl bedingt wird, welche am wenigsten genau bekannt ist. $7{,}385\overline{2} + 0{,}33 \ldots - 2{,}5\overline{6}$ läßt sich natürlich nur auf Hundertstel ausrechnen.

### 2. Multiplikation.

a. Ergebnis bis zu einer bestimmten Stelle verlangt.

Haben die Rechenzahlen ungleich viel Stellen (Nullen am Anfang oder am Ende werden nicht mitgezählt), so wird die mit der größeren Stellenzahl zweckmäßig zur Hauptzahl gemacht.

Beispiel: $723{,}4592 \cdot 0{,}0328763$ bis zum Stellenzeiger $-3$.

$$
\begin{array}{rr}
723{,}4592 & -2 \\
0{,}0\dot{3}\dot{2}\dot{8}\dot{7}\dot{6}\dot{3} & -2 \\
\hline
217038 & -4 \\
14469 & \\
5788 & \\
506 & \\
43 & \\
2 & \\
\hline
23{,}7846 &
\end{array}
$$

Schüler spricht: „Die erste Stelle der Nebenzahl hat den Stellenzeiger $-2$, das Ergebnis muß den Stellenzeiger $-4$ haben, also muß die erste Rechenstelle der Hauptzahl den Stellenzeiger $-2$ bekommen, denn $-2$ und $-2$ ist $-4$; 9, 2 gestrichen; 15, 18; 12, 13; 9, 10; 6, 7; 21; 5 gestrichen; 8, 9; 6; 4; 14; 4 gestrichen; 24, 28; 16, 18; 56, 57; 3 gestrichen; 14, 16; 49, 50; 2 gestrichen; 42, 43; 7 gestrichen; 0, 2; die 6 muß um weniger als $^1/_2$ 6, d. i. 3 falsch sein." Zweckmäßig bekommt jede Stelle der Nebenzahl dann, wenn man mit ihr rechnet, einen Punkt, wenigstens bei größeren Rechnungen.

b. Ergebnis so genau als möglich verlangt.

Erster Fall. Beide Zahlen sind abgebrochen.

Man verwendet von beiden Zahlen gleich viele Stellen.

$$
\begin{array}{rr}
928{,}5\overline{3} & +1 \\
0{,}7\overline{3} & -1 \\
\hline
650 & 0 \\
28 & \\
\hline
678 &
\end{array}
$$

Zweiter Fall. Eine Zahl ist abgebrochen, die andere vollständig oder ungeschlossen. Man nimmt die abgebrochene zur Hauptzahl.

```
     34,5̄      —1
     8,2759     0
  ─────────────────
   2760        —1
     69
     24
      2
  ──────
   285,5
```

### 3. Division.

a. Ergebnis bis zu einer bestimmten Stelle verlangt.

Beispiel: 745,2929 · · · : 0,826533 · · · bis zum Stellenzeiger 0.

```
+1             │  —1
745,2929 · · · │  0,826533 · · ·
74388          ├──────────
─────          │  901,7
  141          │ +2
   83          │
  ───          │
   58          │
   58          │
  ───          │
```

Schüler spricht: „75 durch 8 ist 9; 75 hat den Stellenzeiger + 1, 8 hat den Stellenzeiger — 1; + 1 ist um 2 größer als — 1, also hat die 9 den Stellenzeiger plus*) 2; es sind die Stellen + 2, + 1, 0, — 1, d. h. 4 Stellen auszurechnen, die Nebenzahl muß mithin 4 Stellen haben; 3, 3 gestrichen; 45, 48; 54, 58; 18, 23; 72, 74; 8 und 1 ist 9; 8 und 4 ist 12; 4 und 1 ist 5; 5 gestrichen; 1 durch 8 ist 0; 6 gestrichen; 14 durch 8 ist 1; 3; 8; 3 und 8 ist 11; 9 und 5 ist 14; 2 gestrichen; 58 durch 8 ist 7; 56, 58; die 7 muß um weniger als $\frac{1}{2} \cdot 4 : 8$, d. h. als $\frac{1}{4}$ falsch sein; Ergebnis 902."

Das östreichische Dividieren, d. h. ohne Hinschreiben der Abzüge, halte ich nicht für empfehlenswert; es weist dem Kopfrechnen mehr zu, als für die Sicherheit ersprießlich ist, verhindert mehrfache Benutzung desselben Abzugs, erschwert endlich das Nachrechnen. Zu meinem Urteil bin ich in vieljähriger Anwendung des östreichischen Verfahrens gelangt. Jetzt habe ich es überall, auch beim Wurzelziehen, aufgegeben.

b. Ergebnis so genau als möglich verlangt.

Erster Fall. Beide Zahlen sind abgebrochen.

Man verwendet von beiden Zahlen die gleiche, aber möglichst große Zahl von Stellen, u. U. von der Hauptzahl eine mehr als von der Nebenzahl (wenn nämlich die ersten Stellen der Hauptzahl kleiner sind, als die entsprechenden der Nebenzahl.)

*) Wie größer und plus, so entspricht sich kleiner und minus.

| | |
|---|---|
| +1 | 0 |
| 723,48$\overline{2}$ | 8,9$\overline{5}$ |
| 7160 | 80,8 |
| 75 | +1 |
| 72 | |
| 3 | |

Zweiter Fall. Eine Zahl ist abgebrochen, die andere vollständig oder ungeschlossen. Man verwendet sämtliche Stellen der abgebrochenen Zahl.

| | |
|---|---|
| +2 | +1 |
| 1273,5$\overline{6}$ | 87,5 |
| 875 | 14,555 |
| 3985 | +1 |
| 3500 | |
| 4856 | |
| 4375 | |
| 481 | |
| 438 | |
| 43 | |
| 44 | |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 34,2 | 8,65$\overline{7}$ |
| | 3,939 |
| 25971 | |
| 8229 | |
| 7891 | |
| 338 | |
| 260 | |
| 78 | |
| 79 | |