Vorwort.

In den letzten Osterferien habe ich während meines Aufenthaltes in Berlin erfahren, daß Herr Professor Quenstedt in Tübingen eine Abhandlung über die Körper des (3 + 5) glidrigen Systems drucken laßen wolle. Da es meine Arbeit über die Pemptoedrie des Icosaeders gewesen, die ihn dazu angeregt, so ist es mir doppelt erfreulich, einen Mitarbeiter auf diesem neu eröffneten Gebiete der Wißenschaft zu bekommen. Nachdem mein verehrter Freund Professor F. Neumann im Jahre 1823 seine Beiträge zur Krystallonomie herausgegeben und uns die graphische Methode gelehrt hatte, da verfloßen 17 Jahre, bevor Herr Professor Quenstedt mit einer Umarbeitung dieser Methode an das Licht trat: seine Methode der Krystallographie, Tübingen 1840, erschien, als Neumanns Arbeit noch wenig benutzt, ja vergeßen war, und es nicht mehr nöthig schien, den Urheber der Methode anders als in ganz gleichgiltiger Weise unter einer Anzahl von Namen mit aufzuführen, die bei der graphischen Methode unbeteiligt waren. Wißenschaftliche Arbeiten in Programmen sind schon kurz nach ihrem Erscheinen dem leidigen Schicksal unterworfen, nicht beachtet oder bald vergeßen zu werden; um so mehr verdienen sie den Schutz derer, welche redlich sind.

P. W.

Ueber die Pemptoedrie der fünfglidrigen Leuzitoeder.

§. 24.

In den sechs ersten Paragraphen meiner Abhandlung habe ich die beiden gleichglidrigen Körpersysteme charakterisiert, eine gegenseitige Beziehung beider zu einander behauptet und in §. 5 den Grund aufgedeckt, auf welchem der Zusammenhang beruht. Einzelne Körper des einen Systems mit einzelnen des andern sind, wie ich finde, schon früher verglichen worden:

a. Johann Keppler vergleicht in der Harmonice mundi, Lincii, 1619 II. Seite 61, das vierglidrige und fünfglidrige Granatoeder mit einander und stellt V. Seite 181 die fünf regelmäßigen Körper in folgender Weise zusammen: Sunt autem notabilia duo veluti conjugia harum figurarum, ex diverſis combinata claſſibus: Mares, cubus et Dodecaedron ex primariis; fœminæ, Octoëdron & Icoſiëdron ex ſecundariis; quibus accedit una veluti cœlebs aut Androgynos, Tetraëdron; quia ſibi ipſi inſcribitur, ut illæ fœmellæ maribus inſcribuntur et veluti ſubjiciuntur, et ſigna ſexus fœminina maſculinis oppoſita habent, angulos ſcilicet planiciebus.

b. Karl von Raumer fügt in ſeinem „Verſuche eines Abcbuchs der Kryſtallkunde", Berlin 1820 S. 145 den ſchon vor ihm bekannten drei Körpern des (3 + 5) glidrigen Syſtems den vierten hinzu, das fünfglidrige Leuzitoeder, aber nicht als Reihe, ſondern als einzelnen dem viergliderigen Leuzitoeder $\boxed{a : {}^1/_2\, a : a}$ entſprechenden Körper, und vergleicht ſodann die Art und Weiſe, wie dieſe vier Körper einer aus dem andern durch Abſtumpfung der Ecken oder der Kanten oder durch Zuſpitzung der Ecken entſtehen, mit den Herleitungen der entſprechenden Körper des (3 + 4) glidrigen Syſtems aus einander. Endlich ſagt er noch S. 154: „Durch Zuſchärfung der Kanten des 12=, 20=, 30=flachs entſtehen Pyramiden 12=, 20=, 30=flache, welche dem Pyramidenwürfel, Pyramiden=8flach und Pyramiden=Rauten 12fach entſprechen." So deutet er alſo auf ſämmtliche Körper des (3 + 5) glidrigen Syſtems hin, den einen hemiedriſchen abgerechnet, der ihm unbekannt war, und abgeſehen von der mangelhaften Auffaßung des 120=flachs, des (3 + 5)=glidrigen Adamantoeders.

c. Profeſſor Rothe in Erlangen handelte in Kaſtners Archiv, Band IV. Seite 162 ff., von den drei „Rhomboidalkörpern", nämlich dem Rhomboidalhexaeder (S. 257), dem Rhomboidaldodecaeder (S. 259) und dem Rhomboidaltriakontaeder (S. 276), und Band V. S. 257 ff. von den „Leuzitkörpern", deren Flächen den Kanten des Rhomboidaldodecaeders und Rhomboidaltriakontaeders entſprechen, und unterſcheidet den „erſten Leuzitkörper" (S. 276) und den „zweiten" (S. 281). Von Reihen der beiderlei Leuzitkörper iſt keine Rede; die Sätze haben nach Art der gewöhnlichen Behandlung der fünf regelmäßigen Körper die Verhältniſſe des Umfangs und des Inhalts zu ihrem Zweck.

d. Meine Abhandlung: „Verſuch einer wißenſchaftlichen Blütenlehre", geſchrieben im Auguſt 1825, in Kaſtners Archiv Band VI. Seite 257 ff., enthält endlich die Zurückführung des Dodecaeders und Icoſaeders ſamt aller von ihnen abgeleiteten Gebilde auf ein Syſtem von 6 gleichen, gegen einander unter einem Winkel, deſſen Tangente = 2, geneigten Axen, ſtellt dieß Syſtem dem andern, welches auf 3 gleichen, einander rechtwinklich ſchneidenden Axen beruht, gegenüber und nennt dieſes das (3 + 4) glidrige, jenes das (6 + 10) glidrige.

§. 25.

Die Vergleichung der Körper beider Syſteme kann nur dann auf eine geſchickte Weiſe gehandhabt werden, wenn ihr eine gute Namengebung zur Hilfe kommt. Die Namen Würfel, Octaeder und Granatoeder im (3 + 4) glidrigen Syſtem hindern ſich ſchon durch die verſchiedenen Gründe ihrer Herleitung unter ſich, wie viel größer müßte die Verwirrung werden, wenn ihnen im (3 + 5) gliderigen Syſtem wiederum andere Namen zugeordnet werden ſollten, die ihnen und vielleicht auch ſich ſelbſt in ähnlicher Weiſe widerſprächen. Ich werde mich im Laufe meiner Arbeiten folgender Bezeichnungen bedienen:

a. Der vollflächigen Körper:

1. H, Haloeder, Salzflach [im (3 + 4) glidrigen Syſtem der Würfel],
2. M, Magnetoeder, Magnetflach [im (3 + 4) glidrigen Syſtem das Octaeder],
3. Gr, Granatoeder, Granatflach,
4. F, Fluoroeder, Fluorflach [im (3 + 4) glidrigen Syſtem der Pyramidenwürfel],
5. G, Galenoeder, Galenflach [im (3 + 4) glidrigen Syſtem das Pyramiden=Octaeder],

6. L, Leuzitoeder, Leuzitflach,
7. A, Adamantoeder, Diamantflach,

und zwar werde ich mich ihrer für beide Systeme bedienen, dergestalt, daß ich dem Namen die Bestimmung „vierglidrig" oder „fünfglidrig" hinzufüge, je nachdem der gemeinte Körper dem einen oder dem andern Systeme angehört, und also, beispielsweise, von einem vierglidrigen und einem fünfglidrigen Haloeder spreche, unter dem vierglidrigen den Würfel, unter dem fünfglidrigen das Dodecaeder verstehe.

b. Namen der hemiedrischen Körper im 3+4glidrigen System:

1. Helvinoeder, Helvinflach (aus der nicht parallelflächigen Hemiedrie des vierglidrigen Magnetoeders hervorgehend, das Tetraeder).
2. Eulytinoeder, Eulytenflach (aus der nicht parallelflächigen Hemiedrie des vierglidrigen Leuzitoeders hervorgehend).
3. Dillitoeder, Dillitflach (aus der nicht parallelflächigen Hemiedrie des viergliderigen Galenoeders hervorgehend, bis jetzt nur am Fahlerz von der Dill beobachtet).
4. Borazitoeder, Borazitfach (aus der nicht parallelflächigen Hemiedrie des viergliderigen Adamantoeders hervorgehend).
5. Tetartoeder (das an Mineralien noch nicht mit Sicherheit beobachtete Viertel des viergliderigen Adamantoeders).
6. Kobaltoeder, Kobaltflach (aus parallelflächiger Hemiedrie des vierglidrigen Fluoroeders hervorgehend).
7. Pyritoeder, Kiesflach (aus parallelflächiger Hemiedrie des vierglidrigen Adamantoeders hervorgehend).

§. 26.

Indem ich die Kenntnis des fünfglidrigen Haloeders (des Dodecaeders), Magnetoeders (des Icosaeders) und Granatoeders (des Triakontaeders) voraussetze, will ich hier in der Kürze die Reihen, nach welchen die vier anderen Körper des (3+5)glidrigen Systems aufzufaßen sind, bezeichnen:

1. Die fünfglidrigen Flouroeder bilden eine Reihe, deren Gränzen das fünfglidrige Haloeder und das fünfglidrige Granatoeder sind.
2. Die fünfglidrigen Galenoeder bilden eine Reihe, deren Gränzen das fünfglidrige Magnetoeder und das fünfglidrige Granatoeder sind.
3. Beide Reihen können wegen des einen gemeinschaftlichen Gränzkörpers, nämlich des fünfglidrigen Granatoeders, zu Einer verbunden werden, deren Gränzen das fünfglidrige Haloeder und das fünfglidrige Magnetoeder sind und in deren Mitte, als Uebergangskörper, jenes fünfglidrige Granatoeder steht.
4. Dieser combinierten Reihe von fünfglidrigen Fluoroedern und Galenoedern entspricht die Reihe der fünfglidrigen Leuzitoeder, deren Gränzkörper ebenfalls das fünfglidrige Haloeder und das fünfglidrige Magnetoeder sind und in deren Mitte ein Leuzitoeder steht, welches dem in der Mitte der andern Reihe stehenden fünfglidrigen Granatoeder entspricht. Wir nennen dieß fünfglidrige Leuzitoeder das mittlere, die zwischen ihm und dem fünfglidrigen Haloeder sich befindenden die stumpferen, die zwischen ihm und dem fünfglidrigen Magnetoeder stehenden die spitzeren.
5. Aus jedem fünfglidrigen Leuzitoeder entwickelt sich eine Reihe von fünfglidrigen Adamantoedern dadurch, daß bei festbleibenden fünfglidrigen und dreiglidrigen Ecken sich die (2+2)glidrigen in der Richtung ihrer Axe senken, oder, mit andern Worten, daß die Flächen sich in der Richtung der symmetrischen Diagonalen brechen. Als andere Gränze einer jeden solchen Reihe bildet sich ein Körper aus der combinierten Reihe der fünfglidrigen Fluoroeder und Galenoeder (Nr. 4), und zwar, wenn die Reihe mit einem stumpfen Leuzitoeder beginnt, ein fünfglidriges Fluoroeder,

wenn sie mit einem spitzen Leuzitoeder beginnt, ein fünfglidriges Galenoeder, und wenn sie mit dem mittleren beginnt, das fünfglidrige Granatoeder.

Daß diese Betrachtungen auch von den Körpern des (3+4) glidrigen Systems gelten, fällt in die Augen. Näher aber auf den Gegenstand einzugehen, vor Allem die Reihe vollständiger und mit den Flächenzeichen an der Hand zu beschreiben, kann hier meine Absicht nicht sein, auch wenn es der Raum erlaubte.

§. 27.

Es finden im (3 + 5) glidrigen System zweierlei Pemptoedrien und eine Hemiedrie statt. Die Pemptoedrien werden, wie im (3+4) glidrigen System die zweierlei Hemiedrien, am besten als parallelflächige und nicht parallelflächige unterschieden. Beide Pemptoedrien führen auf dieselben Körper, als die Hemiedrien im (3 + 4) glidrigen System.

§. 28.

Im (3+4) glidrigen System ist unter den nicht parallelflächigen Hemiedrien die des Magnetoeders (Octaeders) die hauptsächlichste; die des Galenoeders, Leuzitoeders und Adamantoeders werden auf sie bezogen: es werden an diesen Körpern diejenigen dreiglidrigen Flächengruppen erweitert, welche den hemiedrisch erweiterten Flächen des Magnetoeders entsprechen.

Ebenso die Pemptoedrien im (3 + 5) glidrigen System.

a. Die Pemptoedrie des fünfglidrigen Magnetoeders (des Icosaeders), von welcher §. 6 — 16 gehandelt worden, ist eine nicht parallelflächige, und führt gleich der Hemiedrie des vierglidrigen Magnetoeders auf das Helvinoeder (Tetraeder). Die Pemptoedrie unterscheidet sich von der Hemiedrie dadurch, daß sie, wie §. 16 nachgewiesen worden, auf doppelte Weise statt finden kann.

b. Nicht parallelflächige Pemptoedrien erleiden demnächst die fünfgliedrigen Galenoeder, Leuzitoeder und Adamantoeder, weil sie abgesonderte, den Flächen des fünfglidrigen Magnetoeders (Icosaeders) entsprechende Flächengruppen haben. Die Pemptoedrie aller dieser Körper ist gleich der des fünfglidrigen Magnetoeders eine doppelte.

c. Jedes fünfglidrige Galenoeder (Pyramiden=Icosaeder) zerfällt in fünf Tetartoeder, und zwar erhält man aus der einen Pemptoedrie die der einen, aus der andern die der andern Art: die links gewundenen und die rechts gewundenen.

d. Dasselbe gilt von den fünfglidrigen Leuzitoedern.

e. Die fünfglidrigen Adamantoeder zerfallen nicht, wie es bei erstem Blicke scheinen möchte, in fünf Borazitoeder, sondern statt dessen entweder in zweierlei Tetartoeder, von denen die der einen Pemptoedrie die links gewundenen, die andere die rechts gewundenen gibt, oder in fünf Dillitoeder und fünf Eulytinoeder, also jedesmal nicht in fünf, sondern in zehn Körper, aber immer von zweierlei Art.

§. 29.

Die parallelflächigen Pemptoedrien des (3 + 5) glidrigen Systems führen, wie schon erwähnt, auf dieselben zwei Körper, welche aus den parallelflächigen Hemiedrien des (3 + 4) glidrigen Systems hervorgehen, und die ich das Kobaltoeder und Pyritoeder genannt. Allein es sind drei Unterschiede zwischen diesen Pemptoedrien und jenen Hemiedrien zu merken. Der eine, daß es nicht, wie im (3+4) glidrigen System, bloß zweierlei Körper sind, nämlich die fünfglidrigen Fluoroeder und Adamantoeder, welche eine solche Teilung erfahren, sondern daß auch noch die fünfglidrigen Galenoeder und Leuzitoeder einer parallelflächigen Pemptoedrie unterworfen sind. Der andere Unterschied, daß auch der mittlere Körper der verbundenen Reihe der Fluoroeder und Galenoeder (§. 26, 4), nämlich das fünfglidrige Granatoeder

(Triakontaeder), eine Pemptoedrie erfährt, während es im (3+4) glidrigen System keine Hemiedrie des vierglidrigen Granatoeders gibt. Der dritte Unterschied, daß von der Reihe der Kobaltoeder auch die Gränzkörper, nämlich das vierglidrige Haloeder (Würfel) und Granatoeder, als pemptoedrische Körper erscheinen, während im (3+4) glidrigen System diese Körper als hemiedrische nicht vorkommen.

§. 30.

In Beziehung auf die acht Pemptoedrien entsteht die Aufgabe, die Durchdringung der jedesmaligen fünf Körper zu bestimmen und den hervorgehenden Stern zu zeichnen und zu modellieren. Es sind folgende acht Sterne:

1. der Helvinoederstern (Tetraederstern,
2. der Dillitoederstern,
3. der Eulytinoederstern,
4. der Tetartoederstern,
5. der Haloederstern (Würfelstern),
6. der Granatoederstern,
7. der Kobaltoederstern,
8. der Pyritoederstern.

Wie der Helvinoederstern (Tetraederstern) gezeichnet und modelliert werden müße, habe ich §. 20—23 gezeigt. Die Anweisung für die Darstellung der andern bleibt vorbehalten. Wir fanden uns schon mit der Aufgabe, die Durchdringung der Fünftel des Icosaeders zu bestimmen und den Tetraederstern darzustellen, auf einem bisher noch von Niemand betretenen Gebiet; bei der Untersuchung, wie sich die Fünftel jedes der andern fünf Körper, welche Pemptoedrien erfahren, durchdringen, stößt man auf größere Schwierigkeiten, und die Darstellung des jedesmal hervorgehenden Sterns gehört zu den verwickelteren Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Modellierkunst.

§. 31.

Ich wähle zum Gegenstand meiner dießmaligen Abhandlung die parallelflächige Pemptoedrie des fünfglidrigen Leuzitoeders. Zuvor gebe ich eine Zusammenstellung der am häufigsten wiederkehrenden Linienverhältnisse am gleichglidrigen Fünfeck und eine kurze Untersuchung derjenigen Eigenschaften des fünfglidrigen Magnetoeders (Icosaeders), auf die ich bei der Betrachtung der fünfglidrigen Leuzitoeder sehr oft zurückkommen muß.

§. 32.

Es sei Fig. 49 ein gleichglidriges Fünfeck.

1. $fa : fi : ai = \sqrt{5} - 1 : 1 : \sqrt{5}$.
2. In diesem Verhältnis ist, weil $fg = fi$, $ag = \sqrt{fa^2 - fg^2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$,
   also $ab = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.
3. $ab : bh = fa : fg$, oder
   $2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} : bh = \sqrt{5} - 1 : 1$,
   $$bh = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$
   $$bc = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$
4. $ah = \sqrt{ab^2 - bh^2} = \frac{1}{2}\sqrt{70 - 30\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2}$.
5. $\angle \alpha = \frac{1}{2}\beta$, also $\beta = \chi$, $al = ab$, also $ci = \frac{1}{2} la$, $ki = \frac{1}{2} ka$.

6. $\mathfrak{ki} : \mathfrak{ka} = 1 : 2 = \sqrt{5} : 2\sqrt{5}$,
$\mathfrak{kf} : \mathfrak{ka} = \sqrt{5}+1 : 2\sqrt{5}$
$= \mathfrak{fn} : \mathfrak{al}$,
$= \mathfrak{fn} : \mathfrak{ab}$,
also (nach Nr. 2) $\mathfrak{fn} : 2\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}+1 : 2\sqrt{5}$,

$$\mathfrak{fn} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}},$$ in dem Verhältnis der bisher angegebenen Liniengrößen.

7. Also $\mathfrak{fn} : \mathfrak{hb} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = 2 : \sqrt{5}$.

8. Ferner $\mathfrak{fn} : \mathfrak{ai} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} : \sqrt{5}$

$$= \sqrt{10-2\sqrt{5}} : 5.$$

9. $\mathfrak{fn} = \mathfrak{nc}$, denn $\mathfrak{cn} : \mathfrak{cb} = \mathfrak{if} : \mathfrak{ih}$, oder

$$\mathfrak{cn} : 2\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 1 : \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2},$$ also

$$\mathfrak{cn} = \frac{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

10. Es verhalten sich demnach die Linien

fa, wie die Zahlen:	fi,	ai,	ab,	bc,	ah,	hi,	hf,	fn,
4	$\sqrt{5}+1$	$\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$	$2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{5}-1$	$\frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
$\sqrt{5}-1$	1	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}(3-\sqrt{5})$	$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
$\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$	$\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{50-10\sqrt{5}}$	$\frac{5(3-\sqrt{5})}{2}$	$\frac{5(\sqrt{5}-1)}{2}$	$\frac{\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{2}$	$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$\sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$5\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	10	$5(\sqrt{5}+1)$	$\frac{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{2}$	$\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$
$\sqrt{50-10\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$	$5(\sqrt{5}-1)$	10	$5\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$2\sqrt{5}$
$\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{2}$	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{2}$	$\sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	5	$\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$
$2\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2}$	$\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$	$\sqrt{50-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$\frac{5(\sqrt{5}-1)}{2}$	5	$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\sqrt{5}+1$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{2}$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2}$	1	$\frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
$2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{50+10\sqrt{5}}$	$2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{50-10\sqrt{5}}$	$2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	4

§. 33.

1. Es sei Fig. 25 der (2+2)glidrige Durchschnitt und Fig. 26 die (2+2)glidrige Projektion eines fünfglidrigen Magnetoeders (Icosaeders), mit **oa** seien die halben Eckaxen, mit **oc** die halben Kantenaxen bezeichnet, die letzteren beiden rechtwinklich auf einander stehend.

a. ${}^{2}\mathfrak{c}\,{}^{1}\mathfrak{a}$ ist die halbe Seite, ${}^{1}\mathfrak{a}\overset{4}{\mathfrak{c}}$ die Höhe einer Fläche, also

$${}^{2}\mathfrak{c}\,{}^{1}\mathfrak{a} : {}^{1}\mathfrak{a}\overset{4}{\mathfrak{c}} = 1 : \sqrt{3}.$$

In dem Dreieck ${}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}}$ ist ${}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} = \mathfrak{o}\overset{4}{\mathfrak{c}}$, also $\overset{2}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}} = {}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} - 1$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left({}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}}\right)^2 &= \left({}^{1}\mathfrak{a}\overset{4}{\mathfrak{c}}\right)^2 - \left(\overset{2}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}}\right)^2 \\ &= 3 - \left({}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} - 1\right)^2 \\ &= 3 - \left({}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}}{}^{2} - 2\,{}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} + 1\right),\end{aligned}$$

also

$$2\left({}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}}\right)^2 - 2\,{}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} = 2,$$

$$\left({}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}}\right)^2 - \mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} = 1.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung gibt:

$${}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

also

$$\overset{2}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

b. Aus dem Vorigen folgt

$${}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}} = \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}-1,$$

also tang. $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$, und, nach der Formel

$$\text{tang. } 2\beta = \frac{2\,\text{tang.}\,\beta}{1 - \text{tang.}\,\beta^2},$$

ergiebt sich die Tangente des ganzen Kantenwinkels $= -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

c. tang. $\alpha = \frac{{}^{2}\mathfrak{c}\,{}^{1}\mathfrak{a}}{{}^{2}\mathfrak{c}\,\mathfrak{o}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$, es ist also nach der eben benutzten Formel die tang. des Winkels zwischen zwei fünfglidrigen Axen, nämlich

$$\text{tang. } 2\alpha = 2.$$

d. Fig. 26 sind die Dreiecke ${}^{1}\mathfrak{c}\,{}^{2}\mathfrak{c}\,{}_{1}\mathfrak{a}$ und ${}^{1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{o}\overset{4}{\mathfrak{c}}$ einander ähnlich, weil ${}^{1}\mathfrak{c}\,{}^{2}\mathfrak{c} : {}^{2}\mathfrak{c}\,{}_{1}\mathfrak{a} = {}^{1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{o} : \mathfrak{o}\overset{4}{\mathfrak{c}}$; daraus folgt $\angle\varepsilon = \angle\gamma$, und daraus, daß ${}^{1}\mathfrak{c}$ mit ${}_{1}\mathfrak{a}$ und $\overset{4}{\mathfrak{c}}$ in Einer Geraden liegt.

2. In Fig. 27 ist $\mathfrak{o}\,{}^{2}\mathfrak{b}$ die halbe Flächenaxe des 5glidrigen Magnetoeders, also rechtwinklich auf ${}^{1}\mathfrak{a}\overset{4}{\mathfrak{c}}$, und $\overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{2}\mathfrak{b} = \frac{1}{3}\,\overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a}$; $\mathfrak{o}\,{}^{2}\mathfrak{d}$ ist nach dem Halbierungspunkt von ${}^{1}\mathfrak{a}\overset{4}{\mathfrak{c}}$ gezogen.

a. Es sei erlaubt, hier und weiter fort unter dem Worte Axe die halbe Axe zu verstehn, und also zu sagen, $\mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{a}$ sei eine 5glidrige, $\mathfrak{o}\,{}^{2}\mathfrak{b}$ eine 3glidrige, $\mathfrak{o}\overset{4}{\mathfrak{c}}$ eine $(2+2)$glidrige Axe des fünfglidrigen Magnetoeders. Sodann sollen die 5glidrige Axe mit $\boldsymbol{\mathfrak{a}}$, die 3glidrige mit $\boldsymbol{\mathfrak{b}}$, die $(2+2)$glidrige mit $\boldsymbol{\mathfrak{c}}$ bezeichnet werden; alle Punkte in der Richtung der Axe $\boldsymbol{\mathfrak{a}}$ werden mit $\mathfrak{a}$, in der Richtung der Axe $\boldsymbol{\mathfrak{b}}$ mit $\mathfrak{b}$, in der Richtung der Axe $\boldsymbol{\mathfrak{c}}$ mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Das unter 1 a gefundene Verhältnis

$${}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{2}\mathfrak{c} : {}^{2}\mathfrak{c}\,\mathfrak{o} = {}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{2}\mathfrak{c} : \boldsymbol{\mathfrak{c}} = 2 : \sqrt{5}+1$$

zu Grunde gelegt, findet sich in dem Dreieck $\mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{2}\mathfrak{c}$

$$\boldsymbol{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{a} = \sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

in dem Dreieck $\mathfrak{o}\overset{4}{\mathfrak{c}}{}^{2}\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\,{}^{2}\mathfrak{b} = \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{3} = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

Wir erhalten also

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c} = \sqrt{10+2\sqrt{5}} : \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} : \sqrt{5}+1.$$

c. ${}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{2}\mathfrak{d}$ ist in ${}^{2}\mathfrak{d}$ und ${}^{2}\mathfrak{b}$ harmonisch geteilt, also ist es auch ${}^{1}\mathfrak{a}\overset{2}{\mathfrak{c}}$ in ${}^{1}\mathfrak{d}$ und ${}^{1}\mathfrak{b}$.

d. $\angle\,\alpha = \angle\,\delta$. Aus 1° ist bekannt, daß tang. $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$. Daß tang. δ ebenfalls diesen Werth hat, kann auf zwei Wegen nachgewiesen werden: entweder aus den Tangenten der beiden Teile von δ oder durch unmittelbare Berechnung des Verhältnisses $\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{d} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\mathfrak{o}$. Der letztere Weg ist dieser:

$$\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\mathfrak{o} = {}^{2}\mathfrak{b}\overset{4}{\mathfrak{c}} : {}^{2}\mathfrak{b}\mathfrak{o},$$

also $$\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} = \frac{\overset{2}{\mathfrak{c}}\mathfrak{o}\;\;{}^{2}\mathfrak{b}\overset{4}{\mathfrak{c}}}{{}^{2}\mathfrak{b}\mathfrak{o}} = \frac{2.\,\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}.$$

$\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{d}$ ist das harmonische Mittel zwischen $\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b}$ und $\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a}$, also

$$= 2\,\frac{\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b}\,.\;\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a}}{\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b}+\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a}} = 2\,\frac{(3-\sqrt{5})\quad(\sqrt{5}+1)}{(3-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{5}-1.$$

Also tang. $$\delta = \frac{\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{d}}{\overset{2}{\mathfrak{c}}\mathfrak{o}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}.$$

3. Es werde Fig. 28 mit Fig. 26 verglichen: $\overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{c}$ ist durch $\mathfrak{f}$, den Halbierungspunkt von ${}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{1}\mathfrak{c}$, gezogen, und $\mathfrak{o}\,{}^{3}\mathfrak{e}$ durch ${}^{1}\mathfrak{e}$, den ersten Drittelspunkt von $\mathfrak{f}\overset{4}{\mathfrak{c}}$. So ist $\mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{e}$ die Projektion der Axe der Fläche ${}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{1}\mathfrak{c}\overset{4}{\mathfrak{c}}$, und $\mathfrak{o}\,{}^{3}\mathfrak{e}$ die Projektion der Strecken, welche die Fläche $\overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a}$ von dieser Axe abschneidet. Ich merke folgende Verhältnisse an:

a. Daß $\overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{c}$ durch ${}^{1}\mathfrak{b}$ (Fig. 27) geht, beweist sich also:

$$\begin{aligned}
\text{Fig. 27 war } \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a} &= 3-\sqrt{5} : \sqrt{5}+1\\
&= 4 \qquad\;\; : 4\sqrt{5}+8\\
&= 1 \qquad\;\; : \sqrt{5}+2\\
\text{Fig. 28 ist } \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} &= \overset{4}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} \qquad : \overset{4}{\mathfrak{c}}\mathfrak{o}\\
&= \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1\\
\mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} : \mathfrak{o}\,\mathfrak{c} &= 2 \qquad\;\; : \sqrt{5}+1\\
\hline
\text{also} \qquad \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \mathfrak{o}\,{}^{2}\mathfrak{c} &= 2(\sqrt{5}-1) : 6+2\sqrt{5}\\
&= 1 \qquad\;\; : \sqrt{5}+2.
\end{aligned}$$

b. Die Projektion der dreiglidrigen Axe $\mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{e}$ halbiert den Winkel an $\mathfrak{o}$, weil die Punkte $\mathfrak{e}$ in den vier Quadranten gleiche Lage zu einander haben, was wieder nur unter rechten Winkeln möglich ist, also ist $\overset{2}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{e}} = \overset{2}{\mathfrak{c}}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c}$, und also ${}^{2}\mathfrak{e}\,{}^{1}\mathfrak{a} = {}^{1}\mathfrak{c}\,{}^{2}\mathfrak{c}$. Ferner ist $\mathfrak{e}\,{}^{1}\mathfrak{a} = {}^{2}\mathfrak{e}\,{}^{1}\mathfrak{b}$, denn

$$\begin{aligned}
\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{2}\mathfrak{e} &= \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} \\
&= \overset{4}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{o} \\
&= \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1 \\
\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : {}^{1}\mathfrak{b}\,{}^{2}\mathfrak{e} &= \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \left(\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{2}\mathfrak{e} - \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b}\right) \\
&= \sqrt{5}-1 : 2 \\
\mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} : \mathfrak{o}\,{}^{2}\mathfrak{c} &= 2 : \sqrt{5}+1 \\
\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} &= \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1 \\
\hline
\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \mathfrak{o}\,{}^{2}\mathfrak{c} &= \sqrt{5}-1 : 3+\sqrt{5} \\
&= \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a} \\
\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : {}^{1}\mathfrak{b}\,{}^{1}\mathfrak{a} &= \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \left(\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a} - \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b}\right) \\
&= \sqrt{5}-1 : 4.
\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}
{}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{h} : {}^{1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{f} &= \overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{c} = \overset{4}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{o} \\
&= \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1 \\
&= {}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{h} : \mathfrak{f}\,{}^{1}\mathfrak{a} \\
&= \mathfrak{g}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \mathfrak{g}\,{}^{1}\mathfrak{a}, \\
\text{also } {}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} : {}^{1}\mathfrak{b}\,{}^{1}\mathfrak{a} &= \sqrt{5}-1 : 2\sqrt{5} \\
{}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} : \mathfrak{i}\,\mathfrak{f} &= {}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{b} : \tfrac{1}{2}\,{}^{1}\mathfrak{b}\,{}^{1}\mathfrak{a} \\
&= \sqrt{5}-1 : \sqrt{5} \\
&= \overset{4}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{g} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{f} \\
\mathfrak{i}\,\mathfrak{f} : \mathfrak{k}\,{}^{1}\mathfrak{e} &= 3 : 2 \\
\hline
\text{also } {}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} : \mathfrak{k}\,{}^{1}\mathfrak{e} &= 3(\sqrt{5}-1) : 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

d. Nro. 3ᵇ gab das Verhältnis:

$$\begin{aligned}
{}^{1}\mathfrak{b}\,{}^{1}\mathfrak{a} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} &= 4 : \sqrt{5}-1 \\
\overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{b} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} &= \sqrt{5}-1 : \sqrt{5}+1 \\
\hline
\text{also } {}^{1}\mathfrak{b}\,{}^{1}\mathfrak{a} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} &= 4 : \sqrt{5}+1 \\
{}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} : {}^{1}\mathfrak{b}\,{}^{1}\mathfrak{a} &= \sqrt{5}-1 : 2\sqrt{5} \\
\hline
\text{also } {}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} &= 2(\sqrt{5}-1) : \sqrt{5}(\sqrt{5}+1) \\
\mathfrak{k}\,{}^{1}\mathfrak{e} : {}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} &= 2\sqrt{5} : 3(\sqrt{5}-1) \\
\hline
\text{also } \mathfrak{k}\,{}^{1}\mathfrak{e} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} &= 4 : 3(\sqrt{5}+1) \\
&= \mathfrak{z}\,{}^{1}\mathfrak{e} : \mathfrak{z}\,\mathfrak{o} \\
&= \mathfrak{z}\,\mathfrak{k} : \mathfrak{z}\,{}^{1}\mathfrak{c}.
\end{aligned}$$

e. So aber ist erwiesen worden:

$$\begin{aligned}
{}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} : \mathfrak{o}\,{}^{1}\mathfrak{c} &= 2(\sqrt{5}-1) : \sqrt{5}(\sqrt{5}+1) \\
{}^{1}\mathfrak{c}\,{}^{3}\mathfrak{c} : {}^{1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{g} &= \overset{4}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{o} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} \\
&= \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}-1 \\
\hline
\text{also } {}^{1}\mathfrak{c}\,{}^{3}\mathfrak{c} : {}^{1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{o} &= 2 : \sqrt{5} \\
{}^{1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{o} : \mathfrak{k}\,{}^{1}\mathfrak{e} &= 3(\sqrt{5}+1) : 4 \\
\hline
\text{also } {}^{1}\mathfrak{c}\,{}^{3}\mathfrak{c} : \mathfrak{k}\,{}^{1}\mathfrak{e} &= 3(\sqrt{5}+1) : 2\sqrt{5} \\
&= \overset{4}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{c} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{k}.
\end{aligned}$$

Die parallelflächige Pemptoedrie der fünfglidrigen Leuzitoeder.

§. 34.

Ein fünfglidriges Leuzitoeder hat dreierlei Ecken: fünfkantige, dreikantige und (2+2)kantige. Fünfkantige hat es 12, welche wie die Flächen des fünfglidrigen Haloeders liegen, dreikantige 20, welche wie die Flächen des fünfglidrigen Magnetoeders liegen, (2+2)kantige 30, welche wie die Flächen des fünfglidrigen Granatoeders liegen.

Es hat zweierlei Kanten, längere und kürzere. Die längeren liegen an den 5kantigen und an den (2+2) kantigen Ecken, es sind ihrer also 12 . 5 oder 30 . 2 = 60. Die kürzeren liegen an den 3kantigen und an den (2+2) kantigen Ecken, es sind ihrer also 20 . 3 = 30 . 2 = 60.

Die Flächen eines fünfglidrigen Leuzitoeders sind symmetrische Vierecke. Sie liegen in Gruppen von je 5 an den fünfkantigen Ecken und in Gruppen von je 3 an den dreikantigen, es sind ihrer also 12 . 5 = 20 . 3 = 60.

Verbindet man an dem fünfglidrigen Magnetoeder und dem fünfglidrigen Haloeder die Mittelpunkte der Flächen mit den Halbierungspunkten der Kanten, so sind beide Körper dadurch als fünfglidrige Leuzitoeder bezeichnet. Setzt man voraus, die Halbierungspunkte der Kanten des fünfglidrigen Magnetoeders seien fest und läßt nun im Gedanken sich die Mittelpunkte der Flächen in der Richtung ihrer Axen erheben, so wird jede durch einen solchen Punkt und zwei Halbierungspunkte der Kanten bestimmte Ebene eine fünfglidrige Axe des Magnetoeders in einem Punkte schneiden, der dem Mittelpunkte des Körpers näher liegt als die fünfkantige Ecke; während sich die Mittelpunkte der Flächen des Körpers erheben, werden also die fünfglidrigen Ecken sinken, und so entsteht eine Reihe von fünfglidrigen Leuzitoedern, die damit endigt, daß die fünf Flächen an jeder fünfkantigen Ecke in Eine Ebene fallen und das fünfglidrige Haloeder entsteht. Beachtet man im Laufe der Reihe die veränderlichen Geraden v, welche man zwischen je zwei benachbarten sich erhebenden Ecken zu denken hat, in ihrer Lage zu den festen Geraden f zwischen den Ecken des fünfglidrigen Magnetoeders, so wird man zwei Hälften der Reihe und einen mittleren Körper zwischen beiden unterscheiden. In der ersten Hälfte der Reihe liegen die Linien v unterhalb f (f außerhalb v): wir erhalten die spitzen Leuzitoeder; in der zweiten Hälfte der Reihe liegen die Linien v überhalb (außerhalb) f: wir erhalten die stumpfen Leuzitoeder; in der Mitte der Reihe schneiden sich die Linien v und die Linien f: wir erhalten das mittlere Leuzitoeder, dessen Flächen den Kanten des fünfglidrigen Granatoeders enspréchen.

Läßt man die Entwickelung mit dem fünfglidrigen Haloeder beginnen, so werden ebenfalls die Halbierungspunkte der Kanten als fest gedacht, es erheben sich ebenfalls die Mittelpunkte der Flächen, womit die dreikantigen Ecken des Körpers sinken und endlich so stumpf werden, daß die drei Flächen an jeder in Eine fallen und das fünfglidrige Magnetoeder entsteht.

§. 35.

Um die parallelflächige Pemptoedrie eines fünfglidrigen Leuzitoeders zu begreifen, faße man eine fünfkantige Ecke desselben ins Auge. Die Kanten dieser Ecke führen auf fünf (2+2)kantige Ecken, also auf die Enden von fünf (2+2)glidrigen Axen. Zu einer dieser Axen suche man die beiden anderen, die auf ihr und auf einander senkrecht stehen, und denke sich an den Enden einer jeden diejenigen zwei Flächen der nächsten fünfkantigen Ecken erweitert, welche an die längeren Kanten der an den Polen der Axen liegenden (2+2)kantigen Ecken stoßen. Die Erweiterung trifft natürlich auch eine an jener fünfkantigen Ecke, von der wir ausgiengen, liegende Fläche; nimmt man der Reihe nach zu jeder der fünf (2+2) glidrigen Axen, die dieser Ecke benachbart sind, die zu ihr gehörigen zwei senkrechten (2+2)glidrigen Axen und denkt sich die Erweiterung der jedesmaligen 6 Paar Flächen ausgeführt, so erhält man alle fünf Pemptoeder, und die Erweiterung trifft der Reihe nach alle fünf Flächen jener fünfkantigen Ecke, von der wir ausgiengen.

§. 36.

Wird Fig. 29 durch eine Ecke 'a des fünfglidrigen Magnetoeders eine Ebene gelegt senkrecht gegen die Ebene des gezeichneten (2+2)glidrigen Durchschnitts und in der Figur durch Gerade dargestellt, die durch 'a gehen, so kann diese Ebene eine Fläche verschiedener Körper sein:

1. Durch den Punkt $\overset{4}{c}$ gelegt ist sie eine Fläche des fünfglidrigen Magnetoeders;
2. rechtwinkelich durch die fünfglidrige Axe o'a gelegt, in der Figur durch $\overset{10}{c}$ gehend, ist sie eine Fläche des fünfglidrigen Haloeders;
3. durch einen Punkt **m** zwischen $\overset{4}{c}$ und $\overset{10}{c}$ gehend, ist sie die Fläche eines fünfglidrigen Leuzitoeders;
4. durch einen Punkt jenseits $\overset{10}{c}$ gehend, ist sie die Fläche eines fünfglidrigen Fluoroeders, und
5. parallel mit $o\overset{4}{c}$ gehend die Fläche des fünfglidrigen Granatoeders;
6. durch einen Punkt zwischen $\overset{4}{c}$ und $\overset{2}{c}$ gehend ist sie die Fläche eines fünfglidrigen Galenoeders, und durch $\overset{2}{c}$ selber gehend wieder des fünfglidrigen Granatoeders.

Wir faßen für unsern Zweck hier bloß den Fall Nr. 3, also die Punkte **m** ins Auge, und bezeichnen die Linien, die in der Figur von ihnen ausgehen, mit **m**, die Ebenen, die durch sie hindurchgelegt sind, mit **M**.

a. Eine Linie, $\overset{2}{m}$, schneidet die beiden (2+2)glidrigen Axen in dem Verhältnis von $c : \overset{10}{c}$, also von $2 : \sqrt{5}+1$. Dieß ist aber zugleich das Verhältnis, unter welchem die Kante des fünfglidrigen Granatoeders und somit auch die Fläche des mittleren fünfglidrigen Leuzitoeders die beiden (2+2)glidrigen Axen scheidet. Die Fläche $\overset{2}{M}$ ist also eine Fläche des mittleren Leuzitoeders, und zugleich, pemptoedrisch genommen, die Fläche eines fünfglidrigen Haloeders (Dodecaeders).

b. Jeder Punkt $\overset{1}{m}$ zwischen $\overset{4}{c}$ und $\overset{2}{m}$ liegt so, daß eine ähnliche Umkehrung des Verhältnisses innerhalb der Punkte $\overset{4}{c}$ und $\overset{10}{c}$ nicht vorkommen kann: dem Verhältnis, in welchem $\overset{1}{m}$ die beiden (2+2)glidrigen Axen schneidet, entspricht in der Umkehr ein Verhältnis, bei welchem der eine Punkt jenseits $\overset{10}{c}$, der andere zwischen ${}^{4}c$ und ${}^{2}c$ liegen würde. Mit andern Worten: eine Fläche $\overset{1}{M}$, die Fläche eines sehr spitzen fünfglidrigen Leuzitoeders, ist, pemptoedrisch genommen, die Fläche eines Kobaltoeders, das noch einmal als Pemptoedrie eines fünfglidrigen Galenoeders wiederkehrt. Es trifft dieß alle Kobaltoeder, bei denen in den Flächenzeichen $\boxed{a : pa : \infty a}$ die Zahl **p** größer ist als $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, äußerlich genommen: bei denen die 6 Hauptkanten größer sind als die 8.3 andern Kanten, also auch das gewöhnliche $\boxed{a : 2a : \infty a}$.

c. Jeder Punkt zwischen $\overset{2}{m}$ und $\overset{10}{c}$ hat einen Gegenpunkt mit umgekehrtem Verhältnis; so können die beiden 2+2glidrigen Axen von einer Fläche $\overset{3}{M}$ in dem Verhältnis von $1:r$ und von einer Fläche $\overset{5}{M}$ in dem Verhältnis von $r:1$ geschnitten werden. Mit andern Worten: zu jedem Kobaltoeder, für welches in dem Zeichen $\boxed{a : pa : \infty a}$ die Zahl **p** kleiner als $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ und größer als $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$ ist, gehören zwei fünfglidrige Leuzitoeder, und zwar zwei stumpfe, von denen es der pemptoedrische Körper ist.

d. In die unter c erwähnten Verhältnisse ist auch das der Gleichheit, wo die Fläche $\overset{4}{\mathbf{M}}$ von beiden (2+2) glidrigen Axen gleich viel wegschneidet, mit eingeschloßen. Diese Fläche gehört im (3+4) glidrigen System dem 4 glidrigen Granatoeder an, so daß es also auch ein stumpfes fünfglidriges Leuzitoeder gibt, dessen Pemptoedrie auf das 4 glidrige Granatoeder führt.

Auf der ersten Tafel, Fig. 20—24, findet man dasjenige stumpfe fünfglidrige Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$ dargestellt, welches in 5 vierglidrige Granatoeder zerfällt; auf der zweiten Tafel, Fig. 31—35, das mittlere Leuzitoeder $\underset{..}{\mathbf{L}}$, welches in 5 Dodecaeder (fünfglidrige Haloeder) zerfällt; auf der dritten Tafel, Fig. 40—44, dasjenige spitze fünfglidrige Leuzitoeder $\underset{...}{\mathbf{L}}$, welches in 5 Kobaltoeder von der Form $\boxed{a : 2a : \infty a}$ zerfällt.

§. 37.

Es stelle Fig. 30 die Gerade ${}^{7}\mathfrak{c}\,\overset{8}{\mathfrak{c}}$ die Ebene vor, in welche die an ${}^{1}\mathfrak{a}$ liegende Fläche eines fünfglidrigen Leuzitoeders fällt. Dann ist ${}^{3}\mathfrak{b}$ eine dreikantige Ecke und ${}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{3}\mathfrak{b}$ die symmetrische Diagonale der Fläche. Es sei erlaubt, die Strecken von $\mathfrak{o}$ bis $\overset{2}{\mathfrak{c}}$, $\overset{4}{\mathfrak{c}}$, $\overset{7}{\mathfrak{c}}$ und $\overset{8}{\mathfrak{c}}$ mit $\overset{2}{\mathbf{c}}$, $\overset{4}{\mathbf{c}}$, $\overset{7}{\mathbf{c}}$ und $\overset{8}{\mathbf{c}}$ zu bezeichnen; wie überhaupt alle Strecken in denjenigen Geraden, die den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt $\mathfrak{o}$ haben, mit denselben Buchstaben, aber lateinischen, zu bezeichnen, die in deutscher Schrift an dem andern Endpunkte stehen. Nun sei $\overset{8}{\mathbf{c}} : {}^{7}\mathbf{c} = 1 : \mathbf{r}$, dann ist:

1. $\overset{2}{\mathbf{c}} : \overset{4}{\mathbf{c}} = \sqrt{5}-1 : 2$
$= \mathbf{r}(\sqrt{5}-1) : 2\mathbf{r}$, also
$\overset{2}{\mathbf{c}} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}} = \mathbf{r}(\sqrt{5}-1) : 2\mathbf{r}-\mathbf{r}(5-1)$
$= \mathbf{r}(\sqrt{5}-1) : \mathbf{r}(3-\sqrt{5})$
$\overset{2}{\mathbf{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\overset{8}{\mathfrak{c}} = \mathbf{r}(\sqrt{5}-1) : 2-\mathbf{r}(3-\sqrt{5})$, also
$\overset{4}{\mathbf{c}} : \overset{8}{\mathbf{c}} = 2\mathbf{r} : 2+\mathbf{r}(\sqrt{5}-1)$,

das Verhältnis der (2+2) kantigen Axe des fünfglidrigen Magnetoeders zu dem Vielfachen derselben, das die Ebene der Leuzitoederfläche abschneidet.

2. Zieh $\overset{4}{\mathfrak{c}}\mathfrak{l}$ parallel $\mathfrak{b}$, dann ist

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\mathfrak{b}\,{}^{3}\mathfrak{b} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\mathfrak{l} &= 2 : 3 \\
\overset{4}{\mathfrak{c}}\mathfrak{l} : {}^{3}\mathfrak{b} &= \overset{8}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{c}} \\
&= 2-\mathbf{r}(3-\sqrt{5}) : 2+\mathbf{r}(\sqrt{5}-1) \\
\hline
\text{also } {}^{2}\mathfrak{b}\,{}^{3}\mathfrak{b} : {}^{3}\mathfrak{b} &= 4-2\mathbf{r}(3-\sqrt{5}) : 6+3\mathbf{r}(\sqrt{5}-1), \\
{}^{3}\mathfrak{b} : {}^{2}\mathfrak{b} &= 6+3\mathbf{r}(\sqrt{5}-1) : 2+\mathbf{r}(3+\sqrt{5}) \text{ und} \\
{}^{2}\mathfrak{b}\,{}^{3}\mathfrak{b} : {}^{2}\mathfrak{b} &= 4-2\mathbf{r}(3-\sqrt{5}) : 2+\mathbf{r}(3+\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

Die vorletzte Reihe gibt das Verhältnis der dreiglidrigen Axen beider Körper zu einander.

3. Daraus folgen für die drei Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$, $\underset{..}{\mathbf{L}}$ und $\underset{...}{\mathbf{L}}$ folgende Verhältnisse:

a. Für das stumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$ ist $\mathbf{r}=1$, also

$$
\begin{aligned}
\overset{8}{\mathbf{c}} : \overset{4}{\mathbf{c}} &= \sqrt{5}+1 : 2 \\
&= 2 : \sqrt{5}-1 \\
{}^{3}\mathfrak{b} : {}^{2}\mathfrak{b} &= 3 : \sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder $\underset{..}{\mathfrak{L}}$ ist $\mathfrak{r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, also

$$\begin{aligned}\overset{8}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}} &= 4 : \sqrt{5}+1\\ &= \sqrt{5}-1 : 1\\ {}^{3}\mathfrak{b} : {}^{2}\mathfrak{b} &= 6 : 3+\sqrt{5}\\ &= 3\,(3-\sqrt{5}) : 2.\end{aligned}$$

c. Für das spitze Leuzitoeder $\underset{...}{\mathfrak{L}}$ ist $\mathfrak{r} = 2$, also

$$\begin{aligned}\overset{8}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}} &= 2 : \sqrt{5}\\ {}^{3}\mathfrak{b} : {}^{2}\mathfrak{b} &= 3\sqrt{5} : 4+\sqrt{5}\\ &= 3\sqrt{5}\,(4-\sqrt{5}) : 11.\end{aligned}$$

§. 38.

1. Den (2+2)glidrigen Durchschnitt Fig. 30 als (2+2)glidrige Projection genommen stellt ${}^{1}\mathfrak{a}\,\overset{4}{\mathfrak{c}}$ zugleich eine vordere und eine hintere Kante des fünfglidrigen Magnetoeders dar, die Strecke ${}^{2}\mathfrak{d}$ die zu diesen beiden Kanten gehörige (2+2)glidrige Axe, der Punkt ${}^{3}\mathfrak{d}$ also zwei (2+2)kantige Ecken des Leuzitoeders, zugleich aber auch den Punkt, wo die symmetrische Diagonale ${}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{3}\mathfrak{b}$ von der andern Diagonale geschnitten wird. Da nun das unter der Ecke ${}^{3}\mathfrak{b}$ liegende Dreieck, welches durch die nächsten drei (2+2)kantigen Ecken des Leuzitoeders bestimmt ist, der Fläche des Magnetoeders, die zwischen den nächsten drei fünfkantigen Ecken liegt, parallel geht und also eine Linie ${}^{3}\mathfrak{d}\,\overset{7}{\mathfrak{c}}$, die parallel ${}^{1}\mathfrak{a}\,\overset{4}{\mathfrak{c}}$ gezogen wird, in dieses Dreieck fällt, so wird durch diese die (2+2)kantige Ecke $\overset{7}{\mathfrak{c}}$ des Leuzitoeders bestimmt und ${}^{3}\mathfrak{b}\,\overset{7}{\mathfrak{c}}$ ist eine kürzere Kante desselben.

2. Wie verhält sich die (2+2)glidrige Axe $\overset{7}{\mathfrak{c}}$ des Leuzitoeders zu der (2+2)glidrigen Axe $\overset{4}{\mathfrak{c}}$ des Magnetoeders?

Zieh $\overset{4}{\mathfrak{c}}\mathfrak{n}$ parallel $\mathfrak{d}$, dann ist

$$\begin{aligned}{}^{2}\mathfrak{d}\,{}^{3}\mathfrak{d} : \overset{4}{\mathfrak{c}}\mathfrak{n} &= 1 : 3\\ \overset{4}{\mathfrak{c}}\mathfrak{n} : {}^{3}\mathfrak{d} &= \overset{4}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}}\\ &= 2-\mathfrak{r}\,(3-\sqrt{5}) : 2+\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1)\\ \hline \text{also}\quad {}^{2}\mathfrak{d}\,{}^{3}\mathfrak{d} : {}^{3}\mathfrak{d} &= 2-\mathfrak{r}\,(3-\sqrt{5}) : 2\,[2+\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1)]\\ &= \overset{7}{\mathfrak{c}}\overset{4}{\mathfrak{c}} : \overset{7}{\mathfrak{c}}\\ \text{also}\quad \overset{7}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}} &= 2\,[2+\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1)] : 2+\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}+1)\end{aligned}$$

3. Dieß gibt für die drei Leuzitoeder $\underset{.}{\mathfrak{L}}$, $\underset{..}{\mathfrak{L}}$ und $\underset{...}{\mathfrak{L}}$ folgende besonderen Verhältnisse:

a. Für das stumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{\mathfrak{L}}$ ist $\mathfrak{r} = 1$, also

$$\begin{aligned}\overset{7}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}} &= 2\,(\sqrt{5}+1) : 3+\sqrt{5}\\ &= \sqrt{5}-1 : 1\\ &= 4 : \sqrt{5}+1.\end{aligned}$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder $\underset{..}{\mathfrak{L}}$ ist $\mathfrak{r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, also

$$\begin{aligned}\overset{7}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}} &= 8 : 5+\sqrt{5}\\ &= 2\,(5-\sqrt{5}) : 5.\end{aligned}$$

c. Für das spitze Leuzitoeder $\underset{...}{\mathfrak{L}}$ ist $\mathfrak{r} = 2$, also

$$\overset{7}{\mathfrak{c}} : \overset{4}{\mathfrak{c}} = 2\sqrt{5} : 2+\sqrt{5}.$$

§. 39.

Den (2+2)glidrigen Durchschnitt Fig. 30 als Projection genommen, stellt uns der Punkt $\overset{4}{c}$ nicht nur den Halbierungspunkt einer Kante des fünfglidrigen Magnetoeders, sondern auch zwei Ecken desselben dar, die Strecke $\overset{4}{c}$ also nicht nur eine (2+2)glidrige Axe, sondern zugleich auch eine hintere und eine vordere fünfglidrige Axe des Magnetoeders. Dasselbe gilt von der Strecke $\overset{8}{c}$ in Beziehung auf die Ebene der Leuzitoederfläche, so daß also der Quotient $\overset{8}{c} : \overset{4}{c}$ nicht nur das Schnittverhältnis in der (2+2)glidrigen Axe, sondern auch in jenen ihr benachbarten zwei fünfglidrigen Axen bezeichnet.

Darauf gründe ich eine sehr einfache Entwickelung von Flächenzeichen für die Körper des (3+5)glidrigen Systems nach den Grunddimensionen **a** desselben. Bezeichnen wir den Quotienten $\overset{8}{c} : \overset{4}{c}$ mit **m**, wo **m** größer ist als 1, so ist das allgemeine Flächenzeichen für das fünfglidrige Leuzitoeder:

$$\boxed{a : ma : ma}\,.$$

Nach §. 37 ist $m = \dfrac{2 + r(\sqrt{5} - 1)}{2r}$.

Für das fünfglidrige Magnetoeder ist $m = 1$, das Zeichen also $\boxed{a : a : a}$.

Für das fünfglidrige Haloeder (das Dodecaeder), $\overset{10}{c}$ Fig. 29, ist $r = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$, also $m = \sqrt{5}$, das Zeichen $\boxed{a : \sqrt{5}a : \sqrt{5}a}$.

Für das fünfglidrige Granatoeder, das ich der Vollständigkeit wegen einschalte, ist $a\overset{2}{c}$ (Fig. 30) die Projection einer Fläche, also **m** (kleiner als 1) $= \overset{2}{c} : \overset{4}{c} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, das Zeichen also

$$\boxed{a : \frac{\sqrt{5}-1}{2}a : \frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \boxed{\frac{2}{5-1}a : a : a}\,.$$

Für das stumpfe Leuzitoeder **L** ist $r = 1$, also $m = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, das Flächenzeichen also

$$\boxed{a : \frac{\sqrt{5}+1}{2}a : \frac{\sqrt{5}+1}{2}a}\,.$$

Für das mittlere Leuzitoeder $\ddot{L}$ ist $r = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, also $m = \sqrt{5} - 1$, das Flächenzeichen

$$\boxed{a : (\sqrt{5}-1)a : (\sqrt{5}-1)a}\,.$$

Für das spitze Leuzitoeder $\dddot{L}$ ist $r = 2$, also $m = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, das Flächenzeichen $\boxed{a : \dfrac{\sqrt{5}}{2}a : \dfrac{\sqrt{5}}{2}a}$.

Auf die Entwicklung des allgemeinen Zeichens $\boxed{a : ma : na}$ für die Fläche eines fünfglidrigen Adamantoeders einzugehen enthalte ich mich für diesesmal; ich werde davon schicklicher bei Betrachtung der Adamantoeder handeln.

§. 40.

Man kann in das Zeichen der Fläche eines fünfglidrigen Leuzitoeders noch den Quotienten aufnehmen, nach welchem sie die entfernteren drei Dimensionen **a** schneidet. Von diesen liegen zwei über das einzelne in der Einheit genommene **a** des einfachen Flächenzeichens hinaus, die dritte über die beiden mit Coeffizienten versehenen hinaus. Jenes einfache Flächenzeichen würde zu diesem Zwecke beßer geschrieben werden

$$\begin{array}{c} a \\ \boxed{ma : ma} \end{array},$$

und das vollständigere würde dann diese Gestalt annehmen:

$$\begin{array}{c} pa \ : \ pa \\ a \\ \boxed{ma : ma} \\ qa \end{array}.$$

Begreiflich sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ abhängig von $\mathfrak{m}$.

1. Der Werth für $\mathfrak{p}$ findet sich auf folgende Weise. Fig. 36. Zwei Leuzitoederflächen $\overset{5}{\mathfrak{c}}{}^1\mathfrak{a}$ und $\underset{5}{\mathfrak{c}}{}_1\mathfrak{a}$ schneiden sich in einer Kante, deren Projection der Punkt ${}^8\mathfrak{c}$ ist. In dieser Kante liegen die Durchschnittspunkte der Flächen mit jenen zwei fünfglidrigen Axen. Man mache also $\overset{9}{\mathfrak{c}} = {}^8\mathfrak{c}$, ziehe durch $\overset{8}{\mathfrak{c}}$ die Normale auf $\overset{9}{\mathfrak{c}}$, bis dieselbe die beiden fünfgliedrigen Axen (in ${}^2\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^2$) schneidet. Dann ist $\mathfrak{p} = {}^2\mathfrak{a} : {}^1\mathfrak{a}$.

$$\begin{aligned}
\overset{5}{\mathfrak{c}} : \overset{2}{\mathfrak{c}} &= 2 + \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) : \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) \\
\overset{9}{\mathfrak{c}} : \overset{5}{\mathfrak{c}} &= {}^8\mathfrak{c} : \overset{5}{\mathfrak{c}} \\
&= \mathfrak{r} : 1 \\
\hline
\text{also} \quad \overset{9}{\mathfrak{c}} : \overset{2}{\mathfrak{c}} &= {}^2\mathfrak{a} : {}^1\mathfrak{a} \\
&= 2 + \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) : \sqrt{5} - 1 \\
&= 2\mathfrak{r} + \sqrt{5} + 1 \quad : \quad 2 \\
&= \mathfrak{m}(\sqrt{5} + 1) \quad : 2\mathfrak{m} - \sqrt{5} + 1.
\end{aligned}$$

2. Der Werth für $\mathfrak{q}$ findet sich (Fig. 36), wenn ich die Gerade $\mathfrak{a}^1 \overset{5}{\mathfrak{c}}$, welche die Projection einer Leuzitoederfläche ist, verlängere, bis sie die Verlängerung der Axe $\mathfrak{o}\ {}^1\mathfrak{a}$ in ${}^3\mathfrak{a}$ schneidet; $\mathfrak{q}$ ist dann gleich dem Quotienten ${}^3\mathfrak{a} : {}^1\mathfrak{a}$.

$$\begin{aligned}
\overset{7}{\mathfrak{c}} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{a}^1 &= \overset{5}{\mathfrak{c}} : \overset{5}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} \\
&= 2 + \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} - 1) : 2 \\
\overset{7}{\mathfrak{c}} : {}^1\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^1 &= {}^3\mathfrak{a} : {}^3\mathfrak{a}\,{}^1\mathfrak{a} \\
&= 2 + \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} - 1) : 4 \\
{}^3\mathfrak{a} : {}^1\mathfrak{a} &= 2 + \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} - 1) : \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} - 1) - 2 \\
&= \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} - 1) + 2 : \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} - 1) - 2 \\
&= \mathfrak{m} : \sqrt{5} - 1 - \mathfrak{m}.
\end{aligned}$$

3. Die vollständigeren Flächenzeichen lauten hiernach also:

a. Für das fünfglidrige Magnetoeder, $\mathfrak{m} = 1$,

$$\begin{array}{c} (\sqrt{5}+2)a : (\sqrt{5}+2)a \\ a \\ \boxed{a \ : \ a} \\ (\sqrt{5}+2)a \end{array}.$$

b. Für das fünfglidrige Haloeder, $\mathfrak{m} = \sqrt{5}$,

$$\begin{array}{c} \sqrt{5}a \ : \ \sqrt{5}a \\ a \\ \boxed{\sqrt{5}a : \sqrt{5}a} \\ -\sqrt{5}a \end{array}.$$

c. Für das fünfgliedrige Granatoeder, $\mathfrak{m} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\begin{array}{c} \infty a \quad : \quad \infty a \\ a \\ \boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2} a : \frac{\sqrt{5}-1}{2} a} . \\ a \end{array}$$

d. Für das stumpfe Leuzitoeder $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{m} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$\begin{array}{c} \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} a : \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} a \\ a \\ \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} a : \frac{\sqrt{5}+1}{2} a} . \\ -(\sqrt{\ } + 2) a. \end{array}$$

e. Für das mittlere Leuzitoeder $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{m} = \sqrt{5}-1$,

$$\begin{array}{c} (\sqrt{5}+1) a : (\sqrt{5}+1) a \\ a \\ \boxed{(\sqrt{5}-1) a : (\sqrt{5}-1) a} . \\ \infty a \end{array}$$

f. Für das spitze Leuzitoeder $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{m} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$$\begin{array}{c} \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} a : \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} a \\ a \\ \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} a : \frac{\sqrt{5}}{2} a} . \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} a. \end{array}$$

§. 41.

Untersuchung der Mittel, die zur Construction der Fläche des fünfgliedrigen Leuzitoeders dienen.

1. Die Fläche des fünfgliedrigen Leuzitoeders ist ein symmetrisches Viereck, also ein Viereck von der Eigenschaft, daß die beiden Diagonalen sich rechtwinklich schneiden und die eine derselben im Durchschnittspunkt halbiert wird. Dieses ist die nicht symmetrische, die andere die symmetrische Diagonale. Die symmetrische Diagonale der zu Fig. 30 gehörigen Leuzitoederfläche ist ${}^{1}\mathfrak{a}\,{}^{3}\mathfrak{b}$, der Punkt, in welchem sie von der nicht symmetrischen geschnitten wird, ist ${}^{3}\mathfrak{d}$. Die nicht symmetrische Diagonale findet sich als Seite des fünfgliedrigen Durchschnitts, der bei jedem fünfgliedrigen Leuzitoeder ein durch zehn (2+2)kantige Ecken gehendes regelmäßiges Zehneck ist; zieht man also mit $\mathfrak{c}$ als Radius einen Kreiß, so ist die Seite des eingeschriebenen Zehnecks die nicht symmetrische Diagonale der Leuzitoederfläche. Auf diese Weise kann die Fläche vermöge der in Fig. 30 gegebenen Verhältnisse gezeichnet werden.

Soll die Fläche unabhängig von Fig. 30 gezeichnet werden, so muß man sowohl das Verhältnis kennen, unter welchem die symmetrische Diagonale geschnitten wird, als das, welches die beiden Diagonalen zu einander haben. Diese Verhältnisse finden sich auf folgendem Wege.

2. Zieh $\overset{8}{\mathfrak{t}}\,\mathfrak{p}$ und ${}^{3}\mathfrak{d}\,\mathfrak{r}$ beide parallel ${}^{0}\mathfrak{c}$. Dann ist

a) $${}^{3}\mathfrak{d}\,\mathfrak{r} : {}^{0}\mathfrak{c} = {}^{2}\mathfrak{d}\,{}^{3}\mathfrak{d} : {}^{2}\mathfrak{d}.$$

Es war aber ${}^2d\,{}^3d : {}^3d = 2-r(3-\sqrt{5}) : 2[2+r(\sqrt{5}-1)]$,

$$
\begin{aligned}
\text{also } {}^2d\,{}^3d : {}^2d &= {}^2d\,{}^3d : ({}^3d - {}^2d\,{}^3d) \\
&= 2-r(3-\sqrt{5}) : 2[2+r(\sqrt{5}-1)] - [2-r(3-\sqrt{5})] \\
&= 2-r(3-\sqrt{5}) : 2+r(\sqrt{5}+1) \\
{}^3c : \overset{8}{c}p &= \overset{4}{c} \qquad : \overset{4\,8}{cc} \\
&= 2r \qquad : 2-r(3-\sqrt{5}) \\
\hline
\text{also } {}^3dr : \overset{8}{c}p &= 2r \; : \; 2+r(\sqrt{5}+1) \\
&= {}^1a\,{}^3d : {}^1a\overset{8}{c}
\end{aligned}
$$

b) Da ${}^1a\overset{4}{c}$ in ${}^2d$ und ${}^2b$ harmonisch geteilt ist, so ist es auch ${}^1a\overset{8}{c}$ im ${}^3d$ und ${}^3b$, daher ist ${}^1a\,{}^3b$ das harmonische Mittel zwischen ${}^1a\,{}^3d$ und ${}^1a\overset{8}{c}$, also, das eben gefundene Verhältnis von ${}^1a\,{}^3d : {}^1a\overset{8}{c}$ zu Grunde gelegt,

$$
{}^1a\,{}^3b = 2\,\frac{2r\,[2+r\,(\sqrt{5}+1)]}{2r+[2+r\,(\sqrt{5}+1)]} = 2\,\frac{2r\,[2+r\,(\sqrt{5}+1)]}{2+r\;(3+\sqrt{5})}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
{}^1a\,{}^3b : {}^1a\overset{8}{c} &= 2\,\frac{2r\,[2+r\,(\sqrt{5}+1)]}{2+r\,(3+\sqrt{5})} \quad : \quad 2+r\,(\sqrt{5}+1) \\
&= \quad 4r \quad : \quad 2+r\,(3+\sqrt{5})
\end{aligned}
$$

Ferner

$$
\begin{aligned}
{}^1a\,{}^3d : {}^1a\,{}^3b &= \quad 2r \quad : 2\,\frac{2r\,[2+r\,(\sqrt{5}+1)]}{2+r\,(3+\sqrt{5})} \\
&= \quad 2+r\,(3+\sqrt{5}) \quad : \quad 2\,[2+r\,(\sqrt{5}+1)]
\end{aligned}
$$

Zusammengestellt in folgender Weise, wo s die symmetrische Diagonale, g den größeren, k den kleineren Abschnitt derselben bezeichnet:

$$
g : k : s = 2+r\;(3+\sqrt{5}) : 2+r\;(\sqrt{5}-1) : 2\,[2+r\,(5+1)].
$$

Da aus dem Werthe für $m = \dfrac{2+r\,(\sqrt{5}-1)}{2r}$

$$
\text{der für } r = \frac{2}{2m-\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{m\,(\sqrt{5}+1)-2}
$$

folgt, so können wir die gefundenen Verhältnisse auch nach m ausdrücken und finden durch eine leichte Rechnung:

$$
g : k : s = m+2 : m : 2m+2.
$$

3. Um das Verhältnis der beiden Diagonalen zu einander zu bestimmen, suche man ihrer beider Verhältnis zu $\overset{7}{c}$. Die Rechnung, in der wir die symmetrische Diagonale ${}^1a\,{}^3b$ mit s, die nicht symmetrische mit n bezeichnen wollen, ist folgende:

$$
\begin{aligned}
\overset{2\,8}{cc} : \overset{4}{c} &= \overset{2\,8}{cc} : \overset{2}{c}\,{}^1a \\
&= 1 \;:\; r \\
{}^1a\overset{8}{c} : \overset{4}{c} &= {}^1a\overset{8}{c} : \overset{2}{c}\,{}^1a \\
&= \sqrt{r^2+1} : r \\
s : {}^1a\overset{8}{c} &= 4r : 2+r\,(3+\sqrt{5}) \\
\hline
\text{also} \quad s : \overset{4}{c} &= 4\sqrt{r^2+1} : 2+r\,(3+\sqrt{5}) \\
\overset{4}{c} : \overset{7}{c} &= 2+r\,(\sqrt{r^2+1}) : 2\,[2+r\,(\sqrt{5}-1)] \\
\hline
\text{also} \quad s : \overset{7}{c} &= [2+r\,(\sqrt{5}+1)]\sqrt{r^2+1} : 2+r\,(r+2)\,(\sqrt{5}+1).
\end{aligned}
$$

Im regelmäßigen Zehneck aber ist

$$\overset{7}{\mathbf{c}} : \mathbf{n} \;=\; 2 \;:\; \sqrt{5}-1$$

$$\text{also}\quad \mathbf{s} : \mathbf{n} = [2+\mathbf{r}(\sqrt{5}+1)]\sqrt{\mathbf{r}^2+1} \;:\; 2\mathbf{r}(\mathbf{r}+2).+\sqrt{5}-1.$$

Und in diesem Ausdruck wieder $\mathbf{r} = \dfrac{2}{2\mathbf{m}-\sqrt{5}+1}$ gesetzt, gibt

$$\mathbf{s} : \mathbf{n} = (\mathbf{m}+1)\sqrt{4+(2\mathbf{m}-\sqrt{5}+1)^2} \;:\; \mathbf{m}(\mathbf{m}+2)(\sqrt{5}-1).$$

4. Für die Flächen der drei fünfglidrigen Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$, $\underset{..}{\mathbf{L}}$ und $\underset{...}{\mathbf{L}}$ erhalten wir hieraus nachstehende besondere Verhältnisse:

a) Für das stumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$, $\mathbf{r} = 1$, $\mathbf{m} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathbf{k} : \mathbf{s} &= \sqrt{5} \;:\; 1 \;:\; \sqrt{5}+1. \\ \mathbf{s} : \mathbf{n} &= \sqrt{5}+1 : \sqrt{10} \\ &= 2\sqrt{2} \;:\; 5-\sqrt{5}. \end{aligned}$$

b) Für das mittlere Leuzitoeder $\underset{..}{\mathbf{L}}$, $\mathbf{r} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\mathbf{m} = \sqrt{5}-1$;

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathbf{k} : \mathbf{s} &= \sqrt{5}+1 \;:\; \sqrt{5}-1 \;:\; 2\sqrt{5}. \\ \mathbf{s} : \mathbf{n} &= 5 \;:\; 2\sqrt{10-2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{50+10\sqrt{5}} \;:\; 8. \end{aligned}$$

c) Für das folgende Leuzitoeder $\underset{...}{\mathbf{L}}$, $\mathbf{r} = 2$, $\mathbf{m} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathbf{k} : \mathbf{s} &= \sqrt{5}+4 \;:\; \sqrt{5} \;:\; 2(\sqrt{5}+2) \\ \mathbf{s} : \mathbf{n} &= 2(\sqrt{5}+2) \;:\; 3\sqrt{5}+1 \\ &= 2 \;:\; 13-5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

§. 42.

Berechnung der Eckaxen des fünfglidrigen Leuzitoeders.

1. Das Verhältnis der fünfglidrigen Axe zur dreiglidrigen, ${}^1\mathbf{a} : {}^3\mathbf{b}$ (Fig. 30).

$${}^1\mathbf{a} : {}^2\mathbf{b} = \sqrt{10+2\sqrt{5}} \;:\; \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$${}^2\mathbf{b} : {}^3\mathbf{b} = 2+\mathbf{r}(\sqrt{5}+3) : 6+3\mathbf{r}(\sqrt{5}-1)$$

$$\begin{aligned} \text{also}\quad {}^1\mathbf{a} : {}^3\mathbf{b} &= [2+\mathbf{r}(\sqrt{5}+3)]\sqrt{10+2\sqrt{5}} : [(3+\sqrt{5})+\mathbf{r}(\sqrt{5}+1)]\,2\sqrt{3} \\ &= (\mathbf{m}+2)\sqrt{10+2\sqrt{5}} : \mathbf{m}(3+\sqrt{5})\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. Das Verhältnis der fünfglidrigen Axe zur $(2+2)$glidrigen, ${}^1\mathbf{a} : \overset{7}{\mathbf{c}}$ (Fig. 30).

$${}^1\mathbf{a} : \overset{4}{\mathbf{c}} = \sqrt{10+2\sqrt{5}} : \sqrt{5}+1$$

$$\overset{4}{\mathbf{c}} : \overset{7}{\mathbf{c}} = 2+\mathbf{r}(\sqrt{5}+1) : 2\,[2+\mathbf{r}(\sqrt{5}-1)]$$

$$\begin{aligned} \text{also}\quad {}^1\mathbf{a} : \overset{7}{\mathbf{c}} &= [2+\mathbf{r}(\sqrt{5}+1)]\sqrt{10+2\sqrt{5}} : 4\,(2\mathbf{r}+\sqrt{5}+1) \\ &= (\mathbf{m}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} : 2\mathbf{m}(\sqrt{5}+1). \end{aligned}$$

3. Für die drei fünfglidrigen Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$, $\underset{..}{\mathbf{L}}$ und $\underset{...}{\mathbf{L}}$ gibt dieß folgende besondere Verhältnisse:

a. Für das stumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$, $\mathbf{r} = 1$, $\mathbf{m} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \sqrt{50 + 10\sqrt{5}} : (3 + \sqrt{5})\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} : \sqrt{3}$$
$$\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : 4$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder $\underset{..}{\mathfrak{L}}$, $\mathfrak{r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\mathfrak{m} = \sqrt{5} - 1$:

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : 2\sqrt{3}$$
$$\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \sqrt{50 + 10\sqrt{5}} : 8$$
$$= 5 : 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

c. Für das spitze Leuzitoeder $\underset{...}{\mathfrak{L}}$, $\mathfrak{r} = 2$, $\mathfrak{m} = \frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = (4 + \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : (5 + 3\sqrt{5})\sqrt{3}$$
$$= 11.\ \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : (7\sqrt{5} + 5)\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{125 - 10\sqrt{5}} : 5$$
$$\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} : 2\sqrt{5}\,(3 - \sqrt{5})$$
$$= \sqrt{50 + 22\sqrt{5}} : 4\sqrt{5}$$

§. 43.

Berechnung der Kantenaxen des fünfgliedrigen Leuzitoeders.

Fig. 39 stellt den $(2+2)$gliedrigen Durchschnitt eines fünfgliedrigen Leuzitoeders dar; $^{3}\mathfrak{b}\overset{7}{\mathfrak{t}}$ ist eine kürzere, $^{1}\mathfrak{a}\,^{4}\mathfrak{t}$ eine längere Kante, $\mathfrak{o}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{w} = \mathfrak{w}$ die Axen dieser Kanten.

1. Die Axe der kürzeren Kante, $\mathfrak{o}\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$. Verlängere $\overset{7}{\mathfrak{t}}\,^{3}\mathfrak{b}$ und $^{4}\mathfrak{c}$, bis sie einander in $^{10}\mathfrak{t}$ schneiden. Dann ist

$$^{10}\mathfrak{c} : \overset{7}{\mathfrak{c}} = {}^{3}\mathfrak{b}\overset{6}{\mathfrak{t}} : \overset{6}{\mathfrak{t}}\overset{7}{\mathfrak{t}}$$
$$= {}^{3}\mathfrak{b}\overset{6}{\mathfrak{t}} : \overset{7}{\mathfrak{c}} - \overset{6}{\mathfrak{c}}$$

also $$^{10}\mathfrak{c} = \frac{\overset{7}{\mathfrak{c}} \,.\, {}^{3}\mathfrak{b}\overset{6}{\mathfrak{t}}}{\overset{7}{\mathfrak{c}} - \overset{6}{\mathfrak{c}}}$$

Man berechne $^{3}\mathfrak{b}\overset{6}{\mathfrak{t}}$.

$$\overset{7}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{c}} : {}^{7}\mathfrak{c} = 4\mathfrak{r} : 2 + \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} + 1) : \mathfrak{r}\,[2 + \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} + 1)].$$
$$^{3}\mathfrak{b}\overset{6}{\mathfrak{t}} : {}^{7}\mathfrak{c} = \overset{8}{\mathfrak{t}}\,{}^{3}\mathfrak{b} : \overset{8}{\mathfrak{t}}\,{}^{7}\mathfrak{t}$$
$$= 2 : 2 + \mathfrak{r}\,(3 + \sqrt{5})$$

also $$^{3}\mathfrak{b}\overset{6}{\mathfrak{t}} = \frac{2}{2 + \mathfrak{r}\,(3 + \sqrt{5})}\,{}^{7}\mathfrak{c},$$

also im Verhältnis jener Zahlen $= \frac{2\mathfrak{r}\,[2 + \mathfrak{r}\,(\sqrt{5} + 1)]}{2 + \mathfrak{r}\,(3 + \sqrt{5})}$.

Man berechne $\overset{6}{\mathfrak{c}}$.

$$\overset{6}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{c}} = {}^{7}\mathfrak{t}\,{}^{3}\mathfrak{b} : {}^{7}\mathfrak{t}\overset{8}{\mathfrak{t}}$$
$$= ({}^{7}\mathfrak{t}\overset{8}{\mathfrak{t}} - {}^{3}\mathfrak{b}\overset{8}{\mathfrak{t}}) : {}^{7}\mathfrak{t}\overset{8}{\mathfrak{t}}$$
$$= 2 + \mathfrak{r}(3 + \sqrt{5}) - 2 : 2 + \mathfrak{r}(3 + \sqrt{5}),$$

$$\text{also}\quad \overset{6}{c} = \frac{r(3+\sqrt{5})}{2+r(3+\sqrt{5})}\,\overset{8}{c},\ \text{und im Verhältnis jener Zahlen}$$

$$= \frac{r(3+\sqrt{5})\,[2+r(\sqrt{5}+1)]}{2+r(3+\sqrt{5})}.$$

$$\text{Hiernach ist}\ {}^{10}c = \frac{\overset{7}{c}\,.\,{}^{3}b\overset{6}{c}}{\overset{7}{c}-\overset{6}{c}}\ \text{im Verhältnis jener Zahlen}$$

$$= \frac{\dfrac{4r\,.\,2r[2+r(\sqrt{5}+1)]}{2+r(3+\sqrt{5})}}{4r-\dfrac{r(3+\sqrt{5})[2+r(\sqrt{5}+1)]}{2+r(3+\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{4r[2+r(\sqrt{5}+1)]}{2r+1-\sqrt{5}}.$$

$$\text{Also}\quad {}^{10}c : \overset{7}{c} = \frac{4r[2+r(\sqrt{5}+1)]}{2r+1-\sqrt{5}} : 4r$$

$$= 2+r(\sqrt{5}+1) : 2r+1-\sqrt{5}$$

$$= 2(m+1) \quad : (\sqrt{5}-m)(\sqrt{5}-1)$$

$$= (m+1)(\sqrt{5}+1) : 2(\sqrt{5}-m).$$

Die Axe der längeren Kante, $o v = v$, ist als mittlere Proportionale zwischen $v\overset{7}{c}$ und $v\,{}^{10}c$

$$= \frac{{}^{10}c\,.\,\overset{7}{c}}{\sqrt{({}^{10}c)^2 + (\overset{7}{c})^2}},$$

also nach den Zahlen des für ${}^{10}c$ und $\overset{7}{c}$ eben entwickelten Verhältnisses

$$= \frac{[2+r(\sqrt{5}+1)][2r+1-\sqrt{5}]}{\sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2 + [2r+1-\sqrt{5}]^2}}.$$

Wir erhalten hiernach

$$v : \overset{7}{c} = \frac{[2+r(\sqrt{5}+1)][2r+1-\sqrt{5}]}{\sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2 + [2r+1-\sqrt{5}]^2}} : 2r+1-\sqrt{5}$$

$$= 2+r(\sqrt{5}+1) : \sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2 + [2r+1-\sqrt{5}]^2}$$

$$= 2(m+1) \quad : \sqrt{(2m+2)^2 + [(\sqrt{5}-m)(\sqrt{5}-1)]^2}.$$

2. Die Axe der längeren Kante, $o w = w$. Verlängere ${}^{4}c\,{}^{1}a$ und $\overset{7}{c}$, bis sie einander in $\overset{11}{c}$ schneiden. Dann ist:

$$\overset{11}{c} : {}^{4}c = {}^{1}a\,{}^{2}c : {}^{2}c\,{}^{4}c$$

$$= \overset{2}{c} \quad : {}^{4}c - {}^{2}c,$$

$$\text{also}\quad \overset{11}{c} = \frac{{}^{4}c\,.\,\overset{2}{c}}{{}^{4}c - {}^{2}c}.$$

Nun ist aber

$${}^{4}c : {}^{2}c : \overset{2}{c} = 4[2+r(\sqrt{5}-1)] : 2[2+r(\sqrt{5}+1)] : (\sqrt{5}-1)[2+r(\sqrt{5}+1)],$$

im Verhältnis dieser Zahlen ist also

$$\overset{11}{c} = \frac{(\sqrt{5}-1)[2+r(\sqrt{5}+1)]\,.\,4[2+r(\sqrt{5}-1)]}{4[2+r(\sqrt{5}-1)] - 2[2+r(\sqrt{5}+1)]}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)[2+r(\sqrt{5}+1)]\,.\,4[2+r(\sqrt{5}-1)]}{4-2r(3-\sqrt{5})},$$

und wir erhalten

$$\overset{11}{c} : \overset{7}{c} = \frac{(\sqrt{5}-1)[2+r(\sqrt{5}+1)] \,.\, 4[2+r(\sqrt{5}-1)]}{4-2r(3-\sqrt{5})} : 4[2+r(\sqrt{5}-1)]$$
$$= 2+r(\sqrt{5}+1) \quad : \sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)$$
$$= 2(m+1) \quad : (m-1)(\sqrt{5}+1)$$
$$= (m+1)(\sqrt{5}-1) : 2(m-1).$$

Als mittlere Proportionale zwischen $w{}^{7}c$ und $w\overset{11}{c}$ ist aber die Axe der längeren Kante

$$w = \frac{\overset{11}{c} \,.\, \overset{7}{c}}{\sqrt{(\overset{11}{c})^2+(\overset{7}{c})^2}} = \frac{[2+r(\sqrt{5}+1)][\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]}{\sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2+[\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]^2}},$$

und wir erhalten die Proportion

$$w : \overset{7}{c} = \frac{[2+r(\sqrt{5}+1)][\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]}{\sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2+[\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]^2}} : [\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]$$
$$= 2+r(\sqrt{5}+1) : \sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2+[\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]^2}$$
$$= 2(m+1) \quad : \sqrt{(2m+2)^2+[(m-1)(\sqrt{5}+1)]^2}.$$

3. Für die drei fünfgliedrigen Leuzitoeder L, $\underset{\cdot\cdot}{L}$ und $\underset{\cdot\cdot\cdot}{L}$ gibt dieß folgende besonderen Verhältnisse:

a. Für das stumpfe Leuzitoeder L, $r=1$, $m=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$v : \overset{7}{c} = 3+\sqrt{5} : 2\sqrt{7}$$
$$w : \overset{7}{c} = 3+\sqrt{5} : \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{5}+1 : \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder $\underset{\cdot\cdot}{L}$, $r=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $m=\sqrt{5}=1$:

$$v : \overset{7}{c} = 2\sqrt{5} : \sqrt{26-2\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{10} : \sqrt{13-\sqrt{5}}$$
$$w : \overset{7}{c} = 2\sqrt{5} : \sqrt{34-6\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{10} : \sqrt{17-3\sqrt{5}}$$

c. Für das spitze Leuzitoeder $\underset{\cdot\cdot\cdot}{L}$, $r=2$, $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$v : \overset{7}{c} = 2(2+\sqrt{5}) : \sqrt{66+6\sqrt{5}}$$
$$= 1 \quad : 2\sqrt{21-6\sqrt{5}}$$
$$w : \overset{7}{c} = 2(2+\sqrt{5}) : \sqrt{50+10\sqrt{5}}$$
$$= 1 \quad : \sqrt{50-10\sqrt{5}}$$

§. 44.

Berechnung der Flächenaxe des fünfgliedrigen Leuzitoeders, $\mathfrak{os}$ Fig. 37.

$$\mathfrak{os} : \overset{8}{c} = {}^{7}c : {}^{7}c\overset{8}{c}$$
$$= r : \sqrt{r^2+1}$$

(Fig. 30) $\overset{8}{c} : \overset{7}{c} = 2+r(\sqrt{5}+1) : 4r$

also $\mathfrak{os} : \overset{7}{c} = 2+r(\sqrt{5}+1) : 4\sqrt{r^2+1}$

$$= m+1 \quad : \sqrt{4+(2m-\sqrt{5}+1)^2}$$

Dieß gibt für die drei Leuzitoeder $\underset{.}{L}$, $\underset{..}{L}$ und $\underset{...}{L}$ folgende besonderen Verhältnisse:

a. Für das stumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{L}$, $r=1$, $m=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$os : \overset{7}{c} = 3+\sqrt{5} : 4\sqrt{2}$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder $\underset{..}{L}$, $r=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $m=\sqrt{5}-1$:

$$os : \overset{7}{c} = \sqrt{5} : \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

c. Für das spitze Leuzitoeder $\underset{...}{L}$, $r=2$, $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$os : \overset{7}{c} = \sqrt{5}+2 : \sqrt{5}.$$

§. 45.

Aus den in den vorigen Paragraphen entwickelten Verhältnissen leitet sich bequem eine Berechnung von Functionen für die Winkel der zweierlei Kanten des fünfglidrigen Leuzitoeders her.

Wenn man sich über dem (2+2) glidrigen Durchschnitt des fünfglidrigen Leuzitoeders (Fig. 39) die obere Hälfte dieses Körpers aufgestellt denkt, so ist eine (2+2) glidrige Axe senkrecht; diese wird von der Ebene derjenigen Leuzitoederfläche, welche sich oberhalb der kürzeren Kante ${}^{3}b\,\overset{7}{c}$ befindet, in der Verlängerung der an $\overset{7}{c}$ anstoßenden längeren Kante geschnitten, also in einer Entfernung $=\overset{11}{c}$; desgleichen von der Leuzitoederfläche, welche oberhalb der längeren Kante ${}^{1}a\,{}^{4}c$ liegt, in der Verlängerung der an $\overset{4}{c}$ anstoßenden kürzeren Kante, also in einer Entfernung $={}^{10}c$. Daraus folgt, wenn wir den halben Winkel der kürzeren Kante mit $\varkappa$, den halben der längeren mit λ bezeichnen,

$$\sin.\varkappa : \cos.\varkappa = \overset{11}{c} : v$$
$$\sin.\lambda : \cos.\lambda = {}^{10}c : w.$$

1. Was nun die kürzere Kante betrifft, so war

$$\overset{7}{c} : v = \sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2+(2r+1-\sqrt{5})^2} : 2+r(\sqrt{5}+1)$$
$$\overset{11}{c} : \overset{7}{c} = 2+r(\sqrt{5}+1) : \sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)$$

---

also ist $\sin.\varkappa : \cos.\varkappa = \overset{11}{c} : v = \sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2+(2r+1-\sqrt{5})^2} : \sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)$

$$= \sqrt{(2m+2)^2+[(\sqrt{5}-m)(\sqrt{5}-1)]^2} : (m-1)(\sqrt{5}+1).$$

2. Was die längere Kante betrifft, so war

$$\overset{7}{c} : w = \sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2+[\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]^2} : 2+r(\sqrt{5}+1)$$
$${}^{10}c : \overset{7}{c} = 2+r(\sqrt{5}+1) : 2r+1-\sqrt{5}$$

---

also ist $\sin.\lambda : \cos.\lambda = {}^{10}c : w = \sqrt{[2+r(\sqrt{5}+1)]^2+[\sqrt{5}+1-r(\sqrt{5}-1)]^2} : 2r+1-\sqrt{5}$

$$= \sqrt{(2m+2)^2+[(m-1)(\sqrt{5}+1)]^2} : (\sqrt{5}-m)(\sqrt{5}-1).$$

3. Dieß gibt für die drei fünfglidrigen Leuzitoeder $\underset{.}{L}$, $\underset{..}{L}$ und $\underset{...}{L}$ folgende besonderen Verhältnisse:

a. Für das stumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{L}$, $r=1$, $m=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$\sin.\varkappa : \cos.\varkappa = \sqrt{7} : 1$$
$$\sin.\lambda : \cos.\lambda = \sqrt{10+2\sqrt{5}} : 3-\sqrt{5}$$
$$= \sqrt{5-2\sqrt{5}} : 1.$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder $\ddot{\mathbf{L}}$, $\mathbf{r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\mathfrak{m} = \sqrt{5}-1$:

$$\sin.\ \varkappa : \cos.\ \varkappa = \sqrt{34+10\sqrt{5}} : \sqrt{5}-1$$
$$= \sqrt{19+8\sqrt{5}} : 1.$$
$$\sin.\ \lambda : \cos.\ \lambda = \sqrt{34-6\sqrt{5}} : \sqrt{5}-1$$
$$= \sqrt{9+2\sqrt{5}} : 1.$$

c. Für das spitze Leuzitoeder $\dddot{\mathbf{L}}$, $\mathbf{r} = 2$, $\mathfrak{m} = \frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$\sin.\ \varkappa : \cos.\ \varkappa = \sqrt{66+6\sqrt{5}} : 3-\sqrt{5}$$
$$= \sqrt{69+30\sqrt{5}} : 1.$$
$$\sin.\ \lambda : \cos.\ \lambda = \sqrt{10+2\sqrt{5}} : 5-1$$
$$= \sqrt{5+2\sqrt{5}} : 1.$$

§. 46.

Es ist nunmehr dargethan worden, wie alle Verhältnisse eines fünfglidrigen Leuzitoeders aus dem Einen Dimensions-Verhältnis 1 : **r** des pemptoederischen Körpers, das in dessen dem (3 + 4)glidrigen Systeme angehörigen Flächenzeichen $\boxed{\mathrm{a : r\,a : \infty\,a}}$ ausgesprochen ist, abgeleitet werden können, die Linienverhältnisse auf der Fläche, die Axenverhältnisse und die Functionen der ebenen wie der Kanten-Winkel, und wie auch umgekehrt jene Grundbestimmung 1 : **r** des Pemptoeders und somit alle an dieselbe gebundenen weiteren Verhältnisse dieses Körpers sich aus dem Dimensionsverhältnis 1 : $\mathfrak{m}$ entwickeln laßen, das im (3 + 5)glidrigen System für das vollflächige Leuzitoeder gegeben ist und sich in dem diesem Systeme angehörigen Flächenzeichen $\boxed{\mathrm{m\,a} \overset{a}{:} \mathrm{m\,a}}$ ausspricht.

Es müßen noch einige Beziehungen des fünfglidrigen Leuzitoeders zu seinem Pemptoeder nachgewiesen werden, die zur Anwendung kommen, wenn es sich darum handelt, den einen Körper mit dem andern verbunden durch Zeichnung darzustellen, wie es auf den beifolgenden drei Tafeln geschehen. Die eine Beziehung betrifft das Verhältnis der dreiglidrigen Axen des Leuzitoeders und seines Pemptoeders der Hauptkanten die andere die Lage der (2 + 1)kantigen Ecken des Pemptoeders oder das Verhältnis zu einander, desselben zu einer beliebigen festen Strecke, die dritte die Lage, welche die Fläche des Leuzitoeders auf der des Pemptoeders einnimmt.

§. 47.

Das parallelflächige Pemptoeder des fünfglidrigen Leuzitoeders gehört im Allgemeinen zu der Klasse der Kobaltoeder: seine Flächen sind symmetrische Fünfecke, an welchen eine Hauptkante und zwei Paar gleiche andere Kanten unterschieden werden müßen. Da die Hauptkante größer oder kleiner als die anderen sein kann, so ist auch der Fall mit einbegriffen, daß sie ihnen gleich ist, und das fünfglidrige Haloeder (das Dodecaeder), das alsdann vorliegt, ist durchaus als ein Kobaltoeder anzusehen, nur von einer besonderen Eigenschaft. An jedem Kobaltoeder unterscheiden wir 8 dreikantige Ecken und 6 Paar (2 + 1)-kantige, an den Hauptkanten gelegene. Die dreikantigen fallen in die Richtung von vier dreiglidrigen Axen des Leuzitoeders. Man sehe Fig. 38, und faße dieselbe nicht als Durchschnitt, sondern als Projection, verglichen mit Fig. 26. Das Dreieck $^{1}\mathfrak{a}\ ^{11}\mathfrak{t}\ \overset{4}{\mathfrak{t}}$ ist eine Fläche des fünfglidrigen Magnetoeders, $^{1}\mathfrak{t}$ deren Schwerpunkt, durch welchen die dreiglidrige Axe $\mathfrak{o}\,^{1}\mathfrak{t}$ ($^{1}\mathfrak{e}$) geht. Verlängere $^{1}\mathfrak{e}$, bis sie die Linie $^{7}\mathfrak{t}\,\overset{8}{\mathfrak{t}}$ in $^{4}\mathfrak{t}$ schneidet, so ist $^{1}\mathfrak{e}$ die dreiglidrige Axe des Pemptoeders, aber beide Axen, $^{1}\mathfrak{e}$ und $^{4}\mathfrak{e}$, nur in der Projection, verkürzt, nicht in ihrer wahren Länge.

1. Das Verhältnis ${}^{1}\mathfrak{e} : {}^{4}\mathfrak{e}$.

Da die Gerade $\mathfrak{e}$ den Winkel an $\mathfrak{o}$ halbiert, so ist

$$
\begin{aligned}
&& \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^{4}\mathfrak{e} : {}^{4}\mathfrak{e}\,{}^{7}\mathfrak{c} &= \overset{8}{\mathfrak{C}} : {}^{7}\mathfrak{C} \\
&& &= 1 : \mathfrak{r} \\
&\text{alſo} & \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^{4}\mathfrak{e} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^{7}\mathfrak{c} &= 1 : \mathfrak{r}+1 \\
&\text{es iſt aber} & \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^{7}\mathfrak{c} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a} &= 2+\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1) : 2 \\
\hline
&\text{alſo} & \overset{8}{\mathfrak{c}}\,\overset{4}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{a} &= 2+\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1) : 2\,(\mathfrak{r}+1) \\
&\text{alſo auch} & {}^{4}\mathfrak{e}\,\overset{3}{\mathfrak{c}} : {}^{1}\mathfrak{a}\,\overset{2}{\mathfrak{c}} &= 2+\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1) : 2\,(\mathfrak{r}+1) \\
&& {}^{1}\mathfrak{a}\,\overset{2}{\mathfrak{c}} : {}^{2}\mathfrak{e}\,\overset{2}{\mathfrak{c}} &= {}^{2}\mathfrak{C} : {}^{1}\mathfrak{C} = \overset{2}{\mathfrak{C}} : \overset{4}{\mathfrak{C}} \\
&& &= \sqrt{5}+1 : 2 \\
\hline
&\text{alſo} & {}^{4}\mathfrak{e}\,\overset{3}{\mathfrak{c}} : {}^{2}\mathfrak{e}\,\overset{2}{\mathfrak{c}} &= 2\,\mathfrak{r}+\sqrt{5}+1 : 2\,(\mathfrak{r}+1) \\
&& \overset{1}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{e} : {}^{3}\mathfrak{C} &= \overset{4}{\mathfrak{c}}\,\overset{1}{\mathfrak{c}} : {}^{4}\mathfrak{C} \\
&& &= 2\,\sqrt{5} : 3\,(\sqrt{5}+1) \\
&& {}^{3}\mathfrak{C} : {}^{1}\mathfrak{C} &= 2+\sqrt{5} : \sqrt{5} \\
\hline
&\text{alſo} & \overset{1}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{e} : {}^{1}\mathfrak{C} & \text{ und ſomit auch} \\
&& \overset{1}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{e} : \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{2}\mathfrak{e} &= 2\,(2+\sqrt{5}) : (\sqrt{5}+1) \\
&& &= 2 : 3\,(3-\sqrt{5}) \\
&& \overset{2}{\mathfrak{c}}\,{}^{2}\mathfrak{e} ; \overset{3}{\mathfrak{c}}\,{}^{4}\mathfrak{e} &= 2\,(\mathfrak{r}+1) : 2\,\mathfrak{r}+\sqrt{5}+1 \\
\hline
&\text{alſo} & \overset{1}{\mathfrak{c}}\,{}^{1}\mathfrak{e} : \overset{3}{\mathfrak{c}}\,{}^{4}\mathfrak{e} &= {}^{1}\mathfrak{e} : {}^{4}\mathfrak{e} \\
&& &= 2\,(\mathfrak{r}+1) : 3\,\mathfrak{r}\,(3-\sqrt{5})+3\,(\sqrt{5}-1) \\
&& &= \mathfrak{m}\,(3+\sqrt{5})+2 : 3\,\mathfrak{m}\,(\sqrt{5}+1) \\
&& &= \mathfrak{m}\,(\sqrt{5}+1)+\sqrt{5}-1 : 6\,\mathfrak{m}
\end{aligned}
$$

2. Das Verhältnis der dreiglidrigen Axen des Pemptoeders und ſeines Leuzitoeders zu einander, ${}^{4}\mathfrak{e}$ (Fig. 38) und ${}^{3}\mathfrak{b}$ (Fig. 30), findet ſich alſo:

$$
\begin{aligned}
&\text{(Fig. 30)} & {}^{2}\mathfrak{b} : {}^{3}\mathfrak{b} &= \mathfrak{r}\,(3+\sqrt{5})+2 : 3\,\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1)+6 \\
&\text{(Fig. 38)} & {}^{4}\mathfrak{e} : {}^{2}\mathfrak{b} &= 2\,\mathfrak{r}\,(3-\sqrt{5})+3\,(\sqrt{5}-1 : 2\,(\mathfrak{r}+1) \\
\hline
&\text{alſo} & {}^{4}\mathfrak{e} : {}^{3}\mathfrak{b} &= 2\,\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}+2)+\sqrt{5}-1 : \mathfrak{r}\,[\mathfrak{r}\,(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{5}+1)]+2 \\
&& &= (\mathfrak{m}+2)\,(\sqrt{5}-1) : 2\,\mathfrak{m}+3-\sqrt{5} \\
&& &= 2\,(\mathfrak{m}+2) : \mathfrak{m}\,(\sqrt{5}+1)+\sqrt{5}-1
\end{aligned}
$$

3. Dieß gibt für die Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$, $\underset{..}{\mathbf{L}}$ und $\underset{...}{\mathbf{L}}$ folgende beſonderen Verhältniſſe:

a. Für das ſtumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{\mathbf{L}}$, $\mathfrak{r} = 1$, $\mathfrak{m} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
{}^{4}\mathfrak{e} : {}^{1}\mathfrak{e} &= 3 : 2 \\
{}^{4}\mathfrak{e} : {}^{3}\mathfrak{b} &= \sqrt{5} : 2.
\end{aligned}
$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder $\underset{..}{\mathbf{L}}$, $\mathfrak{r} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\mathfrak{m} = \sqrt{5}-1$:

$$
\begin{aligned}
{}^{4}\mathfrak{e} : {}^{1}\mathfrak{e} &= 3+\sqrt{5} : 6\,(\sqrt{5}-1) \\
&= \sqrt{5}+2 : 6 \\
&= 1 : 6\,(\sqrt{5}-2) \\
{}^{4}\mathfrak{e} : {}^{3}\mathfrak{b} &= \sqrt{5}-1 : 1.
\end{aligned}
$$

c. Für das spitze Leuzitoeder $\underset{..}{\mathfrak{L}}$, $\mathfrak{r} = 2$, $\mathfrak{m} = \frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathfrak{e} : {}^1\mathfrak{e} &= 2 \qquad : 5 - \sqrt{5} \\
&= \sqrt{5} + 1 \;\; : 2\sqrt{5} \\
{}^4\mathfrak{e} : {}^3\mathfrak{b} &= 3\sqrt{5} + 1 : 6
\end{aligned}
$$

§. 48.

Mache (Fig. 30) ${}^6\mathfrak{e} = \overset{7}{\mathfrak{e}}$ und zieh ${}^6\mathfrak{c}\mathfrak{q}$ parallel $\overset{7}{\mathfrak{e}}$, so ist ${}^6\mathfrak{c}\mathfrak{q}$ die Hälfte der Hauptkante des Pemptoeders, und $\mathfrak{q}$ eine $(2+1)$ kantige Ecke desselben. Die Lage der $(2+1)$ kantigen Ecken des Pemptoeders wird am besten durch das Verhältnis ${}^3\mathfrak{b}\,{}^1\mathfrak{a} : {}^3\mathfrak{b}\mathfrak{q}$ bestimmt.

$$
\begin{aligned}
\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^7\mathfrak{c} &= \overset{8}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{e}} \\
&= 2 \;\; : \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) + 2 \\
\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^7\mathfrak{c} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q} &= {}^7\mathfrak{e} : {}^6\mathfrak{e} = {}^7\mathfrak{e} : \overset{8}{\mathfrak{e}} \\
&= \mathfrak{r} : 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also } \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q} &= 2\mathfrak{r} : \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) + 2 \\
\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} &= \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) + 2 : \mathfrak{r}(3 + \sqrt{5}) + 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also } \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q} &= 2\mathfrak{r} : \mathfrak{r}(3 + \sqrt{5}) + 2 \\
\text{also } \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} : {}^3\mathfrak{b}\mathfrak{q} &= \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} : (\overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q} - \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b}) \\
&= 2\mathfrak{r} : \mathfrak{r}(\sqrt{5} + 1) + 2 \\
{}^3\mathfrak{b}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} &= (\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} - \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b}) : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} \\
&= 4\mathfrak{r} : \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) + 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also } {}^3\mathfrak{b}\,{}^1\mathfrak{a} : {}^3\mathfrak{b}\mathfrak{q} &= 2\mathfrak{r}^2 : \mathfrak{r}(\mathfrak{r} + \sqrt{5}) + 1 \\
&= 2 \;\; : \mathfrak{m}(\mathfrak{m} + 1).
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung der Hauptkante des Pemptoeders wählen wir für unsern Zweck am füglichsten ihr Verhältnis zu der Kante des dem Leuzitoeder eingeschriebenen Magnetoeders, also das Verhältnis (Fig. 30) ${}^6\mathfrak{c}\mathfrak{q} : {}^2\mathfrak{c}\,{}^1\mathfrak{a}$.

$$
\begin{aligned}
{}^7\mathfrak{e} : {}^6\mathfrak{e} &= \mathfrak{r} : 1 \\
{}^7\mathfrak{e} : {}^2\mathfrak{e} &= \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) + 2 : 2 \\
{}^7\mathfrak{e} - {}^6\mathfrak{e} : {}^7\mathfrak{e} &= \mathfrak{r} - 1 : \mathfrak{r} \\
{}^7\mathfrak{e} : {}^7\mathfrak{e} - {}^2\mathfrak{e} &= \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) + 2 : \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also } {}^7\mathfrak{e} - {}^6\mathfrak{e} : {}^7\mathfrak{e} - {}^2\mathfrak{e} &= {}^6\mathfrak{c}\mathfrak{q} : {}^2\mathfrak{c}\,{}^1\mathfrak{a} \\
&= 2\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) - \sqrt{5} - 1 \;\; : 2\mathfrak{r}^2 \\
&= \mathfrak{m}(\sqrt{5} + 3) - \mathfrak{m}^2(\sqrt{5} + 1) \;\; : 2 \\
&= \mathfrak{m}(\sqrt{5} + 1) - 2\mathfrak{m}^2 \;\; : \sqrt{5} - 1.
\end{aligned}
$$

Die gefundenen allgemeinen Ausdrücke geben für die drei Leuzitoeder $\mathfrak{L}$, $\underset{.}{\mathfrak{L}}$ und $\underset{..}{\mathfrak{L}}$ folgende besonderen Verhältnisse:

a. Für das stumpfe Leuzitoeder $\underset{.}{\mathfrak{L}}$, $\mathfrak{r} = 1$, $\mathfrak{m} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
{}^3\mathfrak{b}\,{}^1\mathfrak{a} : {}^3\mathfrak{b}\mathfrak{q} &= 2 : \sqrt{5} + 2 \\
&= 2(\sqrt{5} - 2) : 1 \\
{}^6\mathfrak{c}\mathfrak{q} : {}^2\mathfrak{c}\,{}^1\mathfrak{a} &= 0 : 2.
\end{aligned}
$$

b. Für das mittlere Leuzitoeder L, $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $m = \sqrt{5}-1$:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}b\,{}^{1}a : {}^{3}bq &= 2 : 5-\sqrt{5} \\
&= \sqrt{5}+1 : 2\sqrt{5} \\
{}^{6}cq : {}^{2}c\,{}^{1}a &= 4 : 3+\sqrt{5} \\
&= 3-\sqrt{5} : 1.
\end{aligned}
$$

c. Für das spitze Leuzitoeder L, $r = 2$, $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}b\,{}^{1}a : {}^{3}bq &= 8 : 5+2\sqrt{5} \\
&= 2(\sqrt{5}-2) : \sqrt{5} \\
{}^{6}cq : {}^{2}c\,{}^{1}a &= 5+\sqrt{5} : 8 \\
&= \sqrt{5} : 2(\sqrt{5}+1).
\end{aligned}
$$

§. 49.

Was die Verhältnisse betrifft, unter welchen die Fläche des Leuzitoeders in der seines Pemptoeders liegt, so ergeben sich dieselben aus Verbindung von dreierlei bekannten Verhältnissen, nämlich erstens der Verhältnisse in der Strecke $\overset{8}{c}q$ (Fig. 30), dann des Verhältnisses der Diagonalen der Leuzitoederfläche und endlich der Dimensions-Verhältnisse der Pemptoederfläche. Doch hat es hier wenig Interesse, dieselben in allgemeiner Form zu entwickeln; ich wende mich vielmehr zu den besonderen Fällen der drei Leuzitoeder **L**, **L** und **L**, für welche ich die Zeichnungen in Fig. 45, 46 und 47 gegeben. Und auch hier deute ich jedesmal nur Einzelnes an:

1. Fig. 45.
   a. Es berechnet sich leicht, daß ${}^{3}b\,{}^{2}d : {}^{3}be = {}^{3}dg : ei$, woraus folgt, daß die Punkte i, g und ${}^{3}b$ in Einer Geraden liegen.
   b. Die Verhältnisse der Diagonalen und ihrer Teile ergeben, daß ${}^{3}dg : {}^{3}d\,{}^{1}a = 1 : \sqrt{2}$, also $= ei : e\,{}^{7}c$, woraus folgt, daß die längeren Kanten der Leuzitoederfläche parallel den Kanten der Granatoederfläche gehen.
   c. Die Fläche des Leuzitoeders kann hiernach in der seines Pemptoeders also construiert werden:
      zeichne den Rombus des (3 + 4) glidrigen Granatoeders,
      mache $i\overset{8}{c} : it = {}^{7}c\overset{8}{c} : {}^{7}c\,{}^{1}a$, also $= \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}-1$ oder $= 2 : 3-\sqrt{5}$, und zieh $t\,{}^{1}a$ parallel $i\,{}^{7}c$ u. s. w.;
      mache $e\,{}^{3}d = e\,{}^{1}a$ und zieh rs durch ${}^{3}d$ parallel ih,
      mache ${}^{3}dg : {}^{3}d\,{}^{1}a = 1 : \sqrt{2}$ und zieh ig ꝛc.

1. Fig. 46.
   a. Es berechnet sich und folgt schon aus Fig. 30, daß ${}^{3}d$ in den Schwerpunkt des Fünfecks fällt.
   b. Ferner berechnet sich ${}^{3}b\overset{8}{c} = {}^{3}be$, ${}^{1}aq = {}^{1}ae$, ${}^{3}d\,{}^{3}b = \frac{1}{4}\,{}^{3}dq$, ${}^{1}a\,{}^{3}b = \frac{1}{2}\,q\overset{8}{c}$, ${}^{3}df = fs$.
   c. Es findet sich ferner, daß ${}^{3}df : eh = 1 : \sqrt{5}$, daß aber auch ${}^{3}b\,{}^{3}d : {}^{3}be = 1 : \sqrt{5}$, daß also ${}^{3}b$, f und h in Einer Geraden liegen.
   d. Die Dreiecke ${}^{3}b\overset{8}{c}l$ und ${}^{3}beh$ sind congruent, also $\overset{8}{c}l = eh$, ${}^{3}bl = {}^{3}bh$.
   e. Es liegen auch die Punkte ${}^{1}a$, f und l in Einer Geraden, und ${}^{1}ag = {}^{1}am$.
   f. Eine Menge anderer Verhältnisse dieser Art laße ich unberührt und gebe nur folgendes einfache Verfahren für die Zeichnung an:
      zeichne das regelmäßige Fünfeck,
      zieh durch dessen Schwerpunkt ${}^{3}d$ die Gerade rs parallel ih,
      mache $e\,{}^{1}a = {}^{1}aq$ und $\overset{8}{c}l = eh$,
      zieh il und ${}^{1}al$ u. s. w.

3. Fig. 47.

a. Es berechnet sich $\overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{k} = \frac{1}{2}\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a}$, ${}^1\mathfrak{a}\mathfrak{q} = \frac{1}{4}\,{}^1\mathfrak{a}\mathfrak{n}$, $\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q} = 2 : 4 + \sqrt{5} = 2(4 - \sqrt{5}) : 11$, und wenn wir den Halbierungspunkt von ${}^3\mathfrak{d}\,{}^3\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen, so ist $\mathfrak{v}\overset{8}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q} = 2 : 5$.

b. Sonst irre man sich nicht in der Annahme von Verhältnissen, die ins Auge zu fallen scheinen. So ist $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ nur nahehin $= \frac{4}{9}\mathfrak{h}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{h}$ fällt nicht ganz mit $\mathfrak{f}$ und ${}^3\mathfrak{b}$ in Eine Gerade, ${}^3\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ ist nicht genau $= \frac{1}{2}\,{}^3\mathfrak{d}\mathfrak{q}$, und verhält sich zu $\mathfrak{c}\mathfrak{h}$ nur nahehin $= 1 : \sqrt{5}$.

c. Die Construction könnte diese sein:

zeichne das symmetrische Fünfeck des Kobaltoeders $\boxed{a : 2a : \infty a}$,

mache $\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} = 2 . \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{k}$, und

${}^1\mathfrak{a}\,{}^3\mathfrak{b} : {}^1\mathfrak{a}\overset{8}{\mathfrak{c}} = 4 : 4 + \sqrt{5} = 4(4 - \sqrt{5}) : 11$, oder

$\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^3\mathfrak{b} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q} = 2(4 - \sqrt{5}) : 11$,

danach mache $\overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{v} = \frac{2}{5}\overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{v}\,{}^3\mathfrak{d} = \mathfrak{v}\,{}^3\mathfrak{b}$,

zieh durch ${}^3\mathfrak{d}$ eine Parallele mit $\mathfrak{h}\mathfrak{i}$ und zeichne die Diagonale $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ nach ihrem Verhältnis zu ${}^1\mathfrak{a}\,{}^3\mathfrak{b}$ u. s. w.

§. 50.

In Fig. 48 habe ich schließlich einen Ausschnitt aus dem Schema für die Flächenorte der Körper des (3+5) glidrigen Systems gezeichnet. Daß ich mich dabei auf das Haloeder, Magnetoeder, Granatoeder und die drei Leuzitoeder beschränkt, findet in dem Gange meiner Abhandlung seine Rechtfertigung. Ich werde später ausführlich nachweisen, wie es mit der Weißischen Lehre von den Zonen sich im (3+5) glidrigen System verhält und wie weit die graphische Methode Neumanns auch in diesem System ihre Geltung habe. Für andere Zwecke ist es nützlich und eine gute Uebung, die Körper des (3+5) glidrigen Systems sowohl in das dreiglidrige als in das vierglidrige Schema des (3+4) glidrigen Systems einzutragen.

In Beziehung auf Fig. 48 bemerke ich Folgendes:

1. Für die relative Entfernung der Flächenorte vom Mittelpunkt gilt als Einheit die Axe $\mathfrak{a}$ des fünfgliedrigen Haloeders ($\mathfrak{o}\,{}^1\mathfrak{a}$ Fig. 37). In dieser Figur sei ${}^5\mathfrak{c}\overset{10}{\mathfrak{c}}$ die Fläche des 5glidr. Haloeders, auf welcher das Schema der Flächenorte entworfen werden soll, und $\mathfrak{t}$ der Ort für die Fläche $\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^7\mathfrak{c}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
{}^1\mathfrak{a}\mathfrak{t} : {}^1\mathfrak{a}\mathfrak{o} &= {}^1\mathfrak{a}\mathfrak{s} : \mathfrak{s}\mathfrak{o} \\
\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^7\mathfrak{c} &= \overset{8}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} : \overset{8}{\mathfrak{C}} \\
&= 2 : 2 + \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) \\
\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^7\mathfrak{c} : \overset{8}{\mathfrak{C}} &= \sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1} : 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also}\quad \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{C}} &= 2\sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1} : 2 + \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) \\
\overset{8}{\mathfrak{C}} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{s} &= \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^7\mathfrak{c} : \overset{8}{\mathfrak{C}} \\
&= \sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1} : 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also}\quad \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{s} &= 2(\mathfrak{r}^2 + 1) : 2 + \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) \\
\mathfrak{s}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} &= (\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} - \overset{8}{\mathfrak{c}}\mathfrak{s}) : \overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} \\
&= 2\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1) : 2(\mathfrak{r}^2 + 1) \\
\overset{8}{\mathfrak{c}}\,{}^1\mathfrak{a} : \overset{8}{\mathfrak{C}} &= 2\sqrt{\mathfrak{r}^2 + 1} : 2 + \mathfrak{r}(\sqrt{5} - 1)
\end{aligned}
$$

$$\text{also}\quad s'a : \overset{8}{c} = 2r^2 - r(\sqrt{5}-1) : [2 + r(\sqrt{5}-1)]\sqrt{r^2+1}$$
$$\overset{8}{c} : so = \overset{8}{c}\,{}^7c : {}^7c$$
$$= \sqrt{r^2+1} : r$$

$$\text{also}\quad s'a : so = {}'at : ao$$
$$= 2r - (5-1) : r(\sqrt{5}-1) + 2$$
$$= (\sqrt{5}-m)(\sqrt{5}-1) : 2m.$$

2. Die Fläche des mittleren Leuzitoeders **L** ist Abstumpfung der Granatoederkante und als solche leicht in das Schema (Fig. 48) eingetragen; für die dem Mittelpunkte zunächst liegenden Flächenorte von **L** berechnet sich $s'a = (\sqrt{5}-2)a$, für $L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, und die sich daraus ergebenden Zonen dienen dann, auch die Orte der steiler liegenden Flächen zu bezeichnen.

a. Für das Leuzitoeder **L** sind folgende Eigenschaften besonders hervortretend: einmal erscheint die Fläche als Abstumpfung der Kante zwischen einer ersten und dritten Magnetoederfläche, und dann erscheinen je zwei Flächen als Zuschärfung der Kante zwischen einer ersten und dritten Granatoederfläche, — um mich in der Kürze dieser Ausdrücke zu bedienen, die im Schema ihre anschauliche Erklärung finden.

b. Die Fläche **L** hat keine so ins Auge fallenden Beziehungen zu Hauptglidern des Systems; mit **L** und **L** zusammen fällt sie in die Zonen **L** — **Gr** — **L** — **L** und **Gr L** — **L**, welche das Schema nachweist.

Parallelflächige Pemptoëdrie des fünfglidrigen Leuzitoëders.

1, Dasjenige stumpfere, welches in fünf vierglidrige Granatoëder zerfällt.

Fig. 20.

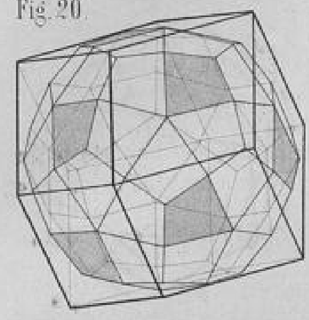


Fig. 21.

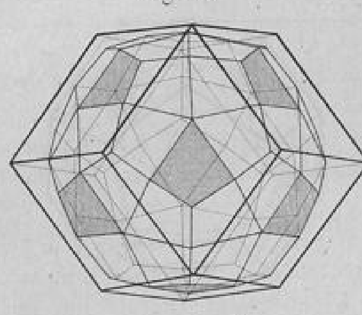


Fig. 22.

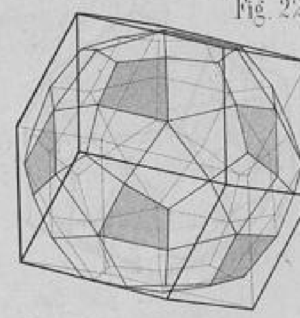


Fig. 23.

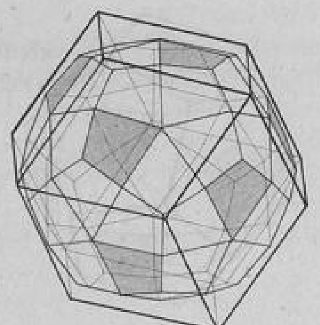


Fig. 24.

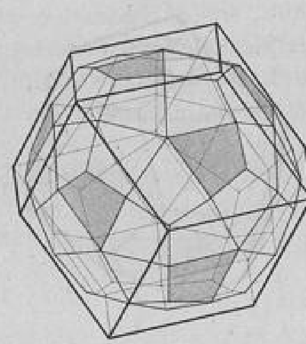


Fig. 25.

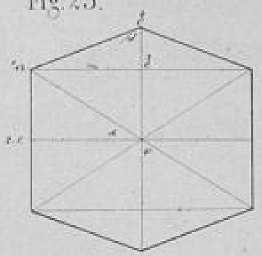


Fig. 26.

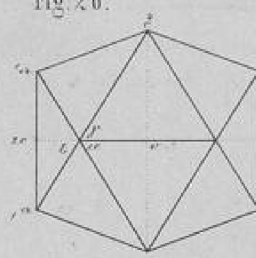


Fig. 27.

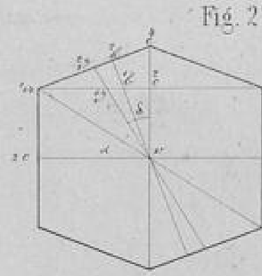


Fig. 28.

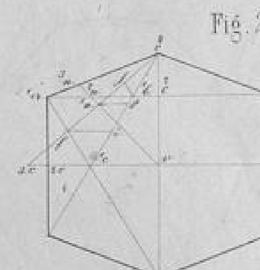


Fig. 29.

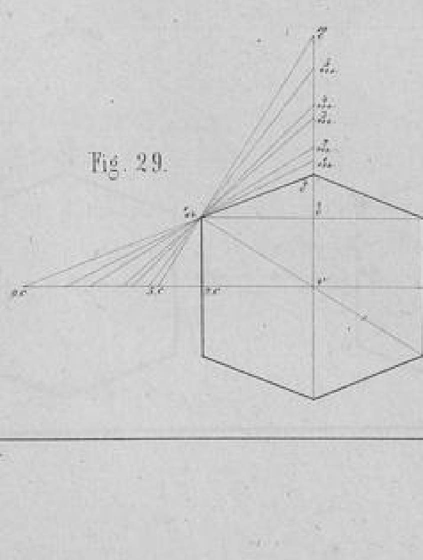
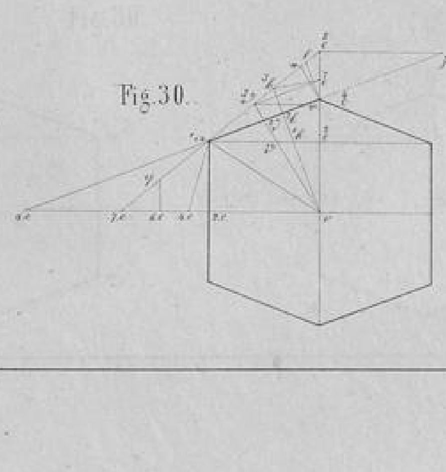


Fig. 30.



gez. von Phil. Wackernagel.

lith. bei J.D. Roth. Elberfeld.

Parallelflächige Pemptoëdrie des fünfgliedrigen Leuzitoëders.

2 Das mittlere, welches in fünf regelmäſsige Dodekaëder zerfällt.

Fig. 31.

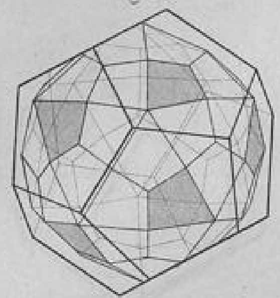


Fig. 32.

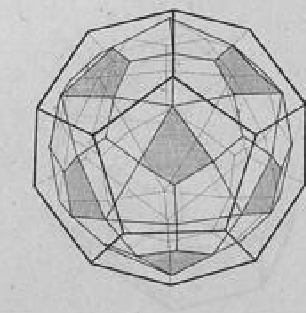


Fig. 33.

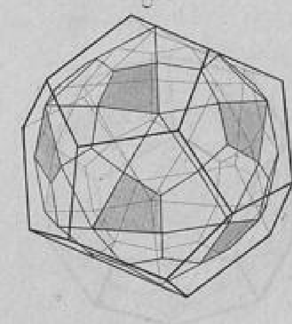


Fig. 34.

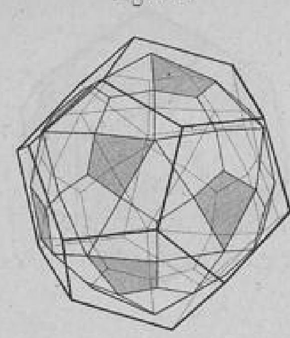
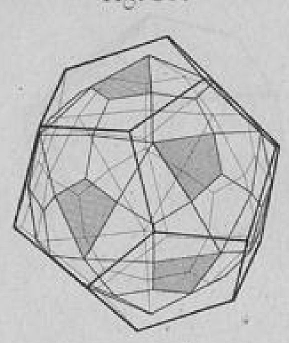


Fig. 35.



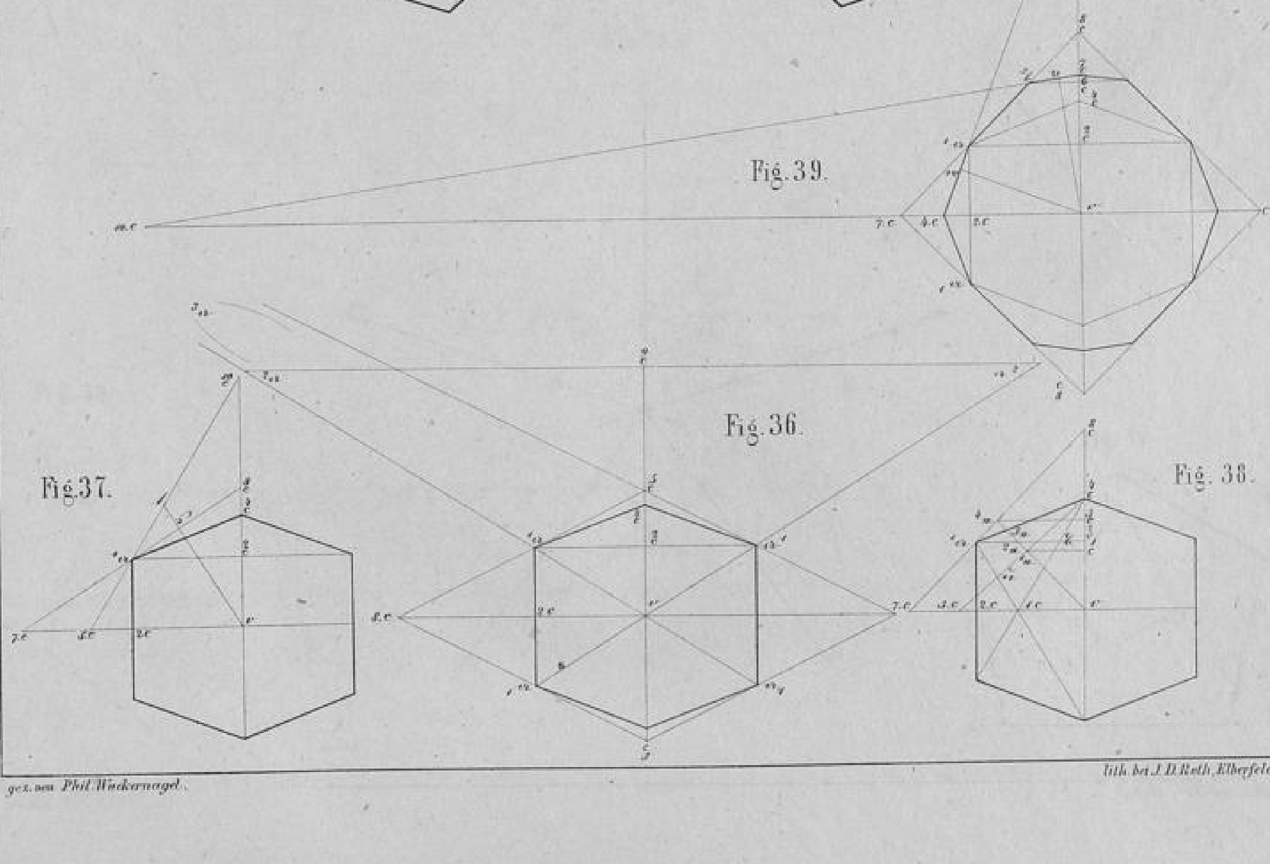


Fig. 39.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 38.

gez. von Phil. Wackernagel.

lith. bei J. D. Roth, Elberfeld.

Parallelflächige Pemptoëdrie des fünfglidrigen Leuzitoëders.

3, Dasjenige spitzere, welches in fünf Kobaltoëder zerfällt.

Fig. 40.

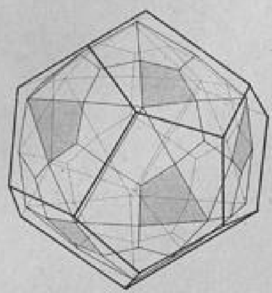


Fig. 41.

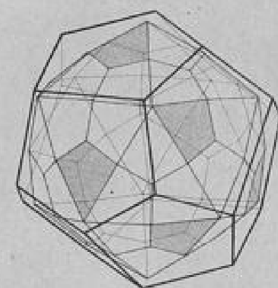


Fig. 42.

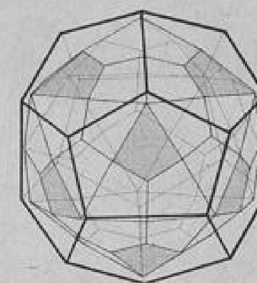


Fig. 43.

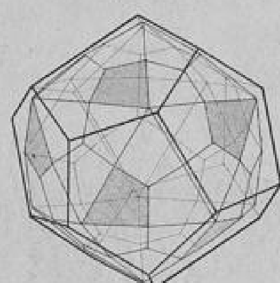


Fig. 44.

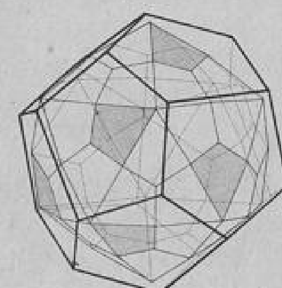


Fig. 46.

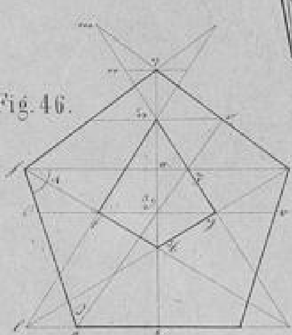


Fig. 45.

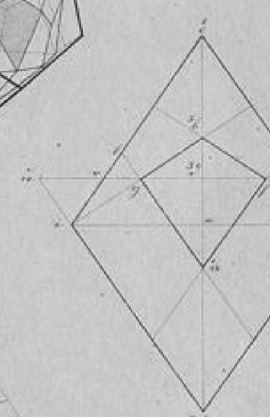


Fig. 48.

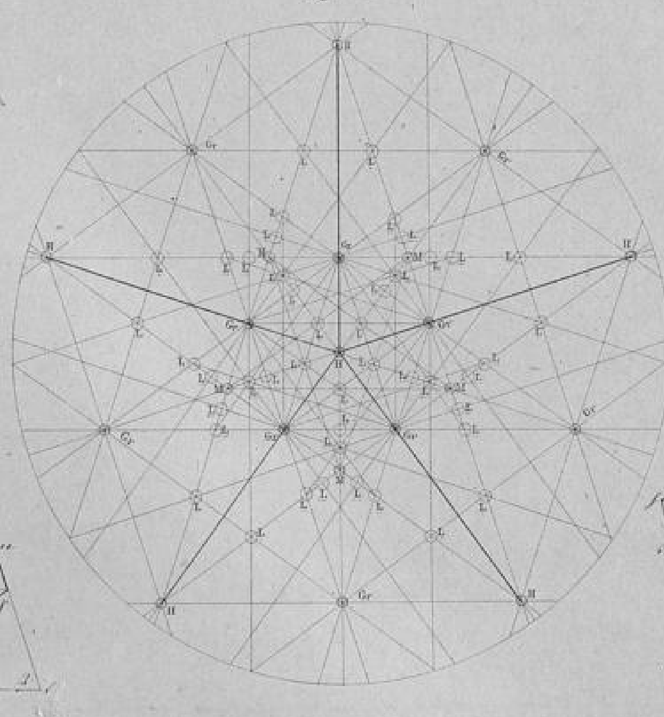


Fig. 49.

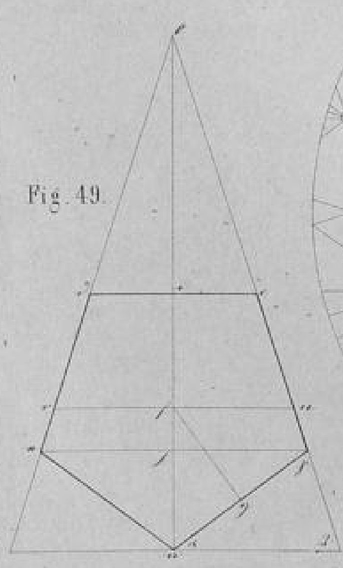
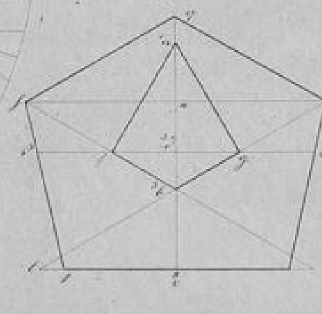


Fig. 47.



gez. von Phil. Wackernagel

lith. bei J. D. Roth, Elberfeld