

## Beiträge zur Potentialtheorie.

Die meiner letzten Arbeit \*) zu Grunde gelegten Beziehungen zwischen der Funktion einer komplexen Variablen und dem Potential einer mit Masse belegten Rotationsfläche gaben mir die Mittel an die Hand, den vorhandenen Lösungen des Poisson'schen Problems der Elektrizitätsverteilung auf zwei Kugeln eine neue hinzuzufügen. Wie die so gewonnene Form der Lösung leicht zu den bekannten Reihenentwickelungen des Potentials nach Kugelfunktionen führte, so musste es auch umgekehrt möglich sein, von diesen Reihenentwickelungen ausgehend das Resultat in jene Form zu bringen. Diesen letzteren Weg hat Heine eingeschlagen, die von ihm schon früher gefundene und mir unmittelbar nach Durchsicht meiner Arbeit brieflich mitgeteilte Lösung aber erst in der zweiten Auflage seines Handbuchs der Kugelfunktionen (II, 60) veröffentlicht. Ferner muss ich erwähnen, dass die Theorie des Potentials von symmetrisch um eine Achse verteilten Massen den Gegenstand einer Anzahl von Publikationen Beltrami's bildet, die bis zum Jahre 1877 zurückreichen. Von diesen habe ich nur Kenntnis erlangt durch eine von dem Herrn Verfasser mir gütigst übersandte, im Jahre 1883 erschienene Abhandlung \*\*); darin sind auch mehrere andere Arbeiten angeführt, welche die Theorie der komplexen Grössen für die Potentialtheorie verwenden; namentlich die Abhandlung Kirchhoff's „Zur Theorie des Kondensators“. Obgleich nun das von mir bei einer speciellen Aufgabe angewandte Verfahren namentlich mit Beltrami's Methode manche Berührungspunkte hat, so ist doch der von mir gewählte Ausgangspunkt ein gänzlich verschiedener, und auch die Art und Weise der Benutzung der komplexen Grössen eine nicht unwesentlich andere; ich konnte daher von meiner Absicht nicht zurückkommen, auf dem von mir betretenen und inzwischen weiter verfolgten Wege fortzuschreiten. Wenn ich nun früher auch gezeigt habe, dass jeder komplexen Funktion, die in einem durch eine Rotationsfläche be-

\*) Jahresbericht des Gymnasiums, 1879. Mathematische Annalen, 18. Bd., 1881.

\*\*\*) Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica. (Mem. dell' Accademia di Bologna.)

grenzten Raume gewissen Bedingungen genügt, ein bestimmtes Flächenpotential entspricht, so war ich damals doch noch nicht im Stande, die Frage zu beantworten, ob auch umgekehrt für jedes gegebene Flächenpotential eine derartige komplexe Function existiert. Auch bezogen sich meine Untersuchungen nur auf eine zur Rotationsachse symmetrische Massenverteilung, und es blieb die Frage offen, ob die Resultate auf eine nicht symmetrische Massenverteilung sich ausdehnen liessen. Diese beiden Fragen will ich in der vorliegenden Arbeit zu beantworten versuchen und daran einige Anwendungen auf specielle Fälle knüpfen.

Zunächst entwickle ich, indem ich die Verteilung der Massen als gegeben annehme, die reciproke Entfernung eines Massenpunktes von dem Punkte, auf den das Potential bezogen wird, in eine trigonometrische Reihe; die Koefficienten werden in bekannter Weise bestimmt und haben die Form elliptischer Integrale. Ich transformiere diese dann durch eine imaginäre Substitution, so dass die Grenzen zwei konjugierte komplexe Zahlen werden, oder die Integration, wenn man will, über eine die zwei konjugierten Punkte der Zahlenebene umgebende geschlossene Linie ausgedehnt werden darf. Dadurch tritt eine teilweise Trennung der Variablen ein, indem die Funktion unter dem Integralzeichen in zwei Faktoren zerfällt, von denen der eine nur die Koordinaten des einen, der andere nur die des anderen Punktes enthält. Die so gewonnene Formel 2) bildet die Grundlage für alles Folgende, und ich hätte sie unmittelbar bei den meisten Anwendungen benutzen können. Ich gebe derselben jedoch noch zwei andere Formen [4) und 5)], die zwar eine weniger einfache, aber mehr symmetrische Gestalt besitzen. Die Gleichung 5) führt, wenn man die durch  $x$  und  $y$  bezeichneten Koordinaten durch die Parameter zweier einander rechtwinklig durchschneidenden und zur Hauptachse symmetrischen Kurvenscharen ausdrückt, fast unmittelbar zu einer vollständigen Trennung der Variablen in fast allen den Fällen, wo diese Scharen nur aus Kreisen oder geraden Linien bestehen. Es ist dazu nur erforderlich, die neuen Koordinaten in 5) einzuführen und für die in 5) vorkommende Potenz von  $\zeta - \zeta_s$  eine passende, in jedem einzelnen Falle sich fast unmittelbar darbietende Darstellung in Reihen- oder Integralform einzusetzen. Ich führe diese Entwicklungen in § 2—7 aus für beliebige Punkte zweier Ebenen, Cylinder, Kugeln, Kegel und Kugelkalotten, sofern diese Flächen die einfachsten Lagen zu einander haben, nämlich die Ebenen parallel, die Kugeln concentrisch sind u. s. w. Auch auf zwei nicht concentrische Kugeln und zwei durch Rotation von Kreisbogen mit gemeinschaftlicher Sehne entstehende Flächen ist Gl. 5) in derselben Weise anwendbar. Dagegen versagt sie in dem zuerst von Herrn C. Neumann behandelten Falle der Ringfläche, weil dann eine einheitliche (d. h. für alle bei der doppelten Integration in Betracht kommenden Werte in unveränderter Form gültige) Entwicklung der Potenz von  $\zeta - \zeta_s$  nicht angegeben werden kann; ich wende daher in diesem Falle die Gleichung 2) an. Die so sich ergebenden Entwick-

lungen der reciproken Entfernung zweier Punkte sind, abgesehen von einzelnen nur die Form betreffenden Unterschieden, sämtlich auch anderweitig bekannt; die auf die Kugelkalotten und Kegelflächen bezüglichen sind wohl zuerst von mir (im 68. Bande von Borchardt's Journal und im Programm von 1870) der Hauptsache nach gegeben und später durch C. Neumann und Heine in anderer Weise und vollständiger begründet worden. Auch erkenne ich sehr wohl, dass die jetzt von mir gegebene Ableitung zu Jacobi's bekannter Methode (im 26. Bande von Crelle's Journal) in naher Beziehung steht. Aber abgesehen davon, dass Jacobi sich auf den Fall der eigentlichen Kugelfunktionen beschränkt und die Ausdehnung auf andere Fälle bisher von Anderen in entsprechender Weise nicht durchgeführt ist, unterscheidet sich mein Verfahren wesentlich durch die Anwendung einer Integration zwischen komplexen Grenzen, und es liefert selbst für die Kugel das Endresultat in einer abweichenden Form, indem es für die Kugelfunktionen nicht zu den Laplace'schen Integralformen führt, sondern zu solchen, die analog den Dirichlet'schen gebildet sind. Es unterscheidet sich ferner von anderen Methoden dadurch, dass die Entwicklung in eine trigonometrische Reihe nicht in zweiter, sondern in erster Linie ausgeführt wird, die sogenannten Additionstheoreme also nicht zur Ableitung des Endresultats dienen, sondern aus demselben durch Umstellung der Reihenglieder sich ergeben. Mit Hilfe der Entwicklungen für die reciproke Entfernung zweier Punkte lassen sich die fundamentalen Potentialaufgaben für je zwei der genannten Flächen lösen; es würde jedoch überflüssig sein, darauf einzugehen, da die Rechnung in allen genannten Fällen bereits in anderen Arbeiten durchgeführt ist. Bemerken will ich nur, dass die Transformation der Differentialgleichung  $\Delta v = 0$  in die neuen Koordinaten hierbei vermieden werden kann. — In § 9 gebe ich dann zwei allgemeine Darstellungsformen des Potentials, von denen die erste als eine Ausdehnung der von mir früher gegebenen auf den Fall einer nicht symmetrischen Massenverteilung angesehen werden kann, die zweite, aus der ersten abgeleitete, einen wesentlich anderen Charakter besitzt. Aus diesen Formen lassen sich gewisse zur Darstellung willkürlicher Funktionen geeignete Integralausdrücke ableiten, von ähnlicher Art, wie der von Beltrami gegebene, sich durch Einfachheit auszeichnende. Dieselben erfordern jedoch noch eine genauere Untersuchung, weshalb ich die ursprünglich beabsichtigte Mitteilung unterlasse. Endlich wende ich die erwähnten Sätze auf ein meines Wissens bisher noch nicht gelöstes Problem an, nämlich auf das der Verteilung einer gegebenen Elektrizitätsmenge auf einem aus einer kreisförmigen Scheibe und einem Ringe zusammengesetzten Leiter. Im 18. Bande der Mathematischen Annalen hat Herr C. Neumann das elektrostatische Problem für zwei durch ein Konoid mit einander verbundene Kugeln gelöst. Das dort angegebene Verfahren, die Aufgabe in einfachere zu zerlegen, ist auch bei einem linsenförmigen, mit einem ringförmigen Rande versehenen Körper anwendbar, und es führt in diesem [Falle zu einem etwas einfacheren Resultat, indem gewisse

Integrationen ausführbar werden, sofern man die von mir im 68. Bande von Borchardt's Journal für einen linsenförmigen Körper aufgestellte Formel 18) zu Grunde legt. Ich will mich indessen auf die Behandlung des angegebenen speciellen Falles beschränken. Hier hängt das Resultat nur von Kugelfunktionen der ersten und zweiten Art mit ganzzahligem Index ab, während bei einem nur aus einem Ringe bestehenden Leiter bekanntlich solche Kugelfunktionen auftreten, deren Index die Hälfte einer ungeraden Zahl ist.

§ 1.

Entwicklung der reciproken Entfernung zweier Punkte.

Die Lage eines Punktes P im Raume werde durch die Koordinaten  $x, y, \varphi$  bestimmt, die mit den rechtwinkligen Koordinaten  $X, Y, Z$  durch die Gleichungen

$$X = x, \quad Y = y \cos \varphi, \quad Z = y \sin \varphi$$

zusammenhängen;  $x$  wird von  $-\infty$  bis  $\infty$ ,  $y$  (d. h. der Abstand des Punktes P von der  $x$ -Achse) von 0 bis  $\infty$ , der Winkel  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  gezählt. Die Entfernung zweier Punkte P und  $P_s$  ist:

$$\sqrt{(x - x_s)^2 + y^2 + y_s^2 - 2yy_s \cos(\varphi - \varphi_s)}.$$

Unter der Bedingung, dass nicht gleichzeitig  $x = x_s$  und  $y = y_s$ , dass also P und  $P_s$  nicht auf der Peripherie eines und desselben von der  $x$ -Achse senkrecht und in seinem Mittelpunkte durchschnittenen Kreises liegen, lässt sich der reciproke Wert T der Entfernung durch die trigonometrische Reihe

$$T = \frac{2}{\pi} \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \int_0^\pi \frac{\cos m\psi d\psi}{\sqrt{(x - x_s)^2 + y^2 + y_s^2 - 2yy_s \cos \psi}}$$

darstellen; die Summe ist von  $m = 0$  bis  $m = \infty$  zu nehmen, das Zeichen  $\Sigma'$  soll (wie in Heine's Handbuch der Kugelfunktionen) andeuten, dass das  $m = 0$  entsprechende Glied auf die Hälfte zu reduzieren ist. Durch Anwendung einer bekannten Transformationsformel erhält man T in der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} T = \frac{2}{\pi} \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) (yy_s)^m J_m, \\ J_m = \int_0^\pi \frac{\sin \psi^{2m} d\psi}{[(x - x_s)^2 + y^2 + y_s^2 - 2yy_s \cos \psi]^{m + \frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Ich führe nun, indem ich  $y$  als von Null verschieden voraussetze, an Stelle der reellen Integrationsvariablen  $\psi$  eine komplexe  $\zeta$  ein durch eine der folgenden Substitutionen:

$$\frac{iy(\cos \psi + 1)}{x_s + iy_s - (x - iy)} = \frac{x + iy - \zeta}{x_s + iy_s - \zeta}$$

$$\frac{iy(\cos \psi - 1)}{x_s + iy_s - (x + iy)} = \frac{x - iy - \zeta}{x_s + iy_s - \zeta}$$

$$\frac{(x - x_s)^2 + y^2 + y_s^2 - 2yy_s \cos \psi}{[x_s + iy_s - (x - iy)][x_s + iy_s - (x + iy)]} = \frac{x_s - iy_s - \zeta}{x_s + iy_s - \zeta}$$

Die erste giebt  $\zeta = x + iy, x - iy, x_s + iy_s$  für  $\cos \psi = -1, 1, \infty$ ; die beiden andern werden durch diese Werte ebenfalls identisch erfüllt und sind daher mit der ersten überhaupt gleichbedeutend. Wenn man das Produkt der beiden ersten Formen durch die dritte dividiert, so erhält man

$$\frac{y^2 \sin^2 \psi}{(x - x_s)^2 + y^2 + y_s^2 - 2yy_s \cos \psi} = \frac{(\zeta - x)^2 + y^2}{(\zeta - x_s)^2 + y_s^2},$$

und wenn man die dritte Form und die durch die Division der beiden ersten sich ergebende logarithmisch differenziert, so ergibt sich

$$\frac{d\psi^2}{(x - x_s)^2 + y^2 + y_s^2 - 2yy_s \cos \psi} = \frac{-d\zeta^2}{[(\zeta - x)^2 + y^2][(\zeta - x_s)^2 + y_s^2]}.$$

Das Integral  $J_m$  wird also transformiert in:

$$(2) \quad J_m = y^{-2m} \int_{x-iy}^{x+iy} \frac{-id\zeta [(\zeta - x)^2 + y^2]^{m-\frac{1}{2}}}{[(\zeta - x_s)^2 + y_s^2]^{m+\frac{1}{2}}}$$

wobei über die ihrer Natur nach zweiwertigen Wurzelgrößen

$$R = \sqrt{(\zeta - x)^2 + y^2} \quad \text{und} \quad R_s = \sqrt{(\zeta - x_s)^2 + y_s^2}$$

eine solche Bestimmung zu treffen ist, dass das Integral wie in 1) einen positiven Wert annimmt.

Da  $\zeta$  und  $\cos \psi$  eindeutig durch einander bestimmt sind, so nimmt, während  $\psi$  von 0 bis  $\pi$  wächst,  $\zeta$  von  $x - iy$  bis  $x + iy$  eine Reihe von komplexen Werten an, die in genau vorgeschriebener Weise aufeinanderfolgen und sämtlich von einander verschieden sind. Wir benutzen nun die übliche geometrische Darstellungsweise komplexer Zahlen, um das gewonnene Resultat zu veranschaulichen, und dann einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie, um es von unnötigen Beschränkungen zu befreien. Die Koordinatenebene  $XY$  möge zugleich als Ebene der komplexen Zahlen

$$\zeta = \xi + i\eta$$

betrachtet werden. Die beiden Kreise, welche man im Raume durch die beiden gegebenen Punkte  $(x, y, \varphi)$  und  $(x_s, y_s, \varphi_s)$  symmetrisch um die  $x$ -Achse legt, schneiden diese Ebene in je zwei Punkten, welche zugleich Träger der komplexen Zahlen

$z = x + iy$  und  $z' = x - iy$ ,  $z_s = x_s + iy_s$  und  $z'_s = x_s - iy_s$  sind. Zuzufolge der aus den drei ersten Substitutionsformen abgeleiteten vierten Form ist der Quotient

$$\frac{(\zeta - x)^2 + y^2}{(\zeta - x_s)^2 + y_s^2} \text{ oder } \frac{(\xi - x + i\eta)^2 + y^2}{(\xi - x_s + i\eta)^2 + y_s^2}$$

eine reelle Grösse. Die Bedingung dafür, dass der imaginäre Teil verschwindet, wird offenbar durch die Gleichung ausgedrückt

$$\frac{(\xi - x)^2 + y^2 - \eta^2}{\xi - x} = \frac{(\xi - x_s)^2 + y_s^2 - \eta^2}{\xi - x_s},$$

und in dieser erkennt man, wenn man  $\xi$  und  $\eta$  als laufende Koordinaten betrachtet, leicht die Gleichung eines Kreises, und zwar desjenigen, der durch die vier Punkte  $(x, \pm y)$ ,  $(x_s, \pm y_s)$  der Koordinatebene, also durch die vier Punkte  $z, z', z_s, z'_s$  der Zahlenebene hindurchgeht. Auf diesem Kreise bewegt sich also der Punkt  $\zeta$ , wenn  $\psi$  sich ändert, und da  $\zeta$  kontinuierlich von  $z'$  bis  $z$  sich ändert, wenn  $\psi$  die reellen Werte von 0 bis  $\pi$  durchläuft, die Werte  $\zeta = z'_s$  und  $\zeta = z_s$  aber nur für

$$\cos \psi = [(x - x_s)^2 + y^2 + y_s^2] : 2yy_s \text{ und } \cos \psi = \infty,$$

also nur für imaginäre Werte von  $\psi$  erreicht werden würden, so durchläuft der Punkt  $\zeta$  bei der Integration denjenigen der beiden durch  $z'$  und  $z$  begrenzten Kreisbogen, welcher die Punkte  $z'_s$  und  $z_s$  nicht enthält. In der Nähe der Stelle, wo der Kreisbogen die  $x$ -Achse schneidet, ist  $\eta$ , weil es von negativen zu positiven Werten übergeht, im Wachsen begriffen, folglich  $d\eta$  positiv. Zugleich ist dort  $d\xi = 0$  zu setzen, also  $-id\zeta = d\eta$ . Damit also das Element des Integrales in 2) einen positiven Wert annehme, hat man die Wurzelgrössen  $R$  und  $R_s$ , welche an dieser Stelle beide reell sind, hier entweder beide positiv oder beide negativ zu wählen. Im ganzen übrigen Verlauf der Integration ist dann jede einzelne der Grössen  $R$  und  $R_s$  ohne Zweideutigkeit dadurch bestimmt, dass sie mit  $\zeta$  sich kontinuierlich ändern muss. Aus bekannten Sätzen ergibt sich nun, unter welchen Bedingungen das Integral bei Veränderung des Integrationsweges seinen Wert behält. Es ist aber notwendig die Bedingungen so zu formulieren, dass sie eine sichere und bequeme Anwendung der Gleichung 2) gestatten. Diese Gleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$(2') \quad J_m = y^{-2m} \int_{z'}^z -id\zeta (\zeta - z)^{m-\frac{1}{2}} (\zeta - z')^{m-\frac{1}{2}} (\zeta - z_s)^{-m-\frac{1}{2}} (\zeta - z'_s)^{-m-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion unter dem Integralzeichen besitzt die Verzweigungspunkte  $z, z', z_s, z'_s$ , an den Integrationsgrenzen wird sie Null, ausser wenn die ganze Zahl  $m$  den Wert Null hat; in letzterem Falle wird sie an den Grenzen unendlich, aber das Integral behält einen

endlichen Wert. Der Punkt  $\zeta = \infty$  ist kein Unstetigkeitspunkt, da die Funktion im Unendlichen sich wie  $\zeta^{-2}$  verhält. Denkt man sich die Integration statt auf dem betrachteten auf irgend einem anderen die Punkte  $z'$  und  $z$  verbindenden Kreisbogen ausgeführt (— nur nicht auf demjenigen, der auch durch  $z_s$  und  $z_s'$  hindurchgeht —), so nimmt das Integral ebendenselben Wert an. Denn die beiden Integrationswege begrenzen zwei Flächenstücke, von denen eines (entweder das endliche oder das unendliche) die Punkte  $z_s$  und  $z_s'$  nicht enthält, und innerhalb dieses Flächenstückes ist die zu integrierende Funktion eindeutig, stetig und endlich. Offenbar wird man nun, ohne dass eine Wertänderung des Integrals eintritt, die Integration erstrecken dürfen über jede Linie, die von  $z'$  über nur einen Punkt  $\xi^0$  der reellen Achse bis  $z$  führt, durch  $\xi^0$  in zwei symmetrische Teile geteilt wird und nicht durch  $z_s'$  und  $z_s$  hindurchgeht, sofern man die zu integrierende Funktion von dem in  $\xi^0$  stattfindenden reellen und positiven Werte

$$[(\xi^0 - x)^2 + y^2]^{m-\frac{1}{2}} [(\xi^0 - x_s)^2 + y_s^2]^{-m-\frac{1}{2}}$$

ausgehend sich stetig ändern lässt.

Selbst wenn bei der Integration der Punkt  $\xi + i\eta$  die Punkte  $z$  und  $z_s$ , der Punkt  $\xi - i\eta$  wegen der Symmetrie des Integrationsweges ebenso oft die Punkte  $z'$  und  $z_s'$  umkreiste, würde eine Wertänderung des Integrales nicht eintreten, wie sich mit Rücksicht darauf ergibt, dass das Integral über eine einzige geschlossene, alle vier Punkte  $z$ ,  $z_s$ ,  $z'$ ,  $z_s'$  umgebende Linie den Wert 0 hat. Endlich ist es auch gestattet, als Integrationsweg zwei von  $z'$  und  $z$  bis ins Unendliche führende, zur reellen Achse symmetrisch liegende und sie nicht schneidende Linien zu wählen, da die Funktion im Unendlichen sich wie  $\zeta^{-2}$  verhält.

Das Integral  $J_m$  lässt sich nun noch unter andern Formen darstellen, von denen namentlich folgende bemerkenswert erscheinen. Zunächst erhält man einen ganz ähnlich wie 2) geformten Ausdruck, wenn man beachtet, dass  $J_m$  nach 1) seinen Wert nicht ändert, wenn man  $x$ ,  $y$  mit  $x_s$ ,  $y_s$  vertauscht:

$$(3) \quad J_m = y_s^{-2m} \int_{x_s - iy_s}^{x_s + iy_s} \frac{-id\zeta_s [(\zeta_s - x_s)^2 + y_s^2]^{m-\frac{1}{2}}}{[(\zeta_s - x)^2 + y^2]^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Hierin ist  $y_s$  als von Null verschieden vorausgesetzt. Die Werte von  $J_m$  für  $y = 0$ , resp.  $y_s = 0$  können jedoch aus 2) und 3) bestimmt werden, wenn man die Integrale zuvor durch eine der Substitutionen

$$\zeta = x + iy \cos \lambda, \quad \text{resp.} \quad \zeta_s = x_s + iy_s \cos \lambda_s$$

transformiert; unmittelbar ergeben sich dieselben aus 1). Nun ergibt sich für  $y = 0$  aus 3)

$$J_m = y_s^{-2m} \int_{z'_s}^{z_s} \frac{-id\zeta_s [(\zeta_s - x_s)^2 + y_s^2]^{m-\frac{1}{2}}}{(x - \zeta_s)^{2m+1}},$$

falls die Potenz im Zähler mit solchem Vorzeichen genommen wird, dass das Integral einen positiven Wert erhält. Dieses Integral ist gleich der Hälfte desjenigen, das über eine die Punkte  $z'_s$  und  $z_s$  umschliessende und den Punkt  $x$  ausschliessende Linie genommen wird, oder auch gleich der Hälfte eines nur um den Punkt  $x$  herum in gehöriger Richtung erstreckten. Ermittelt man seinen Wert durch Anwendung eines Satzes von Cauchy, so erhält man  $J_m$  in der Form

$$J_m = \frac{\pi y_s^{-2m}}{\Gamma(2m)} \frac{\partial^{2m} [(x - x_s)^2 + y_s^2]^{m - \frac{1}{2}}}{\partial x^{2m}}.$$

Andererseits ergibt sich aus 1), wenn man beachtet, dass

$$\int_0^\pi \sin \psi^{2m} d\psi = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m} = \frac{2^{2m} \Gamma(m - \frac{1}{2}) \Gamma(m - \frac{1}{2})}{\Gamma(2m)}$$

ist, als dritter für  $y = 0$  geltender Ausdruck von  $J_m$  der folgende:

$$J_m = \frac{2^{2m} [\Gamma(m - \frac{1}{2})]^2}{\Gamma(2m)} \cdot \frac{1}{[(x - x_s)^2 + y_s^2]^{m + \frac{1}{2}}}.$$

Wenn man mit diesem die beiden vorher gefundenen vergleicht, so gelangt man zu den Relationen:

$$\frac{1}{[(x - x_s)^2 + y_s^2]^{m + \frac{1}{2}}} = \frac{\pi (2 y_s)^{-2m}}{[\Gamma(m - \frac{1}{2})]^2} \cdot \frac{\partial^{2m} [(x - x_s)^2 + y_s^2]^{m - \frac{1}{2}}}{\partial x^{2m}}$$

$$\frac{1}{[(x - x_s)^2 + y_s^2]^{m + \frac{1}{2}}} = \frac{(2 y_s)^{-2m} \Gamma(2m)}{[\Gamma(m - \frac{1}{2})]^2} \cdot \int_{z'_s}^{z_s} \frac{-id\zeta_s [(\zeta_s - x_s)^2 + y_s^2]^{m - \frac{1}{2}}}{(x - \zeta_s)^{2m+1}}$$

In der ersten derselben ersetze man  $x$  durch die komplexe Zahl  $\zeta$ ; verbindet man dann die so entstehende Gleichung mit 2), so erhält man eine neue Darstellung des allgemeinen Wertes von  $J_m$ , der man durch  $m$ -malige teilweise Integration leicht eine symmetrische Gestalt giebt. Auch in der zweiten Relation darf man  $\zeta$  statt  $x$  schreiben, sofern man die durch  $z'_s$  und  $z_s$  begrenzte Linie, auf welcher nach  $\zeta_s$  integriert wird, als einen Querschnitt betrachtet, der von dem Punkte  $\zeta$  nicht überschritten werden darf. Die Kombination der erhaltenen Gleichung mit 2) liefert für  $J_m$  eine Darstellung durch ein Doppelintegral. Die beiden neuen Formen von  $J_m$  lauten:

$$(4) \quad J_m = \frac{\pi (2 i y_s)^{-2m}}{i [\Gamma(m - \frac{1}{2})]^2} \int_{z'}^z \frac{\partial^m [(\zeta - x)^2 + y^2]^{m - \frac{1}{2}}}{\partial \zeta^m} \cdot \frac{\partial^m [(\zeta - x_s)^2 + y_s^2]^{m - \frac{1}{2}}}{\partial \zeta^m} d\zeta$$

$$(5) J_m = \frac{(2yy_s)^{-2m} \Pi(2m)}{[\Pi(m - \frac{1}{2})]^2} \int_{z'}^z \int_{z'_s}^{z_s} -d\zeta d\zeta_s \frac{[(\zeta - x)^2 + y^2]^{m-\frac{1}{2}} [(\zeta_s - x_s)^2 + y_s^2]^{m-\frac{1}{2}}}{(\zeta - \zeta_s)^{2m+1}}$$

Die Bedingungen, unter denen diese Gleichungen gelten, sind aus der gegebenen Ableitung unmittelbar zu entnehmen. Die Integrationswege schneiden die reelle Achse, in nur je einem Punkte, ( $\xi^0$  und  $\xi_s^0$ ), werden durch diesen Punkt in zwei symmetrische Teile geteilt, und es darf [in Gl. 5)] der eine Weg den andern nicht schneiden. In 4) müssen die Grössen

$$((\xi^0 - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad ((\xi_s^0 - x_s)^2 + y_s^2)^{m-\frac{1}{2}}$$

mit demselben Vorzeichen genommen werden. Für 5) erhält man die Bedingung für die Vorzeichen zunächst in der Form, dass von den drei Grössen

$$((\xi^0 - x_s)^2 + y_s^2)^{m-\frac{1}{2}}, \quad ((\xi_s^0 - x_s)^2 + y_s^2)^{m-\frac{1}{2}}, \quad \xi^0 - \xi_s^0$$

die erste positiv ist, die zweite das Vorzeichen der dritten hat. Diese Bedingung lässt sich jedoch dahin erweitern, dass das Produkt aller drei Grössen positiv sein muss, die erste aber auch negativ sein darf; und mit Rücksicht auf die bei 4) auftretende Bedingung erhält man die für 5) geltende schliesslich in der Form, dass die Grössen

$$((\xi^0 - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad ((\xi_s^0 - x_s)^2 + y_s^2)^{m-\frac{1}{2}}$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen, je nachdem die Differenz  $\xi^0 - \xi_s^0$  positiv oder negativ ist.

## § 2.

### Hülfsformeln zur Darstellung der Potenz von $\zeta - \zeta_s$ .

Den Entwicklungen der nächsten Paragraphen liegt die folgende aus 1) und 5) in § 1 sich unmittelbar ergebende Darstellung von T zu Grunde

$$(6) T = 2 \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \cdot 2^{-2m} (yy_s)^{-m} \\ \times \frac{\Pi(2m)}{\pi [\Pi(m - \frac{1}{2})]^2} \iint -d\zeta d\zeta_s \frac{[(\zeta - x)^2 + y^2]^{m-\frac{1}{2}} [(\zeta_s - x_s)^2 + y_s^2]^{m-\frac{1}{2}}}{(\zeta - \zeta_s)^{2m+1}}$$

Dieselbe soll in dem in der Einleitung angegebenen Sinne angewandt werden auf den Fall der Ebene, der Cylinderfläche, der Kugelfläche, der Kegelfläche und der Kugelkalotte. Die vollständige Trennung der Variablen geschieht durch Einsetzung der geeigneten Koordinaten und einer dem jedesmaligen Falle angemessenen Entwicklung der  $-(2m+1)$ ten Potenz von  $\zeta - \zeta_s$ . Für die Ebene ist die bekannte Integralformel zu wählen

$$I. \quad \Gamma(2m) \cdot (\zeta - \zeta_s)^{-2m-1} = \int_0^\infty e^{-(\zeta - \zeta_s) \lambda} \lambda^{2m} d\lambda,$$

welche unter der Bedingung gilt, dass  $\zeta - \zeta_s$  einen positiven reellen Teil hat. Für die Cylinderfläche ist eine mit der vorstehenden im wesentlichen identische Formel zu nehmen für die Kugelfläche der binomische Satz

$$II. \quad \frac{\Gamma(2m)}{(\zeta - \zeta_s)^{2m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n-m)} \frac{\zeta_s^{n-m}}{\zeta^{n+1+m}}, \quad (\text{mod } \zeta > \text{mod } \zeta_s),$$

und für die Kegelfläche (und im wesentlichen auch für die Kugelkalotte) die folgende Integralformel, die als ein Analogon des binomischen Satzes betrachtet werden kann:

$$III a. \quad \frac{\Gamma(2m)}{(\zeta - \zeta_s)^{2m+1}} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} + m)}{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} - m)} \frac{\zeta_s^{\mu i - \frac{1}{2} - m}}{\zeta^{\mu i + \frac{1}{2} + m}} \cdot \frac{e^{-\mu\pi}}{\cos \mu\pi} d\mu.$$

Dieselbe gilt unter der Bedingung, dass der imaginäre Teil von  $\log \sqrt{\zeta} - \log \sqrt{\zeta_s}$  zwischen 0 und  $\pi i$  liegt und der Quotient der beiden Potenzen von  $\zeta_s$  und  $\zeta$  ist eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\zeta_s^{\mu i - \frac{1}{2} - m}}{\zeta^{\mu i + \frac{1}{2} + m}} = \frac{\zeta_s^{-m}}{\zeta^{m+1}} \cdot e^{-(2\mu i - 1)(\log \sqrt{\zeta} - \log \sqrt{\zeta_s})}$$

Setzt man  $\log \sqrt{\zeta} = \frac{1}{2}ti$  und  $\log \sqrt{\zeta_s} = \frac{1}{2}t_s i$ , also  $\zeta = e^{ti}$  und  $\zeta_s = e^{t_s i}$ , so nimmt III a die Gestalt an

$$III b. \quad \frac{\Gamma(2m)}{[2 \sin \frac{1}{2}(t - t_s)]^{2m+1}} = \frac{(-1)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} + m)}{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} - m)} \frac{e^{\mu(t - t_s - \pi)}}{\cos \mu\pi} d\mu$$

und erfordert zu ihrer Gültigkeit, dass der reelle Teil von  $t - t_s$  grösser als Null und kleiner als  $2\pi$  sei. Der Quotient der unter dem Integralzeichen vorkommenden Gaussischen Funktionen ist eine algebraische Funktion von  $\mu$  und ändert seinen Wert nicht, wenn  $\mu$  in  $-\mu$  verwandelt wird. Denn es ist:

$$\begin{aligned} & \Gamma(\mu i - \frac{1}{2} + m) : \Gamma(\mu i - \frac{1}{2} - m) \\ &= (\mu i - \frac{1}{2} + m) (\mu i - \frac{3}{2} + m) \dots (\mu i + \frac{1}{2}) (\mu i - \frac{1}{2}) \dots (\mu i + \frac{1}{2} - m) \\ &= (-1)^m [\mu^2 + (\frac{1}{2})^2] [\mu^2 + (\frac{3}{2})^2] \dots [\mu^2 + (m - \frac{1}{2})^2]. \end{aligned}$$

Der Beweis der Formel III a (oder III b) kann leicht auf folgende Weise geführt werden. Bekanntlich ist:

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2a\pi\mu} d\mu}{1+c^2}$$

vorausgesetzt, dass der reelle Teil von  $a$  zwischen 0 und 1 liegt. Setzt man hierein

$a\pi i = \log \sqrt{\zeta} - \log \sqrt{\zeta_s}$ , also  $e^{a\pi i} = \sqrt{\zeta} : \sqrt{\zeta_s}$ ,  
 so wird, falls der imaginäre Teil der Differenz der Logarithmen zwischen 0 und  $\pi i$  ent-  
 halten ist (der Quotient  $\sqrt{\zeta} : \sqrt{\zeta_s}$  also einen positiven imaginären Teil hat):

$$\frac{2i \sqrt{\zeta} \cdot \sqrt{\zeta_s}}{\zeta - \zeta_s} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\mu (\log \sqrt{\zeta} - \log \sqrt{\zeta_s})} \cdot \frac{e^{-\pi\mu} d\mu}{\cos \mu\pi i},$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$\text{III. } \frac{1}{\zeta - \zeta_s} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_s^{\mu i - \frac{1}{2}}}{\zeta^{\mu i + \frac{1}{2}}} \frac{e^{-\mu\pi} d\mu}{\cos \mu\pi i}.$$

Indem man diese Gleichung m mal nach  $\zeta$  und m mal nach  $\zeta_s$  differentiirt und das  
 bei III b über den Quotienten der beiden II-Funktionen Gesagte beachtet, so erhält man  
 die zu beweisende Gleichung III a.

Durch Anwendung des Cauchy'schen Fundamentalsatzes

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta_s) d\zeta_s}{\zeta_s - \zeta}$$

ergibt sich aus III der folgende Satz, von dem ich zwar keine Anwendungen  
 geben werde, den ich aber anführe, weil mittels desselben, auch ohne auf die Entwicklung  
 der reciproken Entfernung zweier Punkte zurückzugehen, die Potentialaufgaben für den  
 Kegel gelöst werden können, falls die Werte des Potentials an der Oberfläche gegeben sind:  
 Eine innerhalb eines Winkels eindeutige, stetige und endliche Funktion  
 einer komplexen Variablen lässt sich durch das nach Potenzen mit imagi-  
 närem Exponenten fortschreitende Integral

$$\text{IV. } f(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} C\mu \zeta^{\mu i - \frac{1}{2}} d\mu$$

darstellen, wenn  $\lim \sqrt{\zeta} f(\zeta) = 0$  ist für  $\zeta = 0$  und  $\zeta = \infty$ .

Der Koeffizient  $C\mu$  kann in der Form angegeben werden:

$$4\pi \cos(\mu\pi) \cdot C\mu = e^{\mu\pi} \int_0^{\infty} f(\zeta_\alpha) \zeta_\alpha^{-\mu i - \frac{1}{2}} d\zeta_\alpha + e^{-\mu\pi} \int_0^{\infty} f(\zeta_\beta) \zeta_\beta^{-\mu i - \frac{1}{2}} d\zeta_\beta,$$

wo die Integrale vom Scheitel aus resp. längs des ersten und zweiten Schenkels zu nehmen  
 sind und die Drehungsrichtung vom ersten Schenkel zum zweiten eine positive ist. —  
 Setzt man

$$\zeta = r e^{i\vartheta}, \quad \zeta_\alpha = s e^{i\alpha}, \quad \zeta_\beta = t e^{i\beta},$$

so ist  $\beta - \alpha$  die Grösse des betrachteten Winkels, und es finden die Bedingungen

$$\alpha < \vartheta < \beta < 2\pi + \alpha$$

statt. — Nimmt man z. B.  $\vartheta = 0$  und lässt auch  $\alpha$  und  $\beta$  in 0 übergehen, so erhält man folgende Darstellungsform der Funktion  $f(r)$  für das reelle und positive Argument  $r$ :

$$V. \quad f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu r^{\mu i - \frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f(s) s^{-\mu i - \frac{1}{2}} ds.$$

Dieselbe erweist sich, wenn man  $\log r = \varrho$  setzt, als identisch mit der Darstellung einer Funktion durch ein Fourier'sches Doppelintegral. Aber die hier gelegentlich mitgeteilte Ableitung entscheidet nichts in Betreff der Gültigkeit der Formel für eine willkürlich gegebene Funktion.

### § 3.

#### E b e n e.

Gehören die Punkte  $P$  und  $P_s$  zwei verschiedenen Ebenen an und wird  $x$  grösser als  $x_s$  vorausgesetzt, so kann man die Formel I des vorigen Paragraphen in Anwendung bringen, wenn man in (6) nach  $\zeta$  und  $\zeta_s$  geradlinig von  $x - iy$  bis  $x + iy$  und von  $x_s - iy_s$  bis  $x_s + iy_s$  integriert. Setzt man

$$\zeta = x + iy\alpha \quad \text{und} \quad \zeta_s = x_s + iy_s\alpha_s,$$

so wird die reciproke Entfernung der Punkte:

$$T = 2 \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q \cdot (1 - \alpha^2)^{m - \frac{1}{2}} (1 - \alpha_s^2)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha d\alpha_s,$$

$$Q = \frac{2^{-2m} y^m y_s^m}{\pi [H(m - \frac{1}{2})]^2} \int_0^{\infty} e^{-(x - x_s + iy\alpha - iy_s\alpha_s)\lambda} \lambda^{2m} d\lambda.$$

Durch Einsetzung des Wertes von  $Q$  und Umkehrung der Integrationsfolge entsteht hieraus die gesuchte Entwicklung von  $T$ :

$$(7) \quad T = 2 \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \int_0^{\infty} e^{-(x - x_s)\lambda} J^m(\lambda y) J^m(\lambda y_s) d\lambda,$$

wenn die Funktion  $J^m$  für das Argument  $z$  definiert wird durch die Gleichung

$$2^m \sqrt{\pi} H(m - \frac{1}{2}) \cdot J^m(z) = z^m \int_{-1}^1 e^{iz\alpha} (1 - \alpha^2)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha.$$

welche leicht zu der Darstellung durch die unendliche Reihe:

$$J^m(z) = \frac{z^m}{2^m \Gamma(m)} \cdot \left( 1 - \frac{z^2}{2(2m+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot (2m+2)(2m+4)} \dots \right)$$

führt. Beide Darstellungen von  $J^m(z)$  sind bekannte Formen der Bessel'schen Funktionen erster Art. Für die Gleichung (7) hat Heine (Hdb. d. Kugelf. 2. Aufl. II. 175) zwei Ableitungen gegeben, von denen die erste der hier gegebenen sachlich nahe steht, jedoch das von Herrn C. Neumann gefundene Additionstheorem der Bessel'schen Funktionen als bekannt voraussetzt.

#### § 4.

### Cylinder.

Liegen die Punkte P und  $P_s$  auf zwei Cylinderflächen von den Radien  $y$  und  $y_s$  und ist  $y$  grösser als  $y_s$ , so kann man für  $\zeta$  und  $\zeta_s$  dieselben Substitutionen wie im vorigen Paragraphen anwenden, muss jedoch, da  $\zeta - \zeta_s$  innerhalb der Integrationsgrenzen nicht Null werden darf, zwar nach  $\alpha_s$  wiederum von  $-1$  über  $0$  nach  $1$ , aber nach  $\alpha$  von  $-1$  über  $+\infty$  bis  $1$  integrieren. Es lässt sich also T in zwei Teile zerlegen, so dass  $\alpha$  in dem einen alle Werte von  $-1$  bis  $-\infty$ , in dem andern alle Werte von  $\infty$  bis  $1$  annimmt. Beide Teile lassen sich, indem man in dem ersten  $\alpha$  in  $-\alpha$  und gleichzeitig  $\alpha_s$  in  $-\alpha_s$  verwandelt, zu folgendem Ausdruck vereinigen:

$$T = 2 \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \int_1^\infty \int_{-1}^1 S \cdot (\alpha^2 - 1)^{m-\frac{1}{2}} (1 - \alpha_s^2)^{m-\frac{1}{2}} d\alpha d\alpha_s$$

$$S = \frac{2^{-2m} y^m y_s^m}{\pi [\Gamma(m - \frac{1}{2})]^2} \left( \frac{\Gamma(2m)}{(y\alpha - y_s\alpha_s - ix + ix_s)^{2m+1}} + \frac{\Gamma(2m)}{(y\alpha - y_s\alpha_s + ix - ix_s)^{2m+1}} \right)$$

Da jetzt  $y\alpha - y_s\alpha_s$  nur positive Werte annimmt, findet man nach 1):

$$S = \frac{2^{-2m} y^m y_s^m}{\pi [\Gamma(m - \frac{1}{2})]^2} \cdot 2 \int_0^\infty e^{-(y\alpha - y_s\alpha_s)\lambda} \cos(x - x_s)\lambda \cdot \lambda^{2m} d\lambda$$

Demnach gilt in diesem Falle für T die Entwicklung

$$(8) \quad T = \frac{4}{\pi} \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \int_0^\infty \cos(x - x_s)\lambda \cdot K^m(\lambda y) J^m(\lambda y_s) d\lambda$$

wenn die Funktionen  $J^m$  und  $K^m$  für ein positives rein imaginäres Argument  $zi$  definiert sind durch:

$$2^m \sqrt{\pi} \Gamma(m - \frac{1}{2}) J^m(zi) = (zi)^m \int_{-1}^1 e^{-z\alpha} (1 - \alpha^2)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha$$

$$2^m \Gamma(m - \frac{1}{2}) K^m(zi) = \sqrt{\pi} (-zi)^m \int_1^\infty e^{-z\alpha} (\alpha^2 - 1)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha .$$

Das Produkt beider Werte ist reell und positiv. Die Funktion  $K^m$  ist die Besselsche Funktion zweiter Art. Sie kann, wenn man  $\alpha$  in  $\alpha : z$  verwandelt und für  $\Gamma(m - \frac{1}{2})$  seinen Wert setzt, auch in folgender Form dargestellt werden:

$$K^m(zi) = \frac{(zi)^{-m}}{1 \cdot 3 \dots (2m - 1) i} \int_z^\infty e^{-\alpha} (\alpha^2 - z^2)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha .$$

### § 5.

### K u g e l.

Der Punkt  $P$  liege auf einer Kugel vom Radius  $r$ , der Punkt  $P_s$  auf einer konzentrischen Kugel mit kleinerem Radius  $r_s$ . In der Gleichung 6) des § 2 sind dann die Integrationen nach  $\zeta$  und  $\zeta_s$  auf den die Punkte  $x \pm iy$  und  $x_s \pm iy_s$  verbindenden Kreisbogen auszuführen. Führt man Polarkoordinaten ein, indem man setzt

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad \zeta = r \cos \alpha + i r \sin \alpha = r e^{i\alpha}$$

$$x_s = r_s \cos \vartheta_s, \quad y_s = r_s \sin \vartheta_s, \quad \zeta_s = r_s e^{i\alpha_s},$$

so werden die Integrationsgrenzen für  $\alpha$  und  $\alpha_s$  resp.  $\pm \vartheta$  und  $\pm \vartheta_s$ . Man findet nun

$$d\zeta \cdot y^{-m} ((\zeta - x)^2 + y^2)^{m - \frac{1}{2}} = i d\alpha \zeta^m \sin \vartheta^{-m} e^{\frac{1}{2}i\alpha} (2 \cos \alpha - 2 \cos \vartheta)^{m - \frac{1}{2}},$$

also:

$$T = 2 \sum' \cos m(\vartheta - \vartheta_s) 2^{-2m} (\sqrt{\pi} \Gamma(m - \frac{1}{2}))^{-2} (\sin \vartheta \sin \vartheta_s)^{-m} \times \\ \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \int_{-\vartheta_s}^{\vartheta_s} Z \cdot (2 \cos \alpha - 2 \cos \vartheta)^{m - \frac{1}{2}} (2 \cos \alpha_s - 2 \cos \vartheta_s)^{m - \frac{1}{2}} d\alpha d\alpha_s,$$

wenn:

$$Z = \frac{\Gamma(2m) (\zeta \zeta_s)^m e^{\frac{1}{2}i\alpha + \frac{1}{2}i\alpha_s}}{(\zeta - \zeta_s)^{2m+1}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n-m)} \frac{r_s^n}{r^{n+1}} \frac{e^{(n+\frac{1}{2})i\alpha_s}}{e^{(n+\frac{1}{2})i\alpha}} .$$

Hiernach wird also:

$$(9) \quad T = 2 \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \sum_{n=m}^{n=\infty} \frac{H(n+m)}{H(n-m)} \frac{r_s^n}{r^{n+1}} p_m^n(\cos \vartheta) p_m^n(\cos \vartheta_s),$$

wenn die Funktion  $p$  bestimmt ist durch die Gleichung

$$2^m \sqrt{\pi} H(m - \frac{1}{2}) p_m^n(\cos \vartheta) = \sin \vartheta^{-m} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (2 \cos \alpha - 2 \cos \vartheta)^{m - \frac{1}{2}} e^{(n + \frac{1}{2}) i \alpha} d\alpha,$$

oder, was dasselbe ist, durch eine der Gleichungen

$$(10) \quad p_m^n(\cos \vartheta) = \frac{\sin \vartheta^{-m}}{1 \cdot 3 \dots (2m-1)} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{\vartheta}^{\vartheta} \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \alpha d\alpha}{(2 \cos \alpha - 2 \cos \vartheta)^{\frac{1}{2} - m}}$$

$$p_m^n(\cos \vartheta) = \frac{1}{H(m)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta^m F(-n, n+1, m+1, \sin \frac{1}{2} \vartheta^2).$$

Bei der Integration nach  $\zeta$  (oder  $\zeta_s$ ) hätte man als Integrationsweg auch den Kreisbogen wählen können, der die negative Richtung der reellen Achse schneidet, d. h. man hätte nach  $\alpha$  von  $2\pi - \vartheta$  über  $\pi$  bis  $\vartheta$  integrieren können. Dadurch würde man  $p$  in der Form erhalten haben:

$$(11) \quad p_m^n(\cos \vartheta) = \frac{(-\sin \vartheta)^{-m}}{1 \cdot 3 \dots (2m-1)} \frac{2}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \alpha d\alpha}{(2 \cos \vartheta - 2 \cos \alpha)^{\frac{1}{2} - m}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{H(m)} \operatorname{cot} \frac{1}{2} \vartheta^m F(-n, n+1, m+1, \cos \frac{1}{2} \vartheta^2).$$

Wenn man in (9)  $\vartheta_s = 0$  und für  $\vartheta$  einen beliebigen Winkel  $\omega$  setzt, so erhält man die Gleichung

$$(r^2 - 2r r_s \cos \omega + r_s^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} r_s^n r^{-n-1} p_0^n(\cos \omega),$$

aus der man ersieht, dass die Funktion  $p_0^n(\cos \omega)$  identisch ist mit der Kugelfunktion  $P^n(\cos \omega)$ . Die linke Seite dieser Gleichung geht in  $T$  über, wenn man  $\cos \omega$  durch  $\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta_s + \sin \vartheta \sin \vartheta_s \cos(\varphi - \varphi_s)$  ersetzt, und durch Vergleichung der so für  $T$  entstehenden einfachen Summe mit der durch (9) gegebenen Doppelsumme ergibt sich das Additionstheorem für die Kugelfunktionen erster Art in folgender Form:

$$(12) \quad P^n(\cos \omega) = p_0^n(\cos \omega) = 2 \sum' \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n-m)} p_m^n(\cos \vartheta) p_m^n(\cos \vartheta_s) \cos m(\varphi - \varphi_s).$$

Die Summe bricht von selbst nach dem  $m = n$  entsprechenden Gliede ab, das  $m = 0$  entsprechende Glied ist auf die Hälfte zu reduzieren. Mit der Form, in der das berühmte Theorem von Laplace und Legendre in Heine's Handbuch (I, 312) auftritt, wird die vorstehende übereinstimmend, wenn man setzt

$$p_m^n(\cos \vartheta) = (\mp i)^m \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{\Gamma(n+m)} P_m^n(\cos \vartheta).$$

Ebendasselbe würde sich aus den Ausdrücken von  $p_m^n$  und  $P_m^n$  durch hypergeometrische Reihen ergeben.

§ 6.

K e g e l.

Wenn die Punkte P und  $P_s$  zwei verschiedenen Kegelmänteln von den Parametern  $\vartheta$  und  $\vartheta_s$  angehören, so hat man, wenn  $\vartheta$  grösser als  $\vartheta_s$  vorausgesetzt wird, nach  $\alpha$  von  $-\vartheta_s$  bis  $\vartheta_s$  zu integrieren, nach  $\alpha$  aber von  $2\pi - \vartheta$  über  $\pi$  bis  $\vartheta$ ; dadurch erreicht man es, dass die Differenz  $\zeta - \zeta_s$  innerhalb der Integrationsgrenzen auch dann nicht 0 wird, wenn die Punkte derselben Kugeloberfläche angehören, also  $r = r_s$  ist. Ausserdem hat man an Stelle von  $\Gamma$  die Formel III a in Anwendung zu bringen, die von jener sich wesentlich nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des Summenzeichens ein Integralzeichen, an Stelle der Zahl  $n$  die Zahl  $\mu i - \frac{1}{2}$  tritt. Man kann daher offenbar die der Gleichung (9) des vorigen Paragraphen entsprechende Entwicklung ohne Rechnung durch die angedeuteten Veränderungen aus (9) bilden, und erhält:

$$(13) \quad T = \sum' \cos m(\varphi - \varphi_s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} + m)}{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} - m)} \cdot \frac{r_s^{\mu i - \frac{1}{2}} l_m^\mu(\cos \vartheta) k_m^\mu(\cos \vartheta_s) d\mu}{r^{\mu i + \frac{1}{2}} \cos \mu \pi i},$$

$$(14) \quad l_m^\mu(\cos \vartheta) = \frac{-\sin \vartheta)^{-m}}{1 \cdot 3 \dots (2m-1)} \cdot \frac{-1}{\pi} \int_{2\pi - \vartheta}^{\vartheta} \frac{e^{-\mu \pi} e^{\mu \alpha} d\alpha}{(2 \cos \vartheta - 2 \cos \alpha)^{\frac{1}{2} - m}}.$$

$$(15) \quad k_m^\mu(\cos \vartheta_s) = \frac{\sin \vartheta_s)^{-m}}{1 \cdot 3 \dots (2m-1)} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\vartheta_s} \frac{\cos(\mu \alpha) d\alpha}{(2 \cos \alpha - 2 \cos \vartheta_s)^{\frac{1}{2} - m}}.$$

Zwischen den Funktionen  $l$  und  $k$  findet die Beziehung statt

$$(16) \quad I_m^\mu(\cos \vartheta) = (-1)^m k_m^\mu [\cos(\pi - \vartheta)] = (-1)^m k_m^\mu(-\cos \vartheta),$$

wie sich ergibt, wenn man in dem Integrale, dessen Grenzen  $2\pi - \vartheta$  und  $\vartheta$  sind,  $\alpha$  durch  $\pi + \alpha$  ersetzt.

Wie im vorigen Paragraphen die Gleichung (9) zur Ableitung des Additionstheorems für die Kugelfunktion  $P^n$  benutzt werden konnte, so führt hier Gleichung (13) unmittelbar zu dem Additionstheorem für die Kegelfunktion:

$$(17) \quad I_0^\mu(\cos \omega) = 2 \sum' \frac{H(\mu i - \frac{1}{2} + m)}{H(\mu i - \frac{1}{2} - m)} I_m^\mu(\cos \vartheta) k_m^\mu(\cos \vartheta_s) \cos m(\varphi - \varphi_s).$$

$$(\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta_s + \sin \vartheta \sin \vartheta_s \cos(\varphi - \varphi_s); \quad 0 \leq \vartheta_s < \vartheta \leq \pi)$$

Ich erinnere daran, dass der Quotient der beiden Funktionen  $H$  den im § 2 angegebenen reellen Wert hat, und dass, der gegebenen Ableitung gemäss, in (13) die Potenzen von  $r$  und  $r_s$  definiert sind durch

$$r^{\mu i - \frac{1}{2}} = e^{(\mu i - \frac{1}{2}) \log r} \quad \text{und} \quad r_s^{\mu i + \frac{1}{2}} = e^{(\mu i + \frac{1}{2}) \log r_s},$$

während  $\log r$  und  $\log r_s$  reelle Werte bedeuten. Ferner führe ich noch die Beziehungen an

$$H(m) k_m^\mu(\cos \vartheta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta^m F\left(\frac{1}{2} - \mu i, \frac{1}{2} + \mu i, m + 1, \sin \frac{1}{2} \vartheta^2\right)$$

$$(18) \quad k_m^\mu(\cos \vartheta) = \sin \vartheta^{-m} \int_0^\vartheta (m) k_0^\mu(\cos \vartheta) (d \cos \vartheta)^m$$

$$\frac{H(\mu i - \frac{1}{2} + m)}{H(\mu i - \frac{1}{2} - m)} k_m^\mu(\cos \vartheta) = \sin \vartheta^m \cdot \frac{d^m k_0^\mu(\cos \vartheta)}{(d \cos \vartheta)^m},$$

und muss hinzufügen, dass nach der Bezeichnung in Heine's Handbuch die linke Seite der ersten Gleichung nur  $I_m^\mu(\cos \vartheta)$ , nach C. Neumann's Bezeichnung der adjungierten Kegelfunktionen die dritte Gleichung einfacher

$$K_{q,j}x = (1 - x^2)^{\frac{j}{2}} K_q^{(j)}(x)$$

lauten würde, während bei der von mir getroffenen Wahl der Konstanten gerade die zweite Relation in möglichst einfacher Gestalt erscheint. Der Umstand, dass bei dem Gange meiner Untersuchung die adjungierten Funktionen als bestimmte Integrale auftreten, die unmittelbar zur zweiten Relation, aber nur auf Umwegen zur dritten führen, möge die Abweichung in der Bezeichnung entschuldigen. Eingeführt sind die adjungierten Funktionen (für ein Argument, das grösser als 1) wohl zuerst in meiner Arbeit vom Jahre 1870 (§ 5); sie treten dort in verschiedenen Integralformen auf, die mir zu einer bestimmten Auswahl der konstanten Faktoren keine Veranlassung gaben.

§ 7.

Kugelkalotte.

Hier sind die W. Thomson'schen Koordinaten

$$x + iy = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varrho + i\vartheta)$$

$$\left( \text{d. h.: } x = \frac{\sin \varrho}{\cos i\vartheta + \cos \varrho}, \quad y = \frac{1}{i} \frac{\sin i\vartheta}{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \right)$$

anzuwenden, die C. Neumann seiner Lösung des Problems der Electricitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe zu Grunde gelegt hat, und die später von mir zur Lösung des elektrostatischen Problems für einen linsenförmigen Körper benutzt worden sind. Die Grösse  $\varrho$  ist der Parameter einer Schar von Kugelkalotten, deren gemeinschaftlicher Rand durch eine in der YZ-Ebene gelegene Kreislinie vom Radius 1 gebildet wird, und bedeutet den Randwinkel zwischen irgend einer Kalotte und der Kreisscheibe vom Radius 1. Für  $\varrho = 0$  fällt die Kalotte mit der Kreisscheibe zusammen, für zwischen 0 und  $\pi$  enthaltene Werte schneidet sie den positiven, für zwischen 0 und  $-\pi$  enthaltene den negativen Teil der X-Achse. Uebrigens ist  $\varrho$  nur bis auf ein Multiplum von  $2\pi$  bestimmt, und man erhält sämtliche (den ganzen Raum ausfüllende) Kalotten, wenn man  $\varrho$  von einem bestimmten Werte  $\varrho_s$  ausgehend kontinuierlich bis  $\varrho_s + 2\pi$  wachsen lässt. Ich muss erwähnen, dass ich mir erlaubt habe, statt des in den genannten Arbeiten auftretenden Winkels  $\omega$  den Winkel  $\varrho = \pi - \omega$  zu benutzen. Der Parameter  $\vartheta$  giebt eine Schar von Ringflächen, welche die Kalotten rechtwinklig durchschneiden, und ist als solcher auf das Intervall 0 bis  $\infty$  beschränkt, während bei den in der Ebene der komplexen Zahlen auszuführenden Integrationen auch die Werte von 0 bis  $-\infty$  in Betracht kommen und negativen Werten von  $\vartheta$  entsprechen. Die hier zu lösende Aufgabe ist nun die, die reciproke Entfernung T zweier Punkte P und P<sub>s</sub>, die verschiedenen Kalotten  $\varrho$  und  $\varrho_s$  angehören, zu entwickeln, wobei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Bedingung

$$\varrho_s < \varrho < 2\pi + \varrho_s$$

festgehalten werden darf. Bei Anwendung der Formel (6) in § 2 wird man als Integrationswege die die Punkte  $x \pm iy$ ,  $x_s \pm iy_s$  verbindenden, auf den Kalotten  $\varrho$  und  $\varrho_s$  gelegenen Kreisbogen wählen, demnach  $\zeta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varrho + i\alpha)$ ,  $\zeta_s = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varrho_s + i\alpha_s)$  setzen und nach  $\alpha$  von  $-\vartheta$  bis  $\vartheta$ , nach  $\alpha_s$  von  $-\vartheta_s$  bis  $\vartheta_s$  integrieren. Man hat dann die Werte einzusetzen:

$$d\zeta = \frac{1}{2} \frac{i d\alpha}{\cos \frac{1}{2} (\varrho + i\alpha)^2}; \quad d\zeta_s = \frac{1}{2} \frac{i d\alpha_s}{\cos \frac{1}{2} (\varrho_s + i\alpha_s)^2};$$

$$\sqrt{(\zeta - x)^2 + y^2} = \frac{\sqrt{\cos i\vartheta - \cos i\alpha}}{\cos \frac{1}{2}(\varrho + i\alpha) \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho}}; \dots$$

$$\zeta - \zeta_s = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_s + i\alpha - i\alpha_s)}{\cos \frac{1}{2}(\varrho + i\alpha) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varrho_s + i\alpha_s)},$$

wodurch man findet:

$$T = 2 \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \sqrt{\cos i\vartheta_s + \cos \varrho_s} \cdot \sum' \cos m(\varrho - \varrho_s) \times$$

$$\frac{(-\sin i\vartheta \sin i\vartheta_s)^{-m} H(2m)}{\pi \cdot 2^{2m} (H(m - \frac{1}{2}))^2} \iint \frac{q^{2m-1} q_s^{2m-1} d\alpha d\alpha_s}{(2 \sin \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_s + i\alpha - i\alpha_s))^{2m+1}},$$

wenn zur vorübergehenden Abkürzung bezeichnet wird:

$$q = \sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos i\alpha}, \quad q_s = \sqrt{2 \cos i\vartheta_s - 2 \cos i\alpha_s}.$$

Da  $\varrho - \varrho_s$  zwischen 0 und  $2\pi$  enthalten ist, so giebt die Formel III b im § 2:

$$\frac{H(2m)}{[2 \sin \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_s + i\alpha - i\alpha_s)]^{2m+1}} = \frac{(-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\mu i - \frac{1}{2} + m) e^{\mu(\varrho - \varrho_s - \pi + i\alpha - i\alpha_s)} d\mu}{H(\mu i - \frac{1}{2} - m) \cos \mu\pi}}{2}.$$

und die gesuchte Entwicklung von T wird:

$$(19) \quad T = 2 \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \sqrt{\cos i\vartheta_s + \cos \varrho_s} \sum' \cos m(\varrho - \varrho_s) \times$$

$$\int_0^{\infty} \frac{H(\mu i - \frac{1}{2} + m)}{H(\mu i - \frac{1}{2} - m)} \frac{\cos(\varrho - \varrho_s - \pi)\mu i}{\cos \mu\pi} k_m^{\mu}(\cos i\vartheta) k_m^{\mu}(\cos i\vartheta_s) d\mu.$$

Hierin ist die Funktion  $k_m^{\mu}$  definiert durch die Gleichung

$$(20) \quad k_m^{\mu}(\cos i\vartheta) = \frac{(-\sin i\vartheta)^{-m}}{1 \cdot 3 \dots (2m-1)} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos \mu\alpha d\alpha}{(2 \cos i\vartheta - 2 \cos i\alpha)^{\frac{1}{2} - m}}$$

und stellt dieselbe Funktion für ein die Einheit übersteigendes Argument dar, die beim Kegel für ein zwischen 0 und 1 enthaltenes auftrat.

Der Ausdruck der reciproken Entfernung T durch die Koordinaten  $\varrho, \vartheta, \dots$  ist:

$$T = \frac{\sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \sqrt{\cos i\vartheta_s + \cos \varrho_s}}{\sqrt{2} \sqrt{\cos i\omega - \cos(\varrho - \varrho_s)}},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\cos i\omega = \cos i\vartheta \cos i\vartheta_s + \sin i\vartheta \sin i\vartheta_s \cos(\varrho - \varrho_s).$$

Die Vergleichung mit (19) ergibt nun, dass die Summe

$$2 \sum' \frac{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} + m)}{\Gamma(\mu i - \frac{1}{2} - m)} k_m^\mu(\cos i\vartheta) k_m^\mu(\cos i\vartheta_s) \cos m(\varphi - \varphi_s)$$

eine Funktion des Argumentes  $\cos i\omega$  sein muss, und zwar ist diese Funktion gleich

$$k_0^\mu(\cos i\omega),$$

wie sich ergibt, wenn man  $\vartheta_s = 0$  setzt, wodurch die Summe sich auf ihr erstes Glied reduziert. Auf diese Weise ist das Additionstheorem der Kegelfunktionen für das in der angegebenen Weise zusammengesetzte Argument gewonnen.

Hieran will ich noch eine Ableitung des Satzes knüpfen, der in ähnlicher Weise, wie die Laplace'sche Entwicklung nach Kugelfunktionen bei Potentialaufgaben über die Kugel und das Rotationsellipsoid, bei solchen über die Kugelkalotte und das zweifache Rotationshyperboloid zur Darstellung willkürlicher Funktionen zweier Variablen benutzt werden kann. Wenn die Dichtigkeit einer auf einer Kalotte vom Parameter  $\varrho_s$  verteilten Massenschicht in der Form

$$(\sqrt{\cos i\vartheta_s + \cos \varrho_s})^3 \cdot f(\vartheta_s, \varphi_s)$$

gegeben ist, so ist das Potential der Massenschicht in Bezug auf einen beliebigen Punkt  $\varrho, \vartheta, \varphi$  des Raumes:

$$v = \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \times \int_0^\infty \frac{\cos(\varrho - \varrho_s - \pi) \mu i}{\cos \mu \pi i} d\mu \int_0^\infty \frac{\sin i\vartheta_s}{i} d\vartheta_s \int_0^{2\pi} k_0^\mu(\cos i\omega) f(\vartheta_s, \varphi_s) d\varphi_s.$$

Der Laplace'sche Satz, der die Dichtigkeit einer Massenschicht durch die Differenz der nach der Normale genommenen Differentialquotienten des Potentials ausdrückt, nimmt im vorliegenden Falle die Form an:

$$4\pi \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \cdot f(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(\varrho = 2\pi + \varrho_s)} - \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)_{(\varrho = \varrho_s)}.$$

Beachtet man nun, dass in dem Ausdrucke für  $v$  der erste Faktor auf der rechten Seite nach  $\varrho$  differenziert beim Durchgange durch die Fläche keine Stetigkeitsunterbrechung erleidet, so erhält man sofort die gesuchte Darstellung:

$$(21) \quad f(\vartheta, \varphi) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty \mu \operatorname{tg} \mu \pi i d\mu \int_0^\infty \sin i\vartheta_s d\vartheta_s \int_0^{2\pi} k_0^\mu(\cos i\omega) f(\vartheta_s, \varphi_s) d\varphi_s.$$

Diesen Satz habe ich im Programm von 1870 mitgeteilt, ohne den Weg anzugeben, auf dem ich zu demselben gelangt war. Eine Ableitung des Satzes ist später von Heine

(Handbuch, II. 298) gegeben worden. Dieselbe führt ebenso wie die jetzt von mir nachträglich mitgeteilte zu keiner definitiven Entscheidung über die Bedingungen der Gültigkeit des Satzes. Ein strenger Beweis desselben kann, wie ich bereits a. a. O. angedeutet habe, geführt werden, indem man das von Dirichlet für die Kugelfunktionenreihen\*) angewandte Verfahren unter einigen sich leicht darbietenden Modifikationen auf den vorliegenden Fall überträgt.

§ 8.

R i n g.

Um für diesen Fall die Entwicklung von T zu finden, bilden wir aus 1) und 2) in § 1 die Gleichung

$$(22) \quad T = \frac{2}{\pi} \sum' \cos m (\varrho - \varrho_s) \frac{y_s^m}{y^m} \int_{x-iy}^{x+iy} \frac{-id\zeta [(\zeta-x)^2 + y^2]^{m-\frac{1}{2}}}{[(\zeta-x_s)^2 + y_s^2]^{m+\frac{1}{2}}}$$

und benutzen dieselben Koordinaten und für  $\zeta$  denselben Integrationsweg, wie bei der Kugelkalotte. Ausser den bereits im vorigen Paragraphen für  $d\zeta$  u. s. w. angegebenen Werten kommt hier noch der folgende in Betracht:

$$\sqrt{(\zeta-x_s)^2 + y_s^2} = \frac{\sqrt{\cos i\vartheta_s - \cos(\varrho - \varrho_s + i\alpha)}}{\cos \frac{1}{2}(\varrho + i\alpha) \sqrt{\cos i\vartheta_s + \cos \varrho}}.$$

Man erhält nun zunächst:

$$T = 2 \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \sqrt{\cos i\vartheta_s + \cos \varrho_s} \sum' \cos m (\varrho - \varrho_s) \times \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin i\vartheta_s^m}{\sin i\vartheta^m} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{(2 \cos i\vartheta_s - 2 \cos i\alpha)^{m-\frac{1}{2}} d\alpha}{[2 \cos i\vartheta_s - 2 \cos(\varrho - \varrho_s + i\alpha)]^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass  $\vartheta$  kleiner als  $\vartheta_s$  ist, dass also die Punkte P und P<sub>s</sub> zwei verschiedenen Ringflächen angehören, von denen die erste die zweite umschliesst, lässt sich der reciproke Wert der unter dem Integralzeichen im Nenner stehenden Potenz in die trigonometrische Reihe entwickeln

$$\sum' \frac{2}{\pi} \cos n (\varrho - \varrho_s + i\alpha) \int_0^\pi \frac{\cos n\beta d\beta}{(2 \cos i\vartheta_s - 2 \cos \beta)^{m+\frac{1}{2}}},$$

\*) Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. Crelle's Journal, Bd. 17.

in welcher der Koeffizient des allgemeinen Gliedes mittels der von Gauss (Werke, III. 128 u. 129) angegebenen Formeln statt durch ein bestimmtes Integral auch durch hypergeometrische Reihen ausgedrückt werden könnte. Nach Einsetzung dieses Wertes erhält man T durch die folgende Doppelsumme dargestellt:

$$(23) \quad T = \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} \sqrt{\cos i\vartheta_s + \cos \varrho_s} \sum'' 4 \cos m(\varrho - \varrho_s) \cos n(\varrho - \varrho_s) A_m^n(\vartheta) B_m^n(\vartheta_s),$$

worin man die  $m = 0$  oder  $n = 0$  entsprechenden Glieder auf die Hälfte, das  $m = 0$  und  $n = 0$  entsprechende auf den vierten Teil zu reduzieren hat, und worin die von  $\vartheta$  und  $\vartheta_s$  abhängenden Transcendenten die Bedeutung haben:

$$(24) \quad A_m^n(\vartheta) = (-i \sin i\vartheta)^{-m} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos(n\alpha) d\alpha}{(2 \cos i\vartheta - 2 \cos i\alpha)^{\frac{1}{2} - m}}$$

$$(25) \quad B_m^n(\vartheta_s) = (-i \sin i\vartheta_s)^m \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\beta) d\beta}{(2 \cos i\vartheta_s - 2 \cos \beta)^{m + \frac{1}{2}}}.$$

Die Vergleichung mit der von Heine (Handb. II, § 74) gegebenen Ableitung des von C. Neumann gefundenen Resultates zeigt, dass diese Transcendenten, abgesehen von gewissen konstanten Faktoren, mit den Kugelfunktionen

$$P_m^{n - \frac{1}{2}}(\cos i\vartheta) \quad \text{und} \quad Q_m^{n - \frac{1}{2}}(\cos i\vartheta_s)$$

übereinstimmen, deren oberer Index die Hälfte einer ungeraden Zahl ist.

## § 9.

### Einige allgemeine Sätze.

Es mögen jetzt beliebig viele Punkte  $P_s(x_s, y_s, \varrho_s)$  betrachtet werden, in denen man sich die Massen  $M_s$  konzentriert denkt. Das Gesamtpotential derselben in Bezug auf einen Punkt  $P(x, y, \varrho)$  des Raumes ist:

$$v = \sum_s M_s T.$$

Jedem Punkte  $P_s$  entsprechen in der Zahlenebene die konjugierten Punkte  $z_s = x_s + iy_s$  und  $z'_s = x_s - iy_s$ , und zwar geben alle Punkte eines und desselben Parallelkreises (d. h. eines Kreises, auf dem  $x_s$  und  $y_s$  unveränderlich sind, und nur  $\varrho_s$  sich ändert,) dieselben komplexen Zahlen  $z_s$  und  $z'_s$ . Bei Zugrundelegung der am Anfange von § 8 angeführten Entwicklung von T ergibt sich unmittelbar der folgende Satz:

I. Das Potential eines Systems von Massenpunkten in Bezug auf einen Punkt, der mit keinem von ihnen auf demselben Parallelkreise liegt, lässt sich in der Form darstellen

$$v = v_0 + 2 v_1 \cos \varphi + 2 v_2 \cos 2 \varphi + 2 v_3 \cos 3 \varphi + \dots \\ + 2 w_1 \sin \varphi + 2 w_2 \sin 2 \varphi + 2 w_3 \sin 3 \varphi + \dots,$$

wenn  $v_m$  und  $w_m$  durch die Gleichungen bestimmt werden

$$i\pi \cdot v_m = y^{-m} \int_{z'}^z f_m(\zeta) ((\zeta - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}} d\zeta$$

$$i\pi \cdot w_m = y^{-m} \int_{z'}^z g_m(\zeta) ((\zeta - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}} d\zeta,$$

und  $f_m(\zeta)$  und  $g_m(\zeta)$  die folgenden Funktionen der komplexen Variablen  $\zeta$  bedeuten:

$$f_m(\zeta) = \sum_s M_s \cos m\varphi_s y_s^m ((\zeta - x_s)^2 + y_s^2)^{-m-\frac{1}{2}}$$

$$g_m(\zeta) = \sum_s M_s \sin m\varphi_s y_s^m ((\zeta - x_s)^2 + y_s^2)^{-m-\frac{1}{2}}.$$

Der Integrationsweg ist symmetrisch zur x-Achse zu legen und darf durch keinen der Punkte  $z_s$  hindurchgehen, die Werte von  $v_m$  und  $w_m$  für  $y = 0$  sind zu ermitteln, indem man ihre Grenzwerte für ein unendlich kleines positives  $y$  sucht. Wählt man, was im allgemeinen gestattet ist, den Integrationsweg geradlinig und setzt  $\zeta = x + iy \cos \lambda$ , so erhält man

$$\sqrt{\pi} \Gamma(m) \cdot v_m = \Gamma(m - \frac{1}{2}) \cdot y^m \int_0^\pi f_m(x + iy \cos \lambda) d\lambda$$

und einen ebenso gebildeten Ausdruck für  $w_m$ , und die Beziehung der Funktionen  $f_m$  und  $g_m$  zu den Koeffizienten  $v_m$  und  $w_m$  der Potentialentwicklung wird folglich durch die Gleichungen charakterisiert:

$$f_m(x) = \frac{\Gamma(m - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\partial^m v_m}{\partial y^m} \right)_{(y=0)}; \quad g_m(x) = \frac{\Gamma(m - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\partial^m w_m}{\partial y^m} \right)_{(y=0)}$$

Insbesondere stellt  $f_0(x)$  den Wert von  $v_0$ , also auch von  $v$ , auf der Achse dar.

Die in den Ausdrücken für  $v_m$ ,  $f_m$ , . . . vorkommenden Potenzen mit den Exponenten  $m - \frac{1}{2}$  und  $-m - \frac{1}{2}$  sind zweiwertige Funktionen der Variablen  $\zeta$ , und es erscheint geboten, die nach § 1 in Betreff der Vorzeichen zu erfüllenden Bedingungen in einer dem vorliegenden allgemeineren Falle entsprechenden Weise zu gestalten. Wenn in demjenigen

Punkte  $\xi^0$ , in welchem die von  $z'$  nach  $z$  führende Integrationskurve die reelle Achse schneidet, die erste der Grössen

$$((\xi^0 - x)^2 + y^2)^{m - \frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad ((\xi^0 - x_s)^2 + y_s^2)^{-m - \frac{1}{2}}$$

mit dem positiven Vorzeichen genommen wird, so muss dasselbe auch mit der zweiten und zwar für jeden Index  $s$  geschehen. Befinden sich nun unter den Punkten  $P_s$  auch solche, die auf der reellen Achse liegen, für die also  $y_s = 0$  ist, so ist für diese Punkte dem zweiten Ausdrucke der Wert

$$(\xi^0 - x_s)^{-2m-1} \quad \text{oder} \quad (x_s - \xi^0)^{-2m-1}$$

zu erteilen, je nachdem  $x_s$  kleiner oder grösser als  $\xi^0$  ist. Wenn also dann der Punkt  $\xi^0$  auf der Achse soweit vorrückt, dass er einen der Massenpunkte überschreitet, so erfährt ein Bestandteil der Funktionen  $f$  und  $g$  eine plötzliche Änderung, und diese Funktionen nehmen dadurch eine andere analytische Gestalt an. Um dies zu vermeiden, muss man den Integrationsweg stets durch ein und dasselbe zwischen zwei auf einander folgenden Massenpunkten enthaltene Stück der Achse hindurchführen. Im übrigen ist daran festzuhalten, dass die Wurzelgrössen

$$\sqrt{(\zeta - x)^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{(\zeta - x_s)^2 + y_s^2}$$

sich stetig in Bezug auf  $\zeta$  und die erstere auch nach  $x$  und  $y$  (also nach  $z$  und  $z'$ ) ändern müssen; wenn die Punkte  $z$  und  $z'$  nach Umkreisung eines oder mehrerer der Punktepaare  $z_s$  und  $z'_s$  in ihre frühere Lage zurückkehren, so erlangen die Integrale  $v_m$  und  $w_m$  wieder ihre früheren Werte. Betrachten wir nun insbesondere die drei Fälle, in denen die X-Achse entweder keinen Massenpunkt oder nur einen oder nur zwei enthält. Im ersten Falle kann man die Punkte  $z_1, z_2, z_3, \dots$  durch einen Kurvenbogen  $C$ , die Punkte  $z'_1, z'_2, \dots$  durch den zu  $C$  symmetrischen  $C'$  verbinden und festsetzen, dass die Integrationskurve diese Bogen nicht durchschneiden darf; die mehrdeutigen Funktionen  $f$  und  $g$  werden dadurch zu zweiwertigen, indem sie, wenn der Punkt  $\zeta$  entweder  $C$  oder  $C'$  einmal umkreist, nur ihr Zeichen wechseln. Im zweiten Falle, wo auf der Achse ein Massenpunkt  $p_1$  vorhanden ist, kann man die beiden Bogen  $C$  und  $C'$  zu einem einzigen auch durch  $p_1$  gehenden vereinigen und diesen als einen Querschnitt betrachten, der von  $\zeta$  nicht durchschnitten werden darf, also auch nicht von den Punkten  $x \pm iy$ , zwischen denen die Integration nach  $\zeta$  auszuführen ist. Dadurch werden die Funktionen  $f$  und  $g$  zu eindeutigen und besitzen, falls sämtliche Massen  $M_s$  positiv sind, positive Werte auf demjenigen der in  $p_1$  begrenzten Teile der Achse, der den oben betrachteten Punkt  $\xi^0$  enthält, negative auf dem andern Teile. Falls man den Punkt  $\xi^0$  von dem einen Teile der Achse durch das Unendliche nach dem andern übergehen lassen will, so muss bei diesem Uebergange auch die in  $v_m$  und  $w_m$  vorkommende Wurzelgrösse das Zeichen wechseln, also das negative annehmen. Sind endlich zwei Massenpunkte  $p_1$  und  $p_2$  auf der Achse vorhanden, so kann man durch diese und sämtliche

Punkte  $z_s$  und  $z'_s$  eine geschlossene Linie legen, die ein einfach zusammenhängendes endliches Flächenstück begrenzt; die Funktionen  $f$  und  $g$  sind dann in diesem Flächenstücke eindeutig und für positive  $M_s$  von positivem Werte, und sie stellen auch in dem übrigen (unendlichen) Teile der Ebene eindeutige, aber analytisch von den ersten verschiedene Funktionen vor, und ihr Wert ist positiv auf dem einen, negativ auf dem andern der beiden unendlich langen Teile der Achse.

Hiernach ist nun auch ohne weiteres zu ersehen, wie sich die Sache in dem Falle einer stetig auf einer Rotationsfläche verteilten Massenschicht gestaltet. Man hat hier nur  $M_s$  zu ersetzen durch das Massenelement

$$k \cdot y_s \, ds \, d\varphi_s$$

worin  $k$  die Dichtigkeit der Schicht im Punkte  $(x_s, y_s, \varphi_s)$  der Fläche,  $ds$  das Bogenelement der Meridianlinie bezeichnet, und statt der Summation nach  $s$  eine Integration nach  $\varphi_s$  von 0 bis  $2\pi$ , nach  $s$  von 0 bis 1 auszuführen, wenn 1 die Länge der Meridianlinie bezeichnet. Dabei sind  $x_s$  und  $y_s$  gegebene Funktionen des Bogens  $s$ . Man gelangt so zu dem Satze:

II. Das Potential einer auf einer nicht geschlossenen oder einfach zusammenhängenden geschlossenen Rotationsfläche ausgebreiteten Massenschicht lässt sich in der unter I angegebenen Form darstellen. Entwickelt man die Dichtigkeit  $k$  in die trigonometrische Reihe

$$k = k_0(s) + 2k_1(s) \cos \varphi_s + 2k_2(s) \cos 2\varphi_s + \dots \\ + 2h_1(s) \sin \varphi_s + 2h_2(s) \sin 2\varphi_s + \dots,$$

so gelten für die komplexen Funktionen  $f_m(\zeta)$  und  $g_m(\zeta)$  die Ausdrücke

$$f_m(\zeta) = 2\pi \int_0^1 k_m(s) y_s^{m+1} ((\zeta - x_s)^2 + y_s^2)^{-m-\frac{1}{2}} ds$$

$$g_m(\zeta) = 2\pi \int_0^1 h_m(s) y_s^{m+1} ((\zeta - x_s)^2 + y_s^2)^{-m-\frac{1}{2}} ds.$$

Die Bedingungen über die Vorzeichen sind bereits in I erörtert worden. — Ebenso gilt der folgende Satz:

III. Innerhalb (resp. ausserhalb) eines von einer Rotationsfläche begrenzten einfach zusammenhängenden Raumes lässt sich, wenn die Rotationsachse zur  $X$ -Achse gewählt wird, das Potential beliebiger ganz ausserhalb (resp. ganz innerhalb) dieses Raumes befindlicher Massen stets in der Form darstellen

$$v = \frac{2}{\pi i} \sum' y^{-m} \int_{z'}^z (\cos m\varphi f_m(\zeta) + \sin m\varphi g_m(\zeta)) ((\zeta - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}} d\zeta,$$

wo  $f_m(\zeta)$  und  $g_m(\zeta)$  eindeutige Funktionen von  $\zeta$  sind, die für jede bekannte Massenverteilung genau angegeben werden können.

Eine Ergänzung zu diesem Satze bildet der folgende, welcher, da die Massenverteilung hier eine unbekannte ist, zwar nicht auf dieselbe Weise bewiesen werden kann, dessen Richtigkeit aber daraus sich ergibt, dass der Ausdruck für  $v$  der Differentialgleichung  $\Delta v = 0$  und den übrigen charakteristischen Eigenschaften des Potentials genügt:

IV. Wenn in der Ebene der komplexen Zahlen eine Linie ein durch die  $x$ -Achse symmetrisch geteiltes und einfach zusammenhängendes endliches Flächenstück begrenzt, und wenn  $F_m(\zeta)$  eine in diesem Flächenstücke eindeutige, stetige und endliche Funktion ist, so stellt (für ein konstantes  $\alpha$ ) der Ausdruck

$$V_m = \frac{1}{\pi} \cos m(\varphi - \alpha) y^{-m} \int_{\zeta'}^{\zeta} -i d\zeta F_m(\zeta) ((\zeta - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}}$$

in dem entsprechenden von einer Rotationsfläche begrenzten körperlichen Raume das Potential gewisser Massen vor, die ganz ausserhalb dieses Raumes liegen, und kann insbesondere aufgefasst werden als das Potential einer völlig bestimmten auf der Oberfläche ausgebreiteten Massenschicht in Bezug auf einen im Innern des Raumes gelegenen Punkt. — Wenn dagegen  $F_m(\zeta)$  in dem unendlichen Teile der Ebene, der das betrachtete Flächenstück umgiebt, eindeutig und stetig ist und überdies das Produkt  $\zeta^{2m+1} F_m(\zeta)$  für  $\zeta = \infty$  endlich bleibt, so kann  $V_m$  aufgefasst werden als das Potential einer auf der Rotationsfläche ausgebreiteten Massenschicht in Bezug auf einen Punkt  $x, y, \varphi$  des äusseren Raumes. Die Dichtigkeit der Schicht ist in beiden Fällen von der Form

$$K_m(s) \cos m(\varphi - \alpha),$$

d. h. sie ändert sich für Punkte auf einem und demselben Parallelkreise proportional mit  $\cos m(\varphi - \alpha)$ . Für Punkte auf der Rotationsachse (die dem Raume, auf welchen  $V_m$  sich bezieht, angehören) findet, wie aus I hervorgeht, die Relation statt:

$$\left(\frac{\partial^m V_m}{\partial y^m}\right)_{(y=0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m-\frac{1}{2})} \cos m(\varphi - \alpha) F_m(x),$$

welche in dem speciellen Falle  $m = 0$  in  $F_0(x) = V_0$  für  $y = 0$  übergeht und dann einer für alle Punkte desselben Parallelkreises konstanten Dichtigkeit entspricht.

V. Bei einer ringförmigen Rotationsfläche finden die beiden vorhergehenden Sätze fast unverändert Anwendung in dem äusseren Raume; die Funktionen  $f, g, F$  sind dann aber nicht ein- sondern zweiwertige. (Im innern Raume könnte die aus 1) und 3) im § 1 entstehende Formel zur Darstellung des Potentials verwendet werden.)

Bei der bisher betrachteten Darstellungsform des Potentials mittels komplexer Funktionen zeigte sich, dass diese Funktionen für reelle Werte der Variablen die Werte des Potentials

selbst und gewisser partieller Differentialquotienten desselben auf der Rotationsachse ausdrückten. Es giebt jedoch noch andere Darstellungsformen, bei denen eine so einfache Beziehung nicht stattfindet; ich will eine derselben, von der ich mich überzeugt habe, dass sie bei der Lösung von Aufgaben, sei es für sich allein, sei es in Verbindung mit der ersten, von Nutzen ist, kurz mitteilen. In Gleichung 2) § 1 kann das von  $z'$  bis  $z$  genommene Integral durch die Hälfte des über eine geschlossene Linie  $Z$  erstreckten ersetzt werden, so dass man erhält:

$$J_m = \frac{1}{2i} y^{-2m} \int_{(\zeta)} \frac{d\zeta ((\zeta - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{((\zeta - x_s)^2 + y_s^2)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Vorausgesetzt ist dabei, dass  $Z$  die Ebene in zwei Gebiete theilt, von denen das eine die Punkte  $x \pm iy$ , das andere die Punkte  $x_s \pm iy_s$  enthält. Der grösseren Deutlichkeit wegen wollen wir beispielsweise annehmen, dass  $Z$  eine um den Anfangspunkt beschriebene Kreislinie sei, dass  $x \pm iy$  innerhalb und dass  $x_s \pm iy_s$  ausserhalb der Kreisfläche liegen; wir nehmen dann innerhalb der Kreisfläche noch zwei feste Punkte  $a \pm ib$  an. Nach Cauchy's Fundamentalsatze ist nun:

$$((\zeta - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}} = \frac{((\zeta - a)^2 + b^2)^{m+\frac{1}{2}}}{2\pi i} \int_{(\lambda)} \frac{d\lambda [(\lambda - x)^2 + y^2]^{m-\frac{1}{2}}}{(\lambda - \zeta) [(\lambda - a)^2 + b^2]^{m+\frac{1}{2}}},$$

die Integration erstreckt über eine Linie  $\mathcal{A}$ , welche die vier Punkte  $x \pm iy$  und  $a \pm ib$  aber nicht die Linie  $Z$  umschliesst, also z. B. über eine mit  $Z$  concentrische Kreislinie von kleinerem Radius. Kehrt man in dem so sich ergebenden Ausdrücke von  $J_m$  die Reihenfolge der Integrationen um und substituirt ihn in Gleichung 1) § 1, so erhält man folgende Darstellung der reciproken Entfernung  $T$  zweier Punkte im Raume:

$$T = \frac{1}{\pi i} \sum' y^{-m} \int_{(\lambda)} (f_m(\lambda) \cos m\varphi + g_m(\lambda) \sin m\varphi) \frac{((\lambda - x)^2 + y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{((\lambda - a)^2 + b^2)^{m+\frac{1}{2}}} d\lambda,$$

wenn

$$f_m(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \cos m\varphi_s \cdot y_s^m \int_{(\zeta)} \frac{d\zeta ((\zeta - a)^2 + b^2)^{m+\frac{1}{2}}}{(\lambda - \zeta) ((\zeta - x_s)^2 + y_s^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

gesetzt wird und  $g_m$  aus  $f_m$  durch Vertauschung des Zeichens  $\cos$  mit  $\sin$  entsteht. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man annimmt, dass die Punkte  $x_s \pm iy_s$  innerhalb des von  $Z$  begrenzten endlichen Flächenstückes liegen,  $Z$  von  $\mathcal{A}$  umschlossen wird und die vier Punkte  $x \pm iy$  und  $a \pm ib$  in dem unendlichen Teile der Ebene ausserhalb  $\mathcal{A}$  liegen. Bei der Anwendung dieser Formeln sind nun folgende Punkte zu beachten:

- α) Die Integration nach  $\lambda$  kann statt über  $\mathcal{A}$  erstreckt werden über zwei die  $x$ -Achse nicht schneidende Linien, von denen die eine die Punkte  $x + iy$  und  $a + ib$ , die andere die Punkte  $x - iy$  und  $a - ib$  umschliesst.
- β) Die Integration nach  $\zeta$  kann ersetzt werden durch eine solche, die längs eines die Punkte  $x_s \pm iy_s$  verbindenden Querschnittes, unter Umkreisung der Endpunkte verläuft; der Querschnitt darf die Linien, auf denen nach  $\lambda$  integriert wird, nicht schneiden.
- γ) Die Funktion  $f_m(\lambda)$  [und ebenso  $g_m(\lambda)$ ] bleibt in der ganzen Ebene eindeutig, wenn  $\lambda$  dem Querschnitt zwar beliebig nahe kommen aber ihn nicht überschreiten darf. Diese Funktion besitzt für konjugierte Werte von  $\lambda$  ebenfalls konjugierte Werte.

Das Potential beliebiger Massen nimmt nun im wesentlichen dieselbe Form wie  $T$  an; insbesondere ergibt sich der folgende Satz, wenn man noch beachtet, dass für  $m = 0$  die Integrale über die unter α) erwähnten geschlossenen Linien durch das Doppelte der Integrale über nicht geschlossene Linien zwischen den betreffenden Punkten ersetzt werden können:

VI. Das Potential einer auf einer Rotationsfläche symmetrisch um die Achse verteilten Massenschicht in Bezug auf einen Punkt  $(x, y, \varphi)$  kann in jedem der beiden durch die Fläche getrennten Räume ausgedrückt werden durch

$$v = R. T. : \frac{2}{\pi i} \int_{x+iy}^{a+ib} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a)^2 + b^2} \sqrt{(\lambda - x)^2 + y^2}},$$

wenn der Zusatz R. T. auf der rechten Seite bedeutet, dass diese auf ihren reellen Teil zu reduzieren ist, und  $a \pm ib$  zwei feste Punkte sind, die mit  $x \pm iy$  in denselben den Räumen entsprechenden Teilen der Zahlenebene liegen. Der Integrationsweg darf die Begrenzung des betreffenden Flächenstückes nicht schneiden, und die Funktion  $f(\lambda)$  ist innerhalb eines solchen Flächenstückes eindeutig, stetig und endlich, ausgenommen in dem Falle, wo die Fläche eine ringförmige ist und der Punkt  $(x, y, \varphi)$  im äusseren Raume liegt. Der Wert von  $v$  für  $y = 0$  muss aus dem für ein unendlich kleines positives  $y$  ermittelt werden.

Ähnlich verhält sich die Sache bei einer nicht geschlossenen mit Masse belegten Rotationsfläche. — Der Satz behält auch seine Gültigkeit, wenn die Punkte  $(a, b, 0)$  und  $(a, b, \pi)$  auf der Fläche, z. B. bei einem linsenförmigen Körper auf dem Rande angenommen werden.

Umgekehrt wird zu jeder gegebenen Funktion  $f(\lambda)$ , welche in einem zur Achse symmetrischen zusammenhängenden Flächenstücke oder in zwei von der Achse nicht durchschnittenen symmetrisch gelegenen Flächenstücken die angegebenen Eigenschaften besitzt,

eine bestimmte Belegung der zugehörigen Rotationsfläche gehören und der Ausdruck für  $v$  das Potential derselben darstellen.

Insbesondere ist zu bemerken, dass für  $f(\lambda) = \lambda$  (oder  $= \lambda + \text{Const.}$ )  $v = 1$  wird, wie man sogleich erkennt, wenn man das Integral statt von  $x + iy$  bis  $a + ib$  zunächst über eine geschlossene, die vier Punkte  $a \pm ib$  und  $x \pm iy$  umgebende Linie nimmt.

§ 10.

Ueber die Verteilung der Elektrizität auf einer kreisförmigen Scheibe mit ringförmigem Rande.

1. Zunächst soll das Potential einer kreisförmigen Scheibe vom Radius 1, wenn es an der Oberfläche den Wert 1 besitzt, im äussern Raume in eine zweckentsprechende unendliche Reihe entwickelt werden. Setzt man  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $f(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}$  und bestimmt das Zeichen der Wurzel so, dass  $f(\lambda)$  für unendlich grosse Werte von  $\lambda$  verschwindend klein wird, so ergibt sich das specielle Potential

$$1) \quad v' = \text{R. T.} : 1 - \frac{2}{\pi i} \int_{x+iy}^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda-x)^2 + y^2}}.$$

Dieses ist das Potential der kreisförmigen Scheibe; dass es an der Oberfläche (d. h. wenn  $x = \pm 0$  und  $y$  kleiner als 1) den Wert 1 annimmt, ist ohne weiteres ersichtlich, und dass es den charakteristischen Eigenschaften einer Potentialfunktion genügt, würde sich leicht zeigen lassen. Führt man nun wieder (vergl. § 7 und 8) die Koordinaten  $x + iy = \text{tg } \frac{1}{2}(\varrho + i\vartheta)$  ein und führt die Integration nach  $\lambda$  durch die Substitution  $\lambda = \text{tg } \frac{1}{2}(\varrho + i\alpha)$  auf eine solche nach  $\alpha$  zurück, so erhält man:

$$2) \quad v' = \text{R. T.} : 1 - \frac{\sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho}}{\pi i} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\alpha}{\cos \frac{1}{2}(\varrho + i\alpha) \sqrt{\cos i\alpha - \cos i\vartheta}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$v' = 1 - \frac{\sqrt{\cos \frac{1}{2} i\vartheta^2 - \sin \frac{1}{2} \varrho^2}}{\pi i} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{2} \varrho \sin \frac{1}{2} i\alpha \, d\alpha}{(\cos \frac{1}{2} i\alpha^2 - \sin \frac{1}{2} \varrho^2) \sqrt{\cos \frac{1}{2} i\alpha^2 - \cos \frac{1}{2} i\vartheta^2}}.$$

Um die Integration auszuführen, setze man  $\cos \frac{1}{2} i\alpha = \cos \frac{1}{2} i\vartheta \cdot (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ; dann wird:

$$v' = 1 - \frac{2}{\pi} \text{arc tg} \left( \frac{\sin \frac{1}{2} \varrho}{\sqrt{\cos \frac{1}{2} i\vartheta^2 - \sin \frac{1}{2} \varrho^2}} \right),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$3) \quad v' = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left( \frac{\sin \frac{1}{2} \varrho}{\cos \frac{1}{2} i \vartheta} \right).$$

Der Winkel  $\varrho$  ist für Punkte mit positiver Abscisse  $x$  zwischen  $0$  und  $\pi$ , für solche mit negativer Abscisse zwischen  $\pi$  und  $2\pi$ , der arcussinus zwischen  $0$  und  $\frac{1}{2}\pi$  zu wählen.

Für Punkte, die ausserhalb der  $x$ -Achse liegen, ist  $\vartheta > 0$ , und es gilt dann in Gleichung 2) für alle bei der Integration in Betracht kommende Werte von  $\alpha$  die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\varrho + i\alpha)} = 2 \sum_0^{\infty} (-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha} \cdot (\cos(n+\frac{1}{2})\varrho + i \sin(n+\frac{1}{2})\varrho),$$

und dadurch wird  $v'$  selbst in die Reihe entwickelt:

$$4) \quad v' = 1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{2 \cos i\vartheta + 2 \cos \varrho} \sum_0^{\infty} (-1)^n Q^n(\cos i\vartheta) \sin(n+\frac{1}{2})\varrho,$$

wobei gesetzt worden ist:

$$5) \quad Q^n(\cos i\vartheta) = \int_{\vartheta}^{\infty} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha} d\alpha}{\sqrt{2 \cos i\alpha - 2 \cos i\vartheta}}.$$

Die Funktion  $Q^n$  ist identisch mit der von Heine als Kugelfunktion zweiter Art eingeführten Funktion; denn durch die Substitution

$$e^{\alpha} = \cos i\vartheta - i \sin i\vartheta \cos i\mu$$

geht 5) für  $\cos i\vartheta = x$  über in Heine's Gleichung:

$$Q^n(x) = \int_0^{\infty} \frac{du}{(x + \cos i\mu \sqrt{x^2-1})^{n+1}}.$$

2. Wird die Kreisscheibe vom Radius  $1$  mit einer Ringfläche vom Parameter  $\tau$  umgeben, und bezeichnet  $r$  den Radius des freibleibenden Teiles der Scheibe,  $R$  den Radius des grössten (durch Erweiterung der Kreisebene entstehenden) Durchschnittskreises, so ist

$$r = -i \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \tau, \quad R = i \operatorname{cot} \frac{1}{2} i \tau, \quad \text{also:}$$

$$1 = \sqrt{r \cdot R} \quad \text{und} \quad -i \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \tau = \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

Für Punkte auf der Kreisscheibe vom Radius  $r$  liegt  $\vartheta$  zwischen  $0$  und  $\tau$  und es ist  $\varrho = 0$  an der positiven,  $= 2\pi$  an der negativen Seite der Achse. Für Punkte auf dem ringförmigen Rande nimmt  $\varrho$  alle Werte von  $0$  bis  $2\pi$  an, während  $\vartheta$  den konstanten Wert  $\tau$  besitzt.

Nach den ersten Sätzen in § 9 ist nun der Ausdruck

$$v'' = \frac{1}{\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{(\zeta-x)^2 + y^2}}$$

im äusseren Raume das Potential einer Oberflächenbelegung des aus der Scheibe und dem Ringe zusammengesetzten Körpers, und zwar wird die Dichtigkeit konstant für Punkte desselben Parallelkreises, und  $\pm f(x)$  stellt den Wert des Potentials auf der Achse dar. Da im vorliegenden Falle die Massenverteilung auch in Bezug auf die YZ-Ebene symmetrisch werden muss, so muss die Funktion  $f$  auf der Achse der Bedingung  $f(x) = -f(-x)$  genügen. Setzt man nun wieder  $x + iy = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varrho + i\vartheta)$  und, wie vorhin  $\lambda$ , jetzt  $\zeta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varrho + i\alpha)$ , und führt man statt  $f$  eine andere Funktion  $\varphi$  oder  $\psi$  ein durch die Gleichung

$$f(\zeta) = (\zeta^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \varphi(\zeta) = \cos \frac{1}{2} (\varrho + i\alpha) \psi(\varrho + i\alpha),$$

so wird

$$v'' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2 \cos i\vartheta + 2 \cos \varrho} \int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{\psi(\varrho + i\alpha) d\alpha}{\sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos i\alpha}},$$

und die Funktion  $\varphi$  muss die Bedingung  $\varphi(x) = \varphi(-x)$  oder  $\psi$  die Bedingung  $\psi(\varrho) = \psi(2\pi - \varrho)$  erfüllen. Nimmt man nun für  $\psi$  beispielsweise die als konvergent vorausgesetzte Reihenentwicklung

$$\psi(\varrho + i\alpha) = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} (-1)^n C_n \cdot \sin(n + \frac{1}{2})(\varrho + i\alpha),$$

so erhält man:

$$6) \quad v'' = \frac{2}{\pi} \sqrt{2 \cos i\vartheta + 2 \cos \varrho} \sum_0^{\infty} (-1)^n C_n P^n(\cos i\vartheta) \sin(n + \frac{1}{2}) \varrho,$$

wenn man setzt:

$$7) \quad P^n(\cos i\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\alpha} d\alpha}{\sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos i\alpha}}.$$

Dabei ist  $P^n$  die Kugelfunktion erster Art, da 7) durch die Substitution

$$e^\alpha = \cos i\vartheta - i \sin i\vartheta \cos \varphi$$

in die Laplace'sche Integralform

$$P^n(\cos i\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos i\vartheta - i \sin i\vartheta \cos \varphi)^n d\varphi$$

übergeführt werden kann. Jedes in der Form 6) ausgedrückte Potential besitzt den

speziellen Charakter, dass es für  $\varrho = 0$  und  $\varrho = 2\pi$ , also zu beiden Seiten der Kreisfläche vom Radius  $r$  den Wert Null annimmt, was in der für  $\psi$  gewählten speziellen Reihenform seinen Grund hat.

3. Bildet man jetzt das Potential  $v = v' + v''$ , so nimmt dieses auf der Kreisscheibe vom Radius  $r$  den Wert 1 an. Setzt man dann für  $v'$  und  $v''$  ihre Reihenentwicklungen aus 4) und 6) ein, so sieht man, dass  $v$  auch auf der Ringfläche, d. h. für  $\vartheta = \pi$ , sich auf den Wert 1 reduziert, wenn die Konstanten  $C_n$  so gewählt werden, dass

$$8) \quad C_n P^n(\cos i\tau) = Q^n(\cos i\tau).$$

Auch ist die Konvergenz der so entstehenden Reihenentwicklungen einleuchtend.

Hierdurch ist nun das Potential  $v$  so bestimmt, dass es überall auf der Oberfläche des Leiters den Wert 1 erhält. Die Dichtigkeit  $k$  kann durch Differentiation nach der nach aussen gerichteten Normale mittels der Formel

$$-4\pi k = \frac{\partial v}{\partial n}$$

gefunden werden, wobei zu beachten ist, dass an der Kreisfläche ( $\varrho = 0$  und  $\varrho = 2\pi$ ) und an der Ringfläche ( $\vartheta = \pi$ ) resp. zu setzen ist:

$$dn = \pm \frac{d\varrho}{\cos i\vartheta + 1} \quad \text{und} \quad dn = - \frac{d\vartheta}{\cos i\tau + \cos \varrho},$$

und dass der zweite der so sich ergebenden Ausdrücke durch Benutzung der bekannten Relation

$$P^n(x) \frac{dQ^n(x)}{dx} - Q^n(x) \frac{dP^n(x)}{dx} = - \frac{1}{x^2 - 1} \quad (\text{Heine, I, 137})$$

sich vereinfachen lässt.

Führt man noch die Abkürzungen

$$9) \quad \cos i\tau = a, \quad \cos i\vartheta = t, \quad \sqrt{\cos i\vartheta + \cos \varrho} = s$$

ein und lässt in den Summen die Grenzen 0 und  $\infty$  der Einfachheit halber fort, so erhält man das Resultat in folgender Form:

Wenn einem aus einer Kreisscheibe und einem Ringe zusammengesetzten Leiter eine Elektrizitätsmenge mitgeteilt wird, deren Potential im Innern des Leiters den Wert 1 hat, so findet man das Potential  $v$  im ganzen äussern Raume durch die Gleichung

$$10) \quad v = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sin \frac{1}{2} \varrho}{\cos \frac{1}{2} \vartheta} + \frac{s\sqrt{8}}{\pi} \sum \frac{Q^n(a) P^n(t)}{(-1)^n P^n(a)} \sin(n + \frac{1}{2}) \varrho,$$

welche für alle Punkte, mit Ausnahme der auf der Achse gelegenen, auch durch die folgende ersetzt werden kann:

$$11) \quad v = 1 - \frac{s\sqrt{8}}{\pi} \sum \frac{P^n(a) Q^n(t) - Q^n(a) P^n(t)}{(-1)^n P^n(a)} \sin(n + \frac{1}{2}) \varrho.$$

Die einander gleichen Dichtigkeiten  $k_0$  und  $k_{2\pi}$  zu beiden Seiten der Kreisscheibe sind bestimmt durch die Gleichung

$$12) \quad k_0 = \frac{\sqrt{1+t}}{\pi^2 \sqrt{8}} \left\{ 1 - (1+t) \sum \frac{(2n+1) Q^n(a) P^n(t)}{(-1)^n P^n(a)} \right\},$$

oder auch, ausser im Mittelpunkte der Scheibe, durch

$$13) \quad k_0 = \frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \sqrt{8}} \sum (2n+1) \frac{P^n(a) Q^n(t) - Q^n(a) P^n(t)}{(-1)^n P^n(a)}.$$

Die Dichtigkeit der elektrischen Schicht auf der Ringfläche hat den Wert

$$14) \quad k_r = \frac{(a + \cos \varrho)^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \sqrt{2} \sqrt{a^2 - 1}} \sum \frac{(-1)^n \sin(n + \frac{1}{2}) \varrho}{P^n(a)}.$$

Die Gesamtmenge  $m$  der auf dem Leiter verbreiteten Elektrizität kann aus 10) bestimmt werden, wenn man beachtet, dass

$$m = \lim v \sqrt{x^2 + y^2} \text{ [für } \sqrt{x^2 + y^2} = \infty] = \sqrt{2} \lim (v : s) \text{ [für } \vartheta = 0, \varrho = \pi]$$

ist; man erhält auf diese Weise:

$$15) \quad m = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum \frac{Q^n(a)}{P^n(a)}.$$

Endlich ergibt sich für die auf dem Ringe allein verbreitete Elektrizitätsmenge  $m_r$  durch Integration von  $k_r$  über die Oberfläche des Ringes:

$$16) \quad m_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum \frac{(-1)^n}{P^n(a)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varrho \sin(n + \frac{1}{2}) \varrho}{\sqrt{a + \cos \varrho}}.$$

Die aufgestellten Formeln gelten unter der Voraussetzung, dass  $\sqrt{rR} = 1$  gesetzt, dass also das geometrische Mittel von  $r$  und  $R$  zur Längeneinheit gewählt wird. Will man diese Beschränkung aufheben, so hat man nur nötig, die Ausdrücke für die Dichtigkeiten durch  $\sqrt{rR}$  zu dividieren, die für die Elektrizitätsmengen damit zu multiplizieren.

Nach 13) wird  $k_0$  (oder  $k_{2\pi}$ ) = 0 für  $t = a$ , also für  $\vartheta = r$ ; nach 14) wird  $k_r = 0$  für  $\varrho = 0$  und  $\varrho = 2\pi$ . Die Dichtigkeit ist also gleich Null an der Grenzlinie zwischen der Kreis- und Ringfläche. Da bei einer einfachen Kreisscheibe die Dichtigkeit von der Mitte nach dem Rande, wo sie unendlich gross ist, beständig zunimmt, so ist hiernach für den zusammengesetzten Leiter anzunehmen, dass

wenigstens in dem Falle, wo die Breite  $R - r$  des Ringes gegen den Radius  $r$  der Scheibe sehr klein ist, die Dichtigkeit auf der Scheibe vom Mittelpunkte bis zu einer bestimmten Entfernung  $r$  beständig zunehmen, dann bis zum Ringe hin abnehmen und zuletzt auf den Wert Null herabsinken, auf dem Ringe aber wieder zunehmen und auf seinem äusseren Umfange (also für  $\vartheta = \pi$ ,  $\varphi = \pi$ , oder  $x = 0$ ,  $y = R$ ) ein zweites Maximum erreichen wird. Für sehr kleine Werte von  $R - r$  ist  $a$  sehr gross und der Wert von  $t$ , für welchen das erste Maximum stattfindet, von derselben Grössenordnung, wie  $a$ . Als angenäherte Werte für  $1 + t$  findet man, indem man in 12) ein, zwei oder drei Glieder der Summe beibehält, respektive:

$$1 + t = \frac{a}{3}; \quad 1 + t = \frac{a}{3} + \frac{5}{27}; \quad 1 + t = \frac{a}{3} + \frac{5}{27} - \frac{8}{27a}.$$

Der zweite Näherungswert reicht aus, um  $r$  bis zur zweiten Potenz von  $R - r$  einschliesslich zu entwickeln. Es ist:

$$r = \sqrt{rR} \cdot \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i\vartheta = r \sqrt{1 + \frac{R-r}{r}} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}; \quad a = \frac{R+r}{R-r}.$$

Setzt man  $R - r = r\varepsilon$ , so wird, bis auf zu vernachlässigende Grössen:

$$r = r \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) \left(1 - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+t)^2}\right); \quad a = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon};$$

$$\frac{1}{1+t} = \frac{3}{a} - \frac{5}{3a^2} = \frac{3\varepsilon}{2} - \frac{7\varepsilon^2}{6}; \quad \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{9\varepsilon^2}{4}; \quad \text{also}$$

$$r = r \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right) \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{1}{24}\varepsilon^2\right) = r \left(1 - \varepsilon - \frac{5}{8}\varepsilon^2\right),$$

das heisst:

$$17) \quad r = r - (R - r) - \frac{5}{8} \frac{(R - r)^2}{r} + \dots$$

Das Maximum der Dichtigkeit auf der Kreisscheibe findet also, für sehr kleine Werte von  $R - r$ , in einer Entfernung vom Rande statt, die um ein Geringes grösser als die Breite des Ringes ist. Ferner ist, wenn  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  die Dichtigkeiten im Kreismittelpunkte und im ersten und zweiten Maximum bezeichnen, für kleine  $\varepsilon$  nach 12) und 14) angenähert:

$$\frac{K_2}{K_1} = \sqrt{27} \left(1 - \frac{1}{6}\varepsilon\right); \quad \frac{K_2}{K_0} = 2 \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}\right),$$

und nach 15) und 16):

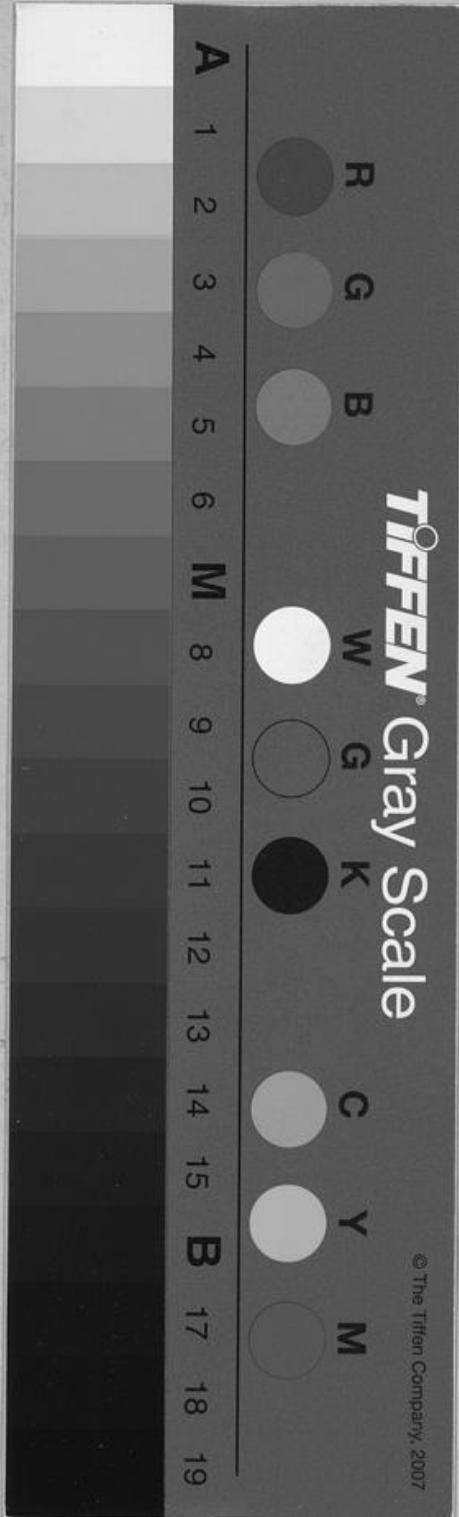
$$\frac{m_r}{m} = 2 \sqrt{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon\right).$$

Hiernach würde sich z. B. für  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , d. h.  $R - r = \frac{1}{3} r$ , ergeben, dass  $K_2$  etwa fünfmal so gross als  $K_1$  und etwa  $6\frac{2}{3}$  mal so gross als  $K_0$  wird, und dass dann die Elektrizitätsmenge auf dem Ringe ungefähr  $\frac{6}{9}$  der gesamten Elektrizitätsmenge beträgt. Uebrigens besitzen die für die Dichtigkeiten und Elektrizitätsmengen gefundenen unendlichen Reihen selbst noch für  $a = 2$ , d. h.  $R = 3 r$ , eine ziemlich starke Konvergenz. Nur für Werte von  $a$ , die sehr nahe an 1 liegen, also für sehr grosse Werte von  $\varepsilon$ , würden die unendlichen Reihen einer Umgestaltung bedürfen, um für die numerische Berechnung brauchbar zu werden. In dem Grenzfalle, wo  $a$  den Wert 1 erreicht, indem  $r$  bei endlich bleibendem  $R$  den Wert 0 annimmt, der Leiter also in einen Rotationskörper übergeht, dessen Meridianlinie ein die Achse berührender Kreis vom Durchmesser  $R$  ist, treten in den Formeln für das Potential  $v$  und in den Ausdrücken für die Dichtigkeit  $k_r$  und die Elektrizitätsmenge  $m$  oder  $m_r$  (denen nach Seite 33 der Divisor resp. Faktor  $\sqrt{rR}$  hinzuzufügen ist), an Stelle der unendlichen Reihen bestimmte Integrale und an Stelle der Kugelfunktionen Bessel'sche Funktionen.

**Mehler.**

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mirrored and difficult to decipher but appears to contain technical or scientific information.

Blatt



Faint, illegible text visible through the paper, likely bleed-through from the reverse side of the page.

Melior