Die parallelflächige Pemptoedrie des fünfglidrigen Granatoeders.

§. 51.

Das fünfglidrige Granatoeder (Triakontaeder), das man in Fig. 55 abgebildet findet, hat

1. zweierlei Ecken: fünfglidrige und dreiglidrige. Der fünfglidrigen sind 12, sie entsprechen den Flächen des fünfglidrigen Haloeders; der dreiglidrigen 20, sie entsprechen den Flächen des fünfglidrigen Magnetoeders.
2. Es hat einerlei Kanten, deren Neigungswinkel gleich dem Winkel des regelmäßigen Zehnecks ist; der Zahl nach $12 . 5 = 20 . 3 = 60$. Sie entsprechen den Flächen des mittleren fünfglidrigen Leuzitoeders.
3. Die Flächen haben die Gestalt eines Rhombus, dessen Diagonalen sich wie $2 : \sqrt{5} + 1$ verhalten: man zeichne (Fig. 56) zwei sich in **a** rechtwinklich schneidende Linien, nehme auf der einen eine beliebige Strecke **ac**, mache **ab** $= 2$ **ac** und sodann **cd** $=$ **cb**; **bde** ist der halbe Rhombus, **ab** die halbe kürzere, **ad** die halbe längere Diagonale. Der Zahl nach sind es 30 Flächen, in der Richtung der kürzeren Diagonale den Kanten des Haloeders, in der Richtung der längeren den Kanten des Magnetoeders entsprechend. Je 10 Flächen gehen einer fünfglidrigen Axe parallel, woraus das oben angegebene Maß für den Neigungswinkel der Kanten folgt; je 6 Flächen einer dreiglidrigen Axe, woraus folgt, daß zwei Flächen an einer fünfglidrigen Ecke, die in keiner Kante zusammenkommen, einen Keil mit einander bilden, dessen Neigungswinkel gleich dem Winkel des regelmäßigen Sechseckes ist.

Man construiere (Fig. 56) in der Fläche des Granatoeders das eingeschriebene Quadrat; dadurch werden die Seiten des Rhombus so geteilt, daß die Stücke sich wie die Diagonalen verhalten, also wie $2 : \sqrt{5} + 1$. Gibt man auf allen Kanten des Granatoeders diese Punkte an und stumpft sowohl die fünfglidrigen als die dreiglidrigen Ecken so weit ab, daß die Schnitte durch diese Punkte hindurch gehen, so erhält man den Kern einer Durchdringung von Granatoeder, Haloeder und Magnetoeder, welcher von dreierlei regelmäßigen Figuren, nämlich von 30 Vierecken, 12 Fünfecken und 20 Dreiecken umgeben ist.

Durch eine wohlberechnete Abstumpfung der zweierlei Ecken und zugleich der Kanten des fünfglidrigen Granatoeders erhält man einen Körper, dessen Oberfläche von 60 Quadraten, 30 Rhomben, 20 gleichseitigen Dreiecken und 12 regelmäßigen Fünfecken gebildet wird und welcher den Kern einer Durchdringung von einem mittleren Leuzitflach, einem Granatoeder, einem Magnetoeder und einem Haloeder bildet.

§. 52.

In nachstehender Tafel sind die Verhältnisse der Axen des fünfglidrigen Granatoeders zusammengestellt; der Gang, den die Berechnung derselben nimmt, habe ich gemeint könne von der vorliegenden

Abhandlung ausgeschloßen bleiben. Mit **a** sind die fünfglidrigen, mit **b** die dreiglidrigen, mit **c** die $(2+2)$ glidrigen Axen (die Flächenaxen) und mit **d** die $(2+1)$ glidrigen (die Kantenaxen) bezeichnet.

a	b	c	d
1	$\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$
$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$	$\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}}$
$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\sqrt{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$
$\sqrt{\frac{5}{4}}$	$\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{8}}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	1

§. 53.

Es ist bekannt, daß das vierglidrige Pyritoeder $\boxed{\underset{12\,.\,2}{a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a}}$ sich beim Schwefelkies von Rio auf Elba nicht selten mit den Flächen des Haloeders (Würfels) in der Weise verbunden zeigt, daß diese durch seine $(2+1+1)$ kantigen Ecken hindurchgehen. Die Oberfläche dieser Krystalle besteht aus 30 Flächen, von denen 6, nämlich die Flächen des Haloeders, Rhomben sind, die 24 andern aber Vierecke, an denen weder das eine noch das andere Paar Kanten parallel sind, die aber ein Ungeübter bei oberflächlicher Beobachtung ebenfalls für Rhomben halten könnte. Von diesem 30 flächigen Körper mit zweierlei Flächen muß man das Triakontaeder mit einerlei Flächen, unser fünfglidriges Granatflach, sorgfältig unterscheiden.

Es ist sehr anziehend, die umgekehrte Betrachtung zu machen und sich das 5 glidrige Granatflach als ein 4 glidriges Pyritoeder mit abgestumpften $(2+2)$ kantigen Ecken, d. h. als Verbindung eines 4 glidrigen Pyritoeders mit einem 4 glidrigen Haloeder (Würfel) vorzustellen. Um zu finden, welches Flächenzeichen im 4 glidrigen Systeme diesem Pyritoeder oder demjenigen Diamantflach, aus dessen Hemiedrie es hervorgeht, zukommen werde, vergleiche man das Schema Fig. 52, wo **h** den Ort der horizontalen Würfelfläche, $\mathbf{m}^1$ und $\mathbf{m}^2$ die Orte zweier Flächen des 4 glidrigen und zugleich des 5 glidrigen Magnetoeders, **m** einen Flächenort des 5 glidrigen Magnetoeders, $\mathbf{h}^1$ und $\mathbf{h}^2$ Flächenorte des 5 glidrigen Haloeders bezeichnen. Da die Flächen des 5 glidrigen Granatoeders sowohl in die Kantenzone des 5 glidrigen Haloeders als des 5 glidrigen Magnetoeders fallen, so liegt der Ort einer Fläche sowohl in der Strecke zwischen $\mathbf{m}^1$ und **m**, als in der zwischen $\mathbf{h}^1$ und $\mathbf{h}^2$, also in **g**. Im 4 glidrigen System kommt der 5 glidrigen Haloederfläche in $\mathbf{h}^1$ das Zeichen $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2} a : \infty a}$, der Haloederfläche in $\mathbf{h}^2$ das Zeichen $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}-1}{2} a : \infty a}$, der Magnetoederfläche in **m** das Zeichen $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} a : \infty a}$ oder $\boxed{a : \frac{3+\sqrt{5}}{2} a : \infty a}$ zu.

Es verhält sich also

$$\mathfrak{h}\mathfrak{h}^1 : \mathfrak{h}\mathfrak{g}^3 = 2 : \sqrt{5}+1 = \sqrt{5}-1 : 2$$
$$\mathfrak{h}\mathfrak{h}^2 : \mathfrak{h}\mathfrak{g}^1 = \sqrt{5}+1 : 2 = 2 : \sqrt{5}-1$$
$$\mathfrak{h}\mathfrak{m} : \mathfrak{h}\mathfrak{g}^1 = \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1 = 2 : 3+\sqrt{5} = 3-\sqrt{5} : 2.$$

Daraus folgt, daß sich verhält

$$\mathfrak{h}\mathfrak{h}^2 \,.\, \mathfrak{m}^1\mathfrak{m}^2 = \sqrt{5}+1 : 4$$
$$\mathfrak{h}\mathfrak{m} : \mathfrak{m}^1\mathfrak{m}^2 = 3-\sqrt{5} : 4, \text{ also}$$
$$\mathfrak{m}\mathfrak{h}^2 : \mathfrak{m}^1\mathfrak{m}^2 = (\sqrt{5}+1) - (3-\sqrt{5}) : 4 = \sqrt{5}-1 : 2, \text{ also auch}$$
$$\mathfrak{g}\mathfrak{m} : \mathfrak{g}\mathfrak{m}^1 = \sqrt{5}-1 : 2, \text{ und}$$
$$\mathfrak{m}\mathfrak{g} : \mathfrak{m}\mathfrak{m}^1 = \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1 = 3-\sqrt{5} : 2.$$

Nun ziehe man $\mathfrak{g}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{b}$ parallel den Grundrichtungen des Schemas, dann ist

$$\mathfrak{h}\mathfrak{b} : \mathfrak{h}\mathfrak{g}^3 = \mathfrak{m}\mathfrak{g} : \mathfrak{m}\mathfrak{m}^1$$
$$= \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1, \text{ also}$$
$$\mathfrak{h}\mathfrak{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\, \mathfrak{s}\mathfrak{g}^3.$$

Ferner, da $\mathfrak{h}\mathfrak{h}^1 : \mathfrak{h}\mathfrak{g}^3 = \sqrt{5}-1 : 2$ und

$$\mathfrak{h}\mathfrak{b} : \mathfrak{h}\mathfrak{g}^3 = 3-\sqrt{5} : 2, \text{ so ist}$$
$$\mathfrak{b}\mathfrak{h}^1 : \mathfrak{h}^1\mathfrak{g}^3 = (\mathfrak{h}\mathfrak{h}^1 - \mathfrak{h}\mathfrak{b}) : (\mathfrak{h}\mathfrak{g}^3 - \mathfrak{h}\mathfrak{h}^1) = (\sqrt{5}-1) - (3-\sqrt{5}) : 2 - (\sqrt{5}-1)$$
$$= 2 : \sqrt{5}+1 = \mathfrak{b}\mathfrak{g} : \mathfrak{g}^3\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{h}\mathfrak{a} : \mathfrak{h}\mathfrak{g}^1, \text{ also}$$
$$\mathfrak{h}\mathfrak{a} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\, \mathfrak{h}\mathfrak{g}^1.$$

Das krystallographische Zeichen für die Fläche $\mathfrak{g}$ des 5 glidrigen Granatoeders ist also

$\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a : \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\, a}$ oder $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a : \frac{3+\sqrt{5}}{2}\, a}$, wo für $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ auch $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ und für $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ auch $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ stehen darf.

§. 54.

Das eben entwickelte krystallographische Zeichen des 4 glidrigen Adamantoeders, aus dessen Pyritoeder das 5 glidrige Granatoeder gebildet werden kann, verräth uns eine Eigenschaft desselben, vermöge deren es in eine sehr nahe Beziehung zu den Körpern des vierglidrigen Systems tritt. Da nämlich die Werthe für $\mathfrak{h}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{h}\mathfrak{b}$ in dem Schema $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$ und $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$, zusammen $= 1$ sind, so liegt $\mathfrak{g}$ in der Zone $\mathfrak{g}^1\mathfrak{g}^3$, d. h. in der Kantenzone des 4 glidrigen Granatflachs oder der Diagonalzone des mittleren Leuzitflachs, und unser Adamantoeder gehört zu derjenigen Reihe der Adamantoeder, die ich die mittlere nenne, die nämlich zu Gränzkörpern einerseits das Granatflach und andererseits das Leuzitflach $\boxed{a : \frac{1}{2}\, a : a}$ hat. Zu dieser Reihe gehört aber auch das Adamantoeder $\boxed{a : \frac{3}{2}\, a : 3\,a}$, dessen Flächen an den Granatkrystallen von Orawitza, Philippstadt, Auerbach, Arendal, u. a. O. die Kanten des Granatoeders zuschärfen. Außerdem liegen die Flächen beider Körper einander sehr nahe; denn lösen wir die Dimensionswerthe des Flächenzeichens $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, a : \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\, a}$ in Decimalbrüche auf, so erhält dasselbe die Gestalt $\boxed{a : \frac{3{,}236}{2}\, a : \frac{3{,}236}{1{,}236}\, a}$, also sehr nahe der Form

$\boxed{a : \frac{3}{2} a : 3 a}$, und tragen wir den Ort der Fläche $\mathfrak{f} = \boxed{a : \frac{3}{2} a : 3 a}$ und das Schema Fig. 52 ein, so sehen wir an der Lage von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$, wie gering der Unterschied beider Körper von einander ist. So nahe liegen sich also auch die Pyritoeder aus beiden, und mag es also immerhin eine oberflächliche Deutung gewesen sein, jene Schwefelkieskrystalle von Elba, welche eine Verbindung des Pyritoeders $\boxed{a : \frac{3}{2} a : a}$ (12 . 2) mit dem Haloeder darstellen, für das Triakontaeder, unser 5 glidriges Granatflach, zu halten, in tieferer Auffaßung könnten wir geneigt sein, zu jener Deutung zurückzukehren und zu denken, der Schwefelkies sei in seinem Streben, das Triakontaeder zu erreichen, bis an die Gränze des Möglichen vorgeschritten, und habe nach dem Naturgesetz der alten Welt, das den Substanzen für die Dimensionsverhältnisse ihrer Hauptgestalten die kleinen Zahlen der musikalischen Spannungsverhältnisse vorschreibt, weiter nicht gehen können. Solchen Gedanken darf man auf dem Gebiete, das ich bearbeite, für jeden gegebenen Fall ohne Gefahr nachgehen, aber hüten muß man sich, ihnen eine allgemeine Geltung zu geben und etwa zu sagen, daß die gegenwärtige Natur des Mineralreichs sich überhaupt bestrebe, in den Hauptgestalten der Krystalle, so weit es die kleinen Zahlen der harmonischen Schwingungsverhältnisse zulaßen, den Gestalten des (3 + 5) glidrigen Systems verborgenermaßen möglichst nahe zu kommen. Die Annäherung geschieht nicht immer auf demselben Wege; denn wenn das 5 glidrige Haloeder das krystallographische Flächenzeichen $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2} a : \infty a}$ hat, also fast $= \boxed{a : \frac{3{,}226}{2} a : \infty a}$, so ist es doch sehr bemerkenswerth, daß die Natur das Fluoroeder $\boxed{a : \frac{3}{2} a : \infty a}$ und dessen Hemiedrie nur selten und dann in sehr untergeordneter Weise andeutet, eine Fläche nach dem noch näher liegenden Werthe $\boxed{a : \frac{8}{5} a : \infty a}$ aber gar nicht kennt. Statt dessen bildet sie als Hauptgestalt von Krystallen nur das Kobaltoeder $\boxed{a : 2a : \infty a}$; aber die Verwandtschaft zwischen diesem und dem 5 glidrigen Haloeder liegt auf einem andern Wege und besteht darin, daß das Dimensionsverhältnis 2 : 1, welches sich als Tangente des halben Neigungswinkels seiner 6 Hauptkanten darstellt, bei dem 5 glidrigen Haloeder die Tangente des ganzen Neigungswinkels seiner Kanten, des Winkels zwischen zwei 5 glidrigen Axen ist.

§. 55.

Jedes Pyritoeder hat dreierlei Kanten: 6 Paar längere ($\mathfrak{l}$), an den (2 + 2) kantigen Ecken, 6 Paar kürzere ($\mathfrak{k}$), an denselben Ecken, und 8 . 3 mittlere ($\mathfrak{m}$), an den 3 glidrigen Ecken. An dem Pyritoeder $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2} a : \frac{\sqrt{5}+3}{2} a}$ haben die Kanten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{l}$ den gleichen Neigungswinkel, und zwar ist derselbe gleich dem Umfangswinkel des regelmäßigen Zehnecks; der Neigungswinkel der kürzeren Kanten ist gleich dem Umfangswinkel des regelmäßigen Sechsecks, beides nach § 51, 3.

Weitere Eigenschaften unseres Pyritoeders will ich nicht erörtern, sondern nur noch auf die Construction der betreffenden Flächen eingehen.

1. Die Fläche des 4 glidrigen Diamantflachs $\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2} a : \frac{\sqrt{5}+3}{a}}$ wird (Fig. 54) in fol-

gender Weise gezeichnet: Teile eine beliebige Strecke **ab** in drei gleiche Teile, errichte in dem einen Teilungspunkt **d** ein Loth und schneid auf demselben eine Strecke **dc** ab, so daß

$$dc : da = (6 - 2\sqrt{5}) : 1.$$

An der Fläche **abc** ist alsdann **ab** die längere, **bc** die mittlere, **ca** die kürzere Kante des Diamantflachs.

2. Die Fläche unsers Pyritoeders zeichne also: Lege die Fläche des 5 glidrigen Granatoeders zu Grunde, **bdef** Fig. 56, **f** in der Verlängerung von **da** gedacht, so daß **af** = **ad**; mache **bg** : **gd** $= 2 : \sqrt{5} + 1 = 3 - \sqrt{5} : 2$, zieh von **e** durch **g** und verlängere **fb**, beide Linien schneiden sich in **h**, welcher Punkt sich auch findet, wenn **gh** : **ge** ebenfalls $= 2 : \sqrt{5} + 1$ gemacht wird.

3. Außer dem Pyritoeder, dessen Zeichen $\boxed{a : ma : na}_{6\,(2.2)}$ oder $\boxed{a : ma : na}_{12.2}$ ist, gibt es bekanntlich noch zwei andere Hemiedrien des 4 glidrigen Diamantflachs, welche am einfachsten durch die Zeichen $\boxed{a : ma : na}_{4\,(3.2)}$ und $\boxed{a : ma : na}_{6.4}$ unter sich und von jener unterschieden werden können.

Die letztere ist als Krystallform bis jetzt nicht beobachtet, weder einfach noch in Combinationen; modelliert lernte ich den Körper Ostern 1822 bei Prof. Weiß in Berlin kennen, beschrieben findet er sich zuerst in dem „Grundriß der Mineralogie" von Friedrich Mohs, Dresden 1822. I. Seite 77, unter dem Namen „Pentagon-Ikositetraeder", und abgebildet, der links wie der rechts gedrehte, in Fig. 33 und 34 der zu diesem Teil gehörigen Tafeln. W. Haidinger nennt diese Gestalten Giroide und erwähnt ihrer in seinem „Handbuch der Mineralogie", Wien 1845. Seite 94 und 108.

Die bei Fr. Mohs gegebenen bloßen Winkelbestimmungen reichen zur Construction der Fläche, um den Körper aus Pappendeckel modellieren zu können, nicht hin, ganz abgesehen davon, daß Winkelbestimmungen nach Gradbogen, statt Eigenschaften eines geometrischen Gebildes aufzudecken, eher dazu dienen, dieselben zu verhüllen. Die Fläche unsers Giroeders wird sehr einfach (Fig. 58) in folgender Weise gezeichnet: Lege die Fläche **abc** des Diamantflachs zu Grunde, zieh die Normale **cd**, mache **bd** : **be** $= 2 : 3\,(3 - \sqrt{5})$ und zieh **ce**; zieh **ah** ∥ **cb**, **af** ∥ **ce**, **fcg** ∥ **ab**, mache **cg** = **cf** und zieh **gh** ∥ **ce** (**fa**), dann wird von selber **bh** = **bg** und **ah** = **af**.

Andere Eigenschaften der Giroederfläche $\boxed{a : \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\, a : \dfrac{\sqrt{5}+3}{2}\, a}_{6.4}$, die mit den zur Zeichnung der Fläche benutzten im nahen Zusammenhang stehen, sind folgende:

a) $gi : ih = \sqrt{5} + 1 : 2 = 2 : \sqrt{5} - 1$,

b) $bi : ia = \sqrt{5} : 2$,

c) tang. $\tfrac{1}{2}\, gbh = \dfrac{1}{\sqrt{5} - 1}$, und daraus

d) tang. $gbh = \dfrac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5}}$,

e) tang. $bce = 2$,

f) tang. $fah = -2$, und daraus

g) tang. $\tfrac{1}{2}\, fah = \dfrac{2}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Es möchte eine angemeßene Aufgabe für manche junge Leser meiner Abhandlung sein, sich diese Eigenschaften des Giroeders aus dem Flächenzeichen desselben zu entwickeln, um so mehr, als ein freies Eingehen auf die eingeborene Geometrie der natürlichen Gestalten wie der Sternenwelt dazu mitwirken kann, dem materiellen und industriellen Interesse an der Natur, das alle Liebe und Freiheit zu ertödten droht, ein heilsames Gegengewicht zu erhalten.

An diese Aufgabe würde sich die weitere schließen, den Eigenschaften des Borazitoeders $\boxed{\text{a} : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{a} : \frac{\sqrt{5}+3}{2}\text{a}}_{4\,(3\,.\,2)}$ und des Tetartoeders $\boxed{\text{a} : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{a} : \frac{\sqrt{5}+3}{2}\text{a}}_{4\,.\,3}$, vor Allem ihrer Flächen, auf denen sich das Innere der körperlichen Gestalten abspiegelt und wiederbildet, nachzugehen und die Mittel zur einfachen Construction der Fläche und also zur Modellierung des Körpers aufzufinden.

§. 56.

Ich wende mich wieder dem 5 glidrigen Granatoeder zu. Aus den entwickelten Verhältnissen ist klar, daß dieser Körper von fünf verschiedenen Seiten als das Pyritoeder $\boxed{\text{a} : \frac{\sqrt{5}+1}{2}\text{a} : \frac{\sqrt{5}+3}{2}\text{a}}_{12\,.\,2}$ mit Abstumpfung der (2 + 2) kantigen Ecken, d. h. mit den Flächen des Haloeders verbunden, angesehen und fünfmal in eine Stellung gebracht werden kann, in welcher ein Paar Flächen oben und unten, ein Paar rechts und links, ein Paar vorn und hinten liegen. Der Körper läßt also eine Zerlegung in 5 vierglidrige Haloeder (Würfel) zu; das 4 glidrige Haloeder ist der pemptoedrische Körper des 5 glidrigen Granatflachs und dieses ist der gemeinschaftliche Kern von 5 Haloedern (Würfeln), die einander ebenmäßig durchdringen.

Denken wir uns, die 5 Haloeder heißen A, B, C, D, E und bezeichnen demgemäß, wenn wir zwei parallelen Flächen immer dasselbe Zeichen geben, die 3 Paar Flächen

von A mit $\mathfrak{A}^1$, $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}^3$,
von B mit $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^3$,
von C mit $\mathfrak{C}^1$, $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{C}^3$,
von D mit $\mathfrak{D}^1$, $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{D}^3$,
von E mit $\mathfrak{E}^1$, $\mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{E}^3$,

so sind an dem 5 glidrigen Granatoeder in Fig. 55 die Flächen der 5 Haloeder, aus deren Durchdringung es entstanden gedacht wird, leicht aufzufinden.

§. 57.

In Fig. 50 ist der Haloederstern, den 5 einander ebenmäßig durchdringende 4 glidrige Haloeder (Würfel) bilden, dargestellt. Die Zeichnung läßt sogleich erkennen, daß die Verbindung 20 Ecken hervorruft, (3 + 3) glidrige, die wie die Ecken des 5 glidrigen Haloeders (Dodecaeders) liegen und in denen sich immer 2 Würfel, jeder mit einer Ecke, zusammen finden. Ich habe diese 20 Ecken jede mit denjenigen zwei Buchstaben bezeichnet, welche auf die beiden mit zwei Ecken hier zusammenkommenden Haloeder hinweisen. Alle Ecken also, an denen sich ein und derselbe Buchstabe findet, gehören demjenigen Haloeder an, das mit demselben Buchstaben bezeichnet ist, und jedes Parallelogramm zwischen 4 solchen Ecken ist also eine Fläche des gleichnamigen Haloeders, z. B. das Parallelogramm, an dessen Ecken die Buchstaben **eb**, **bc**, **bd**, **ab** stehen, eine Fläche des Haloeders B.

§. 58.

In Fig. 55 ist das Dodecaeder gezeichnet, in dessen Ecken die Ecken der 5 vierglidrigen Haloeder (Würfel) fallen. Diese Zeichnung wird wesentlich dazu beitragen, die Darstellung in Fig. 50 zu verdeutlichen; es wird nur erfordert, daß man in der Consequenz der Bezeichnungsmethode verharre. Ich bemerke hierüber und über die Vergleichung beider Figuren Folgendes:

1. Man bezeichne jede Kante des 5 glidrigen Haloeders (Dodecaeders) mit demjenigen Buchstaben, welcher der fünfte ist zu den an ihren Ecken stehenden, z. B. die in der Zeichnung Fig. 55 zu oberst liegende Kante, die an ihren Ecken die 4 Buchstaben **a**, **b**, **c** und **e** hat, mit **d**. Je zwei parallele Kanten bekommen auf diese Weise denselben Buchstaben.

2. Man füge den Buchstaben der Kanten, die das obere Fünfeck umschließen, also auch den ihnen parallelen Kanten der unteren Fläche, die Marke 1 hinzu, wodurch man zwei Kanten $\mathbf{a}^1$, zwei Kanten $\mathbf{b}^1$, zwei Kanten $\mathbf{c}^1$, zwei Kanten $\mathbf{d}^1$ und zwei Kanten $\mathbf{e}^1$ erhält. Die Kanten, welche von den Ecken des oberen Fünfecks aus abwärts gehen, so wie die ihnen parallelen von den Ecken der unteren Fläche aus aufwärts gehenden, bekommen an ihren Buchstaben die Marke 2, so daß nun weiter zwei Kanten $\mathbf{a}^2$, zwei Kanten $\mathbf{b}^2$, zwei Kanten $\mathbf{c}^2$, zwei Kanten $\mathbf{d}^2$ und zwei Kanten $\mathbf{e}^2$ unterschieden werden. Die Buchstaben der zwischen den eben genannten Kanten im Zickzack um den Körper herumliegenden 5 Paar Kanten werden mit der Marke 3 versehen, wodurch man schließlich zwei Kanten $\mathbf{a}^3$, zwei Kanten $\mathbf{b}^3$, zwei Kanten $\mathbf{c}^3$, zwei Kanten $\mathbf{d}^3$ und zwei Kanten $\mathbf{e}^3$ erhält.

3. In dem $(3+5)$ glidrigen System entsprechen die Flächen des 5 glidrigen Granatflachs den Kanten des 5 glidrigen Haloeders, dergestalt, daß aus Abstumpfung der Kanten des letzteren das Granatoeder gebildet werden kann. In Fig. 55 ist jede Fläche des Granatoeders mit demjenigen Buchstaben bezeichnet, welcher dem Buchstaben der ihr parallelen Kante des Haloeders entspricht: zieht man in der Zeichnung auf einer Fläche des Granatoeders die kürzere Diagonale, so geht diese jedesmal der gleichnamigen Kante des Haloeders parallel, z. B. die kürzere Diagonale der Fläche $\mathfrak{D}^2$ der Kante $\mathbf{d}^2$.

4. Zu jeder Fläche des Granatoeders ist nunmehr sehr bequem die Fläche des 4 glidrigen Haloeders zu finden, in deren Ebene sie liegt. Man suche zuerst die parallele Kante des Dodecaeders, der die Fläche nach außen zugewandt ist, und danach auf den beiden Flächen des Dodecaeders, welche diese Kante bilden, die der Kante parallelen Diagonalen, dann sind diese beiden Diagonalen zwei Kanten der verlangten Haloederfläche. Wählen wir als Beispiel die Fläche $\mathfrak{C}^3$; ihr parallel ist die Dodecaederkante $\mathbf{c}^3$, und dieser parallel sind auf den beiden Flächen, zwischen denen sie liegt, die beiden Diagonalen, an deren Ecken bei der einen die Buchstaben **b**, **e** und **a**, **c**, bei der andern **c**, **d** und **c**, **e** stehen; diese beiden Diagonalen bestimmen diejenige Fläche des Haloeders C, deren Zeichen $\mathfrak{C}^3$ Fig. 55 der Granatoederfläche gegeben ist, welche sich in ihr bildet.

5. So können nun ohne Schwierigkeit die 5 Haloeder, deren Durchdringung das 5 glidrige Granatflach als gemeinschaftlichen Kern gibt, in Fig. 55 aufgefunden werden, und mittels der Fig. 55 auch in Fig. 50. Man laße sich dazu noch die Fig. 51 dienen. Diese stellt die Fläche eines Haloeders dar und auf derselben diejenigen 12 Linien, in welchen sie von den Flächen der andern 4 Haloeder geschnitten wird. Die 24 stark gezeichneten Teile jener Linien sind diejenigen, welche als Kanten des Haloedersterns auf der Fläche sichtbar bleiben, während die schwach gezeichneten Teile durch die sich über die Fläche in zwei Gipfeln auftürmende Masse des Haloedersterns verdeckt werden.

6. Die eine Eigenschaft des Haloedersterns, von der aus man sich am besten in der weiteren Gliederung desselben orientiert, springt bei Vergleichung der beiden Zeichnungen Fig. 50 und 55 sehr klar in die Augen, nämlich die, daß die 5 Haloeder mit ihren Kanten in den Diagonalen der Dodecaederflächen liegen, auf jeder Dodecaederfläche je Ein Haloeder mit Einer Kante in

einer Diagonale. Daraus folgt zugleich für die Schnitte in Fig. 51, daß die mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$ bezeichneten Punkte Durchschnittspunkte der Diagonalen eines Fünfecks sind und also

$$\mathfrak{f}\,\mathfrak{m}^1 : \mathfrak{f}\,\mathfrak{g}\ ;\ \mathfrak{m}^1\mathfrak{g} = \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1 : 2,$$

und da die Schnitte $\mathfrak{f}\,\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{g}\,\mathfrak{n}$, $\mathfrak{f}^1\,\mathfrak{m}^1$ und $\mathfrak{g}^1\,\mathfrak{n}^1$ innerhalb der Haloederfläche von derselben die Fläche des 5 glidrigen Granatoeders zurücklaßen, so sieht man auch, in welcher Weise man auf einer Fläche des Haloeders die Fläche des Granatoeders zu zeichnen hat.

§. 59.

Fig. 59 ist die Hälfte eines (2 + 2) glidrigen Durchschnitts des Dodecaeders, $\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{b}$ die Höhenlinie einer Fläche und $\mathfrak{d}$ der Punkt, in welchem diese Linie von einer Diagonale durchschnitten wird, also $\mathfrak{d}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}$ und $\mathfrak{d}\,{}^2\mathfrak{c}$ die Richtungen, in welchen die Flächen unseres Granatoeders liegen, $\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^2\mathfrak{a}$ die Hälfte der längeren, ${}^2\mathfrak{c}\,{}^2\mathfrak{b}$ die Hälfte der kürzeren Diagonale einer Fläche, $\mathfrak{o}\,{}^2\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}\,{}^2\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{o}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}$ beziehungsweise die Hälften einer 5 glidrigen, einer 3 glidrigen und einer (2 + 2) glidrigen Axe. Nach der Voraussetzung ist

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{d} : \overset{1}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{b} = 2 : \sqrt{5}+1,$$

dasselbe Verhältnis haben also auch $\mathfrak{o}\,{}^1\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{o}\,{}^2\mathfrak{b}$, desgleichen $\mathfrak{o}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}$ und $\mathfrak{o}\,\overset{1}{\mathfrak{c}}$ zu einander, so daß die (2 + 2) glidrigen und die 3 glidrigen Axen des Granatoeders sich zu denen des Haloeders wie $2 : \sqrt{5}+1$ verhalten. Um das Verhältnis der beiden 5 glidrigen Axen $\mathfrak{o}\,{}^2\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}\,{}^1\mathfrak{a}$ zu einander zu bestimmen, vergleiche man die beiden ähnlichen Dreiecke ${}^2\mathfrak{a}\,\mathfrak{o}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}$ und ${}^1\mathfrak{a}\,\mathfrak{o}\,\overset{1}{\mathfrak{c}}$; die drei Seiten $\mathfrak{o}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}$, $\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^2\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{o}\,{}^1\mathfrak{a}$ des erstern verhalten sich zu einander wie $2 : (\sqrt{5}-1) : \sqrt{10-2\sqrt{5}}$, dasselbe Verhältnis haben also auch die Seiten des andern:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}\,{}^1\mathfrak{a} : \mathfrak{o}\,\overset{1}{\mathfrak{c}} &= 2 &&: \sqrt{10-2\sqrt{5}}\\
\mathfrak{o}\,\overset{1}{\mathfrak{c}} : \mathfrak{o}\,{}^2\mathfrak{a} &= \sqrt{5}+1 &&: \sqrt{10-2\sqrt{5}}\\
\hline
\mathfrak{o}\,{}^1\mathfrak{a} : \mathfrak{o}\,{}^2\mathfrak{a} &= 2(\sqrt{5}+1) &&: 10-2\sqrt{5}\\
&= \sqrt{5}+1 &&: 5-\sqrt{5}\\
&= 2 &&: 3\sqrt{5}-5.\\
&= 3\sqrt{5}+5 &&: 10.
\end{aligned}$$

§. 60.

Die Zeichnung Nr. 53 ist die (2 + 2) glidrige Projection desjenigen Teils des Haloedersterns, der sich über einer Fläche eines der Haloeders befindet. Man faße z. B. Fig. 50 das Haloeder $\mathfrak{D}$ ins Auge und nehme die im untern Teil der Zeichnung sich darstellende Fläche $\mathfrak{D}^1$ (vergl. Fig. 55) desselben, an deren Ecken die Buchstaben $\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$ stehen: die beiden sich über die Fläche erhebenden Ecken $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}\,\mathfrak{e}$ des Haloedersterns sind dann in der Projection Fig. 53 die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$; oder man nehme die Fläche $\mathfrak{D}^3$ (vergl. Fig. 50 und 55), deren Ecken mit denselben Buchstaben bezeichnet sind: die beiden Ecken $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{e}\,\mathfrak{b}$ des Haloedersterns, die über dieser Fläche hervortreten, sind eben diese Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ der Projection Fig. 53. Der Projection fast gleich, nur in umgekehrter Lage, erscheint die Fläche $\mathfrak{D}^2$ (Fig. 50 und 55). Der Rhombus $\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{u}$ in der Projection, welcher dem Rhombus der Granatoederfläche Fig. 51 gleich ist, hat an dem Haloederstern selbst die Bedeutung einer (2 + 2) kantigen trichterförmigen Vertiefung, in welcher der Punkt $\mathfrak{v}$ so weit überhalb der Haloederfläche liegt, als Fig. 59 zeigt, wenn man ${}^1\mathfrak{b}\,{}^2\mathfrak{a}$ durch die Axe $\mathfrak{o}\,\overset{1}{\mathfrak{c}}$ zieht: diese Linie schneide die Seite $\overset{1}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{b}^1$ des Durchschnitts (außerhalb der Einfaßung) in $\mathfrak{f}$, dann verhält sich

$$\begin{array}{lcll}
\overset{1}{c}f & : f\,{}^{1}h & = 1 & : \sqrt{5}+1, \text{ also} \\
\overset{1}{c}f & : e\,{}^{2}a & = 2 & : \sqrt{5}+1, \text{ also auch} \\
\overset{1}{c}v & : v e & = 2 & : \sqrt{5}+1, \\
\overset{1}{c}v & : \overset{1}{c}e & = 2 & : \sqrt{5}+3, \\
\overset{1}{c}e & : \overset{1}{c}\overset{2}{c} & = \sqrt{5}+1 & : 2 \\
\hline
\overset{1}{c}v & : \overset{1}{c}\overset{2}{c} & = \sqrt{5}+1 & : \sqrt{5}+3, \text{ also} \\
v\overset{2}{c} & : \overset{1}{c}\overset{2}{c} & = 2 & : \sqrt{5}+3 \\
\overset{1}{c}\overset{2}{c} & : o\overset{2}{c} & = 2 & : \sqrt{5}+1 \\
\hline
v\overset{2}{c} & : o\overset{2}{c} & = 4 & : (\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+3) \\
 & & = 1 & : \sqrt{5}+2.
\end{array}$$

Die Höhe der einwärtsgehenden Ecke v über der Haloederfläche verhält sich also zur halben Axe oder halben Kante des Haloeders $= 1 : \sqrt{5}+2$. Dergleichen Rechnungen können mit großer Leichtigkeit in Beziehung auf die Erhebung der Ecken r, t, w und z (Fig. 53) über der Haloederfläche gemacht werden.

§. 61.

Die Zeichnung Fig. 57 ist die vollständige 5 glidrige Projection des Haloedersterns. Durch die an die Hauptpunkte gesetzten Buchstaben wird es leicht, sie mit Fig. 50 in Verbindung zu setzen. Man sieht, wie innerhalb der Figur 5 Haloederkanten einen 5 eckigen Stern bilden; späterhin in weiterem Umfang bilden 5 Haloederkanten ein regelmäßiges Fünfeck, nach dessen Ecken die Spitzen jenes Sterns hinweisen; ein anderes von 5 Haloederkanten gebildetes Fünfeck, um den halben Centriwinkel gedreht, liegt unter dem erstern und von diesem zum Teil gedeckt. Man sieht ferner, daß sowohl diese beiden Fünfecke als jener 5 glidrige Stern je von 5 Kanten gebildet werden, von denen jede einem andern der 5 Haloeder angehört, dergestalt, daß eine Kante in dem 5 eckigen Stern immer parallel geht einer Kante desselben Haloeders in dem einen wie in dem andern der beiden Fünfecke, endlich daß diese Fünfecke wie jener Stern nicht nur in der Projection, sondern auch an dem Haloederstern selbst ebene Figuren sind, was sich sehr einfach aus Vergleichung von Fig. 50 und 57 mit Fig. 55 ergibt. So zerfällt der Haloederstern sechsmal zwischen je zwei 5 eckigen Sternen durch solche Fünfecke in drei Zonen, eine mittlere schmale und zwei oben und unten liegende breitere, deren Höhen sich verhalten wie die Linien $\overset{1}{c}g$, gh und hi in Fig. 59, also wie $\overset{1}{c}d : d\,{}^{1}h$, also wie $2 : \sqrt{5}-1$.

Das kleine Fünfeck in der Mitte der Projection Fig. 57 ist eine 5 kantige trichterförmige Vertiefung, deren Spitze q unmittelbar auf einer 5 glidrigen Ecke des in dem Haloederstern sitzenden, hohl oder als Kern zu denkenden Granatoeders steht, und deren Flächen, wie mnq, jede zur Scheitelfläche innerhalb des Haloedersterns eine Fläche des Granatoeders hat, wie auf Fig. 51 gesehen werden kann.

Wer das Maß außer Augen laßen wollte, welches das Dodecaeder für die Construction des Haloedersterns so einfach bietet, könnte sich die 5 Haloeder in folgender Weise durch einander gelegt denken: er zeichne ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Diagonalen gleich den Kanten der gegebenen Haloeder sind, und lege jedes der Haloeder so mit einer Kante in eine Diagonale dieses Fünfecks, daß die eine an dieser Kante liegende Fläche mit der Ebene des Fünfecks nach der innern Seite desselben den Winkel α Fig. 59, nach der äußern also den Winkel β bildet, wo tang. α = cotang. $\beta = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Dieß läßt die Projection Fig. 57 sehr deutlich sehen, wo von jedem Haloeder zwei Flächen, eine nach diesem Verhältnis schmalere und eine breitere, erscheinen, während von jedem zwei parallele Flächen senkrecht gehen und in der Projection verschwinden.

§. 62.

Zur äußern Beschreibung des Haloedersterns gehört noch Folgendes:

1. Flächen. Die Zeichnung Fig. 51 lehrt, daß auf jeder der 5.6 Haloederflächen sich 4.3 Teile als Flächen des Haloedersterns abschneiden, daß derselbe also 30.12 = 360 Flächen hat, die sämmtlich Dreiecke sind. Die trigonometrischen Functionen der Winkel, welche die Schnitte fm, fp¹ und no¹ mit den Seiten des Quadrats bilden, sind gegeben und daraus berechnen sich leicht, so man will, ihre Grade und die Grade der übrigen Winkel.
2. Ecken. Es sind deren (Fig. 53) fünferlei:
   a) dreiglidrige (r), nämlich von (3.2) + (3 + 3) Kanten und (3.2) + (3.2) Flächen gebildete, deren 20 sind;
   b) fünfglidrige (q), nämlich 5kantige und 5flächige, einwärtsgehende, deren 12 sind;
   c) (2 + 2) glidrige (v), nämlich (2.2) flächige und (2 + 2) kantige, einwärtsgehende, deren 30 sind;
   d) (2 + 1) glidrige (w), nämlich (2 + 1) kantige und (2 + 1) flächige, einwärtsgehende, deren 12.5 = 60 sind;
   e) (2 + 1) glidrige (z), nämlich (2 + 2 + 2 + 1 + 1) kantige und (2 + 2 + 2 + 2) flächige, von denen zwei Paar Kanten, Teile zweier Haloederkanten, in Eine Ebene fallen, ebenfalls 12.5 = 60.
3. Kanten. Die Zeichnung Fig. 51 lehrt, daß der Art nach nur viererlei Kanten vorhanden sind:
   a) Die Kanten **a** sind Haloederkanten, der Neigungswinkel also ein rechter, der Zahl nach 5.6 = 30, aber jede aus drei Teilen bestehend, die sich an verschiedenen Ecken befinden, also im Einzelnen = 90.
   b) Die Kanten **b** sind solche, deren Neigungswinkel gleich dem der Kanten des 5glidrigen Granatflachs ist, also gleich dem Umfangswinkel des regelmäßigen Zehnecks; der Zahl nach gleich der Zahl der Granatoederkanten, also = 12.5 = 20.3 = 60, aber jede aus zwei Teilen bestehend, die sich an verschiedenen Ecken befinden, also im Einzelnen = 120.
   c) Die Kanten **c** entstehen dadurch, daß von je 10 mit einer 5glidrigen Axe parallelen Flächen des Granatoeders sich die abwechselnden über die überschlagenen hinaus schneiden; der Neigungswinkel ist also gleich dem Umfangswinkel des regelmäßigen Fünfecks; der Zahl nach sind es ebenfalls 60, nach den Teilen gerechnet 120.
   d) Die Kanten **d** entstehen dadurch, daß je 6 einer 3glidrigen Axe parallele Flächen des Granatoeders sich jede mit der benachbarten schneiden; der Neigungswinkel ist also gleich dem Umfangswinkel des regelmäßigen Sechsecks; der Zahl nach sind es wieder 60 oder, nach ihren Teilen gerechnet, 120 Kanten.

§. 63.

Schlußbemerkung.

In der Mineralogie sind zweierlei Durchdringungen von 4glidrigen Haloedern bekannt. Die eine ist die Zwillingsbildung beim Flußspath: es durchdringen sich zwei Würfel in rhomboedrischer Weise, gleich der Zwillingsbildung beim Kalkspath und Dolomit, und der gemeinschaftliche Kern ist wie dort eine 6glidrige Grundpyramide. Die andere Verbindung ist das Galenoeder $\boxed{a : 2a : a}$, dessen Flächen beim Naudorfer Bleiglanz so schön vorkommen. Dieser Körper kann angesehen werden als eine ebenmäßige Durchdringung von vier Würfeln; gibt man ihm eine Stellung, in welcher eine 3glidrige Axe senkrecht ist, so sind es nicht die unmittelbar an der obern und untern 3kantigen Ecke ligenden Flächen, sondern die nächstfolgenden an sie anstoßenden obern und untern drei, welche erweitert einen Würfel geben, und da vier 3gliedrige Axen vorhanden sind, so erhält man einen solchen Würfel viermal. Zunächst leuchtet der Unterschied ein, welcher zwischen jenem Vorkommen und diesem statt findet: dort, beim Flußspath, findet eine Durchdringung zweier Körper statt, die beide zu sehen sind, während der gemeinschaftliche Kern der Durchdringung nicht sichtbar wird; hier, beim Bleiglanz, ist nur der gemeinschaftliche Kern einer hypothetischen Durchdringung sichtbar, die vier einzelnen Körper, samt dem Stern, den sie bei ihrer Durchdringung bilden, kommen nicht zur Erscheinung.

Aber das eine Vorkommen hat eine sehr nahe Beziehung zu dem andern. Denn nennen wir den einen Würfel der rhomboedrischen Zwillingsbildung **A**, den andern **B**, so haben die Flächen von **B** zu dem Würfel **A** die Lage von 2.3 Flächen des Galenoeders $\boxed{a : 2a : a}$, und denken wir uns den Würfel **A** auch in den Axen seiner andern drei Paar Ecken mit Würfeln in Zwillingsstellung zu ihm versehen, so haben wir vier Würfel, **B**, **C**, **D** und **E**, die sich zu **A** in gleicher Lage befinden, von denen **A** keinen bevorzugt und deren Flächen zu **A** die Lage der 8.3 Flächen des Galenoeders $\boxed{a : 2a : a}$ haben. Hier stellen sich also von selbst die vier Würfel ein, von denen wir dort bloß wußten, daß das genannte Galenoeder sie educieren würde; hier wißen wir, daß die vier sich ebenmäßig durchdringenden Würfel jenes Galenoeder zum Educt haben müßten. Wir dürfen auch kein Bedenken tragen uns vorzustellen, daß die Natur, wo sie im gleichgliedrigen System rhomboedrische Zwillingsbildung zeigt, immer die vollständige Durchführung derselben nach den Richtungen aller vier Axen beabsichtigt, und daß, wo eine der vier Axen bevorzugt zu sein scheint und bloß einfach rhomboedrische Zwillingsbildung zu Tage kommt, sei es bei Flußspath oder Bleiglanz oder Blende, die Natur ihre Absicht durchzusetzen verhindert war.

Ist in dem Zeichen $\boxed{a : ma : a}$ eines Galenoeders **m** nicht $= 2$, so zerlegt sich der Körper in vier Rhomboeder, in vier stumpfe, wenn **m** größer denn 2 ist, wie das Galenoeder $\boxed{a : 3a : a}$ beim Flußspath von Kongsberg und Rothkupfererz von Gumeschenskoj, in vier spitze, wenn **m** kleiner denn 2 ist, wie das Galenoeder $\boxed{a : \frac{3}{2} a : a}$, dessen Flächen zuweilen an Granatkrystallen aus dem Brossothal in Piemont die 8.3 kürzeren Kanten des mittlern Leuzitoeders abstumpfen. Aber diese vier Rhomboeder können im gleichgliedrigen System nicht wie jene Würfel als Tetartoeder ihres Galenflachs zur Erscheinung kommen und durch vierfache Zwillingsbildung auf dasselbe hinweisen; sie gehören nicht zu den Körpern, die im gleichgliedrigen System möglich sind, und können also mit dem Hilfswürfel **A**, als dem einzigen Rhomboeder, das vier Axen von gleichem Werthe darbietet, in jener Zwillingsbildung wohl künstlich dargestellt, aber nicht in der Natur erwartet werden.

Der Stern, welcher sich aus den vier Tetartoedern eines Galenflachs bildet, darf also nicht Haloederstern genannt werden, sondern erhält billig den Namen Rhomboederstern, da das Tetartoeder im Allgemeinen ein Rhomboeder ist und der besondere Fall, wo dieß Rhomboeder die mittlere Gestalt des Würfels hat, der Namengebung nicht zu Grunde gelegt werden darf. Im Verfolg meiner Arbeit werde ich Gelegenheit haben, auf den Rhomboederstern zurückzukommen.

Ferdinand Engel hat in seinem schönen Werke: „Axonometrische Projection der wichtigsten geometrischen Flächen.“ Berlin bei G. W. F. Müller. (Ohne Jahreszahl. 1854.) jene Zwillingsbildung eines Würfels mit vier andern, wie sich ein befreundeter Krystallograph dieselbe ausgedacht, durch Zeichnung dargestellt (Tafel IX. Fig. 40), und dazu Seite 38 folgende Beschreibung gegeben:

„Verbindung von fünf Würfeln.

Der Würfel a^{I} a^{II} a^{III} a^{IV} a^{V} a^{VI} a^{VII} a^{VIII} wird von vier andern **B**, **C**, **D**, **E** geschnitten; jede seiner Diagonalen fällt mit einer Diagonale von **B**, **C**, **D**, **E** zusammen. Die Durchschnittslinien der

Flächen des ersten, und der der vier andern Würfel bilden mit den Kanten des ersten zwei Gattungen Winkel; die einen sind gleich 45°; die andern haben zur Tangente ½."

Es ist keine genaue Bezeichnung, wenn F. Engel das dargestellte Gebilde eine „Verbindung von fünf Würfeln" nennt; unser Haloederstern ist die Verbindung von fünf Würfeln, jene Fig. 41 aber muß, wie oben erörtert worden, als eine Verbindung von vier Würfeln mit Einem bezeichnet werden, und zwar mit Einem, der lediglich als Hilfswürfel zu betrachten ist, so daß es belehrender gewesen wäre und auch zum Vorteil der Zeichnung gereicht haben würde, wenn der Verfaßer den Hilfswürfel A weggelaßen und bloß den Rhomboederstern gezeichnet hätte.

Bemerkungen
zur
geometrischen Bezeichnungsmethode.

1. Seit Carnot (1803) der Geometrie der Größe eine Geometrie der Lage gegenüberstellte und beide im Interesse der Analysis mit einander in Einklang zu bringen suchte, ist nicht nur je länger je mehr das Bedürfnis einer größeren Genauigkeit in der Bildung und Anwendung der Sprache der Geometrie fühlbar geworden, sondern Terminologie und Bezeichnungsmethode haben auch in originalen Lehrbüchern dieser Wißenschaft manche Verbeßerung erfahren; die neuere Geometrie ist geschäftig, sich mit der Euklidischen in dieser Beziehung aus einander zu setzen, resp. deren Härte und Unbeholfenheit zu überwinden. Was die Terminologie betrifft, so war A. Tellkampf in seiner Vorschule (1829) der erste, welcher dem Unterricht einige Neuerungen zuführte: er nahm von Münchow (1826) die Definition des Winkels als Größe der Drehung &c. auf und gab zuerst die allein richtige Definition der Aehnlichkeit; das Scheibertsche Lehrbuch (1834) brauchte bei der Definition des Winkels das ebenfalls von Münchow vorgeschlagene Wort Schwenkung, nahm von Steiner (1832) die Unterscheidungen von Linie (Gerade), Stral und Strecke auf, folgte aber weder Gergonne (1826) noch A. Tellkampf in Beziehung auf die Definition der Aehnlichkeit. Eine neue Reihe von Lehrbüchern beginnt mit dem von J. H. T. Müller (1844), welches sich keinem Einfluße der neueren Geometrie verschließt, die Geometrie der Lage überall mit der des Maßes verwebt und an Schärfe der Definition und Genauigkeit der Terminologie alle früheren übertrifft; dankenswerthe Neuerungen sind der Ausdruck Kreuzen für das Verhältnis der Lage zweier Geraden, die nicht in derselben Ebene liegen, und der Name Keil für die Größe der Drehung einer Ebene um eine feste Gerade.

2. Wenn die Lage eines Punktes zu einer Linie bestimmt werden soll, ist vor Allem nöthig, daß angegeben werden könne, an welcher Seite der Linie er liegt. Ist eine Linie in einer Fläche gezeichnet, so hat sie zweierlei Seiten: die eine Art teilt sie mit den Seiten der Fläche, nämlich eine vordere und eine hintere Seite; die andere Art bestimmt sich durch die beiden Teile der Fläche, in welche diese durch die Linie zerfällt. Diese letzteren beiden Seiten, um die es sich in der Regel allein handeln wird, schlage ich vor, die linke und die rechte zu nennen und dabei ganz nach der Anweisung zu verfahren, welche uns die Geographie für die Bestimmung der linken und rechten Seite eines Flußes gibt. Der einfachste Fall ist der des Strals, weil mit diesem Worte eine Gerade bezeichnet wird, welche von einem gegebenen Punkte ausgeht und dadurch also in ihrer Richtung bestimmt ist; für eine Gerade, welche von