# Quadratur, Kubatur und Complanation
der
# Lemniskaten.

## §. 1. Grundgleichungen.

Die den folgenden Rechnungen zu Grunde liegenden Gleichungen sind folgende:

1) $$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)+c^4-a^4=o,$$

die Mittelpunktsgleichung der Lemniskaten für rechtwinklige Coordinaten, wo 2c die Länge der gegebenen Grundlinie, $a^2$ das constante Rechteck aus den beiden andern Seiten des Dreiecks bezeichnet.

Für Polarcoordinaten, wo der Radius Vector $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ist, $\omega$ den Polarwinkel bedeutet, hat man $y=r\sin\omega$, $x=r\cos\omega$ zu setzen, und man erhält die Gleichung:

2) $$\begin{cases} r^4-2c^2r^2\cos 2\omega+c^4-a^4=o, \text{ oder auch} \\ r^2=c^2\cos 2\omega\pm\sqrt{a^4-c^4\sin^2 2\omega}. \end{cases}$$

Die sehr verschiedenen Gestalten der Lemniskaten werden kurz unterschieden durch die Bezeichnung Lemniskate $a<c$, oder $a=c$, oder $a>c$, und im letzteren Falle wieder $a^2<2c^2$, oder $a^2=2c^2$, oder auch $a^2>2c^2$; die zuletzt erwähnte, der Ellipse nahe kommende Curve auch Cassini'sche Curve genannt.

## §. 2. Allgemeine Formeln für den Flächeninhalt.

Bezeichnet $v$ den Flächenraum derjenigen ebenen Figur, welche durch die Differenz $\beta-\alpha$ zweier Abscissen $x=\beta$ und $x=\alpha$, sowie durch die zugehörigen beiden Ordinaten und durch den dazwischen liegenden Theil der Curve selbst begrenzt wird, so ist, wenn $\beta>\alpha$, für rechtwinkl. Coordinaten bekanntlich

$$v=\int_\alpha^\beta y\,dx.$$

Wählt man Polarcoordinaten, so ist $y=r\sin\omega$, $x=r\cos\omega$, $dx=-r\sin\omega d\omega+\cos\omega\,dr$ und $y\,dx=-r^2\sin\omega^2\,d\omega+r\sin\omega\cos\omega\,dr$. Differenzirt man Gleich. 2), so erhält man $dr=\frac{c^2r\sin 2\omega}{c^2\cos 2\omega-r^2}d\omega$. Dann ist

$$r \sin\omega \cos\omega \, dr = \frac{1}{2} r \,.\, \sin 2\omega \, dr = \frac{c^2 r^2 \sin 2\omega^2 \, d\omega}{2c^2 \cos 2\omega - 2r^2},$$

$$ydx = -r^2 \sin\omega^2 d\omega + \frac{c^2 r^2 \sin 2\omega^2}{2c^2 \cos 2\omega - 2r^2} d\omega$$

oder

$$\text{3)} \qquad dv = r^2 \left( \frac{c^2 \sin 2\omega^2 \, d\omega}{2c^2 \cos 2\omega - 2r^2} - \sin\omega^2 d\omega \right);$$

folglich

$$\text{4)} \qquad v = \int r^2 d\omega \left( \frac{c^2 \sin 2\omega^2}{2c^2 \cos 2\omega - 2r^2} - \sin\omega^2 \right) + \text{Const.}$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth für $r^2$ aus der zweiten Gleichung ein, so hängt das Integral nur von $\omega$ ab.

Fügt man der durch Gleichung 4) berechneten Fläche zwischen den Grenzen $x = \sqrt{c^2 + a^2}$ und $x = x$ noch den Inhalt des durch x und y bestimmten rechtwinkl. Dreiecks, also $\frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} r^2 \sin\omega \cos\omega$ hinzu, so erhält man den Inhalt eines Sectors, nämlich:

$$\text{5)} \qquad \text{Sector} = \int ydx + \frac{1}{2} r^2 \sin\omega \cos\omega + C.$$

## §. 3. Quadratur der Lemniskaten $a > c$.

Nach Gleich. 2) ist $r^2 - c^2 \cos 2\omega = + \sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}$, die Wurzel stets positiv zu nehmen, weil sonst $r^2$ negativ sein müsste. Die Gleich. 3) nimmt daher die Form an

$$-dv = \left(c^2 \cos 2\omega + \sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}\right) \left( \frac{c^2 \sin 2\omega^2}{2\sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}} + \sin\omega^2 \right) d\omega.$$

Lässt man die Fläche bei $\omega = 0$, d. i. bei $r^2 = c^2 + a^2$ ihren Anfang nehmen, so ist dx negativ, also auch $ydx = dv$ negativ, folglich $-dv$ positiv, so dass es gestattet ist zu schreiben $dv$ statt $-dv$. Die weitere Entwickelung der letzten Gleichung führt dann auf

$$\text{6)} \quad dv = d\omega \left\{ \begin{aligned} & 3c^2 \cos\omega^2 \sin\omega^2 - c^2 \sin\omega^4 + a^2 \sin\omega^2 \left(1 - \frac{c^4 \sin 2\omega^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \qquad + 2 \,.\, \frac{c^4}{a^2} \sin\omega^2 \cos\omega^4 \left(1 - \frac{c^4 \sin 2\omega^2}{a^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ & \qquad - 2 \,.\, \frac{c^4}{a^2} \sin\omega^4 \cos\omega^2 \left(1 - \frac{c^4 \,.\, \sin 2\omega^2}{a^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right.$$

Da $c^4 \sin 2\omega^2 < a^4$ ist, so lässt sich das Binomialtheorem benutzen, und wenn man alle Glieder, welche die vierte und noch höhere Potenzen von $\sin 2\omega$ enthalten, vernachlässigt, so ergiebt sich

$$dv = 3c^2 \sin\omega^2 \cos\omega^2 \, d\omega - c^2 \sin\omega^4 d\omega + a^2 \sin\omega^2 d\omega$$
$$- \frac{2c^4}{a^2} \sin\omega^4 \cos\omega^2 - \ldots\ldots$$

$$+\frac{2c^4}{a^2}\sin\omega^2 \,.\, \cos\omega^4\, d\omega + \frac{4c^8}{a^6}\sin\omega^4 \cos\omega^6\, d\omega + \ldots\ldots$$

$$-\frac{2c^4}{a^2}\sin\omega^4 \,.\, \cos\omega^2\, d\omega - \frac{4c^8}{a^6}\sin\omega^6 \cos\omega^4\, d\omega - \ldots\ldots$$

$$v=\begin{cases} 3c^2\int\sin\omega^2\cos\omega^2 d\omega - c^2\int\sin\omega^4 d\omega + a^2\int\sin\omega^2 d\omega \\ -\frac{2c^4}{a^2}\int\sin\omega^4\cos\omega^2 d\omega - \ldots. \\ +\frac{2c^4}{a^2}\left\{\int\sin\omega^2\cos\omega^4 d\omega - \int\sin\omega^4\cos\omega^2 d\omega\right\} \\ +\frac{4c^8}{a^6}\left\{\int\sin\omega^4\cos\omega^6 d\omega - \int\sin\omega^6\cos\omega^4 d\omega\right\} \\ +\frac{12c^{12}}{a^{10}}\left\{\int\sin\omega^6\cos\omega^8 d\omega - \int\sin\omega^8\cos\omega^6 d\omega\right\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{Const.} \end{cases}$$

Da nun allgemein $\int\sin\omega^{m}\cos\omega^{m+2}d\omega - \int\sin\omega^{m+2}\cos\omega^{m}\,d\omega = \frac{\sin\omega^{m+1}\cos\omega^{m+1}}{m+1}$ ist, also

$$\int\sin\omega^2\cos\omega^4 d\omega - \int\sin\omega^4\cos\omega^2 d\omega = \frac{1}{3}\sin\omega^3\cos\omega^3,$$

$$\int\sin\omega^4\cos\omega^6 d\omega - \int\sin\omega^6\cos\omega^4 d\omega = \frac{1}{5}\sin\omega^5\cos\omega^5, \text{ u. s. w.}$$

da ausserdem $\int\sin\omega^2\cos\omega^2 d\omega = \frac{1}{4}\sin\omega^3\cos\omega - \frac{1}{8}\sin\omega\cos\omega + \frac{1}{8}\omega,$

$$\int\sin\omega^4\cos\omega^2 d\omega = \frac{1}{6}\sin\omega^5\cos\omega + \frac{1}{6}\int\sin\omega^4 d\omega,$$

$$\int\sin\omega^4 d\omega = -\frac{1}{4}\sin\omega^3\cos\omega - \frac{3}{8}\sin\omega\cos\omega + \frac{3}{8}\omega,$$

$$\int\sin\omega^2 d\omega = -\frac{1}{2}\sin\omega\cos\omega + \frac{1}{2}\omega,$$

so erhält man als Näherungswerth für $v$ den folgenden:

$$\textbf{7)}\quad v=\begin{cases}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{c^4}{8a^2}\right)\omega - \left(\frac{a^2}{2}-\frac{c^4}{8a^2}\right)\sin\omega\cos\omega + \left(c^2+\frac{c^4}{12a^2}\right)\sin\omega^3\cos\omega \\ -\frac{1}{3}\,.\,\frac{c^4}{a^2}\sin\omega^5\cos\omega + \frac{2}{3}\,.\,\frac{c^4}{a^2}\sin\omega^3\cos\omega^3 + \frac{4}{5}\,.\,\frac{c^8}{a^6}\sin\omega^5\cos\omega^5 + C.\end{cases}$$

Für $\omega = o$ ist $v = o$ und daher $C = o$. Um die Fläche des ganzen Quadranten zu erhalten, ist $\omega = \frac{\pi}{2}$ zu setzen; dann wird allgemein

$$\textbf{8)}\qquad V = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^4}{8a^2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Speciell für die Lemniskate $a^2 = 2c^2$ ist $V = \frac{15}{16}c^2 \,.\, \frac{\pi}{2}$. Nimmt man die grösste

Abscisse $x = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{3c^2}$ als Einheit an, also $c^2 = \frac{1}{3}$, so ist $V = \frac{5}{32}\pi = 0{,}49087$. Ist $a^2 < 2c^2$, etwa $a^2 = \frac{3}{2}c^2$ und wieder $a^2 + c^2 = 1$, also $c^2 = \frac{2}{5}$, so ist der Quadrant $= \frac{2}{15}\pi = 0{,}267 \ldots \frac{\pi}{2} = 0{,}4188 \ldots$. Für $a = \frac{16}{15}c$ wird $V = 0{,}214 \ldots \frac{\pi}{2} = 0{,}337 \ldots$; für $a = \frac{15}{7}c$ erhält man $V = 0{,}466 \ldots \frac{\pi}{2}$. Ist $a^2$ bedeutend grösser als $2c^2$, so nähert sich die Fläche derjenigen einer Ellipse oder eines Kreises, z. B. $a^2 = 15c^2$ und $c^2 = \frac{1}{16}$ liefert für die Fläche eines Quadranten $0{,}46 \ldots \frac{\pi}{2}$, d. h. nahezu $\frac{\pi}{4}$. Die Lemniskate $a^2 < 2c^2$, $a = \frac{15}{16}c$ ist in Fig. 1, $a^2 = 2c^2$ in Fig. 2, $a^2 > 2c^2$, $a = \frac{15}{7}c$ in Fig. 3 dargestellt.

## §. 4. Die Lemniskate $a = c$.

Für $a = c$ geht Gleich. 2) über in $r^2 = 2c^2 \cos 2\omega$, und Gleich. 4) verwandelt sich in

$$v = -6c^2 \int \sin\omega^2 \cos\omega^2 d\omega + 2c^2 \int \sin\omega^4 d\omega + C,$$

wo sich die Constante so bestimmen lässt, dass die Fläche für $\omega = 45^0$ verschwindet Entwickelt man die Integrale wie in §. 3, so wird

$$v = -2c^2 \sin\omega^3 \cos\omega + C;$$

$$o = -\frac{1}{2}c^2 + C, \text{ also } C = \frac{1}{2}c^2;$$

9) $$\begin{cases} v = \frac{c^2}{2} - 2c^2 \sin\omega^3 \cos\omega, \text{ oder für } 2c^2 = b^2 \\ v = \frac{b^2}{4} - b^2 \sin\omega^3 \cos\omega. \end{cases}$$

Will man den ganzen Quadranten berechnen, so ist $\omega = o$ zu setzen, und der gesuchte Inhalt ist

$$Q = \frac{c^2}{2} = \frac{b^2}{4}.$$

Derselbe Werth lässt sich übrigens auch auf andere Weise finden. Bestimmt man z. B. die Constante so, dass die Fläche für $\omega = o$ verschwindet, wo dann dx und demgemäss auch $dv$ negativ wird, so ist zunächst

$$v = 6c^2 \int \sin\omega^2 \cos\omega^2 d\omega - 2c^2 \int \sin\omega^4 d\omega + C,$$

d. i.

$$v = 2c^2 \sin\omega^3 \cos\omega + C.$$

Für $v = o$ ist jetzt auch $C = o$, also $v = 2c^2 \sin\omega^2 \cos\omega = b^2 \sin\omega^3 \cos\omega$. Setzt man nun $\omega = 45^0$, so wird ganz wie vorher $Q = \frac{b^2}{4}$. Auch die Gl. 5) lässt sich benutzen. Aus $S = \int y dx + \frac{1}{2}r^2 \sin\omega \cos\omega + C$ folgt durch leichte Rechnung $S = \frac{b^2}{4} \sin 2\omega + C$, und da der Sector für $\omega = o$ ebenfalls $= o$ wird, so ist auch $C = o$, folglich

10) $$S = \frac{b^2}{4} \sin 2\omega,$$

der ganze Quadrant also wiederum $Q = \frac{b^2}{4}$. Da $r^2 = 2c^2 \cos 2\omega$, so ist $\sin 2\omega = \frac{\sqrt{b^4 - r^4}}{b^2}$; darnach $S = \frac{1}{4}\sqrt{b^4 - r^4}$, woraus für $r = o$ ebenfalls $Q = \frac{1}{4} b^2$ folgt.

Die Form der Lemniskate $a = c$ ist in der Figur 6 dargestellt.

## §. 5. Lehrsätze.

1) Zieht man vom Mittelpunkte der Lemniskate $a = c$ einen Leitstrahl, welcher gegen die Abscissenaxe unter dem durch die Gleichung $\sin 2\omega = \frac{1}{r}$ bestimmten Winkel $\omega$ geneigt ist, so schneidet derselbe $\frac{1}{n}$ des Quadranten ab.

Beweis. Nach Gleich. 10) muss $\frac{b^2}{4} \sin 2\omega = \frac{1}{n} \cdot \frac{b^2}{4}$ sein, d. h. $\sin 2\alpha = \frac{1}{n}$, wie behauptet wurde.

Ist daher der Quadrant zu halbiren, so ist $\sin 2\omega = \frac{1}{2}$, $\omega = 15^0$. Dem dritten Theil des Quadranten entspricht $\sin 2\omega = \frac{1}{3}$, $\omega = 9^0\ 44'\ 8'',19$. Für den vierten Theil wird $\omega = 7^0\ 14'\ 19'',5$ u. s. w.

2) Jeder beliebige Sector der Lemniskate $a = c$ lässt sich in ein rechtwinkliges Dreieck verwandeln.

Beweis. Entwickelt man aus Gleichung 1) den Werth für y, so erhält man

$$y = \pm \sqrt{\{-c^2 - x^2 + \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}\}}$$

also ist $\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} = x^2 + y^2 + c^2 = r^2 + c^2$ und $x = \frac{\sqrt{(r^2 + c^2)^2 - a^4}}{2c}$

und für $a = c$ $\frac{x}{r}$, d. h. $\cos \omega = \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{2c}$.

Sei nun in Fig. 4 $OA = c$, $AE$ normal auf $OA$ und ebenfalls $= c$, so ist $OE = \sqrt{2c^2} = b =$ der grössten Abscisse $OF$. Sei ferner $FG \perp OF$ und $= OF$, so ist $OG + \sqrt{2b^2} = \sqrt{4c^2} = 2c$. Macht man nun $OD = 2c$ und beschreibt darüber einen Halbkreis, schneidet man dann auf $FG$ einen beliebigen Leitstrahl $OC = FK$ ab, beschreibt endlich noch einen Bogen mit $OK$, der den Halbkreis in $H$ schneidet, so ist $OH = OK = \sqrt{b^2 + r^2}$; aber auch $OH = OD \cdot \cos HOD = 2c \cos HOD$, also $\cos HOD = \frac{\sqrt{b^2 + r^2}}{2c}$. In Verbindung mit dem Obigen folgt $\angle HOD = \omega$. Ist nun in Fig. 5 $OC$ ein beliebiger Leitstrahl, so ist hiernach $OH = \sqrt{b^2 + r^2}$, also $DH = \sqrt{b^2 - r^2}$, der Inhalt des Dreiecks $ODH = \frac{1}{2}\sqrt{b^4 - r^4}$, d. h. doppelt so gross als der entsprechende Sector $OFC$. Beschreibt man nun noch einen Halbkreis über $OF$, welcher $OH$ in $P$ schneidet, so ist $\triangle FPO : \triangle DHO = FO^2 : DO^2 = b^2 : (2c)^2 = 1 : 2$, folglich $\triangle FPO =$ Sector $FCO$. Will man also von dem ganzen Quadranten einen Sector abschneiden, welcher $\frac{n}{m}$ des Quadranten ist, so hat man nur nöthig, von dem gleichschenkligen Dreieck AOE (Fig. 5), welches $= \frac{1}{2}c^2 = \frac{b^2}{4} =$ dem Quadranten ist, ein anderes ähnliches Dreieck $OMN = \frac{n}{m} AOE$ abzuschneiden und dieses letztere in ein rechtwinkliches Dreieck OFP mit der Grundlinie OF zu verwandeln. In die Richtung der Kathete PO fällt dann der gesuchte Leitstrahl OC.

3) Beschreibt man (Fig. 6) über $OD = 2c$ einen Halbkreis und zieht von einem beliebigen Punkte H der Peripherie durch den Mittelpunkt O bis zum zweiten Schnittpunkte mit der Lemniskate eine gerade Linie HCOP, so ist das Rechteck $HC \times HP$ der ganzen Fläche der Lemniskate gleich, also $= b^2$. (Crelle Journ. Bd. XIV. S. 88).

Beweis. $HC = HD - r$, $HP = HO + r$, also $HC \times HP = HO^2 - r^2$. Da aber nach dem Vorhergehenden $HO^2 = b^2 + r^2$ ist, so folgt die Richtigkeit der Behauptung. Es ist also auch $DF \, . \, DG = b^2$.

4) Die Punkte D, F, A, G (Fig. 6) sind harmonische Punkte.

Beweis. Die Fläche $b^2\sqrt{\frac{1}{2}} = bc$ ist sowohl dem Rechteck $(2c - b)(b + c)$ als auch dem Rechteck $(2c + b)(b - c)$ gleich. Es ist nun $2c - b = DF$, $b + c = AG$, $2c + b = DG$, $b - c = FA$, also $DF \, . \, AG = DG \, . \, FA$, d. i. $DF : FA = DG : AG$, wie behauptet wurde.

## §. 6. Die Quadratur der Lemniskate $a < c$.

Die allgemeine Gleichung 4) kann auch hier benutzt werden; jedoch sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $r^2 > c^2 \cos 2\omega$, oder $r^2 < c^2 \cos 2\omega$, d. i. jenachdem $r^2 = c^2 \cos 2\omega + \sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}$, oder $r^2 = c^2 \cos 2\omega - \sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}$; denn die Curve besteht, wie Fig. 7 zeigt, aus zwei völlig von einander getrennten Theilen, und der Quadrant wird vom Radius Vector oder dessen Verlängerung in 2 Punkten durchschnitten. Demgemäss ist, der Gl. 6) entsprechend

$$dv = \pm\, c^2 \sin \omega^4 \, d\omega \mp 3c^2 \cos \omega^2 \sin \omega^2 d\omega$$
$$+ \sin \omega^2 \sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2} \, d\omega + \frac{2c^4 \sin \omega^2 \cos \omega^2 \, (\cos \omega^2 - \sin \omega^2) \, d\omega}{\sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}}$$

wo in den ersten beiden Gliedern das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $r^2 < c^2 \cos 2\omega$ und zugleich die Fläche für $\omega = o$ und $r = \sqrt{c^2 - a^2}$ verschwindet, oder $r^2 > c^2 \cos 2\omega$ und die Fläche $= o$ für $\omega = o$ und $r = \sqrt{c^2 + a^2}$. Das Differential $dv$ kann dann in ähnlicher Weise integrirt werden, wie bei den Lemniskaten $a > c$; denn da $\sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}$ einen reellen Werth hat, so muss $\frac{c^2 \sin 2\omega^2}{a^4} < 1$ sein, und es kann also $a^2 \left(1 - \frac{c^4 \sin 2\omega^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt werden.

Lässt man die Fläche für $\omega = o$ und $r = \sqrt{c^2 + a^2}$ gleich Null werden, wo dann $r^2 > c^2 \cos 2\omega$ ist, so ist $v = 3c^2 \int \sin\omega^2 \cos\omega^2 d\omega - c^2 \int \sin\omega^4 d\omega + a^2 \int \sin\omega^2 d\omega - \ldots.$

d. i. $v = \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^4}{8a^2}\right)\omega - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^4}{8a^2}\right)\sin\omega\cos\omega + \left(c^2 + \frac{c^4}{12a^2}\right)\sin\omega^2\cos\omega - \ldots..$

ganz übereinstimmend mit Gleich. 7), jedoch nur anwendbar zwischen den Grenzen $r = \sqrt{a^2 + c^2}$ und $r = \sqrt[4]{c^4 - a^4}$, oder auch zwischen $\omega = o$ und $\omega = \frac{1}{2}$ Arc sin $\frac{a^2}{c^2}$.

Lässt man dagegen die Fläche bei $\omega = o$ und zugleich $r = \sqrt{c^2 - a^2}$ gleich Null werden, wo dann $r^2 < c^2 \cos 2\omega$ ist, so ergiebt sich ein Werth zwischen den Grenzen $r = \sqrt{c^2 - a^2}$ und $r = \sqrt[4]{c^4 - a^4}$, oder auch $\omega = o$ und $\omega = \frac{1}{2}$ Arc sin $\frac{a^2}{c^2}$, nämlich

$$v^1 = c^2 \int \sin\omega^4 d\omega - 3c^2 \int \sin\omega^2 \cos\omega^2 d\omega + a^2 \int \sin\omega^2 d\omega$$
$$- 2 \cdot \frac{c^4}{a^2} \sin\omega^4 \cos\omega^2 d\omega - \ldots..$$

das ist

$$11) \quad v^1 = \begin{cases} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^4}{8a^2}\right)\omega - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c^4}{8a^2}\right)\sin\omega\cos\omega - \left(c^2 - \frac{c^2}{12a^2}\right)\sin\omega^3\cos\omega \\ - \frac{c^4}{3a^2}\sin\omega^5\cos\omega + \frac{2}{3} \cdot \frac{c^4}{a^2} \cdot \sin\omega^3\cos\omega^3 + \ldots... \end{cases}$$

Der Inhalt des ganzen Quadranten ergiebt sich durch Addition der Werthe für $v$ und $v^1$, wenn sowohl $v$ als $v^1$ zwischen den Grenzen $\omega = o$ und $\omega = \frac{1}{2}$ Arc sin $\frac{a^2}{c^2}$ genommen werden. Speciell für die Curve $a = \frac{15}{16}c$ (in Fig. 7 dargestellt) ist der obere Grenzwerth von $2\omega$ $61^0\ 30'\ 40''$, also $\omega = 30^0\ 45'\ 20''$. Bei den Lemniskaten $a < c$ ist $\omega$ stets kleiner als $45^0$.

### §. 7. Rotationskörper der Lemniskaten. Drehung um die x-Axe.

Es seien $\alpha$ und $\beta$ die Abscissen der Punkte P und $P^1$, $\alpha < \beta$. Denkt man sich diejenige Fläche, welche durch $\beta - \alpha$, die zugehörigen beiden Ordinaten, und den zwischen P und $P^1$ liegenden Bogen der Curve begrenzt wird, um die Axe der x gedreht, so ist der Inhalt des entstehenden Körpers

$$K = \pi \int_\alpha^\beta y^2 dx.$$

Zur Entwickelung dieses Ausdrucks könnte man sich auch hier wie im Vorhergehenden der Polarcoordinaten bedienen. Wird der in §. 2 erwähnte Werth von ydx noch mit $y = r \sin\omega$ multiplicirt, so ist

$$y^2 dx = r^3 \left\{ \frac{c^2 \sin 2\omega^2 \sin\omega\, d\omega}{2c^2 \cos 2\omega - 2r^2} - \sin\omega^3 d\omega \right\}.$$

Man würde zwei Fälle unterscheiden müssen, $r^2 = c^2 \cos 2\omega + \sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}$ und $r^2 = c^2 \cos 2\omega - \sqrt{a^4 - c^4 \sin 2\omega^2}$. Im ersten Fall wäre

$$12)\qquad -y^2dx = r^3 d\omega \left\{ \frac{2c^2}{a^2} \sin\omega^3 \cos\omega^2 . \left[1 - \frac{c^4 \sin 2\omega^2}{a^4}\right]^{-\frac{1}{2}} + \sin\omega^3 \right\},$$

im zweiten Fall

$$y^2dx = r^3 d\omega \left\{ \frac{2c^2}{a^2} \sin\omega^3 \cos\omega^2 \left[1 - \frac{c^4 \sin 2\omega^2}{a^4}\right]^{-\frac{1}{2}} - \sin\omega^3 \right\},$$

Ausdrücke, welche nach Einführung des Werthes für $r^3$ nur von $\omega$ abhängig sind. Unter Anwendung des Binomialtheorems erscheinen aber dann die Werthe für $\pi \int y^2dx$ in Form von unendlichen Reihen, deren Convergenz unter Umständen nur schwach ist, und die daher, wenn man nicht sehr viele Glieder berechnet, zu ungenaue Resultate liefern. Es mag daher genügen, die weitere Rechnung nur für die Lemniskate $a = c$ durchzuführen. Für diese sind $dx$ und $d\omega$ dem Vorzeichen nach ungleich, und wenn der Kürze wegen $\sqrt{2c^2} = 1$ gesetzt wird, so geht Gl. 12 über in

$$\begin{aligned} y^2dx = & -3 \sin\omega^3 \cos\omega^3 \sqrt{1 - \operatorname{tang}\omega^2}\, d\omega \\ & + \sin\omega^5 \cos\omega \sqrt{1 - \operatorname{tang}\omega^2}\, d\omega. \end{aligned}$$

Nach der Natur der Curve ist $\operatorname{tang}\omega^2 < 1$, daher

$$\sqrt{1 - \operatorname{tang}\omega^2} = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\omega^2 - \frac{1}{8}\operatorname{tang}\omega^4 - \frac{1}{16}\operatorname{tang}\omega^6 - \ldots\ldots$$

Die Substitution führt dann auf

$$\begin{aligned} \int y^2dx = & -3 \int \sin\omega^3 \cos\omega^3 d\omega + \frac{5}{2} \int \sin\omega^5 \cos\omega\, d\omega \\ & - \frac{1}{8} \int \frac{\sin\omega^7}{\cos\omega} d\omega - \frac{1}{16} \int \frac{\sin\omega^9}{\cos\omega^3} d\omega - \ldots . \end{aligned}$$

Entwickelt man die Integrale, nämlich

$$\int \sin\omega^3 \cos\omega^3\, d\omega = \frac{1}{4} \sin\omega^4 \cos\omega^2 + \frac{1}{12} \sin\omega^6,$$

$$\int \sin\omega^5 \cos\omega\, d\omega = \frac{1}{6} \sin\omega^6,$$

$$\int \frac{\sin\omega^7}{\cos\omega} d\omega = -\frac{1}{6} \sin\omega^6 - \frac{1}{4} \sin\omega^4 - \frac{1}{2} \sin\omega^2 - \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \cos\omega^2,$$

$$\int \frac{\sin\omega^9}{\cos\omega^3} d\omega = -\frac{1}{6} . \frac{\sin\omega^8}{\cos\omega^2} - \frac{1}{3} . \frac{\sin\omega^6}{\cos\omega^2} - \frac{\sin\omega^4}{\cos\omega^2} + 2 \operatorname{tg}\omega^2 + 2 \operatorname{l.} \cos\omega^2,$$

so wird

$$13)\qquad \pi \int y^2dx = \pi \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{16} \sin\omega^2 + \frac{1}{32} \sin\omega^4 + \frac{9}{48} \sin\omega^6 - \frac{3}{4} \sin\omega^4 \cos\omega^2 \\ & + \frac{1}{8} \operatorname{tg}\omega^2 - \frac{1}{16} \sin\omega^2 . \operatorname{tg}\omega^2 - \frac{1}{48} . \sin\omega^4 . \operatorname{tg}\omega^2 - \frac{1}{96} \sin\omega^6 . \operatorname{tg}\omega^2 \\ & + \frac{3}{16} \operatorname{l.} \cos\omega^2 + \ldots\ldots + C. \end{aligned} \right.$$

Der Kubikinhalt wird $= 0$, wenn $x = o$, d. i. $\omega = 45^0$. Daher ist

$$o = -0{,}0739 \ldots . + C, \text{ oder } C = 0{,}0739,$$

folglich

$$\pi \int_o^x y^2dx = \left\{ \frac{1}{16} \sin\omega^2 + \frac{1}{32} \sin\omega^4 + \ldots\ldots\ldots + 0{,}0739 \right\} \pi.$$

Der durch die Umdrehung des ganzen Quadranten erhaltene Körper ergiebt sich hieraus, wenn man $\omega = o$ setzt, also $x = 1$, nämlich

$$\pi \int_0^1 y^2 dx = 0{,}0739\, \pi = 0{,}2324.$$

Bequemer ist die Rechnung unter Benutzung rechtwinkl. Coordinaten. Allgemein folgt aus Gleichung 1) $y^2 = -c^2 - x^2 + \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}$; mithin ist

$$\int y^2 dx = -c^2 \int dx - \int x^2 dx + \int dx \,.\, \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}.$$

Die weitere Entwickelung der Integrale führt auf

$$14) \quad K = \pi \int y^2 dx = -\pi \,.\, c^2 x - \frac{1}{3}\pi \,.\, x^3 + \frac{1}{2}\pi \,.\, x \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}$$
$$+ \frac{1}{4}\pi \,.\, \frac{a^4}{c} \,.\, \log \text{nat} \left(2cx + \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}\right) + C.$$

Lässt man den Rotationskörper bei $x = \sqrt{a^2 + c^2} = 1$ seinen Anfang nehmen, so ist dx negativ, daher

$$o = \pi \left(c^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 4c^2} - \frac{1}{4} \,.\, \frac{a^4}{c}\, \text{l.} \left(2c + \sqrt{a^4 + 4c^2}\right)\right)$$

und

$$15) \quad \overset{x}{\underset{1}{K}} = \pi \int_1^x y^2 dx = \pi \left\{ \begin{array}{l} c^2 x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x}{2}\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} - c^2 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^4 + 4c^2} \\ \qquad + \dfrac{a^4}{4c} \log \text{nat} \dfrac{2c + \sqrt{a^4 + 4c^2}}{2cx + \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}}. \end{array} \right.$$

Lässt man dagegen den Körper bei $x = o$ entstehen, so ist dx positiv, und man erhält

$$o = \frac{\pi \,.\, a^4}{2c} \log \text{nat}\, a + C, \quad C = -\frac{\pi}{2} \,.\, \frac{a^4}{c} \log \text{nat}\, a,$$

$$16) \quad \overset{x}{\underset{o}{K}} = \pi \int_o^x y^2 dx = \pi \,.\, \left\{ \begin{array}{l} -c^2 x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} \\ + \dfrac{a^4}{4c} \log \text{nat} \left(2cx + \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}\right) - \dfrac{a^4}{2c} \log \text{nat}\, a. \end{array} \right.$$

Da in allen Lemniskaten die Abscisse den Werth $\sqrt{c^2 + a^2} = 1$ erreicht, so ist Gleich. 15) überall anwendbar, dagegen Gleich. 16) nur bei $a = c$ oder $a > c$.

Der vollständige, einem ganzen Quadranten entsprechende Rotationskörper wird für die Lemniskaten $a > c$ und $a = c$ erhalten, wenn man in Gleich. 15) $x = o$, in Gleich. 16) $x = 1$ setzt. Beide Gleichungen gehen dann über in

$$17) \quad R = \pm \pi \int_1^o y^2 dx = \pi \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 4c^2} - c^2 - \frac{1}{3} + \frac{a^4}{4c} \log \text{nat} \frac{2c + \sqrt{a^4 + 4c^2}}{a^2} \right\}.$$

Was speciell die Gleichung $a = c$ betrifft, so ergiebt sich hieraus

$$R_1 = \pi \left\{ \frac{c\sqrt{c^2 + 4}}{2} - c^2 - \frac{1}{3} + \frac{c^3}{4} \log \text{nat} \frac{2 + \sqrt{c^2 + 4}}{c} \right\},$$

und wenn man $2c^2 = 1$, $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$ setzt,

18) $R_1 = \pi \cdot \frac{3 \log nat\,(2\sqrt{2}+3) - 2\sqrt{2}}{24 \cdot \sqrt{2}} = 0{,}22768 \ldots,$

nahe übereinstimmend mit dem vorher erhaltenen Resultate.

Es versteht sich von selbst, dass die berechneten Körper doppelt so gross zu nehmen sind, wenn sich die ganze Lemniskate um die x-Axe dreht.

Ist $a < c$, so giebt es keinen Werth $x = o$, sondern der kleinste Werth der Abscisse ist $x = \sqrt{c^2 - a^2}$, d. h., wenn $\sqrt{c^2 + a^2} = 1$ gesetzt wird, $x = \sqrt{2c^2 - 1}$; daher das Integral der Gleich. 15) für den ganzen Quadranten zwischen den Grenzen $x = 1$ und $x = \sqrt{2c^2 - 1}$ zu nehmen. Man erhält dann

$$\pi \int_1^{\sqrt{2c^2-1}} y^2 dx = \pi \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6}(3c^2 - 1) + \frac{1}{6}(c^2+1)\sqrt{2c^2-1} \\ + \frac{(c^2-1)^2}{4c}\, \mathrm{l.}\, \frac{(c+1)^2}{3c^2 - 1 + 2c\sqrt{2c^2-1}}. \end{array} \right.$$

Will man den Körper bei $x = \sqrt{c^2 - a^2}$ oder, wie vorher, $x = \sqrt{2c^2 - 1}$ entstehen lassen, so ist die Constante in Gleich. 14) zu bestimmen durch

$$o = \pi \left\{ -\sqrt{2c^2 - 1} \cdot \frac{c^2+1}{6} + \frac{(1-c^2)^2}{8} \log nat\,(1 + c^2 + 2c\sqrt{2c^2-1}) \right\} + C,$$

und man erhält dann für $\pi \int_{\sqrt{2c^2-1}}^{1} y^2 dx$ ganz denselben Werth wie vorher.

## §. 8. Drehung der Lemniskaten um die y-Axe.

Da nach Gleich. 1) $x^2 = c^2 - y^2 \pm \sqrt{a^4 - 4c^2y^2}$ ist, so erhält das den Rotationskörper bezeichnende Integral den Werth

$$\pi \int x^2 dy = c^2 \int dy - \int y^2 dy \pm \int dy \cdot \sqrt{a^4 - 4c^2y^2},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, wenn $x^2 + y^2 > c^2$, dagegen negativ, wenn $x^2 + y^2 < c^2$ ist. Die weitere Entwickelung der Integrale ist ganz ähnlich der in §. 7, nur dass

$$\int dy \sqrt{a^4 - 4c^2y^2} = \frac{y}{2}\sqrt{a^4 - 4c^2y^2} + \frac{a^4}{4c} \operatorname{Arc\,sin} \frac{2cy}{a^2}$$

gesetzt werden muss. Man erhält

19) $$\pi \int x^2 dy = \pi \left\{ c^2 y - \frac{1}{3} y^3 \pm \left( \frac{y}{2}\sqrt{a^4 - 4c^2y^2} + \frac{a^4}{4c} \operatorname{Arc\,sin} \frac{2cy}{a^2} \right) \right\} + C.$$

Der Körper mag seinen Anfang bei $y = o$ und zugleich $x > c$ nehmen, was bei allen Lemniskaten stattfinden kann, so wird $C = o$, und der Kubikinhalt ist $\pi \int_0^y x^2 dy$.

Das Maximum der Ordinate ist bei den Lemniskaten $a^2 > 2c^2$ und $a^2 = 2c^2$ $y = \sqrt{a^2 - c^2}$, daher der diesen beiden Curven angehörige Rotationskörper

20) $$\pi \int_0^{\sqrt{a^2-c^2}} x^2 dy = \pi \left\{ \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \frac{a^2 + 2c^2}{6} + \frac{a^4}{4c} \operatorname{Arc\,sin} \frac{2c\sqrt{a^2-c^2}}{a^2} \right\}$$

oder speciell für $a^2 = 2c^2$ und $a^2 + c^2 = 1$

$$\pi\int_0^c x^2dy=\frac{1}{2}c^3\pi^2+\frac{2}{3}c^3\pi=\left(\frac{1}{6}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\right)\sqrt{\frac{1}{3}}=1{,}3527\ldots.$$

Wenn $a>c$ und $a^2<2c^2$, desgleichen wenn $a=c$ oder $a<c$, so ist die grösste Ordinate $y=\frac{a^2}{2c}$, und dann lässt sich durch Gleichung 19) nur ein Theil des Körpers zwischen den Grenzen $y=o$ und $y=\frac{a^2}{2c}$ berechnen, nämlich

$$21)\qquad \pi\int_0^{\frac{a^2}{2c}} x^2dy=\pi\left\{\frac{a^2c}{2}-\frac{a^6}{24c^3}+\frac{a^4\pi}{8c}\right\}.$$

Liegt der Anfang des Körpers bei $y=o$ und zugleich $x<c$, was nur bei den Lemniskaten $a=c$ und $a<c$ möglich ist, so ist die Constante in Gleich. 19) ebenfalls Null, und der Kubikinhalt ist wiederum $\pi\int_0^y x^2dy$. Dem grössten Werth entspricht hier

$$22)\qquad \pi\int_0^{\frac{a^2}{2c}} x^2dy=\pi\left\{\frac{a^2c}{2}-\frac{a^6}{24c^3}-\frac{a^4\pi}{8c}\right\}.$$

Der dem Quadranten entsprechende Körper ist die Summe der beiden Werthe in Gleich. 21) und 22) nämlich $J=\pi\left(a^2c-\frac{a^6}{12c^3}\right)$, speciell für $a=c$ $J=\frac{11}{12}c^3\pi$, d. h. für $2c^2=b^2=1$, $J=\frac{11}{24}\pi.\sqrt{\frac{1}{2}}=0{,}71995$.

Da die Grenzen der Integrale der Gleichungen 20) und 21) bei der Curve $a^2=2c^2$ dieselben sind, so lässt sich der obige Werth von $\pi\int_0^c x^2dy$ auch aus Gl. 21) herleiten.

Für die Curve $a>c$ und zugleich $a^2<2c^2$ lässt sich der Anfang des Rotationskörpers auch bei der kleinsten Ordinate, welche $x=o$ entspricht, annehmen, d. i. bei $y=\sqrt{a^2-c^2}$. Die Constante in Gleich. 19) bekommt den Werth

$$C=-\pi\left(\sqrt{a^2-c^2}\,.\,\frac{2c^2+a^2}{6}+\frac{a^4}{4c}\,\text{Arc sin}\,\frac{2c\sqrt{a^2-c^2}}{a^2}\right),$$

und der zwischen den Grenzen $y=\sqrt{a^2-c^2}$ und $y=\frac{a^2}{2c}$ zu berechnende Körper wird in diesem Falle

$$23)\quad \pi\int_{\sqrt{a^2-c^2}}^{\frac{a^2}{2c}} x^2dy=\pi\left\{\begin{array}{l}\frac{a^2c}{2}-\frac{a^6}{24c^3}-\frac{a^4\pi}{8c}-\sqrt{a^2-c^2}\,.\,\frac{2c^2+a^2}{6}\\ -\frac{a^4}{4c}\,\text{Arc sin}\,\frac{2c\sqrt{a^2-c^2}}{a^2}.\end{array}\right\}$$

Die Summe der Werthe in Gleich. 21) und 22) liefert den Rotationskörper des Quadranten.

## §. 9. Die Oberflächen der Rotationskörper, insbesondere bei der Curve $a = c$.

Die Länge eines beliebigen Bogens s zwischen den Abscissen $x = \alpha$ und $x = \beta$, wo $\alpha < \beta$, ist allgemein durch

$$s = \int_\alpha^\beta dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ausgedrückt. Da $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, so wird $dx = -r \,.\, \sin \omega d\omega + \cos \omega \,.\, dr$ und $dy = r \cos \omega d\omega + \sin \omega dr$, also $dx^2 + dy^2 = r^2 d\omega + dr^2$ und

$$ds = \pm\, dr \,.\, \sqrt{\left\{1 + r^2 \,.\, \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2\right\}} = \pm\, d\omega \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right\}},$$

wo $+$ oder $-$ gilt, jenachdem s und r, beziehungsweise s und $\omega$ zugleich oder nicht zugleich wachsen. Die Differenzirung der Gleich. 2) giebt

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{c^2 \cos 2\omega - r^2}{c^2 r \sin 2\omega}; \text{ aber } \cos 2\omega = \frac{r^4 + c^4 - a^4}{2c^2r^2}, \ \sin 2\omega^2 = \frac{4c^4r^4 - (r^4 + c^4 - a^4)^2}{4c^4r^4};$$

demnach

$$ds = \pm\, dr \,.\, 2a^2 \,.\, \frac{r^2}{\sqrt{\{(r^2 + c^2 + a^2)(r^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - r^2)(a^2 - c^2 + r^2)\}}},$$

$$s = \pm\, 2a^2 \int_\alpha^\beta \frac{r^2 dr}{\sqrt{\{-(a^4 - c^4)^2 + 2(a^4 + c^4) r^4 - r^8\}}}.$$

Denkt man sich diesen Bogen um die Abscisse gedreht, so entsteht eine Fläche

$$24) \quad F = \pm\, 2\pi \int_\alpha^\beta y ds = \pm\, 2\pi \int_\alpha^\beta \frac{a^2r^2\sqrt{a^4 - (r^2 - c^2)^2}}{c\sqrt{-(a^4 - c^4)^2 + 2(a^4 + c^4) r^4 - r^8}} dr,$$

da $y = \dfrac{\sqrt{a^4 - (r^2 - c^2)^2}}{2c}$ ist. Die Entwickelung dieses Integrals, wenn die Rechnung allgemein für alle Lemniskaten gültig sein soll, hat ihre Schwierigkeiten. Man kann zwar $\sqrt{a^4 - (r^2 - c^2)^2} = a^2 \sqrt{1 - \frac{(r^2 - c^2)^2}{a^4}}$ in einer Reihe darstellen, wodurch man Integrale von der allgemeinen Form

$$M \int \frac{r^{2n} dr}{\sqrt{-(a^4 - c^4)^2 + 2(a^4 + c^4) r^4 - r^8}}$$

erhält, allein schon der einfachste Fall, $n = 1$, führt auf Reihen elliptischer Functionen neben andern Kreisfunctionen*) Ich beschränke mich daher für das Folgende auf die Berechnung der Oberfläche derjenigen Rotationskörper, welche der Lemniskate $a = c$ entsprechen. Der obige Ausdruck für ds erhält hier speciell die Form

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{b}\right)^4}} = \frac{b^2 dr}{\sqrt{b^4 - r^4}}, \text{ wo } b^2 = 2c^2, \text{ wie früher.}$$

Die Ordinate y hat den Werth $\frac{r}{2c}\sqrt{b^2 - r^2}$; daher ist

*) Vergl. meine Abhandlung über die Lemniskaten im Programm des Königl. Gymnasium zu Lyck vom Jahre 1870.

$$yds = \frac{b^2 \cdot r \cdot dr}{2c\sqrt{b^2 + r^2}}, \text{ oder für } b^2 = 1, \; yds = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}};$$

$$\int yds = \sqrt{\frac{1}{2}} \int \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} = \sqrt{\frac{1+r^2}{2}} + C;$$

$$F = 2\pi \int yds + C = 2\pi \sqrt{\frac{1+r^2}{2}} + C.$$

Die Oberfläche verschwindet für $r = o$, daher $C = -\pi\sqrt{2}$ und

25) $$2\pi \int_o^r yds = \pi\sqrt{2}\,(\sqrt{1+r^2} - 1).$$

Setzt man $r^2 = b^2 = 1$, so ist die dem ganzen Quadranten entsprechende Rotationsfläche

$$2\pi \int_o^1 yds = \pi(2 - \sqrt{2}) = 0{,}5857865 \,.\, \pi = 1{,}840321.$$

Differenzirt man die Gleich. 1) so erhält man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c^2 + r^2}{c^2 - r^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Da ferner $\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} = x^2 + y^2 + c^2 = r^2 + c^2$ und demgemäss

$$x = \frac{\sqrt{(r^2 + c^2)^2 - a^4}}{2c}, \quad y = \frac{\sqrt{a^4 - (r^2 - c^2)^2}}{2c}$$

ist, und da aus diesem Werthe für y wiederum $dy = \frac{r \,.\, dr}{c} \cdot \frac{c^2 - r^2}{\sqrt{a^4 - (r^2 - c^2)^2}}$ hervorgeht, so ist

26) $$F_1 = 2\pi \frac{a^2}{c} \int \frac{r^2\, dr}{\sqrt{a^4 - c^4 + 2c^2r^2 - r^4}} + C$$

der allgemeine Ausdruck für die Rotationsflächen der durch Drehung um die y-Axe entstandenen Körper. Die Constante C ist im allgemeinen so zu bestimmen, dass die Fläche für $r = \sqrt{a^2 + c^2}$ verschwindet.

Für die Lemniskate $a = c$ geht Gleich. 26) über in

$$F_1 = 2c\pi \int \frac{rdr}{\sqrt{2c^2 - r^2}} + C.$$

Lässt man in diesem Falle die Fläche bei $r = o$ ihren Anfang nehmen, und setzt man $2c^2 = 1$, $2c = \sqrt{2}$, so wird

27) $$F_1 = \pi\sqrt{2} \,.\, \int_o^r \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi\sqrt{2} \,.\, (-\sqrt{1 - r^2} + 1).$$

Setzt man nun $r^2 = 1$, so entsteht die dem Quadranten entsprechende Fläche

$$\pi\sqrt{2} = 4{,}442882,$$

2,414 . . mal grösser, als die durch Gleich. 25) berechnete Fläche des andern Rotationskörpers.

## §. 10. Die Gleichungen für die Oberflächen der Rotationskörper der Lemniskate $a = c$.

Fügen wir unserem Coordinatensystem eine dritte Axe der z rechtwinklig auf den beiden andern hinzu, sei die x-Axe die Drehungsaxe, bezeichne C einen beliebigen Punkt der Oberfläche, O den Anfang der Coordinaten, so ist $OC^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Legen wir ferner eine Ebene der $xz_1$ durch C und die x-Axe, so folgt aus der Natur der Lemniskate $a = c$ $(x^2 + z_1^2)^2 = b^2 (x^2 - z_1^2)$; aber $OC^2 = x^2 + z_1^2$, folglich $z_1^2 = y^2 + z^2$. Die gesuchte Gleichung der Oberfläche ist demnach

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = b^2 (x^2 - y^2 - z^2). \tag{28}$$

Ist dagegen die y-Axe die Drehungsaxe und wird durch diese und den Punkt C eine Ebene der $yz_1$ gelegt, so ist wieder $OC^2 = x^2 + y^2 + z^2$; ausserdem

$$(z_1^2 + y^2)^2 = b^2 (z_1^2 - y^2),\quad OC^2 = z_1^2 + y^2,\ \text{also}\ z_1^2 = x^2 + z^2;$$

daher

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = b^2 (x^2 - y^2 + z^2) \tag{29}$$

die Gleichung der Rotationsfläche.

## §. 11. Aufgabe.

Es werde die Fläche, deren Gleichung $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = b^2 (x^2 - y^2 - z^2)$ ist, durch eine Ebene geschnitten. Es sollen die Curven der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte xyz bestimmt werden.

Der Kürze wegen sei $x^2 + z^2 + y^2 = p^2$, so folgt aus Gleichung 28)

$$\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{(b^2 + 2p^2)\,y}{(b^2 - 2p^2)\,x},\quad \left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{(b^2 + 2p^2)\,z}{(b^2 - 2p^2)\,x},$$

$$\left[\frac{d^2x}{dy^2}\right] = \frac{(b^4 - 4p^4)\{(b^2 - 2p^2)\,x^2 - (b^2 + 2p^2)\,y^2\} + 16\,b^4x^2y^2}{(b^2 - 2p^2)^3 x^3},$$

$$\left[\frac{d^2x}{dy\,.\,dz}\right] = \frac{16\,b^4x^2yz - (b^2 + 2p^2)^2 \,.\, (b^2 - 2p^2)\,yz}{(b^2 - 2p^2)^3 x^3},$$

$$\left[\frac{d^2x}{dz^2}\right] = \frac{(b^4 - 4p^4)\{(b^2 - 2p^2)\,x^2 - (b^2 + 2p^2)\,z^2\} + 16\,b^4x^2z^2}{(b^2 - 2p^2)^3 x^3}.$$

Setzt man nun

$$P = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},\quad H = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx\,.\,dy}\right)^2,$$

$$M = \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - 2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dz\,.\,dy}\right) + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

so ist der Halbmesser des grössten oder kleinsten Krümmungskreises ausgedrückt durch

$$\varrho = P \,.\, \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4P^2H}}{2H}.$$

Bei unserer Lemniskate $a = c$ ist

$$P = \frac{b^2p}{(b^2 - 2p^2)\,x},\quad H = \frac{3b^4p^4(b^2 + 2p^2)}{(b^2 - 2p^2)^4 \,.\, x^4}\quad M = \frac{b^4p^2(b^2 + 5p^2)}{(b^2 - 2p^2)^3 \,.\, x^3},$$

$$\varrho = \frac{b^2(b^2+5p^2) \pm b^2(b^2-p^2)}{6p(b+2p^2)}, \tag{30}$$

und wenn mit $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes bezeichnet werden,

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{\varrho}{P} = + \frac{(b^4+9b^2p^2+2p^4)x \pm (b^4-3 \,.\, b^2p^2+2p^4)x}{6p^2(b^2+2p^2)}, \\ \beta &= y + \frac{\varrho\left(\frac{dx}{dy}\right)}{P} = - \frac{(b^2-p^2)y \pm (b^2-p^2)y}{6p^2}, \\ \gamma &= z + \frac{\varrho\left(\frac{dx}{dz}\right)}{P} = - \frac{(b^2-p^2)z \pm (b^2-p^2)z}{6p^2}, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

wo das eine Vorzeichen der grössten, das andere der kleinsten Krümmung entspricht.

## §. 12. Aufgabe.

Die durch Gleich. 29) gegebene Fläche werde durch eine Ebene geschnitten. Die Curven der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte xyz zu bestimmen.

Die Rechnung ist ganz ähnlich der des vorigen §. Wenn man der Kürze wegen

$$P = \frac{b^2p}{(b^2+2p^2)y}, \quad H = -\frac{3b^4p^4(b^2-2p^2)}{(b^2+2p^2)^4 \,.\, y^4}, \quad M = \frac{b^4p^2(b^2-5p^2)}{(b^2+2p^2)^3 \,.\, y^3}$$

setzt, so sind die Resultate

$$\varrho_1 = P \,.\, \frac{M \pm \sqrt{M^2-4HP^2}}{2H} = \frac{b^2(b^2-5p^2) \pm b^2(b^2+p^2)}{6p^2(b^2-2p^2)}, \tag{32}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= x + \frac{\varrho \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)}{P} = \frac{(b^2+p^2)x \pm (b^2+p^2)x}{6p^2} \\ \beta_1 &= y - \frac{\varrho}{P} = - \frac{(b^4-9b^2p^2+2p^4)y \pm (b^4+3b^2p^2+2p^4)y}{6p^2(b^2-2p^2)}, \\ \gamma_1 &= z + \frac{\varrho \cdot \left(\frac{dy}{dz}\right)}{P} = \frac{(b^2+p^2)z \pm (b^2+p^2)z}{6p^2}. \end{aligned}\right. \tag{33}$$