Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung.

Mehrere Aufgaben der mathematischen Physik besitzen die Eigenthümlichkeit, dass während ihre Lösung im Allgemeinen auf der Anwendung der Kugelfunctionen beruht, in gewissen Grenzfällen an die Stelle dieser die zuerst von Fourier und später besonders von Bessel untersuchten Functionen*) eintreten müssen, für welche Herr Heine den Namen Cylinderfunctionen vorgeschlagen hat. So wird das Problem der Elektricitätsvertheilung auf zwei völlig von einander getrennten Kugeln, in der Regel wenigstens, mit Hülfe der Kugelfunctionen gelöst. Die specielle Annahme, dass die Kugelflächen einander bis zur Berührung genähert werden, bewirkt, dass bei gleicher Methode in der Behandlung des Problems statt der Kugelfunctionen die Cylinderfunctionen verwendet werden müssen. Für die genaue Erkenntniss der Natur dieses Zusammenhanges ist es von Wichtigkeit, auch den dritten noch möglichen Fall in Betracht zu ziehen, nämlich denjenigen, wo die Kugelflächen sich durchdringen und der Körper, auf dem die Elektricität sich verbreitet, von zwei Kugelkalotten mit gemeinschaftlichem Rande begrenzt, im Allgemeinen also von linsenförmiger Gestalt ist. Hier spielen, wie ich in einem im 68sten Bande von Borchardt's Journal abgedruckten Aufsatze gezeigt habe, weder die Kugel- noch die Cylinderfunctionen eine Rolle, sondern es tritt an ihre Stelle eine dritte Gattung von Functionen, welche daher zu jenen beiden die nothwendige Ergänzung bildet. Der gemeinsame Ursprung dieser drei Arten von Functionen ist in analytischer Hinsicht wesentlich dadurch charakterisirt, dass alle drei derselben partiellen Differentialgleichung genügen, mit dem alleinigen Unterschiede, dass die in dieser vorkommende Constante, welche für die erste Art eine positive ganze Zahl ist, für die zweite unendlich gross wird und für die dritte einen imaginären Werth mit dem reellen Theil — ½ annimmt. Es findet hier also eine analoge Beziehung statt, wie zwischen den drei Arten von Kegelschnitten, der Ellipse mit der endlichen reellen, der Parabel mit der unendlich

*) Von neueren Arbeiten über dieselben erwähne ich: C. Neumann, Theorie der Besselschen Functionen, Leipzig 1867. — E. Lommel, Studien über die Besselschen Functionen, Leipzig 1868. — Heine, Die Fourier-Besselsche Function. Borchardt's Journal Bd. 69. — Hankel, Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Mathematische Annalen, Bd. 1, Heft 3.

grossen und der Hyperbel mit der imaginären Hauptachse. Und diese Aehnlichkeit ist keine blos zufällige. Die Kugelfunction vermittelt die Lösung der Aufgaben über Elektricitäts- und Wärmevertheilung nicht nur für die Kugel, sondern, wie allgemein bekannt, auch für das verlängerte und abgeplattete Rotationsellipsoid; die Cylinderfunction leistet dieselben Dienste nicht nur für den Cylinder, sondern, was weniger bekannt zu sein scheint, auch für das Rotationsparaboloid; die dritte Function endlich findet ihre Anwendung bei dem Kegel und dem zweifachen Rotationshyperboloid. Da ihr Auftreten bei dem Kegel ein besonders einfaches ist, so wird man sie, falls ein besonderer Name erforderlich ist, Kegelfunction nennen können. Ich habe das einfache Rotationshyperboloid unerwähnt gelassen, weil die Untersuchung desselben noch nicht vollständig durchgeführt ist, wenngleich ich mich hinlänglich überzeugt habe, dass hier die Lösung aus denselben Functionen, nur in anderer Combination, zusammenzusetzen ist. Auf den folgenden Blättern werde ich mich fast ausschliesslich auf Darlegung der einfachsten Eigenschaften und Anwendungen dieser Function beschränken; der letzte § wird als Uebergang zu den verwickelteren Aufgaben angesehen werden können, die ich bei anderer Gelegenheit zu behandeln gedenke.

Es kann noch daran erinnert werden, dass es, ohne an der Sache etwas Wesentliches zu ändern, gestattet ist, die hier in Betracht kommenden Flächen durch Anwendung des Princips der reciproken Radienvectoren (vergl. § 2) in andere umzuformen, welche den Vortheil gewähren, dass sie allseitig geschlossen sind. So kann z. B. das Rotationsparaboloid durch die Fläche ersetzt werden, welche durch Rotation der Cardioide um ihre Achse entsteht.

§ 1.

Die Vertheilung der Elektricität auf einem Kegel unter dem Einfluss äusserer Kräfte, die in der Achse desselben ihren Sitz haben.

Es seien r, ϑ, φ die Polarcoordinaten eines Punktes im Raume, mit den rechtwinkligen x, y, z durch die Gleichungen $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $z = r \sin \vartheta \sin \varphi$ verbunden, und die Intervalle, innerhalb welcher sich r, ϑ, φ zu bewegen haben, damit alle Punkte des Raumes erschöpft werden, seien der gewöhnlichen Annahme gemäss durch die Grenzen 0 und ∞, 0 und π, 0 und 2π festgestellt. Jeder Punkt erscheint dann als der Durchschnitt von drei sich rechtwinklig schneidendenFlächen, nämlich einer Kugelfläche vom Radius r, einer Kegelfläche, deren durch den Anfangspunkt begrenzte Seitenlinien mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel ϑ einschliessen, und einer durch die x-Achse einseitig begrenzten Ebene, die mit der positiven y-Achse den von dieser nach der positiven z-Achse hin wachsenden Winkel φ bildet. Es ist wohl zu beachten, dass einem constanten Werthe λ des Parameters ϑ keine vollständige, nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin sich ins Unendliche erstreckende Kegelfläche entspricht, sondern nur die eine Hälfte einer solchen, das eine der beiden Fächer, in welche sie durch ihren Scheitelpunkt getheilt wird. Um nun die Vertheilung der Elektricität auf einer solchen in ihrem Scheitel begrenzten Kegelfläche unter dem Einfluss beliebiger elektrischer Nichtleiter zu bestimmen, genügt es die Dichtigkeit der Schicht zu kennen, welche sich durch Influenz eines einzelnen aber beliebig gelegenen elektrischen Massenpunktes bildet. Da aber die Behandlung der Aufgabe in dieser Allgemeinheit schon ein tieferes Eingehen auf die Eigenschaften der Kegelfunctionen erfordert, während eine möglichst einfache Einführung derselben zweckmässig erscheint, und da überdies das zweifache Rotationshyperboloid, für welches ich später die Aufgabe in voller Allgemeinheit zu lösen beabsichtige, den Kegel als Grenzfall enthält, so soll hier nur der specielle Fall in Betracht gezogen werden, wo der erregende Punkt, in welchem man sich die Einheit der negativen Elektricität concentrirt denken möge, auf der Achse des Kegels liegt. Auf den Charakter der elektrischen Vertheilung wird es zwar von wesentlichem Einflusse sein, ob der erregende Punkt E in dem von der Kegelfläche umschlossenen hohlen Raume liegt, oder auf demjenigen Theile der x-Achse, für welchen die Fläche convex erscheint, insofern nämlich die Dichtigkeit der Elektricität in unmittelbarer Nähe des Scheitels im ersten Falle unendlich klein, im zweiten unendlich gross werden wird. Aber gleichwohl ist eine Trennung beider Fälle in der analytischen Behandlung unnöthig. Denn setzen wir ein für alle Mal fest, dass E auf dem positiven Theile der x-Achse, in der Entfernung c vom Scheitel liege, und dass $\vartheta = \lambda$ die Gleichung der Fläche ist, auf welcher die Vertheilung der Elektricität bestimmt werden soll, so wird man es mit dem ersten oder zweiten der genannten Fälle zu thun haben, je nachdem λ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{1}{2}\pi$ und π enthalten ist. Das Potential v der gesuchten Belegung in Bezug auf irgend einen Punkt r, ϑ, φ ist wegen der besonderen Lage des Punktes E von φ unabhängig und genügt im ganzen Raume, mit Ausnahme der Fläche selbst, der Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right) = 0,$$

und ausserdem den bekannten Nebenbedingungen. Für innere Punkte, d. h. für solche, welche in demjenigen der beiden durch die Kegelfläche geschiedenen Räume liegen, der den Punkt E nicht enthält, ist v identisch mit dem reciproken Werthe T ihrer Entfernung von dem festen Punkte E; die Bestimmung von v für äussere d. h. mit E in demselben Raume enthaltene Punkte wird sich leicht ergeben, sobald für T eine passende Darstellung gefunden ist. Nun gilt für die reciproke Entfernung eines beliebigen Punktes r, ϑ, φ von dem auf der positiven x-Achse in der Entfernung c vom Scheitel gelegenen Punkte E der Ausdruck

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta}},$$

$$\text{oder auch:}\quad T = \frac{1}{\sqrt{rc}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{c} + \frac{c}{r} - 2\cos\vartheta}}.$$

Der zweite Factor dieses Productes möge durch $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden, und um ihm eine einfachere Gestalt zu geben, substituire man:

$$r = c\,.\,e^{\varrho}$$

so wird:

$$T = \frac{1}{\sqrt{rc}}\,\mathfrak{T}, \text{ und } \mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2\,(\cos\rho i - \cos\vartheta)}}$$

Da T ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1) ist, so ergiebt eine leichte Rechnung, dass $\mathfrak{T}$ der folgenden Differentialgleichung Genüge leistet:

$$(2.)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\rho^2} - \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{T} = 0.$$

Aus der Form derselben erhellt, dass hier eine Zerlegung von $\mathfrak{T}$ in eine Summe von Producten geboten ist, deren einer Factor eine trigonometrische Function von ρ ist, während der andere von ϑ allein abhängt. Da ρ nicht zwischen bestimmte endliche Grenzen eingeschlossen ist, sondern alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, da ferner $\mathfrak{T}$ für unendlich grosse Werthe von ρ unendlich klein wird, und für keinen Werth von ρ unendlich gross werden kann, wenn ϑ, wie dies für innere Punkte ausnahmslos der Fall ist, einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so ist die Darstellung von $\mathfrak{T}$ durch ein Fouriersches Doppelintegral statthaft, und man erhält, wenn man berücksichtigt, dass $\mathfrak{T}$ seinen Werth nicht ändert, wenn die Grösse ρ ihr Zeichen wechselt:

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty d\mu\,\cos(\mu\rho)\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i - \cos\vartheta}}\,.$$

Setzt man also

$$\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i - \cos\vartheta}} = C\,K^\mu(-\cos\vartheta),\ \text{so wird:}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty C\,\cos(\mu\rho)\ \ K^\mu(-\cos\vartheta)\,d\mu\,.$$

Der Factor C möge so gewählt werden, dass $K^\mu(1) = 1$ wird; dann ergiebt sich:

$$C = \int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha i + 1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\mu\alpha i}\,d\alpha}{e^{\frac{1}{2}\alpha} + e^{-\frac{1}{2}\alpha}}\,,$$

oder wenn $e^\alpha = t$ gesetzt wird:

$$C = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{t^{\mu i + \frac{1}{2} - 1}\,dt}{1 + t} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,\frac{\pi}{\cos(\mu\pi i)}\,.$$

Demnach erhalten wir als Definition der Kegelfunction K^μ die Gleichung

$$(3.)\qquad K^\mu(-\cos\vartheta) = \frac{2\cos(\mu\pi i)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i - \cos\vartheta)}}$$

und für $\mathfrak{T}$ den Ausdruck:

$$(4.)\quad \mathfrak{T} = \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)}{\cos(\mu\pi i)}\, K^\mu(-\cos\vartheta)\, d\mu\,.$$

Indem man denselben in die partielle Differentialgleichung (2.) einführt, erkennt man, dass $K^\mu(-\cos\vartheta)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(5.)\quad \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dK}{d\vartheta}\right) - (\mu^2 + \tfrac{1}{4})\,K = 0$$

genügt. Da diese ungeändert bleibt, wenn ϑ in $\pi - \vartheta$ verwandelt wird, so ist $K^\mu(\cos\vartheta)$ ein zweites particuläres Integral derselben. Auch sind die Functionen $K^\mu(\cos\vartheta)$ und $K^\mu(-\cos\vartheta)$ wirklich zwei wesentlich verschiedene Lösungen; denn da für $\vartheta = 0$ die erste $= 1$, die zweite $= \infty$ wird, so kann ihr Quotient keine Constante sein.

Das allgemeine Integral von (5.) ist also:

$$K = AK^\mu(\cos\vartheta) + BK^\mu(-\cos\vartheta)\,,$$

wenn A und B von ϑ unabhängige, sonst willkührliche Grössen vorstellen. Bezeichnet jetzt V das Potential der gesuchten elektrischen Schicht in dem äusseren (den Punkt E enthaltenden) Raume, und setzt man

$$V = \frac{1}{\sqrt{rc}}\,\mathfrak{B}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{B} = \int_0^\infty [K_1\cos(\mu\rho) + K_2\sin(\mu\rho)]\,d\mu\,,$$

wie es erlaubt ist, weil $\mathfrak{B}$ als Function von ρ betrachtet den für die Darstellbarkeit durch ein Fourier'sches Integral erforderlichen Bedingungen genügt, so können, weil $\mathfrak{B}$ dieselbe Differentialgleichung wie $\mathfrak{T}$ erfüllt, K_1 und K_2 nur die Form haben:

$$K_1 = A_1\,K^\mu(\cos\vartheta) + B_1\,K^\mu(-\cos\vartheta)\,,\quad K_2 = A_2\,K^\mu(\cos\vartheta) + B_2\,K^\mu(-\cos\vartheta)\,,$$

Da aber $K^\mu(-\cos\vartheta)$, wie schon erwähnt, für $\vartheta = 0$ d. h. auf dem dem äusseren Raume angehörigen Theile der x-Achse unendlich gross wird, während $\mathfrak{B}$ endlich bleiben muss, so müssen B_1 und $B_2 = 0$ sein, und da ferner auf der Kegelfläche ($\vartheta = \lambda$) $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{T}$ übereinstimmt also eine gerade Function von ρ ist, so muss K_2 wenigstens für $\vartheta = \lambda$ verschwinden, was indessen, wegen $B_2 = 0$, nur möglich ist, wenn auch A_2 verschwindet. Es wird also $K_2 = 0$ und $K_1 = A_1\,K^\mu(\cos\vartheta)$, und endlich wird der Werth von A_1 durch die Bedingung bestimmt, dass $\mathfrak{B}$ für $\vartheta = \lambda$ mit der in (4.) gegebenen Darstellung von $\mathfrak{T}$ übereinstimmen muss. Man erhält auf diese Weise:

$$(6.)\quad \mathfrak{B} = \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)}{\cos(\mu\pi i)}\;\frac{K^\mu(-\cos\lambda)\,.\,K^\mu(\cos\vartheta)}{K^\mu(\cos\lambda)}\,d\mu\,.$$

Die Dichtigkeit k der elektrischen Schicht im Punkte (r, λ, φ) wird jetzt durch die Gleichung gefunden:

$$-4\pi k = \left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n}\right) \text{ (für } \vartheta = \lambda),$$

worin die Differentialquotienten in der Richtung der dem äusseren Raume zugekehrten Normale der Fläche zu nehmen sind. Da hiernach $dn = -r d\vartheta$ zu setzen ist, so hat man:

$$4\pi k = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right) = \frac{1}{r\sqrt{rc}}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \vartheta}\right) \text{ (für } \vartheta = \lambda) .$$

oder vermöge der für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{T}$ gefundenen Ausdrücke:

$$4\pi k = \frac{1}{r\sqrt{rc}} \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)}{\cos \mu\pi i} \cdot \frac{\triangle \, d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)}, \text{ worin:}$$

$$\triangle = K^\mu(-\cos\lambda)\frac{dK^\mu(\cos\lambda)}{d\lambda} - K^\mu(\cos\lambda)\frac{dK^\mu(-\cos\lambda)}{d\lambda} .$$

Der Werth von $\triangle$ lässt sich ermitteln vermöge einer bekannten Beziehung, die zwischen zwei verschiedenen particulären Lösungen derselben linearen Differentialgleichung besteht. Setzen wir nämlich für den Augenblick $K^\mu(\cos\vartheta) = p$ und $K^\mu(-\cos\vartheta) = q$, so erhalten wir durch die Verbindung der beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dp}{d\vartheta}\right) - (\mu^2 + \tfrac{1}{4})\, p = 0$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dq}{d\vartheta}\right) - (\mu^2 + \tfrac{1}{4})\, q = 0$$

die folgende dritte:

$$q\, d\left(\sin\vartheta\frac{dp}{d\vartheta}\right) - p\, d\left(\sin\vartheta\frac{dq}{d\vartheta}\right) = 0,$$

deren linke Seite ein vollständiges Differential ist, so dass man, wenn a eine Constante, erhält:

$$q\sin\vartheta\frac{dp}{d\vartheta} - p\sin\vartheta\frac{dq}{d\vartheta} = a .$$

Wenn man hierin einerseits $\vartheta = \lambda$ und andererseits $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ setzt und beachtet, dass im ersten Falle die linke Seite der Gleichung $= \triangle \sin\lambda$ wird, und dass im zweiten Falle $p = q$ und $\frac{dp}{d\vartheta} = -\frac{dq}{d\vartheta}$ ist, so findet man:

$$\triangle \sin\lambda = -2\, q\frac{dq}{d\vartheta} \text{ (für } \vartheta = \tfrac{1}{2}\pi),$$

d. h. wenn für q sein in (3.) enthaltener Werth genommen wird:

$$\triangle \sin\lambda = 2\left(\frac{\cos\mu\pi i}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{(\cos\alpha i)^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{(\cos\alpha i)^{\frac{3}{2}}} .$$

Die hierin vorkommenden Integrale lassen sich durch eine Behandlung, welche der oben (vor Gl. 3.) zur Bestimmung von C angewandten ähnlich ist, auf Eulersche Integrale erster Gattung zurückführen, und nehmen, wenn die letzteren durch Gammafunctionen ausgedrückt werden, die Form an:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu\alpha d\alpha}{(\cos \alpha i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\mu i\right) \Gamma\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu\alpha d\alpha}{(\cos \alpha i)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i\right) \Gamma\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\mu i\right),$$

und das Product beider erhält zufolge einer bekannten Eigenschaft der Gammafunktionen den einfachen Werth

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu i\right)\pi} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu i\right)\pi} = \frac{\pi}{\cos \mu\pi i}.$$

Somit wird $\Delta \sin\lambda = \frac{2\cos \mu\pi i}{\pi}$ und für die Dichtigkeit k gilt die folgende Formel:

$$(7.) \qquad k = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{c}\sqrt{r^3} \cdot \sin\lambda} \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)\, d\mu}{K^\mu (\cos\lambda)}.$$

Für in unmittelbarer Nähe des Scheitels gelegene Punkte des Kegelmantels bedarf diese Formel einer Umformung, weil sie dann (wegen $r = 0$, $\rho = -\infty$) den Werth von k unter der unbestimmten Form $\infty \cdot 0$ giebt. Diese Umformung wird erst im § 3 vorgenommen werden.

Es mag noch aus (7.) die Eigenschaft geschlossen werden, dass für zwei verschiedene Punkte des Mantels, deren Entfernungen r und r_1 vom Scheitel durch die Gleichung $rr_1 = c^2$ verbunden sind, zwischen den Dichtigkeiten k und k_1 die Relation

$$(8.) \qquad \frac{k}{k_1} = \frac{\sqrt{r_1^3}}{\sqrt{r^3}} \left(= \frac{c^3}{r^3} = \frac{r_1^3}{c^3}\right)$$

stattfindet, wie sich unmittelbar daraus ergiebt, dass in diesem Falle $\rho_1 = -\rho$ ist.

§ 2.

Die Vertheilung einer gegebenen Elektricitätsmenge auf dem durch Rotation eines Kreissegments um die begrenzende Sehne entstehenden Körper.

Durch die Untersuchungen der Herren W. Thomson, Liouville und Lipschitz ist der enge Zusammenhang bekannt, durch den die Probleme der Elektricitätsvertheilung für zwei inverse Flächen mit einander verbunden sind. Ich werde von den Resultaten dieser Untersuchungen Gebrauch machen, um mit Hülfe der soeben für den Halbkegel gelösten Aufgabe die Vertheilung zu bestimmen, welche eine gegebene Elektricitätsmenge ohne Einfluss äusserer Kräfte auf einem Körper erfährt, der durch Rotation eines Kreissegments um die begrenzende Sehne erzeugt wird. Sobald die Aufgabe in dieser beschränkten Form ihre Lösung gefunden hat, unterliegt es auch keiner Schwierigkeit, die Einwirkung elektrischer Massenpunkte auf einen Körper derselben Art zu bestimmen, sofern dieselben auf der Rotationsachse des Körpers liegen. Es mag indessen nicht unerwähnt bleiben, dass die allgemeine Lösung des Problems für den Kegel, welche im ersten § nur aus dem dort angegebenen Grunde unterblieben ist, auch zur allgemeinen Lösung derselben Aufgabe nicht blos für die durch Rotation des Kreissegments entstehende Fläche, sondern auch für die Dupinsche Cyclide mit zwei reellen Doppelpunkten führt. Die Cyclide ohne reelle Doppelpunkte kann auf die Ringfläche zurückgeführt werden, welche durch Rotation eines ganzen Kreises um eine ihn nicht schneidende Achse entsteht, und für welche die Elektricitäts- und Wärmevertheilung von Herrn C. Neumann in einer 1864 erschienenen besonderen Schrift bestimmt ist.

Der Satz*), welchen wir zur Lösung unserer speciellen Aufgabe brauchen, lässt sich folgendermassen aussprechen:

Es sei F eine beliebige Fläche, k die Dichtigkeit einer darauf vertheilten elektrischen Schicht im Punkte B und v das Potential derselben in Bezug auf irgend einen Punkt P. Aus einem festen Punkte E entwerfe man das „sphärische Spiegelbild" F′ der Fläche F, indem man auf jedem von E nach F gezogenen Strahle EB (R_0) eine solche Strecke EB′ (R_0') abschneidet, dass das Product $R_0 . R_0'$ constant (etwa $= c^2$) ist. Wird nun auf F′ eine elektrische Belegung angenommen, deren Dichtigkeit k′ im Punkte B′ mit der Dichtigkeit k in dem entsprechenden Punkte B der Fläche F durch die Gleichung

$$(9.) \qquad k' = \frac{R_0^3}{c^2}\, k$$

zusammenhängt, so findet zwischen dem Potentiale v′ der Belegung von F′ in Bezug auf den dem P entsprechenden Punkt P′ und dem Potentiale v der Belegung von F in Bezug auf den Punkt P die folgende einfache Beziehung statt:

$$(10.) \qquad v' = R\, v,$$

wo R die Entfernung der Punkte E und P bedeutet.

Ist insbesondere k so gewählt, dass an der Oberfläche von F (wo R durch R_0 bezeichnet wurde) v sich auf den reciproken Werth von R_0 reducirt, so nimmt v′ an der Oberfläche von F′ den constanten Werth 1 an, und folglich wird dann durch k′ die Art

---

*) Man vergleiche z. B. die Abhandlung des Herrn Lipschitz in Bd. 61, p. 1—21 von Borchardt's Journal. Bei dem Beweise des dort (p. 6 ff.) auf eine beliebige Anzahl von Flächen ausgedehnten Satzes ist der Fall ausgeschlossen, dass von diesen Flächen eine oder mehrere sich ins Unendliche erstrecken. Wenn der Satz trotzdem hier auf eine Kegelfläche angewandt werden soll, so liegt die Berechtigung dazu in dem Umstande, dass die Dichtigkeit ihrer Belegung für unendlich entfernte Punkte in hinreichend starkem Grade unendlich klein wird. Um völlig streng zu Werke zu gehen, könnte man das Endresultat nach der Methode Dirichlets verificiren, was ich jedoch der Kürze halber unterlassen werde.

der Vertheilung einer bestimmten Elektricitätsmenge auf der Fläche F′ festgestellt, wenn diese Fläche isolirt und dem Einflusse elektrischer Nichtleiter entzogen ist.

Wir setzen jetzt an Stelle von F den im vorigen § betrachteten Halbkegel und wählen den dort durch E bezeichneten Punkt als das Centrum, von dem aus die Transformation durch reciproke Radienvectoren vorgenommen wird; den Abstand c des Punktes E vom Anfangspunkte der Coordinaten identificiren wir mit der in (9.) enthaltenen Constanten c, so dass ein Doppelpunkt der transformirten Fläche F′ mit dem Scheitel des Kegels zusammenfällt; wir finden dann die rechtwinkligen Coordinaten x′, y′, z′ des dem Punkte P (x, y, z) entsprechenden Punktes P′ aus den Gleichungen

$$(11.)\quad \begin{cases} x' - c = c^2 \dfrac{x-c}{R^2}, \\ y' = c^2 \dfrac{y}{R^2}, \\ z' = c^2 \dfrac{z}{R^2}, \\ R^2 = (x-c)^2 + y^2 + z^2 . \end{cases}$$

Werden für x, y, z die Werthe $r\cos\vartheta$, $r\sin\vartheta\cos\varphi$, $r\sin\vartheta\sin\varphi$ eingesetzt, so ergiebt sich:

$$(12.)\quad \begin{cases} x' - c = \dfrac{c^2(r\cos\vartheta - c)}{r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta}, \text{ also} \\ x' = \dfrac{cr(r - c\cos\vartheta)}{r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta}, \text{ und:} \\ y' = \dfrac{c^2 r\sin\vartheta\cos\varphi}{r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta}, \\ z' = \dfrac{c^2 r\sin\vartheta\sin\varphi}{r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta}. \end{cases}$$

Auf diese Weise sind x′, y′, z′ durch die Polarcoordinaten des dem P′ entsprechenden Punktes P ausgedrückt. Fragen wir nun, welche Bedeutung die Grössen r, ϑ, φ haben, wenn dieselben direct als Functionen von x′, y′, z′ d. h. als die Parameter dreier Flächen, die sich im Punkte P′ schneiden, aufgefasst werden. Man findet leicht, dass

$$\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{(x'-c)^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{r^2}{c^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass bei constantem r das Verhältniss der Abstände des Punktes P′ vom Anfangspunkte A und dem Punkte E ebenfalls constant ist. Die Gleichung r = Const. stellt also ein System von Kugelflächen dar, welche ihre Mittelpunkte auf der Achse AE haben und die Strecke AE harmonisch theilen. Einem constanten φ entspricht nach wie vor eine durch die x-Achse begrenzte Ebene, und endlich geht aus der Gleichung

$$\frac{y'^2 + z'^2 + x'(x'-c)}{c\sqrt{y'^2 + z'^2}} = \cot\vartheta$$

leicht hervor, dass ϑ den Winkel bedeutet, welchen die von P′ nach A und E gezogenen Geraden einschliessen, dass also zu einem constanten ϑ eine Fläche gehört, die entsteht, wenn ein über AE als Sehne und mit ϑ als Peripheriewinkel beschriebener Kreisbogen um AE als Achse rotirt. Jede solche Fläche F′ hat in ihren Doppelpunkten A und E einen Tangentenkegel von gleicher Oeffnung mit demjenigen Halbkegel F, dessen Abbild sie ist. Umschliesst F den Punkt E (d. h. ist $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$), so hat die Fläche F′ in A und E zwei trichterförmige Vertiefungen, und sie besitzt zwei Spitzen wenn $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$; für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ artet sie in eine Kugel aus. Die Aufgabe, deren Lösung vermöge der Formeln (9.) und (10.) und durch Einsetzung der für v und k im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe sich sofort hinschreiben lässt, ist die folgende: Einem Körper, dessen Oberfläche der Ort aller der Punkte ist, für welche eine feste Gerade AE $=$ c unter gegebenem Winhel λ erscheint, ist eine gewisse Elektricitätsmenge M mitgetheilt, welche sich auf der Oberfläche verbreitet und dort (und folglich auch im Innern des Körpers) den constanten Potentialwerth 1 hervorbringt. Es soll das Potential v′ für äussere Punkte und die Dichtigkeit k′ der Elektricität an jeder Stelle der Oberfläche bestimmt werden.

Man erhält ohne Weiteres:

$$v' = R \,.\, V = \frac{R \,.\, \mathfrak{B}}{\sqrt{rc}}, \text{ und } k' = \frac{R_0^{\,3}}{c^2}\, k,$$

worin für $\mathfrak{B}$ und k ihre Werthe aus (6) und (7) zu entnehmen und R und R_0 durch die Gleichungen

$$R^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta = rc\,(2\cos\rho i - 2\cos\vartheta)$$
$$R_0^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\lambda = rc\,(2\cos\rho i - 2\cos\lambda)$$

gegeben sind; es ist also:

$$(13.) \qquad v' = \sqrt{2\cos\rho i - 2\cos\vartheta}\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)}{\cos(\mu\pi i)} \cdot \frac{K^\mu(-\cos\lambda)\, K^\mu(\cos\vartheta)}{K^\mu(\cos\lambda)}\, d\mu\,,$$

$$(14.) \qquad k' = \frac{(2\cos\rho i - 2\cos\lambda)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 c \sin\lambda}\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)\, d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)}\,.$$

Die Elektricitätsmenge M kann bestimmt werden, indem man den Grenzwerth sucht, gegen welchen das Product $v' \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ für unendlich entfernte Punkte convergirt. Beachtet man, dass für solche Punkte $\vartheta = 0$ und $r = c$, also $\rho = 0$ ist, so findet man:

$$(15.) \qquad M = c\int_0^\infty \frac{K^\mu(-\cos\lambda)}{K^\mu(\cos\lambda)}\, \frac{d\mu}{\cos\mu\pi i}\,.$$

Ist z. B. $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ d. h. geht der Körper in eine Kugel vom Durchmesser c über, so wird

$$M = c\int_0^\infty \frac{d\mu}{\cos\mu\pi i} = \frac{c}{2}\,.$$

Die Dichtigkeit muss für alle Punkte der Kugeloberfläche dieselbe d. h. der Ausdruck

$$D = \frac{(2 \cos \rho i)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 c} \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)\, d\mu}{K^\mu(0)}$$

muss von ρ unabhängig (und zwar $= \frac{1}{2\pi c}$) sein. Es ist nicht ohne Interesse, dies Resultat durch eine directe Ermittelung des Integrales zu verificiren. Aus der Gleichung

$$K^\mu(0) = \frac{\sqrt{2} \cos \mu\pi i}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \mu\alpha d\alpha}{(\cos \alpha i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu i)\, \Gamma(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu i)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu i)\, \Gamma(\frac{1}{2} - \mu i)}$$

erhält man, weil

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\,2x-1}} \frac{1}{\Gamma(x + \frac{1}{2})}$$

ist:

$$\frac{1}{K^\mu(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\mu i)\, \Gamma(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Pi(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\mu i)\, \Pi(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i) .$$

Nun ist nach Gauss (Werke, Bd. III, p. 145)

$$\Pi(z) = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, k \,.\, k^z}{(z+1)\,(z+2)\,(z+3)\,\ldots\,(z+k)} \text{ (für } k = \infty) ,$$

folglich:

$$\frac{1}{K^\mu(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k)^2\, k^{-\frac{1}{2}}\, 2^{2k}}{[\mu^2 + (\frac{3}{2})^2]\,[\mu^2 + (\frac{7}{2})^2] \ldots [\mu^2 + (2k - \frac{1}{2})^2]} \; (k = \infty) ,$$

woraus ersichtlich, dass man setzen darf:

$$\frac{1}{K^\mu(0)} = \frac{A_1}{\mu^2 + (\frac{3}{2})^2} + \frac{A_2}{\mu^2 + (\frac{7}{2})^2} + \ldots + \frac{A_m}{\mu^2 + (2m - \frac{1}{2})^2} + \ldots .$$

Für den Coefficienten A_m findet sich:

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [(2m - \tfrac{1}{2})^2 + \mu^2]\, \Pi(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\mu i)\, \Pi(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i) \text{ (für } \mu i = 2m - \tfrac{1}{2})$$

$$A_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (4m - 1)\, \Pi(m - \tfrac{1}{2}) \,.\, (m - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i)\, \Pi(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\mu i) \text{ (für } \tfrac{1}{2}\mu i = m - \tfrac{1}{4})$$

$$A_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (4m - 1)\, (-1)^{m-1} \frac{\Pi(m - \frac{1}{2})}{\Pi(m - 1)} .$$

Bemerkt man noch, dass nach einer Formel von Laplace

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)\, d\mu}{\mu^2 + (2m - \frac{1}{2})^2} = \frac{\pi}{4m - 1} e^{-(2m - \frac{1}{2})\rho} ,$$

sofern ρ positiv vorausgesetzt wird, so ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)\, d\mu}{K^\mu(0)} = \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\sqrt{\pi}(-1)^{m-1} \frac{\Pi(m-\frac{1}{2})}{\Pi(m-1)}\, e^{-(2m-\frac{1}{2})\varrho}$$

$$= \pi\, e^{-\frac{3}{2}\varrho}\left[1 - \frac{3}{2} e^{-2\varrho} + \frac{3.5}{2.4} e^{-4\varrho} - \frac{3.5.7}{2.4.6} e^{-6\varrho} + \ldots\right],$$

d. h. zufolge des binomischen Lehrsatzes

$$= \pi\, e^{-\frac{3}{2}\varrho}\left(1 + e^{-2\varrho}\right)^{-\frac{3}{2}} = \pi(2\cos\rho i)^{-\frac{3}{2}}$$

Demnach wird

$$D = \frac{(2\cos\rho i)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 c} \cdot \pi(2\cos\rho i)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\pi c},$$

was bewiesen werden sollte.

§ 3.

Ueber den Grad des Unendlich- resp. Nullwerdens der Dichtigkeit in den konischen Punkten der Fläche.

Es kommt hier wesentlich darauf an zu ermitteln, wie stark der Werth des bestimmten Integrales

$$H = \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\rho)\, d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\mu\rho i}\, d\mu}{K^\mu(\cos\lambda)}$$

für ein unendlich grosses ρ gegen Null convergirt. Liesse sich ohne Weiteres annehmen, dass der reciproke Werth von $K^\mu(\cos\lambda)$ sich allgemein in ähnlicher Weise, wie dies in dem soeben betrachteten speciellen Falle $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ möglich war, in eine Summe von Partialbrüchen

$$\frac{B}{\mu^2 + \varepsilon^2} + \frac{B_1}{\mu^2 + \varepsilon_2^2} + \frac{B^2}{\mu^2 + \varepsilon_2^2} + \ldots.$$

zerlegen lasse, worin die ε und B von μ unabhängige reelle Werthe hätten, so würde sich, wenn man $\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ .. und sämmtliche ε positiv wählt, für H sofort der Ausdruck ergeben:

$$H = \frac{\pi}{2}\left(\frac{B}{\varepsilon} e^{-\varepsilon\varrho} + \frac{B_1}{\varepsilon_1} e^{-\varepsilon_1\varrho} + \frac{B_2}{\varepsilon_2} e^{-\varepsilon_2\varrho} + \ldots\right),$$

dessen erstes Glied für $\rho = \infty$ gegen alle folgenden überwiegt und daher als der gesuchte Grenzwerth betrachtet werden könnte. Da jedoch die Begründung der gemachten Annahme jedenfalls ein genaues Eingehen auf die Eigenschaften der Wurzeln der transcendenten Gleichung $K^\mu(\cos\lambda) = 0$ erfordern würde und sich andererseits wenigstens als wahrscheinliches Ergebniss herausstellt, dass beim Uebergange zur Grenze nur die kleinste Wurzel von Einfluss bleibt, so scheint es zweckmässig ein solches Verfahren einzuschlagen, bei dem von vorn herein nur diese kleinste Wurzel in Betracht gezogen wird. Im folgenden § wird gezeigt werden, dass die Function $K^{\mu}(\cos\lambda)$, welche bisher nur für reelle Werthe von μ definirt zu werden brauchte, zunächst für solche Werthe durch die unendliche Reihe

$$1 + \frac{4\mu^2 + 1^2}{2\,.\,2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{(4\mu^2 + 1^2)\,(4\mu^2 + 3^2)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 + \ldots .$$

ersetzt werden kann, dass diese Reihe oder ein aus ihr leicht abzuleitendes bestimmtes Integral dann auch als Definition von $K^{\mu}(\cos\lambda)$ für einen beliebigen complexen Werth $\mu = \xi + \eta i$ dient, dass $K^{\mu}(\cos\lambda) = 0$ wird für zwei rein imaginäre Werthe $\mu = \pm\, \varepsilon i$, wo ε zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2\lambda}$ und $\frac{\pi}{\lambda}$ enthalten ist, und dass endlich, wenn man

$$K^{\mu}(\cos\lambda) = (\mu^2 + \varepsilon^2)\, f(\mu)$$

setzt, die Function $f(\mu) = f(\xi + \eta i)$ sicher eindeutig, stetig und von Null verschieden (ihr reciproker Werth also nirgends unendlich) ist, so lange η innerhalb des Intervalles von $-\frac{\pi}{\lambda}$ bis $\frac{\pi}{\lambda}$ bleibt. Wir wollen nun zu dem Integral

$$H = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mu\varrho i}\, d\mu}{(\mu^2 + \varepsilon^2)\, f(\mu)} \quad \text{ein anderes:} \quad H' = \tfrac{1}{2}\int_{\infty + \frac{\pi i}{\lambda}}^{-\infty + \frac{\pi i}{\lambda}} \frac{e^{\mu\varrho i}\, d\mu}{(\mu^2 + \varepsilon^2)\, f(\mu)}$$

hinzufügen, welches, wie durch die beigesetzten Grenzen angedeutet, auf der in der Entfernung $\eta = \frac{\pi}{\lambda}$ zur reellen ξ-Achse gezogenen Parallelen vom positiv Unendlichen nach dem negativ Unendlichen hin zu nehmen ist. Die Summe der beiden über die unendlich langen Parallelen in entgegengesetzter Richtung genommenen Integrale kann zu einem einzigen Integrale vereinigt und der Integrationsweg darf als eine allseitig geschlossene Linie betrachtet werden. Der durch dieselbe umgrenzte Raum enthält einen und auch nur einen Unstetigkeitspunkt, nämlich den Punkt $0 + \varepsilon i$. Durch Anwendung des bekannten Theorems von Cauchy erhält man also:

$$H + H' = \tfrac{1}{2}\int \frac{e^{\mu\varrho i}\, d\mu}{(\mu - \varepsilon i)\,(\mu + \varepsilon i)\, f(\mu)} = \frac{\pi e^{-\varepsilon\varrho}}{2\varepsilon\, f(\varepsilon i)},$$

und wenn man das Integral H' auf die rechte Seite der Gleichung schafft, und in ihm, wie es geschehen muss, um es auf ein solches mit reellen Grenzen zu reduciren, μ in $\mu + \frac{\pi i}{\lambda}$ verwandelt, so ergiebt sich:

$$H = \frac{\pi e^{-\varepsilon\varrho}}{2\varepsilon f(\varepsilon i)} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon\, f(\varepsilon i)}{\pi}\, e^{-\left(\frac{\pi}{\lambda} - \varepsilon\right)\varrho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mu\varrho i}\, d\mu}{\left[\left(\mu + \frac{\pi i}{\lambda}\right)^2 + \varepsilon^2\right] f\left(\mu + \frac{\pi i}{\lambda}\right)} \right\}.$$

Diese Gleichung gilt für jedes reelle ρ, auch für ein negatives, liefert aber für ein solches kein zum Ziele führendes Resultat. Da aber aus der ursprünglichen Form von H hervorgeht, dass es für gleich grosse positive und negative ρ denselben Werth hat, so genügt es sich auf positive Werthe von ρ zu beschränken. Das in der Klammer befindliche Integral hat jedenfalls keinen unendlich grossen, für $\rho = \infty$, was zu beweisen jedoch unnöthig, sogar einen unendlich kleinen Werth, und da der Factor vor dem Integralzeichen, weil $\frac{\pi}{\lambda} - \varepsilon$ positiv, für $\rho = +\infty$ verschwindend klein wird, so ergiebt sich:

$$H = \frac{\pi e^{-\varepsilon\varrho}}{2\varepsilon f(\varepsilon i)} (1 + \delta) \text{ (wo } \delta = 0 \text{ für } \rho = +\infty).$$

Der Werth der Constanten $2\varepsilon f(\varepsilon i)$ ist leicht anzugeben; unter Anwendung der Integralform (4.) des folgenden § erhält man ihn in der Form:

$$2\varepsilon f(\varepsilon i) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\mu} [K^{\mu}(\cos\lambda)]_{(\mu = \varepsilon i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda} \frac{\beta \sin(\beta\varepsilon)\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\lambda)}}.$$

Bezeichnet man diesen (wegen $\varepsilon\lambda < \pi$ offenbar positiven) Werth durch A und führt den für H gefundenen Ausdruck in die Gl. (14.) des § 2 an Stelle des Integrales ein, so wird die Dichtigkeit k' für sehr grosse Werthe von ρ d. h. in der Nähe des einen konischen Punktes der Fläche durch die folgende Näherungsformel dargestellt:

$$k' = \frac{1}{2\pi c \sin\lambda A} \cdot e^{-\varrho(\varepsilon - \frac{3}{2})}.$$

Bemerkt man noch, dass $ce^{-\varrho}$ als das Mass der Entfernung des konischen Punktes von einem benachbarten Punkte der Fläche gelten kann, so hat man den Satz:

Für solche Punkte der Fläche, welche in sehr kleiner Entfernung von einem der beiden singulären Punkte derselben liegen, ist die Dichtigkeit der Elektricität proportional der $(\varepsilon - \frac{3}{2})$ten Potenz dieser Entfernung, wenn ε die kleinste positive Wurzel der transcendenten Gleichung

$$1 + \frac{(\frac{1}{2})^2 - \varepsilon^2}{1.1} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{[(\frac{1}{2})^2 - \varepsilon^2][(\frac{3}{2})^2 - \varepsilon^2]}{1.1.2.2} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 + \frac{[(\frac{1}{2})^2 - \varepsilon^2][(\frac{3}{2})^2 - \varepsilon^2][(\frac{5}{2})^2 - \varepsilon^2]}{1.1.2.2.3.3} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^6 + \ldots = 0$$

bedeutet*).

Dass $\varepsilon - \frac{3}{2} = 0$ wird für $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ d. h. für den Fall der Kugel, ist aus der vorstehenden Gleichung deutlich ersichtlich, ebenso auch, dass ε nicht unter den Werth $\frac{1}{2}$ heruntersinken kann. Weil aber in der Gleichung

$$\frac{(\frac{3}{2})^2 - \varepsilon^2}{2.2} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{[(\frac{3}{2})^2 - \varepsilon^2][(\frac{5}{2})^2 - \varepsilon^2]}{2.2.3.3} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 + \ldots = \frac{1}{[\varepsilon^2 - (\frac{1}{2})^2] \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} - 1$$

*) Dasselbe Resultat gilt auch für die Vertheilung der Elektricität auf dem Kegel in der Nähe seines Scheitelpunktes. (§ 1.)

die Reihe auf der linken Seite einen sehr grossen Werth annimmt, sobald λ sich sehr wenig von π unterscheidet, so muss in diesem Falle der Nenner des Bruches auf der rechten Seite einen sehr kleinen, d. h. ε einen sehr wenig von $\frac{1}{2}$ verschiedenen Werth besitzen, und folglich ist dann $\varepsilon - \frac{3}{2}$ nur sehr wenig grösser als -1. Für einen durch Rotation eines sehr flachen Kreissegments erzeugten, also mit zwei sehr scharfen Spitzen versehenen Körper ist also die Dichtigkeit der Elektricität in einem einer Spitze sehr nahe gelegenen Punkte fast eben so stark unendlich wie die reciproke Entfernung des Punktes von der Spitze.

Uebrigens wird man für ein hinreichend nahe an π gelegenes λ nach (7) in § 4 für $K^\mu(\cos\lambda)$ den angenäherten Werth $-\frac{2}{\pi}\cos\mu\pi i \log(\pi-\lambda)$ setzen dürfen und dann das Integral in (14.) (§ 2) für jedes beliebige ρ ausführen können; man findet dann das einfache Resultat, dass die Dichtigkeit für verschiedene Punkte der Oberfläche als umgekehrt proportional dem Producte ihrer Entfernungen von den beiden Spitzen angesehen werden darf.

Es ist noch der entgegengesetzte Fall zu erwähnen, in welchem λ einen nahe an Null gelegenen Werth hat, der Körper also zwei konische Vertiefungen mit geringer Oeffnung (2λ) besitzt. Da ε jederzeit zwischen $\frac{\pi}{\lambda}$ und $\frac{\pi}{2\lambda}$ enthalten ist, so hat hier die Differenz $\varepsilon - \frac{3}{2}$ einen sehr grossen Werth, und die Dichtigkeit convergirt nach dem Innern dieser Vertiefungen zu sehr stark gegen Null. Die Dimensionen des Körpers werden bei immer kleiner werdendem λ und festgehaltenem c immer grösser und grösser. Lässt man aber λ und c gleichzeitig so abnehmen, dass der Quotient $c : \sin\lambda$ einen endlichen Werth d behält, so hat man es schliesslich mit einem Körper zu thun, der durch Rotation eines vollständigen Kreises um eine ihn tangirende Gerade entsteht. Dabei tritt jedoch der Umstand ein, dass durch den Uebergang zur Grenze die Kegelfunctionen in Cylinderfunctionen umgewandelt werden, und da ein specielleres Eingehen auf diese zu weit von unserem Ziele abführen würde, so mag diese kurze Andeutung genügen.

§ 4.

Einige Eigenschaften der Function K^μ. Ihr Zusammenhang mit den Kugel- und Cylinderfunctionen.

A. Die Variable ϑ ist reell und zwischen 0 und π enthalten.

Unter der Voraussetzung eines reellen ϑ kann man für die Function

$$K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \cos\vartheta)}},$$

indem man den reciproken Werth der Wurzelgrösse nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, eine nach Potenzen von $\cos\vartheta$ fortschreitende Reihe ableiten, in der die als Coefficienten der einzelnen Glieder auftretenden Integrale sämmtlich leicht auf die beiden ersten zurückgeführt werden. Das Resultat dieser Rechnung, deren Einzelnheiten ich übergehe, ist in der folgenden Formel enthalten

$$(1.)\qquad K^{\mu}(\cos\vartheta) = \frac{\sqrt{\pi}\,L}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\mu i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu i}{2}\right)} - \frac{2\sqrt{\pi}\,M}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu i}{2}\right)},$$

worin:

$$L = 1 + \frac{(\frac{1}{2})^2+\mu^2}{1.2}\cos\vartheta^2 + \frac{(\frac{1}{2})^2+\mu^2}{1.2}\,\frac{(\frac{5}{2})^2+\mu^2}{3.4}\cos\vartheta^4 + \ldots.$$

$$M = \cos\vartheta + \frac{(\frac{3}{2})^2+\mu^2}{2.3}\cos\vartheta^3 + \frac{(\frac{3}{2})^2+\mu^2}{2.3}\,\frac{(\frac{7}{2})^2+\mu^2}{4.5}\cos\vartheta^5 + \ldots,$$

oder unter Anwendung der Bezeichnung der hypergeometrischen Reihe:

$$L = F\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{1}{2},\ \cos\vartheta^2\right)$$
$$M = \cos\vartheta\, F\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}\mu i,\ \tfrac{3}{2},\ \cos\vartheta^2\right).$$

In dem Integrale, durch welches $K^{\mu}(\cos\vartheta)$ dargestellt ist, lässt sich, weil $\cos\alpha i + \cos\vartheta = 2\left(\cos\frac{\alpha i}{2}^2 - \sin\frac{\vartheta}{2}^2\right)$ ist, die Wurzelgrösse auch in eine nach Potenzen von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, und man èrhält dadurch für $K^{\mu}(\cos\vartheta)$ die folgende sich durch grössere Einfachheit auszeichnende Entwickelung:

$$(2.)\qquad K^{\mu}(\cos\vartheta) = 1 + \frac{4\mu^2+1^2}{2.2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \frac{(4\mu^2+1^2)}{2.2}\,\frac{(4\mu^2+3^2)}{4.4}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4 + \ldots$$

$$\text{oder:}\qquad K^{\mu}(\cos\vartheta) = F\left[\tfrac{1}{2}+\mu i,\ \tfrac{1}{2}-\mu i,\ 1,\ \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2\right].$$

Es kann beiläufig angeführt werden, dass die Beziehung zwischen drei hypergeometrischen Reihen, welche durch Vergleichung der beiden gewonnenen Reihenausdrüke entsteht, ein specieller Fall der allgemeineren Relation

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) = A\,F\left(\alpha,\ \beta,\ \tfrac{1}{2},\ x\right) + B\sqrt{x}\,F\left(\alpha+\tfrac{1}{2},\ \beta+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ x\right),$$

ist, welche sich neben mehreren ähnlichen in Kummer's Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (Crelle's Journal, Bd. 15, S. 82) vorfindet und welche auch aus dem Nachlasse von Gauss in dessen Werken, Bd. III, p. 227 mitgetheilt ist. Ebendaselbst findet sich die folgende Beziehung:

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) = F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+\tfrac{1}{2},\ 1-x\right),$$

woraus sich für $\alpha = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mu i$, $\beta = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mu i$, $x = \cos\vartheta^2$ eine dritte, ebenfalls bemerkenswerthe Reihe für $K^{\mu}(\cos\vartheta)$ ergiebt, nämlich:

$$(3.)\qquad K^{\mu}(\cos\vartheta) = F\left(\tfrac{1}{4}+\frac{\mu i}{2},\ \tfrac{1}{4}-\frac{\mu i}{2},\ 1,\ \sin\vartheta^2\right)$$
$$= 1 + \frac{(\frac{1}{2})^2+\mu^2}{2.2}\sin\vartheta^2 + \frac{[(\frac{1}{2})^2+\mu^2][(\frac{5}{2})^2+\mu^2]}{2.2.4.4}\sin\vartheta^4 + \ldots,$$

welche jedoch ihrer Ableitung gemäss nur für zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gelegene Werthe von ϑ angewandt werden darf und für $\frac{1}{2}\pi < \vartheta < \pi$ zwar noch convergirt, aber die Function $K^{\mu}(-\cos\vartheta)$ zur Summe hat.

Während das Integral, von dem wir ausgingen, für imaginäre Werthe von μ im Allgemeinen seinen Sinn verliert, können die Reihen für beliebige complexe Werthe von μ angewandt werden. Setzt man insbesondere $\mu i = n + \frac{1}{2}$, so erhält man z. B. durch Anwendung von (2.) und (3.) die Gleichungen:

$$\overset{-i(n+\frac{1}{2})}{K}(\cos\vartheta) = 1 - \frac{(n+1)n}{1.1}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.1.2.2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4 - \ldots$$

$$\overset{-i(n+\frac{1}{2})}{K}(\cos\vartheta) = 1 - \frac{(n+1).n}{2.2}\sin\vartheta^2 + \frac{(n+3)(n+1).n(n-2)}{2.2.4.4}\sin\vartheta^4 - \ldots,$$

deren rechte Seiten, wenn unter n eine positive ganze Zahl verstanden wird, bekannte Ausdrücke für die Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ sind, so dass also

$$P^n(\cos\vartheta) = \overset{-i(n+\frac{1}{2})}{K}(\cos\vartheta).$$

Auch aus (1.) ergiebt sich leicht dasselbe Resultat, wenn man beachtet, dass für ein gerades n der Nenner von M, für ein ungerades der von L unendlich gross wird. (Man vergl. auch „Heine, Handbuch der Kugelfunctionen S. 72“).

Wird μ unendlich gross, ϑ unendlich klein genommen, jedoch so, dass $\mu\vartheta$ einen endlichen Werth x behält, so führen (2.) und (3.) auf die Reihe

$$1 + \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^4}{2.2.4.4} + \frac{x^6}{2.2.4.4.6.6} + \ldots$$

und zeigen, dass die Cylinderfunction J (xi) als Grenzfall der Kegelfunction aufgefasst werden kann.

Es ist von Wichtigkeit für $K^{\mu}(\cos\vartheta)$ auch ein Integral zu gewinnen, welches diese Function, wie die Reihen, für beliebige reelle oder imaginäre Werthe von μ darstellt. Um hierzu zu gelangen, kann man von der bekannten Reihe

$$\frac{\cos\mu\beta i}{\cos\frac{1}{2}\beta} = 1 + \frac{4\mu^2+1^2}{1.2}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{(4\mu^2+1^2)(4\mu^2+3^2)}{1.2.3.4}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)^4 + \ldots$$

ausgehen, deren Gültigkeit nur an die Bedingung $-\pi < \beta < \pi$ geknüpft ist, darin, $\sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\omega$ setzen, beide Seiten mit $d\omega$ multipliciren und von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ integriren; man findet dann, weil

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\omega^2 d\omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\omega^4 d\omega = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ u. s. w.},$$

dass:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\mu\beta i}{\cos\frac{1}{2}\beta}d\omega = 1 + \frac{4\mu^2+1^2}{2.2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \frac{(4\mu^2+1^2)(4\mu^2+3^2)}{2.2.4.4}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^4 + \ldots$$

Die rechte Seite ist nach (2.) genau $= K^\mu(\cos\vartheta)$, in der linken kann β vermöge der Gleichung $\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\omega = \sin\frac{\beta}{2}$ als Integrationsvariable eingeführt werden; man erhält so das der gestellten Forderung genügende Integral

$$K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(\beta\mu i)\,d\beta}{\sqrt{\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}},$$

das auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$(4.)\qquad K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(\beta\mu i)\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}}$$

Für die Function $P^n(\cos\vartheta)$ ergiebt sich hieraus, indem man $\mu i = n + \frac{1}{2}$ setzt (wo n wieder eine positive ganze Zahl, die Null mit eingeschlossen, bedeutet), das folgende bestimmte Integral:

$$(a.)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}},$$

und wenn man hierin ϑ in $\pi - \vartheta$ und auch β in $\pi - \beta$ verwandelt und beachtet, dass $P^n(-\cos\vartheta) = (-1)^n P^n(\cos\vartheta)$ ist:

$$(b.)\qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}.$$

Die Aehnlichkeit dieser Integrale mit den bekannten von Dirichlet gegebenen ist so augenfällig, dass sich die Vermuthung aufdrängt, sie seien eine unmittelbare Folge der letzteren, und in der That lassen sich die einen leicht aus den andern ableiten. Es schien mir jedoch trotzdem angemessen, die Formen (a.) und (b.) besonders hervorzuheben, weil sie nicht blos eben so brauchbar sind, sondern sogar in der Anwendung eine etwas bequemere Handhabung gestatten. Um die behauptete Identität nachzuweisen, verbinde man (a.) und (b.) einerseits durch Addition und andererseits durch Subtraction, verwandle aber im zweiten Falle n in n — 1, so dass das neue n nicht $= 0$ sein darf, sondern mindestens $= 1$ sein muss. Man erhält dann:

$$2P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}$$

$$0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(n-\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} - \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin(n-\frac{1}{2})\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}},$$

und hieraus, indem man wiederum addirt und subtrahirt:

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos n\beta \cos \frac{1}{2}\beta d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\cos n\beta \sin\frac{1}{2}\beta d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}$$

$$P^n(\cos\vartheta) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\sin n\beta \sin \frac{1}{2}\beta d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin n\beta \cos\frac{1}{2}\beta d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}},$$

welches die von Dirichlet auf ganz anderem Wege abgeleiteten Formeln sind. Es erscheint überflüssig über den Fall $n = 0$ eine Bemerkung hinzuzufügen.

Um das Verhalten der Function $K^\mu(\cos\vartheta)$ für sehr grosse reelle Werthe von μ kennen zu lernen, kann man das Integral (4.) benutzen und nach bekannter Methode behandeln. (Man vergl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen S. 103.) Verwandelt man nämlich β in $\vartheta - \beta$, so lässt sich (4.) in folgender Form schreiben:

$$K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi} e^{\vartheta\mu} \int_0^\vartheta \frac{e^{-\beta\mu} d\beta}{\sqrt{4\sin\frac{1}{2}\beta \sin(\vartheta - \frac{1}{2}\beta)}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{e^{-(\vartheta-\beta)\mu} d\beta}{\sqrt{4\sin\frac{1}{2}\beta\sin(\vartheta - \frac{1}{2}\beta)}}.$$

Wird μ, wie es erlaubt ist, positiv vorausgesetzt, und wird der Fall $\vartheta = 0$ ausgeschlossen, so nimmt der erste Bestandtheil, wie sich sogleich zeigen wird, für $\mu = \infty$ einen unendlich grossen Werth an, während der zweite sicher endlich bleibt, indem die unter dem Integralzeichen vorkommende Exponentialgrösse innerhalb der Grenzen der Integration stets kleiner als 1 ist. Das erste Integral convergirt, wie durch Verwandlung von β in $\beta:\mu$ hervorgeht, gegen den Werth

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\sin\vartheta}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{\frac{1}{2}-1} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\mu\sin\vartheta}},$$

so dass man schliesslich erhält:

$$(5.)\qquad K^\mu(\cos\vartheta) = \frac{e^{\vartheta\mu}.(1+\delta)}{\sqrt{2\pi\mu\sin\vartheta}},$$

wenn δ eine Grösse bezeichnet, die für ein ins Unendliche wachsendes μ verschwindend klein wird. Es wird also K^μ für $\mu = \infty$ ebenfalls unendlich, aber jedenfalls schwächer als $e^{\pi\mu}$.

Der Werth $\vartheta = \pi$ ist in dieser Näherungsformel ebenfalls auszuschliessen, schon deshalb, weil $K^\mu(\cos\vartheta)$ für $\vartheta = \pi$ überhaupt keinen Sinn behält, sondern für jedes μ unendlich gross wird.

Es bietet sich hiernach die Aufgabe dar, die Function $K^\mu(\cos\vartheta)$ in zwei Bestandtheile zu zerlegen, von denen der erste für sehr nahe an π liegende Werthe von ϑ sich dem Unendlichen, der zweite der Null nähert. Der erste Bestandtheil für sich allein könnte sehr leicht mit Hülfe des Integrales in (4.) bestimmt werden; für die genaue und vollständige Lösung der Aufgabe bedienen wir uns jedoch am kürzesten einer Formel von Gauss, welche einen Zusammenhang zwischen den hypergeometrischen Reihen $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 1-x)$ und $F(\alpha, \beta, 1, x)$ angiebt (l. c. p. 217). Für unsere Zwecke umgeformt lautet dieselbe:

$$(6.)\quad \frac{\pi K^{\mu}(\cos\vartheta)}{\cos\mu\pi i} = -[\log(\cos\frac{\vartheta}{2})^2 + \Psi(-\tfrac{1}{2}+\mu i) + \Psi(-\tfrac{1}{2}-\mu i) - 2\Psi(0)]\ K^{\mu}[\cos(\pi-\vartheta)]$$
$$-A\frac{[\mu^2+(\frac{1}{2})^2]}{1.1}\cos(\frac{\vartheta}{2})^2 - (A+B)\frac{[\mu^2+(\frac{1}{2})^2][\mu^2+(\frac{3}{2})^2]}{1.2.1.2}\cos(\frac{\vartheta}{2})^4$$
$$-(A+B+C)\frac{[\mu^2+(\frac{1}{2})^2][\mu^2+(\frac{3}{2})^2][\mu^2+(\frac{5}{2})^2]}{1.2.3.1.2.3}\cos(\frac{\vartheta}{2})^6$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \;,$$

$$\text{worin}\quad A = \frac{1}{\mu^2+(\frac{1}{2})^2} - \frac{2}{1},\ B = \frac{1}{\mu^2+(\frac{3}{2})^2} - \frac{2}{2},\ C = \frac{1}{\mu^2+(\frac{5}{2})^2} - \frac{2}{3}$$
etc.

Man sieht hieraus, dass für $\vartheta = \pi - \delta$ (δ unendlich klein) $K^{\mu}(\cos\vartheta)$ nur logarithmisch unendlich wird, indem man unter Vernachlässigung endlicher gegen unendliche Grössen setzen darf

$$(7.)\qquad K^{\mu}(-\cos\delta) = -\frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\log\delta\,.$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die Grösse μ endlich bleibt. Aber es ist gerade von besonderem Interesse, den Fall ins Auge zu fassen, wo μ und δ gleichzeitig so zu- und abnehmen, dass ihr Product einen endlichen (positiven) Werth x behält. Beachtet man, dass für $\mu = \infty$

$$\Psi(-\tfrac{1}{2}+\mu i) + \Psi(-\tfrac{1}{2}-\mu i) = \log(\mu^2)$$

gesetzt werden darf, (wofür der Beweis leicht zu finden, wenngleich das Verhalten von Ψ für unendlich grosse reelle Werthe des Arguments hier nicht massgebend sein kann), so sieht man, dass die rechte Seite von (6.) den Ausdruck

$$-2[\log\frac{x}{2} - \Psi(0)]\,J(xi) + 2\left\{\frac{1}{1}\frac{x^2}{2.2} + (\frac{1}{1}+\frac{1}{2})\frac{x^4}{2.4.2.4}\right.$$
$$\left. + (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{x^6}{2.4.6.2.4.6} + \ldots\right\}$$

zur Grenze hat, und dieser Ausdruck, welcher durch 2 Y (xi) bezeichnet werde möge, ist also als der wahre Werth der für $\mu = \infty$, $\mu(\pi - \vartheta) = x$ unter der unbestimmten Form $\infty : \infty$ erscheinenden linken Seite der Gleichung (6.) anzusehen. Da $K^{\mu}(\cos\vartheta)$ und $K^{\mu}[\cos(\pi-\vartheta)]$ zwei verschiedene Lösungen derselben Differentialgleichung sind, so findet das Gleiche auch für die Functionen J (xi) und Y (xi) statt. Die für die letztere, die Cylinderfunction zweiter Art, soeben gegebene Entwicklung ist auch anderweitig bekannt*); es kam hier nur auf ihre Entstehung aus (6.) an. Gelegentlich sei noch die aus (3.) in § 1 für Y (xi) sich ergebende Integralform erwähnt, nämlich:

---

*) Man vergl. die oben citirte Abhandlung des Herrn Hankel, Seite 471, beachte jedoch, dass die Bedeutung von Y (x) dort und hier nicht in völlig übereinstimmender Weise festgestellt ist.

$$Y(xi) = \int_0^\infty \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\beta^2 + x^2}} \quad ^{*)}$$

Die durch (4.) für beliebige reelle oder complexe Werthe von μ definirte Function $K^\mu(\cos\vartheta)$ besitzt, wenn man dem Winkel ϑ irgend einen festen zwischen 0 und π enthaltenen Werth ertheilt und μ allein als variabel betrachtet, die merkwürdige Eigenschaft, dass sie für unendlich viele rein imaginäre Werthe von μ verschwindet, und zeigt also auch in dieser Beziehung die grösste Aehnlichkeit mit der Cylinderfunction. Es kann jedoch auf diesen noch nicht hinlänglich untersuchten Gegenstand, dessen ausführliche Erörterung überdies dem Zwecke meiner Arbeit fremd sein würde, hier nur insoweit eingegangen werden, als es zur Rechtfertigung einer im vorigen § ohne Beweis hingestellten Behauptung unumgänglich nothwendig ist. Es ist einleuchtend, dass $K^\mu(\cos\vartheta)$ beständig positiv bleibt, wenn μ alle rein imaginären Werthe von 0 bis $\frac{\pi i}{2\vartheta}$ durchläuft, indem dann in (4.) die Function unter dem Integralzeichen nur das positive Zeichen hat. Es ist aber auch leicht einzusehen, dass $K^\mu(\cos\vartheta)$ schon für $\mu = \frac{\pi i}{\vartheta}$ einen negativen Werth hat; denn indem man das Integral in zwei andere mit den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\vartheta$, $\frac{1}{2}\vartheta$ und ϑ zerlegt und in dem zweiten β in $\vartheta - \beta$ verwandelt, erhält man

$$K^{\frac{\pi i}{\vartheta}}(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} - \frac{1}{\sqrt{2[\cos(\vartheta-\beta) - \cos\vartheta]}} \right\} \cos\left(\frac{\beta\pi}{\vartheta}\right) d\beta\,,$$

und alle Elemente dieses Integrales sind negativ, weil von den in der Klammer befindlichen Brüchen der erste stets kleiner als der zweite ist. Es besitzt also die Gleichung $K^\mu(\cos\vartheta) = 0$ zwischen den Grenzen $\frac{\pi i}{2\vartheta}$ und $\frac{\pi i}{\vartheta}$ eine rein imaginäre Wurzel, und auch nur eine, weil, wie aus (4.) erhellt, der erste Differentialquotient von K^μ nach μ innerhalb der angegebenen Grenzen sein Zeichen nicht ändert. Dass K^μ für kein reelles μ Null wird, ist ohne Weiteres klar; aber ebensowenig kann dieses für einen complexen Werth $\mu = \xi + \eta i$ (worin ξ von 0 verschieden, und $0 < \eta < \frac{\pi}{\vartheta}$) stattfinden, weil sonst die Integrale

$$\int_0^\vartheta \frac{\cos\beta\xi i \cos\beta\eta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} \quad \text{und} \quad \int_0^\vartheta \frac{\sin\beta\xi i \sin\beta\eta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}}$$

beide verschwinden müssten, was für das zweite, dessen Elemente stets einerlei Zeichen haben, unmöglich ist. Beachtet man nun, dass $K^{-\mu} = K^\mu$, nennt $\pm\, \varepsilon i$ die einzigen zwischen $-\frac{\pi i}{\vartheta}$ und $+\frac{\pi i}{\vartheta}$ enthaltenen Werthe des μ, welche $K^\mu(\cos\vartheta)$ verschwinden machen, und setzt

---

*) Eine andere Integralform hat Herr **Heine**, von der Kugelfunction zweiter Art ausgehend, aufgestellt. (**Borchardt's** Journal, Bd. 69, p. 131).

$$K^\mu(\cos\vartheta) = (\mu^2 + \varepsilon^2)\, f(\mu)\,,$$

so ist die Function $f(\mu)$ für alle complexen Werthe $\mu = \xi + \eta i$, welche dem durch die Ungleichheiten $-\infty < \xi < \infty$, $-\frac{\pi}{\vartheta} < \eta < \frac{\pi}{\vartheta}$ bestimmten Gebiete angehören, eindeutig, stetig und von Null verschieden.

B. Es ist $\vartheta = \eta i$ und η reell.

In diesem Falle stimmt die Function K^μ, welche dem Vorhergehenden entsprechend für ein reelles μ zunächst durch die Gleichung

$$(8.)\qquad K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \cos\eta i)}}$$

definirt werden kann, bis auf einen von η unabhängigen Factor mit der Function $J_\mu(\eta)$ überein, welche ich in meiner in der Einleitung angeführten Abhandlung angewandt habe. Durch Benutzung der dort abgeleiteten Formeln ergeben sich für K^μ die folgenden Darstellungen durch bestimmte Integrale:

$$(8^a.)\qquad K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2i}{\pi\,\mathrm{tg}\,\mu\pi i}\int_\eta^\infty \frac{\sin\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i - \cos\eta i)}}$$

$$(8^b.)\qquad K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2}{\pi}\int_0^\eta \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\eta i - \cos\alpha i)}},\ (\eta > 0)$$

$$(8^c.)\qquad K^\mu(\cos\eta i) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos\alpha)^{\mu i - \frac{1}{2}}\, d\alpha$$

$$(8^d.)\qquad K^\mu(\cos\eta i) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\eta i + i\sin\eta i\cos\alpha)^{-\mu i - \frac{1}{2}}\, d\alpha$$

Mit Hülfe des ersten dieser vier Integrale findet man leicht:

1) für ein unendlich grosses positives μ und ein endliches positives η:

$$(9.)\qquad K^\mu(\cos\eta i) = \sqrt{\frac{2}{-\pi i\mu\sin\eta i}}\cos\left(\mu\eta - \frac{\pi}{4}\right);$$

2) für ein unendlich grosses positives η und ein endliches reelles μ:

$$(10.)\qquad K^\mu(\cos\eta i) = \frac{2ie^{-\frac{1}{2}\eta}}{\pi\,\mathrm{tg}(\mu\pi i)}\left\{\cos\mu\eta\int_0^\infty \frac{\sin\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - 1}} + \sin\mu\eta\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{e^\alpha - 1}}\right\};$$

3) für unendlich grosse Werthe von μ und unendlich kleine von η, wenn das Product $\mu\eta$ einen endlichen positiven Werth x behält:

$$(\mathrm{c.})\qquad J(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin(x\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\,,$$

wofür man auch das folgende bis $x = 0$ inclusive und wenn man will auch für negative x gültige Integral setzen kann:

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Es scheint, dass diese Integralform für die Cylinderfunction bei den Mathematikern bisher wenig oder gar keine Beachtung gefunden hat. Da dieselbe jedoch, wie ich mich schon vor längerer Zeit überzeugt habe, manche nützliche Anwendungen gestattet, indem sie in dem Problem der Elektricitätsvertheilung auf zwei sich berührenden Kugeln eine nicht ganz unerhebliche Reduction des Endresultats ermöglicht und auch besonders geeignet erscheint, um für die von Herrn C. Neumann gelegentlich der Behandlung dieses Problems gegebenen Darstellung einer willkürlichen Function zweier Variablen durch ein dreifaches Integral*) den strengen Beweis zu liefern: so möge noch eine andere Ableitung derselben hier Platz finden. Als Ausgangspunkt diene das am häufigsten für $J(x)$ benutzte Integral:

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha x i} \, d\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Bekanntlich ist nun:

$$\frac{2e^{-\frac{\pi}{4} i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{(1-\alpha^2)\beta^2 i} \, d\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ (wenn } \alpha^2 < 1)$$

$$\text{und} = -\frac{i}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ (wenn } \alpha^2 > 1).$$

Daraus folgt leicht, dass

$$J(x) = \text{dem reellen Theil von } \frac{2e^{-\frac{\pi}{4} i}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty d\beta \, e^{\beta^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta^2 \alpha^2 - x\alpha) i} \, d\alpha.$$

In der That, die dadurch, dass die Integration nach α von $-\infty$ bis ∞ statt von -1 bis 1 ausgedehnt wird, willkürlich hinzugenommenen Bestandtheile sind rein imaginäre Grössen und werden schliesslich dadurch beseitigt, dass das Endresultat auf seinen reellen Theil reducirt wird. Allein diese Umformung ist doch nur für ein reelles x statthaft, weil sonst das zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ genommene Integral seine Bedeutung verliert. Durch Ausführung der Integration ergiebt sich:

$$J(x) = \text{dem reellen Theil von } -\frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} e^{i\left(\beta^2 + \frac{x^2}{4\beta^2}\right)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \sin\left(\beta^2 + \frac{x^2}{4\beta^2}\right),$$

*) Man vergl. p. 149 ff. der Schrift: „Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Von Carl Neumann.“ (Halle 1862.)

oder wenn x positiv vorausgesetzt, das Integral durch die Substitution $\beta^2 = \frac{1}{2}x\beta'$ transformirt, darauf in zwei andere mit den Grenzen 0 und 1, 1 und ∞ zerlegt und im zweiten β' in $1:\beta'$ verwandelt wird:

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{d\beta'}{\beta'} \sin\frac{x}{2}\left(\beta' + \frac{1}{\beta'}\right) \quad (x < 0),$$

oder endlich, wenn $\beta' + \frac{1}{\beta'} = 2\alpha$ gesetzt wird:

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin(x\alpha)d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \quad \text{q. e. d.}$$

§ 5.

Ueber das Additionstheorem für die Function K^μ. — Bemerkung über die Darstellung einer willkürlichen Function von zwei Variablen durch ein dreifaches Integral. — Anwendung auf einen besonderen Fall.

Die Entwicklung der Kugelfunction P^n für ein zusammengesetztes Argument $\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$ nach den Cosinus der Vielfachen von α, welche von Herrn Heine kurz das Additionstheorem für die Kugelfunction genannt wird*), kann bekanntlich auf sehr verschiedenartigen Wegen abgeleitet werden. Während Laplace, dem man dieses wichtige Theorem verdankt, von der Differentialgleichung, welcher P^n genügt, ausgeht, legt Jacobi die Darstellung von P^n durch ein bestimmtes Integral zu Grunde. Beide Methoden können auch zur Entwiklung von $K^\mu(z)$ (für ein reelles μ) angewandt werden, und ich habe die erste benutzt für das Argument

$$z = \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\lambda \sin\lambda' \cos(\varphi - \varphi'),$$

worin λ und λ' reell und zwischen 0 und π enthalten, die zweite für das Argument

$$z = \cos(\vartheta i) \cos(\vartheta' i) + \sin(\vartheta i) \sin(\vartheta' i) \cos(\varphi - \varphi'),$$

worin ϑ und ϑ' reell und von beliebiger Grösse sind. Im ersten Falle liegt z zwischen den Grenzen -1 und 1, im zweiten zwischen 1 und ∞, und in beiden Fällen ist $K^\mu(z)$ nach (8.) durch die Gleichung

$$K^\mu(z) = \frac{\cos\mu\pi i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\mu\alpha d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + z)}},$$

oder was dasselbe ist durch

---

*) Borchardt's Journal, Bd. 69, p. 128. — Die ausführliche Behandlung dieses Theorems und seine Ausdehnung auf die Kugelfunction zweiter Art findet man in Heine's Handbuch der Kugelfunctionen § 67, 70 und 73.

$$(9.)\qquad K^{\mu}(z) = \frac{\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu i - \frac{1}{2}}dx}{\sqrt{1+2zx+x^2}}$$

völlig eindeutig definirt, erlangt jedoch an der Grenze $z = -1$, d. h. wenn gleichzeitig $\lambda = \lambda'$ und $\cos(\varphi - \varphi') = 1$, einen unendlich grossen Werth. Diesem letzteren Umstande ist es zuzuschreiben, dass die gesuchte Entwicklung in den beiden für das Argument z unterschiedenen Fällen nicht genau dieselbe Form annimmt. Sie fällt nämlich im ersten Falle trotz der Symmetrie von z in Bezug auf λ und λ' verschieden aus, je nachdem λ einen grösseren oder kleineren Werth als λ' hat, während sie im zweiten Falle durchaus symmetrisch in Bezug auf ϑ und ϑ' ist. Ich werde mich auf die Behandlung des zweiten Falles beschränken. Es lässt sich in (9.) die stets positive Grösse $1 + 2zx + x^2$ durch das Aggregat der drei Quadrate

$$(\cos\vartheta i + x\cos\vartheta' i)^2 - (i\sin\vartheta i\cos\varphi + ix\sin\vartheta' i\cos\varphi')^2 - (i\sin\vartheta i\sin\varphi + ix\sin\vartheta' i\sin\varphi')^2$$

darstellen, und der reciproke Werth der Quadratwurzel aus diesem Ausdruck, in welchem $\cos\vartheta i + x\cos\vartheta' i$ wesentlich positiv ist, kann vermöge der Formel

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\lambda}{A + B\cos\lambda + C\sin\lambda}$$

durch das folgende bestimmte Integral ersetzt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2zx+x^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\lambda}{\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos(\varphi-\lambda) + x[\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos(\varphi'-\lambda)]}.$$

Diesen Werth denke man sich in (9.) substituirt, darauf die Reihenfolge der Integration umgekehrt und statt x durch die Gleichung

$$x[\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos(\varphi'-\lambda)] = x'[\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos(\varphi-\lambda)]$$

eine neue Integrationsvariable x' eingeführt. Da die in x und x' multiplicirten Grössen stets reelle positive Werthe haben, so bleiben 0 und ∞ die Grenzen des transformirten Integrales. Es lässt sich nun, nachdem man die von x' freien Glieder abgesondert hat, das Integral nach x' ausführen und zwar erhält es den Werth $\pi : \cos\mu\pi i$. Daher wird:

$$(10.)\qquad K^{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos(\varphi-\lambda)]^{\mu i - \frac{1}{2}}}{[\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos(\varphi'-\lambda)]^{\mu i + \frac{1}{2}}}\,d\lambda\,.$$

Dieser Ausdruck entspricht vollkommen dem von Jacobi für P^n (oder Y^n) aufgestellten *) und liefert in gleicher Weise wie der letztere behandelt fast ohne Rechnung die geforderte Entwicklung. Setzt man nämlich:

$$[\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos(\varphi-\lambda)]^{\mu i - \frac{1}{2}} = A_0 + 2A_1\cos(\varphi-\lambda) + 2A_2\cos 2(\varphi-\lambda) + \ldots$$
$$[\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos(\varphi'-\lambda)]^{-\mu i - \frac{1}{2}} = B_0 + 2B_1\cos(\varphi'-\lambda) + 2B_2\cos 2(\varphi'-\lambda) + \ldots,$$

*) Crelle's Journal, Bd. 26. — Mathematische Werke Bd. I., p. 1.

so dass die A und B durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(11.)\quad \begin{cases} A_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos\lambda)^{\mu i - \frac{1}{2}}\cos m\lambda\, d\lambda \\ B_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos\lambda)^{-\mu i - \frac{1}{2}}\cos m\lambda\, d\lambda\,, \end{cases}$$

so ergiebt sich sofort:

$$(12.)\qquad K^\mu(z) = A_0 B_0 + 2A_1 B_1 \cos(\varphi - \varphi') + 2A_2 B_2 \cos 2(\varphi - \varphi') + \dots$$

Die Grössen A_0 und B_0 stimmen resp. mit $K^\mu(\cos\vartheta i)$ und $K^\mu(\cos\vartheta' i)$ überein, wie man sieht, wenn man in (11.) $m = 0$ und in (10.) ϑ' resp. $\vartheta = 0$ macht, und hierdurch ist für die Formeln (8^c) und (8^d) des vorigen § der dort fehlende Beweis nachgeholt. Die allgemeinen Ausdrücke von A_m und B_m lassen sich vermittelst der Jacobi'schen Darstellung von $\sin m\lambda$ durch einen m^{ten} Differentialquotienten in die folgenden transformiren*):

$$(11^a.)$$

$$A_m = \frac{2^{-m}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2} - \mu i)}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2} - \mu i)}\,(-i\sin\vartheta i)^m \int_0^\pi (\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos\lambda)^{\mu i - \frac{1}{2} - m}\sin\lambda^{2m}\, d\lambda$$

$$B_m = \frac{2^{-m}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2} + \mu i)}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2} + \mu i)}\,(-i\sin\vartheta' i)^m \int_0^\pi (\cos\vartheta' i + i\sin\vartheta' i\cos\lambda)^{-\mu i - \frac{1}{2} - m}\sin\lambda^{2m}\, d\lambda\,.$$

Es ist bekannt, dass die hierin vorkommenden Integrale trotz der Verschiedenheit der Exponenten $\mu i - \frac{1}{2} - m$ und $-\mu i - \frac{1}{2} - m$ genau dieselben Functionen von ϑ und ϑ' sind, also für $\vartheta = \vartheta'$ einander gleich werden. Auf dem directesten Wege ist diese Gleichheit von Herrn Heine bewiesen worden, indem er durch eine zweckmässige Substitution das eine Integral unmittelbar in das andere überführt. Ich werde es jedoch vorziehen, durch eine andere Substitution jedes Integral einzeln zu transformiren, indem dadurch gleichzeitig eine neue Integralform für A_m und B_m gewonnen wird, welche vor (11.) und (11^a.) den Vortheil hat, dass die imaginäre Grösse μi (— bei den Kugelfunctionen tritt statt $\mu i - \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl n auf —) aus dem Exponenten verschwindet.

Man setze $\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos\lambda = e^\alpha$, so ergiebt eine leichte Rechnung:

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2} - \mu i)}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2} - \mu i)}\,(-i\sin\vartheta i)^{-m}\int_{-\vartheta}^{\vartheta} e^{\alpha\mu i}(\cos\vartheta i - \cos\alpha i)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha\,.$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass ϑ einen positiven und von Null verschiedenen Werth hat, so dass $-i\sin\vartheta i$ ebenfalls positiv ist. Der imaginäre Theil des Integrales reducirt sich offenbar auf Null, und in dem reellen können 0 und ϑ als Integrationsgrenzen genommen werden, wenn das Resultat verdoppelt wird. Man erhält also:

*) Man vergl. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, p. 136.

$$(11^b.)\quad \begin{cases} A_m = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)} (-i\sin\vartheta i)^{-m} \displaystyle\int_0^{\vartheta} (\cos\vartheta i - \cos\alpha i)^{m-\frac{1}{2}} \cos\mu\alpha\, d\alpha\,, \\ B_m = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)} (-i\sin\vartheta' i)^{-m} \displaystyle\int_0^{\vartheta'} (\cos\vartheta' i - \cos\alpha i)^{m-\frac{1}{2}} \cos\mu\alpha\, d\alpha\,. \end{cases}$$

Es sind daher in der That, wenn von den nur μ und m enthaltenden Factoren abgesehen wird, A_m und B_m dieselben Functionen von ϑ und ϑ'. Bemerkt man, dass die Differentialquotienten des in A_m enthaltenen Integrales trotz der Veränderlichkeit der oberen Grenze bis zum m^{ten} inclusive durch Differentiation unter dem Integralzeichen gebildet werden dürfen, so findet man beiläufig die folgende Relation, worin x statt $\cos\vartheta i$ gesetzt ist:

$$(13.)\qquad \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)} \; \frac{d^m (x^2-1)^{\frac{1}{2}m} A_m}{dx^m} = A_0\,.$$

Während die Gleichungen (11.) — (11^b.) eine unmittelbare Uebertragung auf Kugelfunctionen durch die Annahme $\mu i - \frac{1}{2} = n$ gestatten, ist eine solche Annahme in (9.) unzulässig, und diese Integralform ist also als der Function K^μ eigenthümlich anzusehen. Es soll nun auch noch für A_m ein Integral abgeleitet werden, welches in ähnlicher Weise gebildet ist. Man multiplicire die Gleichungen

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)\,\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)}{\Gamma(m+1)} = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}-\mu i}}{(1+x)^{m+1}} \frac{dx}{x}$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos\lambda)^{\mu i-\frac{1}{2}} \cos m\lambda\, d\lambda$$

mit einander, bezeichne die linke Seite der neuen Gleichung der Kürze halber mit C_m und mache in dem Doppelintegral auf der rechten Seite die Substitution $x = (\cos\vartheta i + i\sin\vartheta i\cos\lambda)\, y$; es wird dann:

$$C_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty y^{-\mu i-\frac{1}{2}} dy \int_0^\pi \frac{\cos m\lambda\, d\lambda}{(1 + y\cos\vartheta i + iy\sin\vartheta i\cos\lambda)^{m+1}}\,,$$

und wenn man $1 + y\cos\vartheta i = \rho x$ und $iy\sin\vartheta i = -\rho\sqrt{x^2-1}$ setzt:

$$C_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{y^{-\mu i-\frac{1}{2}} dy}{\rho^{m+1}} \int_0^\pi \frac{\cos m\lambda\, d\lambda}{(x + \sqrt{x^2-1}\cos\lambda)^{m+1}}\,.$$

Aber die Integration nach λ ist ausführbar (man vergl. Heine's Handbuch der Kugelfunctionen p. 130, 38^a und p. 117, 34^a), und C_m nimmt die Form an:

$$C_m = \frac{1.3 \ldots . (2m-1)}{1.2 \ldots . m} \int_0^\infty \frac{(\sqrt{x^2-1})^m\, y^{-\mu i-\frac{1}{2}} dy}{\rho^{m+1}}\,,$$

oder wenn für $\sqrt{x^2-1}$ und ρ ihre Ausdrücke durch ϑ und y substituirt werden:

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} (-2i\sin\vartheta i)^m \int_0^\infty \frac{y^{m-\mu i-\frac{1}{2}} dy}{(1 + 2y\cos\vartheta i + y^2)^{m+\frac{1}{2}}}\,.$$

Für die Function A_m, von welcher sich C_m nur durch einen constanten Factor, nämlich die linke Seite der ersten der beiden mit einander multiplicirten Gleichungen, unterscheidet, ergiebt sich hieraus, wenn man noch $\log y = \alpha$ setzt, nach einer sehr leichten Umformung:

$$(11^c.)\qquad A_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})(-i\sin\vartheta i)^m}{\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)\,\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{(\cos\vartheta i+\cos\alpha i)^{m+\frac{1}{2}}},$$

und durch Vertauschung von μ mit $-\mu$ und ϑ mit ϑ' erhält man aus A_m auch B_m. Als Folge von (11^c.) ergiebt sich jetzt die Beziehung:

$$(13^a.)\qquad A_m = \frac{(-1)^m\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}m}\,\frac{d^m A_0}{dx^m},$$

wenn wieder x, wie in (13.), die Bedeutung von $\cos\vartheta i$ hat.

Durch Verbindung von (13.) und (13^a.) entsteht die Relation:

$$(14.)\qquad \frac{(-1)^m\,\Gamma(\frac{1}{2}+\mu i)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\mu i)}{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\mu i)\,\Gamma(m+\frac{1}{2}-\mu i)}\,\frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2-1)^m\,\frac{d^m A_0}{dx^m}\right] = A_0\,.$$

Die Gleichungen (13.), (13^a.) und (14.) entsprechen sehr bekannten Eigenschaften der Kugelfunctionen und zu ihrer Ableitung hätten auch die bei den letzteren gebräuchlichen Methoden angewandt werden können.

Da die Functionen A_0 und B_0 identisch mit $K^\mu(\cos\vartheta i)$ und $K^\mu(\cos\vartheta' i)$ sind, so entsteht als unmittelbare Folge des Additionstheorems (12.) die Gleichung:

$$(15.)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K^\mu(\cos\vartheta i\cos\vartheta' i+\sin\vartheta i\sin\vartheta' i\cos\varphi)\,d\varphi = K^\mu(\cos\vartheta i)\,K^\mu(\cos\vartheta' i)\,.$$

Von fundamentaler Bedeutung in der Lehre von den Kugelfunctionen ist der Satz, dass jede endliche Function $f(\lambda,\varphi)$, welche für alle zwischen 0 und π enthaltenen Werthe von λ und alle zwischen 0 und 2π enthaltenen von φ willkürlich gegeben ist, sich in die nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_0^\pi d\lambda'\sin\lambda'\int_0^{2\pi}P^n(z)\,f(\lambda',\varphi')\,d\varphi'$$

$$[z = \cos\lambda\,\cos\lambda' + \sin\lambda\,\sin\lambda'\,\cos(\varphi-\varphi')]$$

entwickeln lässt. Auch diesem Satze lässt sich ein ähnlicher für die Function K^μ an die Seite stellen, nämlich der folgende:

Es sei $f(\vartheta,\varphi)$ eine Function von ϑ und φ, welche von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \infty$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ gegeben ist, nirgends unendlich wird und für $\vartheta = \infty$ stärker gegen Null convergirt als die $(-\frac{1}{2})^{te}$ Potenz von $\cos\vartheta i$ oder e^ϑ (der Art, dass man setzen darf $f(\vartheta,\varphi) = e^{-\vartheta(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\,f_1(\vartheta,\varphi)$, während ε eine positive wenn auch nur beliebig wenig von Null verschiedene Constante vorstellt und $f_1(\vartheta,\varphi)$ für $\vartheta = \infty$ endlich resp. unendlich klein ist), so stimmt der Werth des dreifachen Integrales

$$\text{(a.)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\mu\,\mu\,\frac{1}{i}\operatorname{tg}(\mu\pi i)\int_0^\infty d\vartheta'\,\frac{1}{i}\sin(\vartheta' i)\int_0^{2\pi} K^\mu(z)\,f(\vartheta',\varphi')\,d\varphi'\,,$$

$$\text{worin } z = \cos\vartheta i\,\cos\vartheta' i + \sin\vartheta i\,\sin\vartheta' i\,\cos(\varphi-\varphi')\,,$$

mit dem Functionalwerthe $f(\vartheta, \varphi)$ überein, wenn dieser ein völlig bestimmter ist, und stellt einen gewissen Mittelwerth dar, wenn die Function f in der Umgebung des Punktes (ϑ, φ) vieldeutig ist.

Der Beweis dieses Satzes kann, unter Benutzung der Integralform (8^a) für $K^\mu(z)$, in der Hauptsache nach den von Dirichlet für die Untersuchung der trigonometrischen und Kugelfunctionenreihen geschaffenen Methoden geführt werden, muss jedoch hier unterbleiben, weil durch seine vollständige Durchführung das dieser Arbeit gesteckte Ziel überschritten werden würde. Es möge mir jedoch gestattet sein, den Satz, (obschon sein Beweis nicht mitgetheilt wird), zur Ableitung eines speciellen Resultates zu benutzen, welches sowohl an sich merkwürdig als auch durch die nützlichen Anwendungen, welche es zulässt, von Wichtigkeit ist. Wenn $f(\vartheta, \varphi)$ von φ unabhängig ist, so findet man mit Berücksichtigung von (15.) und wenn man $\cos\vartheta i = x$ und $f(\vartheta, \varphi) = f(x)$ setzt:

$$\text{(b.)}\qquad f(x) = \int_0^\infty d\mu\,\mu\,\frac{1}{i}\operatorname{tg}(\mu\pi i)\,C^\mu K^\mu(x),\quad\text{worin } C^\mu = \int_1^\infty f(x)\,K^\mu(x)\,dx\,.$$

Diese Gleichung soll nun auf den speciellen Fall

$$f(x) = (x-y)^{-\delta},\ \delta > \tfrac{1}{2},\ 1 \leqq x < \infty,\ -\infty < y < 1$$

angewandt werden. Man erhält dann, wenn man $K^\mu(x)$, indem man für den Augenblick statt x wieder $\cos\xi i$ schreibt, durch das Integral (8^b.) ausdrückt:

$$C_\mu = \int^\infty \frac{K^\mu(x)\,dx}{(x-y)^\delta} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi\,\sin\xi i}{i\,(\cos\xi i - y)^\delta}\int_0^\xi \frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\xi i - \cos\alpha i)}}\,,$$

und wenn man in dem Doppelintegrale die Reihenfolge der Integration umkehrt und die neuen Integrationsgrenzen in bekannter Weise bestimmt:

$$C^\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\,\cos\mu\alpha\int_\alpha^\infty \frac{1}{i}\,\frac{\sin\xi i\,d\xi}{(\cos\xi i - y)^\delta\sqrt{2(\cos\xi i - \cos\alpha i)}}\,.$$

Das Integral mit den Grenzen α und ∞ wird durch die Substitution $\cos\xi i - \cos\alpha i = (\cos\alpha i - y)\,z$ zurückgeführt auf:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,(\cos\alpha i - y)^{\delta-\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{2}-1}\,dz}{(1+z)^\delta} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\delta-\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\,\Gamma(\delta)\,(\cos\alpha i - y)^{\delta-\frac{1}{2}}}\,,$$

uud es wird demnach

$$C^\mu = \frac{2\,\Gamma(\delta-\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\delta)}\int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\,d\alpha}{(\cos\alpha i - y)^{\delta-\frac{1}{2}}}\,,$$

welcher Werth nur in (b.) einzusetzen ist, um die gesuchte Darstellung von $f(x) = (x-y)^{-\delta}$

zu erhalten. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall $\delta = 1$. Hier wird vermöge (8.) $C^\mu \cos \mu\pi i = \pi K^\mu(-y)$, und es entsteht also aus (b.) erstens das Integral

$$(16.)\qquad K^\mu(-y) = \frac{\cos(\mu\pi i)}{\pi} \int_1^\infty \frac{K^\mu(x)\,dx}{x-y},$$

welches dem Neumann'schen Integral für die Kugelfunction zweiter Art, nämlich

$$Q^n(x) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P^n(y)\,dy}{x-y},$$

analog gebildet ist, und zweitens die Gleichung

$$(17.)\qquad \frac{1}{x-y} = \pi \int_0^\infty d\mu\,\mu\,\frac{\mathrm{tg}(\mu\pi i)}{i\cos(\mu\pi i)} K^\mu(x)\,K^\mu(-y),$$

welche der Heine'schen Reihe

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\,P^n(x)\,Q^n(y)$$

entspricht und unter ähnlichen Bedingungen wie diese auch für complexe Werthe von x und y ihre Gültigkeit beibehält.

Auch für die Cylinderfunctionen gelten zwei ähnliche Sätze, nämlich:

$$Y(\eta i) = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\eta^2}} = \int_0^\infty \frac{J(\xi)\,\xi\,d\xi}{\xi^2+\eta^2},$$

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2} = \int_0^\infty d\lambda\,\lambda\,J(\lambda\xi)\,Y(\lambda\eta i) \quad (\eta^2 > 0),$$

wie aus (16.) und (17.) mit Rücksicht auf den in § 4 angegebenen Grenzübergang leicht gefunden werden kann.

Mehler.

Verbesserungen.

Seite 1, Zeile 5 u. 6 v. u. ist statt „partiellen Differentialgleichung" zu setzen: „Differentialgleichung".
Seite 10, Zeile 7 v. o. ist statt „wenn $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$" zu lesen: „wenn $\vartheta > \frac{1}{2}\pi$".
Seite 24, Zeile 4 v. o. ist statt „$(x < 0)$" zu lesen: „$(x > 0)$".

so dass die A und B d

(11.) ... $i - \frac{1}{2} \cos m\lambda \, d\lambda$

... $\cos m\lambda \, d\lambda$,

so ergiebt sich sofort:

(12.) $K^{\mu}(z) =$ ... $B_2 \cos 2(\varphi - \varphi') + \dots$

Die Grössen A_0 und B ... $K^{\mu}(\cos \vartheta' i)$ überein, wie man
sieht, wenn man in (1 ... 0 macht, und hierdurch ist
für die Formeln (8^c) ur ... Beweis nachgeholt. Die all-
gemeinen Ausdrücke vo ... er Jacobi'schen Darstellung
von sin mλ durch einer ... enden transformiren*):

$$A_m = \frac{2^{-m}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m - \dots}{\Gamma(m + \frac{1}{2})} \dots i \sin \vartheta i \cos \lambda)^{\mu i - \frac{1}{2} - m} \sin \lambda^{2m} d\lambda$$

$$B_m = \frac{2^{-m}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2} \dots}{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma \dots} \dots \vartheta' i \cos \lambda)^{-\mu i - \frac{1}{2} - m} \sin \lambda^{2m} d\lambda \, .$$

Es ist bekannt, dass di ... der Verschiedenheit der Ex-
ponenten $\mu i - \frac{1}{2} - m$ u ... nctionen von ϑ und ϑ' sind,
also für $\vartheta = \vartheta'$ einand ... en Wege ist diese Gleichheit
von Herrn Heine bewi ... weckmässige Substitution das
eine Integral unmittelba ... es jedoch vorziehen, durch
eine andere Substitution ... , indem dadurch gleichzeitig
eine neue Integralform ... he vor (11.) und (11^a.) den
Vortheil hat, dass die ... functionen tritt statt $\mu i - \frac{1}{2}$
eine ganze Zahl n auf ...
Man setze $\cos \vartheta i + i \sin$ ... echnung:

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(m \dots}{\Gamma(m + \dots} \dots (\cos \vartheta i - \cos \alpha i)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha \, .$$

Vorausgesetzt ist ... n Null verschiedenen Werth
hat, so dass $- i \sin \vartheta i$ ... Theil des Integrales reducirt
sich offenbar auf Null, ... als Integrationsgrenzen ge-
nommen werden, wenn ... ält also:

*) Man vergl. Heine ...