Ueberall, wo man sich veranlasst sieht, eine Grösse nicht unmittelbar, sondern als Grenze, d. i. durch eine unendliche Form, zur Anschauung zu bringen, wird der Nachweis des Vorhandenseins dieser Grenze selbstverständlich für das erste Erforderniss gehalten, und hierbei wieder vor Allem die Erkenntniss eines mehr oder minder allgemeinen Gesetzes angestrebt, da die Einzelfälle selten innerhalb des wissenschaftlichen Interesses liegen. Die Auffassung eines solchen Gesetzes stimmt aber im Wesentlichen überein mit der Vorstellung einer Function und führt, in so fern in einer Grössenform nicht nur eine Veränderliche zulässig ist, zu der Vorstellung von der Verwandtschaft derselben mit irgend einer Classe von Functionen.

Da die Enthüllung der letzteren somit als das höchste Problem aller Convergenzbetrachtungen bezeichnet werden darf, so gehören diese recht eigentlich in die Functionentheorie. Nimmt man zu diesen Erwägungen die Thatsache, dass man von dem hier angedeuteten Gesichtspunkte ausgehend nicht nur in der Theorie der Reihen, sondern auch durch Rückwirkung der letzteren in der allgemeinen Functionentheorie bereits zu Resultaten gelangt ist, welche mit Recht unter die glänzendsten der Analysis gerechnet werden, so darf ein Versuch, andere Grössenformen auf ähnliche Weise zu behandeln, wohl Rechtfertigung finden.

Wenn ich hier die Gelegenheit benutze, einige Untersuchungen dieser Art über die unendlichen Kettenbrüche zu veröffentlichen, so muss ich befürworten, dass ich keineswegs den Anspruch erhebe, als sei ich jenem letzten Ziele, dem Nachweise der Zusammengehörigkeit der Grössenform mit einer bestimmten Classe von Functionen, eben so nahe gekommen, wie es bei den Reihen gelungen ist; und ich würde ganz mit ihnen zurück halten, wenn sie nicht innerhalb eines — obgleich kleinen — Gebietes zu ziemlich allgemeinen Resultaten geführt hätten, nehmlich desjenigen, in welchem die Entwickelungen aller in der Nähe von $x = o$ monodromen und monogenen Functionen liegen. (Dieses enthält also auch den Gauss'schen Kettenbruch*), dessen Identität mit dem Quotienten der hypergeometrischen Reihen meines Wissens bisher noch nicht a priori nachgewiesen worden ist.)

Ob die unendlichen Kettenbrüche berufen sind, eine grosse Rolle in der Functionentheorie zu spielen, ähnlich wie die unendlichen Reihen, wage ich nicht zu entscheiden: dagegen spricht die Schwierigkeit ihrer Vergleichung unter einander, dafür vielleicht ihr Nutzen bei numerischem Calcul und in der Zahlentheorie, wohl noch

*) Diese von Gauss zuerst allgemein behandelte Form (Disquis. gener. circa seriem infin. etc Comm. soc. r. Gott. rec. II. a. 1812.) hat später Heine einer allgemeineren untergeordnet und den allgemeinen Näherungsbruch entwickelt (Crell. Journ. LIII. S. 284. u. LVII. S. 231.).

mehr aber die Eigenschaft, dass die Functionen durch sie in grösserer Ausdehnung dargestellt werden können, als durch Reihen, dass diese Entwickelung ohne Beihülfe der Reihen ermöglicht wird*), endlich dass sie (wie ich in einer späteren Abhandlung zeigen werde) ein Mittel an die Hand geben, um die Null- und Unendlichwerthe der Functionen von einander zu trennen.

Unsere Kenntniss von den Kennzeichen der Convergenz der Kettenbrüche verdanken wir hauptsächlich den Arbeiten Sterns und Seidels. Der Erstere hat diese Frage unter der Voraussetzung von lauter positiven Theilzählern und Theilnennern zu sicherem Abschluss gebracht, und der Letztere sehr schätzenswerthe Resultate über Kettenbrüche erlangt, in welchen alle Theilzähler $= -1$ sind**). Dass über imaginäre Kettenbrüche Untersuchungen angestellt seien, ist mir nicht bekannt geworden; jedoch darf man diese offenbar nicht ausschliessen, wenn man die Entwickelung der Functionen in Absicht hat. Für die letztere ist es ferner von Wichtigkeit, die Identität selbst eines convergirenden Kettenbruchs mit der ihn erzeugenden Function nachzuweisen, zumal (wie u. A. Seidel zeigt) Discontinuitäten bei demselben eintreten können, ohne dass er zu convergiren aufhört.

Was nun im Einzelnen die vorliegende Arbeit anbetrifft, so halte ich es zunächst für nöthig, die Gründe anzugeben, welche mich vermochten, eine Ableitung der sicherlich hinreichend bekannten Fundamentalrelationen voranzuschicken. In der That habe ich auch Nichts weniger, als ihre nochmalige Erhärtung damit bezweckt; aber sie schien mir einerseits das geeignetste Mittel zu bieten, um mit der hier gebrauchten Bezeichnungsweise vertraut zu machen, welche ich, wie aus der Arbeit selbst hervorgehen dürfte, nicht gut entbehren konnte; andrerseits bot mir die Methode der Ableitung so viel Interesse, dass ich mich zu dem Glauben geneigt fühlte, sie möchte auch von Anderen nicht verworfen werden.

Abschn. II. enthält die allgemeinen Umrisse einer Methode zur Entwickelung des allgemeinen Näherungsbruches und ihre Erläuterung an zwei Beispielen; Abschn. III. die Entwickelung eines endlichen Kettenbruchs von besonderer Form in eine unendliche Reihe und die für das Spätere wichtigen Folgerungen über die Coefficienten der letzteren, welche sich aus dem Bildungsgesetze der Näherungsnenner und der Differenz zweier Näherungsbrüche mit Hülfe derjenigen Determinante ziehen lassen, die die Differentialquotienten eines Bruchs darstellt. In Abschn. IV. sind einige der Reihentheorie angehörigen Sätze über die Wurzeln der Funktionen bewiesen, auf welchen, im Verein mit den Resultaten des vorhergehenden Abschnitts (namentlich den Formeln (26.)), sich die in Abschn. V. ausgeführten Untersuchungen über die monodromen

---

*) Z. B. das in dieser Weise zuerst von Laplace (Mécanique céleste. IV. 255.) entwickelte und später von Jacobi (Cr. J. XII. 346.) behandelte Integral $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$; auch mag es erlaubt sein, meine Ableitung der Integrale einer Differentialgleichung (1862.) zu erwähnen. Einen ausführlichen Algorithmus zum Zwecke solcher Entwickelung hat Grunert (Analyt. Unters. über d. contin. Brüche. 1838.) gegeben.

**) Stern. Ueber die Conv. u. Div. eines Kettenbr. Crell. Journ. XXXVII. a. 1848.
Seidel. Untersuchungen über d. Conv. u. Div. d. Kttnbr. München. 1846.
— Bemerkungen über d. Zusammenhang zw. d. Bildungsgesetze eines Kb. u. d. Art d. Fortgangs seiner Näherungsbrüche. München. 1855.

und monogenen unendlichen Kettenbrüche stützen. In dem letzteren ist die Divergenz, welche nur bei besonderen Werthen von x Statt findet, von der Convergenz nicht immer geschieden, weil diese Unterscheidung für den hier verfolgten Zweck unwesentlich ist, und der Raum nicht ausreichte, um die hiermit theilweise zusammen fallenden Untersuchungen über die $(a)_{k,n}^{r}$ [(26.)] und diejenigen des Abschn. IV. weiter auszudehnen. Abschn. VI. endlich handelt über die Entwickelung der monodromen und monogenen Functionen durch Kettenbrüche und die Identität beider, in wie weit diese aus den letzteren erkannt wird.

Eine weitere Ausführung der letzten Abschnitte nebst einer Reihe aus ihnen abgeleiteter Folgerungen über die Functionen behalte ich einer späteren Veröffentlichung vor.

I. Fundamentalrelationen.

§. 1.

Bekanntlich kann man jeden endlichen Kettenbruch durch Heben seiner Theile auf die Gestalt bringen:

(1.) $$F_{1,n} = 1 : \{ 1 + a_1 : \{ 1 + a_2 : \{ 1 + \ldots + a_{n-1} : \{ 1 + a_n : \{ 1,$$

in welcher jeder Theilzähler a_r der Quotient ist zwischen dem ursprünglich gegebenen Theilzähler und dem Producte der beiden ihm benachbarten Theilnenner.

Durch Aufrechnen von hinten her wird er übergeführt in einen gemeinen Bruch:

(2.) $$F_{1,n} = \frac{N_{2,n}}{N_{1,n}};$$

wobei ganz allgemein unter $N_{k,n}$ eine durch die recurrirende Formel

(3.) $$N_{k,n} = N_{k+1,n} + a_k N_{k+2,n}$$

charakterisirte ganze Funktion der Grössen $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ verstanden wird, und

(4.) $$N_{n+1,n} = N_{n+2,n} = 1, \; N_{n+3,n} = o$$

ist, wenn diese N (wie hier) blosse Symbole sind.

§. 2.

Setzt man in (3.) für k alle Nummern von k bis n und löst das so erhaltene System von Gleichungen in Bezug auf die N als Unbekannte auf, so findet man:

(5.) $$N_{k,n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ -a_k & 1 & 1 & & & & \\ & -a_{k+1} & 1 & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & -a_{n-1} & 1 & 1 \\ & & & & & -a_n & 1 \end{vmatrix}$$

als eine Determinante $(n-k+2)^{\text{ten}}$ Grades.*)

*) Sind die Theilnenner nicht $= 1$ gemacht, so erscheinen sie in der Diagonalreihe mit dem entsprechenden Theilzähler in einer Zeile. — Ausserdem darf man jeden Factor von a_r in einen Factor des um eine Zeile höher, nicht in der Diagonalreihe stehenden Elements 1 verwandeln.

Da sich dieselbe nicht ändert, wenn man die Reihe $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}, a_k$ für die Reihe $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ substituirt — was durch die Gleichung

$$N_{k,n} = N_{n,k}$$

angedeutet werden möge — so folgt [(1.) u. (2.)]:

$$F_{n,k} = 1 : \big| 1 + a_n : \big| 1 + a_{n-1} : \big| 1 + \ldots + a_{k+1} : \big| 1 + a_k : \big| 1 = \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n}};$$

ferner [(3.)]:

$$(6.) \qquad N_{k,n} = N_{k,n-1} + a_n N_{k,n-2},$$

eine Formel mit beweglichem zweitem Index, während in der Formel (3.), aus welcher sie hervorging, der erste Index beweglich ist.

§. 3.

Lemma. Sei $a_r\, a_s\, a_t \ldots a_u$ irgend eine Permutationscomplexion von m beliebigen Elementen einer Determinante R, ferner D und D_r, D_{rs}, D_{rst}, ... die Werthe, welche die Determinante und die Coefficienten von a_r, $a_r a_s$, $a_r a_s a_t$, ... in derselben annehmen, wenn man alle Elemente $a_r, a_s, a_t, \ldots, a_u$ durch Nullen ersetzt, so ist:

$$R = D + \Sigma a_r D_r + \Sigma a_r a_s D_{rs} + \Sigma a_r a_s a_t D_{rst} + \ldots + a_r a_s a_t \ldots a_u D_{rst\ldots u}.$$

— Denn diese Formel bedeutet nichts Anderes, als dass sich R zerlegen lasse in eine Anzahl von Summanden, von denen der erste keines der Elemente $a_r, a_s, a_t, \ldots, a_u$, die nächsten $\binom{m}{1} = m$ aber je eines derselben, die folgenden $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}$ je zwei enthalten, u. s. w.*)

§. 4.

Der im vorigen §. aufgestellte Satz kann benutzt werden, um $N_{k,n}$ (5.) nach den Dimensionen der Theilzähler zu entwickeln, indem man $-a_k, -a_{k+1}, \ldots\ldots, -a_{n-1}, -a_n$ als die vorhin durch $a_r, a_s, a_t, \ldots, a_u$ bezeichneten Elemente nimmt.

Dann wird:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & . & . & . & \\ & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Bei der Bestimmung von $D_{rst\ldots}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Kommen unter den Zahlen $r, s, t, \ldots$ zwei oder mehrere mit der Differenz 1 vor, so wird die Diagonalreihe an der betreffenden Stelle von einem nur Nullen enthaltenden Rechteck durchbrochen, also:

---

*) Sind im Besonderen $a_r, a_s, a_t, \ldots, a_u$ alle Elemente einer Diagonalreihe, so hat man den von Cayley (Crell. J. XXXVIII. p. 93.) gegebenen Satz.

$$D_{rst\ldots} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Kommen aber unter den p Zahlen $r, s, t, \ldots$ nicht zwei mit der Differenz 1 vor, so wird:

$$D_{rst\ldots} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^p = (-1)^p.$$

Beachtet man noch, dass $D_{rst\ldots}$ mit einem Producte von p negativen Factoren $-a_r, -a_s, -a_t, \ldots$ zu multipliciren ist, so erhellt die Richtigkeit folgender Formel:

$$(7.) \qquad N_{k,n} = 1 + a^1_{k,n} + a^2_{k,n} + a^3_{k,n} + \ldots + a^\vartheta_{k,n},$$

wo $a^r_{k,n}$ die Summe aller möglichen (als Producte aufgefassten) Combinationscomplexionen ohne Wiederholung bedeutet, welche sich aus $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ so zu je r Elementen bilden lassen, dass nicht zwei neben einander stehende Elemente (a_s, a_{s+1}) dieser Reihe in den einzelnen Producten zugleich vorkommen.*)

Die Anzahl der Summanden in $a^r_{k,n}$ ist $= \binom{n-k+2-r}{r}$; und ϑ hat den Werth:

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left[n-k+1+\cos\frac{1}{2}(n-k)\pi^2\right].$$

§. 5.

Wendet man ferner den Satz (§. 3.) an, um nur ein Element $-a_s$ aus der Determinante (5.) auszusondern, so findet man:

---

*) Z. B. $a^3_{1,6} = a_1 a_3 a_5 + a_1 a_3 a_6 + a_1 a_4 a_6 + a_2 a_4 a_6$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ -a_k & 1 & 1 & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & -a_{s-1} & 1 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & & & -a_{s+1} & 1 & 1 & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & -a_{n-1} & 1 & 1 \\ & & & & & & & -a_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -a_k & 1 & 1 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & -a_{s-2} & 1 & 1 \\ & & -a_{s-1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -a_{s+1} & 1 & 1 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & -a_{n-1} & 1 & 1 \\ & & -a_n & 1 \end{vmatrix} = N_{k,s-1}\, N_{s+1,n}$$

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & & & & & \\ -a_k & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ & & -a_{s-3} & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & -a_{s-2} & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & -a_{s-1} & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & -a_{s+1} & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & & & -a_{n-1} & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & -a_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -a_k & 1 & 1 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & -a_{s-3} & 1 & 1 \\ & & -a_{s-2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -a_{s+2} & 1 & 1 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & -a_{n-1} & 1 & 1 \\ & & -a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -N_{k,s-2}\, N_{s+2,n};$$

also:

$$(8.) \qquad N_{k,n} = N_{k,s-1}\, N_{s+1,n} + a_s\, N_{k,s-2}\, N_{s+2,n},$$

eine Formel, welche (3.) und (6.) als besondere Fälle enthält.

Stellt man sich ferner vor, dass an die Stelle der Reihe

$$a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_{s-2},\ a_{s-1},\ a_s,\ a_{s+1},\ a_{s+2},\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

die Reihe

$$a_r,\ a_{r-1},\ \ldots,\ a_{k+2},\ a_{k+1},\ a_k,\ a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_m$$

gesetzt werde, und bezeichnet die Determinante, in welche $N_{k,n}$ übergeht, durch R, so hat man, weil nach §. 2. allgemein $N_{k,n} = N_{n,k}$ ist, und r mit m vertauscht werden darf:

$$R = N_{k+1,r}\, N_{k,m} + a_k\, N_{k+2,r}\, N_{k+1,m}$$
$$= N_{k+1,m}\, N_{k,r} + a_k\, N_{k+2,m}\, N_{k+1,r}.$$

Schreibt man jetzt wieder n für m und s für r, so folgt hieraus:

$$N_{k,n}\, N_{k+1,s} - N_{k+1,n}\, N_{k,s} = -a_k\,(N_{k+1,n}\, N_{k+2,s} - N_{k+2,n}\, N_{k+1,s}).$$

Setzt man endlich in dieser Gleichung nach einander $k+1,\ k+2,\ \ldots,\ s+1$ für k, multiplicirt alle so erhaltenen Gleichungen mit einander und berücksichtigt die Identität [(4.)]

$$N_{s+2,n}\, N_{s+3,s} - N_{s+3,n}\, N_{s+2,s} = N_{s+2,n}\,.\,0 - N_{s+3,n}\,.\,1 = -N_{s+3,n},$$

so findet man:

$$(9.) \qquad N_{k,n}\, N_{k+1,s} - N_{k+1,n}\, N_{k,s} = (-1)^{s-k+1}\, a_k\, a_{k+1} \ldots a_{s+1}\, N_{s+3,n}.$$

Durch allgemeine Vertauschung von a_{k+r} mit a_{n-r} [§. 2.] geht hieraus noch hervor:

$$(10.)\qquad N_{k,n}\,N_{s,n-1} - N_{s,n}\,N_{k,n-1} = (-1)^{n-s+1}\; a_{s-1}\,a_s\,a_{s+1}\ldots a_n\,N_{k,s-3}.$$

§. 6.

Dividirt man die Gl. (9.) durch $N_{k,n}\,N_{k,s}$ und giebt der Nummer k den Werth 1, so folgt [(2.)]:

$$(11.)\qquad \frac{N_{2,s}}{N_{1,s}} - \frac{N_{2,n}}{N_{1,n}} = F_{1,s} - F_{1,n} = (-1)^s.\, \frac{a_1\,a_2\ldots a_{s+1}\,N_{s+3,n}}{N_{1,s}\,N_{1,n}},$$

der bekannte, wichtige Ausdruck für die Differenz zweier Näherungswerthe.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich aus (10.) für den umgekehrten Kettenbruch:

$$(12.)\qquad \frac{N_{s,n-1}}{N_{s,n}} - \frac{N_{1,n-1}}{N_{1,n}} = F_{n,s} - F_{n,1} = (-1)^{n-s+1}\, \frac{a_{s-1}\,a_s\,a_{s+1}\ldots a_n\,N_{1,s-3}}{N_{s,n}\,N_{1,n}}.$$

Anm. Aus den in diesem und dem vorhergehenden §. bewiesenen Formeln lässt sich mit Leichtigkeit eine grosse Anzahl interessanter Sätze über die Kettenbrüche ableiten, deren Beweis bei Anwendung anderer Entwickelungsmethoden schwerlich in derselben Kürze geführt werden möchte.

Schreibt man z. B. in (12.) $s+3$ für s und multiplicirt die so erhaltene Gleichung mit (11.), so erhält man die auf der rechten Seite von s unabhängige Gleichung:

$$(F_{1,s} - F_{1,n})\,(F_{n,s+3} - F_{n,1}) = (-1)^n.\, \frac{a_1\,a_2\ldots a_n}{N_{1,n}^2}.$$

Schreibt man in (11.) $n+2$ für n, n für s und multiplicirt dann die Gleichung mit der identischen [(6.) u. §. 2.]:

$$F_{n+1,1}^{-1} + a_{n+2} = \frac{N_{1,n+2}}{N_{1,n}},$$

so wird:

$$(F_{1,n} - F_{1,n+2})\,(F_{n+1,1}^{-1} + a_{n+2}) = (-1)^n\, \frac{a_1\,a_2\ldots a_{n+1}}{N_{1,n}^2}.$$

Schreibt man aber in (11.) $n+1$ für n, n für s und multiplicirt dann die Gleichung mit der identischen

$$F_{n,1} + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{N_{1,n+1}}{a_{n+1}\,N_{1,n}},$$

so wird:

$$(F_{1,n} - F_{1,n+1})\,(F_{n,1} + \frac{1}{a_{n+1}}) = (-1)^n.\, \frac{a_1\,a_2\ldots a_n}{N_{1,n}^2}.$$

Diese Relationen zwischen dem Kettenbruch und seinem Rest, beziehungsweise a_{n+2} und a_{n+1}, sind im Grunde dieselben, wie die von Möbius auf einem ganz anderen Wege abgeleitete (Crell. Journ. VI. S. 219.). Es möge hier noch eine andere Gleichung Platz finden, welche derselbe Autor für „eine der bemerkenswerthesten Relationen zwischen Kettenbrüchen" erklärt. Durch einfache Substitution der Ausdrücke für die F durch die N ergiebt sich nehmlich [§. 1. u. 2.]:

$$F_{1,n}\,F_{n,2} - F_{1,n-1}\,F_{n,1} = \frac{N_{2,n}}{N_{1,n}}\,.\,\frac{N_{2,n-1}}{N_{2,n}} - \frac{N_{2,n-1}}{N_{1,n-1}}\,.\,\frac{N_{1,n-1}}{N_{1,n}} = 0.$$

II. Darstellung der Determinante $N_{k,n}$ als einer Function von k und n.

§. 7.

Wenn die Theilzähler a_k einfache Functionen ihrer Indices sind, so ist es in manchen Fällen möglich, die Determinante $N_{k,n}$ so zu summiren, dass sie als eine übersichtliche Function von k und n erscheint. In diesen Fällen hat man dann natürlich auch den allgemeinen Näherungswerth des Kettenbruchs in expliciter Gestalt [(2.)].

Der Weg, auf welchem die Summation im Allgemeinen am leichtesten gelingt, ist der folgende.

Substituirt man aus (7.) in (3.) und (6.), so müssen die Glieder, welche gleiche Dimensionen der Theilzähler enthalten, auf beiden Seiten der so erhaltenen Gleichungen identisch sein; also:

$$(13.)\qquad \overset{r}{a}_{k,n} = \overset{r}{a}_{k+1,n} + a_k \overset{r-1}{a}_{k+2,n},$$

$$(14.)\qquad \overset{r}{a}_{k,n} = \overset{r}{a}_{k,n-1} + a_n \overset{r-1}{a}_{k,n-2},$$

wobei folgende Bedeutung der Symbole

$$(15.)\qquad \overset{0}{a}_{k,n} = 1,\ \overset{\vartheta+r}{a}_{k,n} = 0$$

gilt.

Durch wiederholte Anwendung von (13.) und (14.) findet man noch:

$$(16.)\qquad \overset{r+1}{a}_{k,n} = \sum_{s=k}^{s=n-2r} a_s \overset{r}{a}_{s+2,n},$$

$$(17.)\qquad \overset{r+1}{a}_{k,n} = \sum_{s=k+2r}^{s=n} a_s \overset{r}{a}_{k,s-2}.$$

Die beiden letzten Formeln dienen dazu, um nach Summation der Reihe

$$\overset{1}{a}_{k,n} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n$$

successive die Werthe für $\overset{r}{a}_{k,n}$ mit höheren r zu finden, die Formeln (13.) und (14.) aber, um nach Auffindung eines muthmasslichen Bildungsgesetzes seine Allgemeinheit zu prüfen.

Beispiele.

§. 8.

Heine hat bereits in der oben angeführten Abhandlung vom Jahre 1860 gezeigt, wie sich die Näherungswerthe des Gauss'schen, von ihm erweiterten Kettenbruchs in entwickelter Gestalt allgemein angeben lassen. Es mag hier deshalb nur bemerkt werden, dass die so eben besprochene Methode mit derselben Leichtigkeit direct zu den Resultaten führt, welche sich aus denen Heines ergeben, nachdem man in ihnen die überflüssigen, einander aufhebenden Glieder der unendlichen hypergeometrischen Reihen weggelassen, und dass man zur Erlangung dieser Resultate gut thut, den Coefficienten von x in a_k in eine Differenz zweier Brüche zu verwandeln, von denen jeder einen nur durch Addition zusammengesetzten Nenner hat.

Um die oben angezeigte Methode durch ein nicht zu jener Klasse von Kettenbrüchen gehörendes Beispiel zu erläutern, wählen wir den folgenden:

$$F = 1 : \rceil 1 + (a+1)\,x : \rceil 1 + (a+2)\,x : \rceil 1 + (a+3)\,x : \rceil\ 1 + \cdots + (a+n)\,x : \rceil\ 1.$$

Da hier $a_k = (a+k)\,x$ ist, so wird $a^r_{k,n}$ die Potenz x^r als Factor enthalten, und der Coefficient dieser Potenz die Grösse sein, in welche $a^r_{k,n}$ für $x = 1$ übergeht. Der grösseren Einfachheit wegen wollen wir daher vorläufig $x = 1$ annehmen, d. i. $a_k = a + k = \binom{a+k}{1}$ setzen.

Bei den bevorstehenden Summationen kommt stets der folgende Satz über die Binomialcoefficienten zur Anwendung:

$$\binom{k}{r} + \binom{k+1}{r} + \binom{k+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{k}{r+1};$$

was nicht immer erst von Neuem erwähnt werden soll.

Also:

$$a^1_{k,n} = \binom{a+k}{1} + \binom{a+k+1}{1} + \cdots + \binom{a+n}{1} = \binom{a+n+1}{2} - \binom{a+k}{2}.$$

Mithin:

$$\begin{aligned} a_k\, a^1_{k+2,n} &= \binom{a+n+1}{2}\binom{a+k}{1} - \binom{a+k+2}{2}\binom{a+k}{1} \\ &= \binom{a+n+1}{2}\binom{a+k}{1} - 3\binom{a+k+2}{3}, \end{aligned}$$

woraus durch Benutzung von (16.) folgt:

$$a^2_{k,n} = \sum_{s=k}^{s=n-2} a_s\, a^1_{s+2,n} = \binom{a+n+1}{2}\left[\binom{a+n-1}{2} - \binom{a+k}{2}\right] - 3\left[\binom{a+n+1}{4} - \binom{a+k+2}{4}\right]$$

oder:

$$a^2_{k,n} = 1.3\binom{a+n+1}{4} - 1.1\binom{a+n+1}{2}\binom{a+k}{2} + 1.3\binom{a+k+2}{4}.$$

Folglich:

$$\begin{aligned} a_k\, a^2_{k+2,n} &= 3\binom{a+n+1}{4}\binom{a+k}{1} - \binom{a+n+1}{2}\binom{a+k+2}{2}\binom{a+k}{1} + 3\binom{a+k+4}{4}\binom{a+k}{1} \\ &= 3\binom{a+n+1}{4}\binom{a+k}{1} - 3\binom{a+n+1}{2}\binom{a+k+2}{3} + 3.5\binom{a+k+4}{5}, \end{aligned}$$

so dass mit abermaliger Benutzung von (16.) wird:

$$a^3_{k,n} = \sum_{s=k}^{s=n-4} a_s\, a^2_{s+2,n}$$

$$= 3\binom{a+n+1}{4}\left[\binom{a+n-3}{2} - \binom{a+k}{2}\right] - 3\binom{a+n+1}{2}\left[\binom{a+n-1}{4} - \binom{a+k+2}{4}\right] + 3.5\left[\binom{a+n+1}{6} - \binom{a+k+4}{6}\right]$$

oder:

$$\begin{aligned} a^3_{k,n} = 1.3.5\binom{a+n+1}{6} - 1.3.1\binom{a+n+1}{4}\binom{a+k}{2} + 1.1.3\binom{a+n+1}{2}\binom{a+k+2}{4} \\ - 1.3.5.\binom{a+k+4}{6}. \end{aligned}$$

Führt man die Rechnung auf diese Weise weiter, so erhält man allgemein, nachdem man noch den Factor x^r wieder hinzugefügt:

$$a^r_{k,n}=x^r.\left\{\begin{array}{l}1.3\ldots(2r-1)\binom{a+n+1}{2r}-1.3\ldots(2r-3).1\binom{a+n+1}{2r-2}\binom{a+k}{2}+\cdots\\ \cdot+(-1)^s.1.3\ldots(2r-2s-1).1.3\ldots(2s-1).\binom{a+n+1}{2r-2s}\binom{a+k+2s-2}{2s}+\cdots\\ \cdots+(-1)^r.1.3\ldots(2r-1)\binom{a+k+2r-2}{2r}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{(2r)!\,x^r}{r!\,2^r}.\left\{\begin{array}{l}\binom{a+n+1}{2r}-\frac{\binom{r}{1}}{\binom{2r}{2}}\binom{a+n+1}{2r-2}\binom{a+k}{2}+\frac{\binom{r}{2}}{\binom{2r}{4}}\binom{a+n+1}{2r-4}\binom{a+k+2}{4}-\cdots\\ \cdots+(-1)^s.\frac{\binom{r}{s}}{\binom{2r}{2s}}\binom{a+n+1}{2r-2s}\binom{a+k+2s-2}{2s}+\cdots+(-1)^r.\binom{a+k+2r-2}{2r}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{(2r)!\,x^r}{r!\,2^r}\binom{a+n+1}{2r}.\left\{\begin{array}{l}1-\frac{\binom{r}{1}\binom{a+k}{2}}{\binom{a+n-2r+3}{2}}+\frac{\binom{r}{2}\binom{a+k+2}{4}}{\binom{a+n-2r+5}{4}}-\cdots\cdots\\ \cdots+(-1)^s\cdot\frac{\binom{r}{s}\binom{a+k+2s-2}{2s}}{\binom{a+n-2r+2s+1}{2s}}+\cdots+(-1)^r.\frac{\binom{a+k+2r-2}{2r}}{\binom{a+n+1}{2r}}\end{array}\right\}.$$

Um zu erkennen, dass diese Formel in der That allgemein gültig ist, braucht man nur in (13.) zu substituiren; — die letztere wird hierdurch identisch.

Der Werth des Kettenbruchs $F_{1,n}$ ergiebt sich nun unmittelbar durch (7.) und (2.).

Hätte man

$$a^1_{k,n}=x\left\{\binom{n-k+2}{2}+\binom{n-k+1}{1}\binom{a+k-1}{1}\right\},$$

$$a^1_{k+1,n-1}=x\left\{\binom{n-k}{2}+\binom{n-k-1}{1}\binom{a+k}{1}\right\}$$

dargestellt, so würde man durch Anwendung der Formel (17.) folgenden Ausdruck gefunden haben:

$$a^r_{k+1,n-1}=\frac{r!\,x^r}{2^r}\binom{n-k-r}{r}.\left\{\begin{array}{l}\binom{n-k}{r}+2^1\binom{n-k-1}{r-1}\binom{a+k}{1}+2^2\binom{n-k-2}{r-2}\binom{a+k+1}{2}\\ +\cdots+2^{r-1}\binom{n-k-r+1}{1}\binom{a+k+r-2}{r-1}+2^r\binom{a+k+r-1}{r}\end{array}\right\}.$$

Setzt man $\frac{1}{2x^2}$ für x und $a=0$, so wird also:

$$a^r_{1,n}=\frac{(2r)!}{r!(2x)^{2r}}\binom{n+1}{2r}=\frac{r!}{(2x)^{2r}}\binom{n+1}{r}\binom{n-r+1}{r},$$

$$a^r_{2,n}=\frac{(2r)!}{r!(2x)^{2r}}\binom{n+1}{2r}\cdot\left\{1-\frac{\binom{r}{1}}{\binom{n-2r+3}{2}}+\frac{\binom{r}{2}}{\binom{n-2r+5}{4}}-\cdots+(-1)^r.\frac{\binom{r}{r}}{\binom{n+1}{2r}}\right\}$$

$$= \frac{r!}{(2x)^{2r}} \binom{n-r}{r} \cdot \left\{ \binom{n}{r} + 2^1 \binom{n-1}{r-1} + 2^2 \binom{n-2}{r-2} + \cdots + 2^r \binom{n-r}{0} \right\}.$$

Mithin hat man jetzt nach Substitution dieser Werthe von $\overset{r}{a}_{1,n}$ und $\overset{r}{a}_{2,n}$ in $N_{1,n}$ und $N_{2,n}$ den im Zähler und Nenner nach ganzen fallenden Potenzen von x^2 geordneten allgemeinen Näherungsbruch

$$F_{1,n} = 1 : \Big\} 1 + \frac{1}{2x^2} : \Big\} 1 + \frac{2}{2x^2} : \Big\} 1 + \frac{3}{2x^2} : \Big\{ 1 + \cdots + \frac{n}{2x^2} : \Big\{ 1 = \frac{N_{2,n}}{N_{1,n}}$$

der Laplace'schen Entwickelung von

$$2x\, e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx$$

für positive x.*)

§. 9.

Als zweites Beispiel diene der Kettenbruch

$$F_{1,n} = 1 : \big\} 1 + x : \big\} 1 + ex : \big\} 1 + e^2 x : \big\} 1 + \cdots + e^{n-1} x : \big\} 1,$$

in welchem allgemein $a_s = e^{s-1}\, x$ ist.

Man hat

$$\overset{1}{a}_{1,n} = x\,(1 + e + e^2 + \cdots + e^{n-1}) = x\,\frac{1-e^n}{1-e};$$

also

$$a_s\, \overset{1}{a}_{1,s-2} = \frac{x^2}{1-e} \cdot e^{s-1}\,(1 - e^{s-2}) = \frac{x^2}{1-e} \cdot (e^{s-1} - e^{2s-3}),$$

woraus durch Anwendung von (17.) erhalten wird:

$$\overset{2}{a}_{1,n} = \sum_{s=3}^{s=n} a_s\, \overset{1}{a}_{1,s-2} = \frac{x^2}{1-e} \left(e^2\, \frac{1-e^n}{1-e} - e^3\, \frac{1-e^{2(n-2)}}{1-e^2} \right)$$

oder:

$$\overset{2}{a}_{1,n} = x^2 e^2 \cdot \frac{(1-e^{n-2})\,(1-e^{n-1})}{(1-e)\quad (1-e^2)}$$

Wendet man jetzt die Formel (17.) von Neuem an und setzt die Rechnung auf dem eingeschlagenen Wege fort, so findet man allgemein:

$$\overset{r}{a}_{1,n} = x^r e^{r\,(r-1)}\, \frac{(1-e^{n-2r+2})\,(1-e^{n-2r+3}) \ldots (1-e^{n-r+1})}{(1-e)\ .\ (1-e^2)\ \ldots\ (1-e^r)};$$

die Richtigkeit dieses Ausdrucks lässt sich sehr leicht dadurch nachweisen, dass er die Formel (14.) identisch erfüllt.

Ferner ist:

$$\overset{r}{a}_{2,n} = x^r e^{r^2}\, \frac{(1-e^{n-2r+1})\,(1-e^{n-2r+2}) \ldots (1-e^{n-r})}{(1-e)\ .\ (1-e^2)\ \ldots\ (1-e^r)},$$

weil, wie man sich leicht überzeugt, $\overset{r}{a}_{1,n}$ in $\overset{r}{a}_{2,n}$ übergeht, wenn man ex für x und dann $n-1$ für n setzt.

---

*) Tafeln für dieses Integral sind von Kramp und Bessel berechnet worden (Fundamenta astronomiae. Regiomonti 1818. p. 36.).

III. Endliche Kettenbrüche von der Form:

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \cdots + \alpha_{n-1} x^{\varepsilon_{n-1}} : \{ 1 + \alpha_n x^{\varepsilon_n} : \{ 1.$$

§. 10.

Unter den ε werden positive ganze Zahlen verstanden. Die Function, in welche $N_{k,n}$ durch allgemeine Substitution von $\alpha_s\, x^{\varepsilon_s}$ für a_s übergeht, werde im Folgenden immer durch $\mathfrak{N}_{k,n}(x)$ bezeichnet oder, wo keine Unklarheit dadurch entstehen kann, auch bloss durch $\mathfrak{N}_{k,n}$. — Die Uebertragung der im ersten Abschnitt aufgestellten Formeln auf die hier in Betracht kommenden Grössen unterliegt keiner Schwierigkeit.

Zunächst erkennt man durch die Formel (5.) oder (7.), dass $\mathfrak{N}_{k,n}(x)$ eine ganze rationale algebraische Function von x ist, welche den besonderen Werth

$$\mathfrak{N}_{k,n}(0) = 1$$

hat; ferner durch die Formel (9.), dass die Functionen $\mathfrak{N}_{k,n}(x)$ und $\mathfrak{N}_{k+1,n}(x)$ keine gemeinschaftliche Wurzel besitzen. Denn wäre das Letztere der Fall, so müsste diese Wurzel, da sie nicht $= 0$ sein kann, auch eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{N}_{s+3,n}(x) = 0$ für jedes beliebige s sein; was nicht möglich ist, weil $\mathfrak{N}_{n+1,n}(x) = 1$ [s. §. 1.] nicht verschwindet.

Weil also die ganzen rat. algebr. Functionen $\mathfrak{N}_{1,n}(x)$ und $\mathfrak{N}_{2,n}(x)$ nicht zugleich verschwinden können, so haben sie auch keinen mit x veränderlichen gemeinschaftlichen Factor. Folglich ist

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = \frac{\mathfrak{N}_{2,n}(x)}{\mathfrak{N}_{1,n}(x)}$$

die einfachste Form, unter welcher sich $\mathfrak{F}_{1,n}$ durch ganze rat. algebr. Functionen darstellen lässt; und die Wurzeln, für welche $\mathfrak{F}_{1,n}(x)$ verschwindet oder unendlich wird, sind sämtliche Wurzeln beziehungsweise der Gleichung $\mathfrak{N}_{2,n}(x) = 0$ oder der Gleichung $\mathfrak{N}_{1,n}(x) = 0$.

Da also $\mathfrak{F}_{1,n}(x)$, als der Quotient zweier ganzen rationalen algebraischen Functionen, für alle Werthe von x monodrom und monogen ist, so schliesst man nach einem bekannten Satze auf die Richtigkeit des folgenden:

Der Kettenbruch

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \cdots + \alpha_n x^{\varepsilon_n} : \{ 1$$

kann durch die Maclaurin'sche Reihe

$$(18.)\qquad \mathfrak{F}_{1,n}(x) = \mathfrak{F}_{1,n}(0) + \frac{\mathfrak{F}'_{1,n}(0)}{1!}\, x + \frac{\mathfrak{F}''_{1,n}(0)}{2!}\, x^2 + \frac{\mathfrak{F}'''_{1,n}(0)}{3!}\, x^3 + \cdots$$

entwickelt werden von $x = 0$ bis zu jedem x, dessen Modul kleiner ist, als der Modul der kleinsten Wurzel der Gleichung $\mathfrak{N}_{1,n}(x) = 0$. Für jedes x mit grösserem Modul aber divergirt die Reihe.

§. 11.

Die Reihe, welche wir im vorigen §. für $\mathfrak{F}_{1,n}(x)$ gefunden haben, besitzt eine merkwürdige Eigenschaft, welche näher anzuzeigen für unsere Zwecke von Wichtigkeit ist.

Zunächst erhält man aus (11.) durch allgemeine Substitution von $\alpha_s x^{\varepsilon_s}$ für a_s:

$$\mathfrak{F}_{1,s}(x) - \mathfrak{F}_{1,n}(x) = (-1)^s . \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s+1} x^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1}} . \frac{\mathfrak{N}_{s+3,n}(x)}{\mathfrak{N}_{1,s}(x)\, \mathfrak{N}_{1,n}(x)} .$$

Dividirt man diese Gleichung durch x^r und lässt dann x sich der Null nähern, so wird die rechte Seite $= 0$ oder $= (-1)^s \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s+1}$, je nachdem $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1} > r$ oder $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1} = r$ ist. Da die linke Seite denselben Werth haben muss, so schliesst man, dass

$$\frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,s}(0)}{r!} - \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,n}(0)}{r!} = 0, \quad \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,s}(0)}{r!} = \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,n}(0)}{r!}$$

für jedes

$$r < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1};$$

dass aber

$$\frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,s}(0)}{r!} - \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,n}(0)}{r!} = (-1)^s \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s+1}$$

für

$$r = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1}$$

sei. — Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

Der Werth des r^{ten} Differentialquotienten von $\mathfrak{F}_{1,n}(x)$ für $x = 0$ hängt, wenn

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_s \overline{\gtrless} r < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1}$$

ist, nur von den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ab, stimmt also mit dem entsprechenden des s^{ten} Näherungsbruches überein. Die niedrigste Ordnung der Differentialquotienten, welche für $x = 0$ von a_{s+1} abhängen, ist diejenige vom Grade

$$r = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1},$$

für welche die Relation

$$(19.)\qquad \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,s}(0)}{r!} - \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,n}(0)}{r!} = (-1)^s a_1 a_2 \ldots a_{s+1}$$

gilt.

§. 12.

Um den r^{ten} Differentialquotienten von $\mathfrak{F}_{1,n}(x)$ zu erhalten, differentiire man die aus

$$\mathfrak{F}_{1,n} = \frac{\mathfrak{N}_{2,n}}{\mathfrak{N}_{1,n}}$$

folgende Gleichung

$$\mathfrak{N}_{2,n} = \mathfrak{N}_{1,n} \mathfrak{F}_{1,n}$$

r mal nach x. Dividirt man die so erhaltene Gleichung

$$\overset{(r)}{\mathfrak{N}}_{2,n} = \overset{(r)}{\mathfrak{N}}_{1,n} \mathfrak{F}_{1,n} + \binom{r}{1} \overset{(r-1)}{\mathfrak{N}}_{1,n} \overset{'}{\mathfrak{F}}_{1,n} + \binom{r}{2} \overset{(r-2)}{\mathfrak{N}}_{1,n} \overset{''}{\mathfrak{F}}_{1,n} + \cdots + \binom{r}{r} \mathfrak{N}_{1,n} \overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,n}$$

durch $r!$ und bezeichnet allgemein

$$\frac{\overset{(r)}{\mathfrak{N}}_{2,n}}{r!} = \nu_r\,,\quad \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{N}}_{1,n}}{r!} = \mu_r\,,\quad \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,n}}{r!} = \varphi_r\,,$$

also

$$\mathfrak{N}_{2,n} = \nu_0\,,\quad \mathfrak{N}_{1,n} = \mu_0\,,\quad \mathfrak{F}_{1,n} = \varphi_0\,,$$

so entsteht die recurrirende Gleichung

$$\text{(20.)}\qquad \nu_r = \mu_r\,\varphi_0 + \mu_{r-1}\,\varphi_1 + \mu_{r-2}\,\varphi_2 + \cdots + \mu_0\,\varphi_r.$$

Substituirt man hierin nach und nach $0, 1, 2, \ldots, r$ für r und eliminirt aus dem so erhaltenen System von Gleichungen alle φ mit Ausnahme von φ_r, so ergiebt sich mit Berücksichtigung des Werthes

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & & & & & \\ \mu_1 & \mu_0 & & & & \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mu_r & \mu_{r-1} & \mu_{r-2} & \cdot & \cdot & \mu_0 \end{vmatrix} = \mu_0^{r+1}$$

der Ausdruck:

$$\mu_0^{r+1}\,\varphi_r = \begin{vmatrix} \mu_0 & & & & & & \nu_0 \\ \mu_1 & \mu_0 & & & & & \nu_1 \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & & & & \nu_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{r-1} & \mu_{r-2} & \mu_{r-3} & \cdot & \cdot & \mu_0 & \nu_{r-1} \\ \mu_r & \mu_{r-1} & \mu_{r-2} & \cdot & \cdot & \mu_1 & \nu_r \end{vmatrix}$$

oder, nachdem man noch die letzte Columne zur ersten gemacht:

$$\text{(21.)}\quad \mu_0^{r+1}\,\varphi_r = (-1)^r.\begin{vmatrix} \nu_0 & \mu_0 & & & & & \\ \nu_1 & \mu_1 & \mu_0 & & & & \\ \nu_2 & \mu_2 & \mu_1 & \mu_0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \nu_{r-1} & \mu_{r-1} & \mu_{r-2} & \mu_{r-3} & \cdot & \cdot & \mu_0 \\ \nu_r & \mu_r & \mu_{r-1} & \mu_{r-2} & \cdot & \cdot & \mu_1 \end{vmatrix}$$

— eine für jeden Bruch geltende Formel.

Es mag noch bemerkt werden, dass ein zur Berechnung der μ aus den ν und φ geeigneter Ausdruck durch blosse Vertauschung von φ mit μ aus (21.) erhalten wird, weil (20.) sich durch diese Vertauschung nicht ändert.

§. 13.

Setzt man jetzt in (21.) $x = 0$, also

$$\nu_r = \frac{\mathfrak{N}_{2,n}(0)}{r!}\,,\quad \mu_r = \frac{\mathfrak{N}_{1,n}(0)}{r!}\,,\quad \varphi_r = \frac{\mathfrak{F}_{1,n}(0)}{r!}\,,\quad \nu_0 = \mu_0 = \varphi_0 = 1\,,$$

so wird

$$(22.)\quad \varphi_r = (-1)^r \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ \nu_1 & \mu_1 & 1 & & & \\ \nu_2 & \mu_2 & \mu_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \nu_{r-1} & \mu_{r-1} & \mu_{r-2} & \mu_{r-3} & \cdot\ \cdot & 1 \\ \nu_r & \mu_r & \mu_{r-1} & \mu_{r-2} & \cdot\ \cdot & \mu_1 \end{vmatrix}$$

der Ausdruck für die Coefficienten in der Reihenentwickelung

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \varphi_3 x^3 + \cdots.$$

Nach §. 11 darf man in ihm $\alpha_{s+1} = \alpha_{s+2} = \cdots = \alpha_n = 0$ setzen, wenn

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_s \leqq r < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{s+1}.$$

Die Determinante, durch welche φ_r hier dargestellt wird, lässt mehrere Umformungen zu, aus denen sich einige interessante Schlüsse über die φ_r ziehen lassen. Da dieselben jedoch in dieser Allgemeinheit für unsere Zwecke von geringer Bedeutung sind, so übergehen wir sie und führen nur noch an, dass φ_{ε_1} die erste der Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ist, welche nicht verschwindet; so wie, dass im Falle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$ alle φ_r mit Ausnahme von $\varphi_\varepsilon, \varphi_{2\varepsilon}, \ldots, \varphi_{r\varepsilon}, \ldots$ verschwinden, — wodurch jedoch nicht gesagt sein soll, dass unter besonderen Umständen nicht auch einige der letzteren $= 0$ sein könnten.

§. 14.

Ein hervorragendes Interesse aber unter den Kettenbrüchen, deren allgemeinste Form uns bisher beschäftigt hat, nehmen diejenigen in Anspruch, bei welchen alle ε gleich gross sind; einerseits weil sie am häufigsten vorkommen, andrerseits weil die φ_r sich auf elegantere Weise durch die Coefficienten der Potenzen von x in $\mathfrak{N}_{1,r}$ ausdrücken lassen, als in allen übrigen Fällen, endlich weil sich aus diesen Formeln wichtige Folgerungen ergeben. Wir setzen der grösseren Einfachheit wegen alle $\varepsilon = 1$, also

$$\mathfrak{F}_{1,n} = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x : \{ 1 + \alpha_2 x : \{ 1 + \cdots + \alpha_n x : \{ 1;$$

eine Voraussetzung, welche sich durch allgemeine Substitution von $\varphi_{\varepsilon r}$ für φ_r ohne irgend welche andere Abweichung auf den allgemeinen Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon$ ausdehnen lässt.

Durch Benutzung der aus (7.) folgenden Gleichung

$$\mathfrak{N}_{k,n} = 1 + \overset{1}{\alpha}_{k,n}\, x + \overset{2}{\alpha}_{k,n}\, x^2 + \cdots + \overset{\vartheta}{\alpha}_{k,n}\, x^\vartheta,$$

in welcher

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left[n - k + 1 + \cos\frac{1}{2}(n-k)\pi^2 \right]$$

gesetzt wurde, findet man zunächst:

$$\frac{\mathfrak{N}_{k,n}^{(r)}(0)}{r!} = \overset{r}{\alpha}_{k,n},\ \nu_r = \overset{r}{\alpha}_{2,n},\ \mu_r = \overset{r}{\alpha}_{1,n}.$$

Daher aus (20.):

$$\overset{r}{\alpha}_{2,n} = \overset{r}{\alpha}_{1,n}\,\varphi_0 + \overset{r-1}{\alpha}_{1,n}\,\varphi_1 + \overset{r-2}{\alpha}_{1,n}\,\varphi_2 + \cdots + \overset{1}{\alpha}_{1,n}\,\varphi_{r-1} + \overset{0}{\alpha}_{1,n}\,\varphi_r.$$

Nach §. 11. hängt aber φ_r nicht von den Grössen $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$ ab, weshalb man für die letzteren 0, also für $\overset{m}{\alpha}_{2,n}$ und $\overset{m}{\alpha}_{1,n}$ beziehungsweise $\overset{m}{\alpha}_{2,r}$ und $\overset{m}{\alpha}_{1,r}$ setzen darf. Daher ist:

$$\overset{r}{\alpha}_{2,r} = \overset{r}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_0 + \overset{r-1}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_1 + \overset{r-2}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_2 + \cdots + \overset{1}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_{r-1} + \overset{0}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_r.$$

In dieser Gleichung verschwinden noch alle Glieder, in welchen der obere Index m von $\overset{m}{\alpha}_{1,r}$ grösser ist als $\frac{1}{2}\left(r + \sin\frac{1}{2}\,r\pi^2\right)$, und ausserdem die linke Seite für jedes $r > 0$. Hieraus folgt:

Die Coefficienten der Reihe

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 + \varphi_1\,x + \varphi_2\,x^2 + \varphi_3\,x^3 + \cdots,$$

durch welche der Kettenbruch

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 : \left|\, 1 + \alpha_1\,x : \right|\, 1 + \alpha_2\,x : \left|\, 1 + \cdots + \alpha_n\,x : \right|\, 1$$

innerhalb gewisser Grenzen dargestellt werden kann [§. 10.], lassen sich durch jede der Formeln

$$0 = \overset{\vartheta}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_{r-\vartheta} + \overset{\vartheta-1}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_{r-\vartheta+1} + \cdots + \overset{1}{\alpha}_{1,r}\,\varphi_{r-1} + \varphi_r, \tag{23.}$$

$$\varphi_r = (-1)^r\,\alpha_1\,.\,\begin{vmatrix}
\overset{1}{\alpha}_{1,2} & 1 & & & & & & & \\
\overset{2}{\alpha}_{1,3} & \overset{1}{\alpha}_{1,3} & 1 & & & & & & \\
 & \overset{2}{\alpha}_{1,4} & \overset{1}{\alpha}_{1,4} & 1 & & & & & \\
 & \overset{3}{\alpha}_{1,5} & \overset{2}{\alpha}_{1,5} & \overset{1}{\alpha}_{1,5} & 1 & & & & \\
 & & \overset{3}{\alpha}_{1,6} & \overset{2}{\alpha}_{1,6} & \overset{1}{\alpha}_{1,6} & 1 & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & \overset{\vartheta}{\alpha}_{1,r} & \overset{\vartheta-1}{\alpha}_{1,r} & \cdot & \cdot & \overset{1}{\alpha}_{1,r}
\end{vmatrix}$$

berechnen, wobei ϑ den Werth

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(r + \sin\frac{1}{2}\,r\,\pi^2\right)$$

hat.

§. 15.

Die zu Ende des vorigen §. für φ_r aufgestellte Determinante scheint allerdings die einfachste Form zu sein, durch welche φ_r bloss mittelst der Grössen $\overset{k}{\alpha}_{1,m}$ ausgedrückt werden kann. Wenn man aber die einfachste Darstellung von φ_r durch die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ selbst verlangt, so genügt die Determinante dieser Anforderung nicht, da sich gewisse Complexionen jener gegenseitig aufheben — wovon man sich leicht schon durch die Berechnung von φ_3 überzeugen kann.

Um daher die überflüssigen Complexionen der α_m aus φ_r fortzuschaffen; schreiben wir die Determinante in folgender Weise:

$$\varphi_r = (-1)^r . \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & & \\ & \overset{1}{\alpha}_{1,2} & 1 & & & \\ & \overset{2}{\alpha}_{1,3} & \overset{1}{\alpha}_{1,3} & 1 & & \\ & & \overset{2}{\alpha}_{1,4} & \overset{1}{\alpha}_{1,4} & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \overset{1}{\alpha}_{1,r} \end{vmatrix},$$

subtrahiren die mit α_2 multiplicirte erste Zeile von der zweiten, darauf die mit α_3 multiplicirte zweite Zeile von der dritten, ferner die mit α_4 multiplicirte dritte Zeile von der vierten, u. s. w., wobei immer die Formel (14.) und die im vorigen §. über das Verschwinden von $\overset{k}{\alpha}_{1,m}$ gemachte Bemerkung benutzt wird.

Hierdurch erhält man:

$$\varphi_r = (-1)^r . \begin{vmatrix} +\alpha_1 & 1 & & & & & & \\ -\alpha_1\,\alpha_2 & \alpha_1 & 1 & & & & & \\ +\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 & & \overset{1}{\alpha}_{1,2} & 1 & & & & \\ -\alpha_1\,\alpha_2 \cdot\cdot\, \alpha_4 & & \overset{2}{\alpha}_{1,3} & \overset{1}{\alpha}_{1,3} & 1 & & & \\ +\alpha_1\,\alpha_2 \cdot\cdot\, \alpha_5 & & & \overset{2}{\alpha}_{1,4} & \overset{1}{\alpha}_{1,4} & 1 & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ (-1)^{r-1}\,\alpha_1\,\alpha_2 \cdot\cdot\, \alpha_r & & & & \overset{\vartheta'}{\alpha}_{1,r-1} & \overset{\vartheta'-1}{\alpha}_{1,r-1} & \cdot & \overset{1}{\alpha}_{1,r-1} \end{vmatrix},$$

wo

$$\vartheta' = \frac{1}{2}\left(r - \sin\frac{1}{2}\,r\pi^2\right) = r - \vartheta,\ \vartheta + \vartheta' = r$$

gesetzt ist.

Entwickelt man diese Determinante nach den Elementen der letzten Zeile, so entsteht die Relation

$$(24.)\quad (-1)^r\,\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_r = \overset{\vartheta'}{\alpha}_{1,r-1}\,\varphi_\vartheta + \overset{\vartheta'-1}{\alpha}_{1,r-1}\,\varphi_{\vartheta+1} + \cdots + \overset{1}{\alpha}_{1,r-1}\,\varphi_{r-1} + \varphi_r,$$

welche in so fern merkwürdig ist, da sie die Grösse α_r nur als Factor der linken Seite enthält und wegen dieser Eigenthümlichkeit ziemlich bequem zur recurrirenden Berechnung der α aus den φ benutzt werden kann.*)

Subtrahirt man in der letzten Determinante die mit α_1 multiplicirte erste Zeile von der zweiten, dann die mit α_2 multiplicirte zweite Zeile von der dritten, u. s. w., so findet man ferner:

---

*) Will man dieselbe Formel ohne Vermittelung der Determinante ableiten, so benutzt man am bequemsten den Satz §. 10., nach welchem

$$\frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,r-1}(0)}{r!} = \varphi_r - (-1)^r\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_r,\quad \frac{\overset{(s)}{\mathfrak{F}}_{1,r-1}(0)}{s!} = \varphi_s \quad (s < r)$$

ist. Setzt man daher in (23.) $\alpha_r = 0$, so wird:

$$0 = \overset{\vartheta}{\alpha}_{1,r-1}\,\varphi_{r-\vartheta} + \overset{\vartheta-1}{\alpha}_{1,r-1}\,\varphi_{r-\vartheta+1} + \cdots + \overset{1}{\alpha}_{1,r-1}\,\varphi_1 + \frac{\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,r-1}(0)}{r!};$$

dieses giebt nach Benutzung des für das letzte Glied ermittelten Werthes und der Bemerkung über das Verschwinden von $\overset{\vartheta}{\alpha}_{1,r-1}$ die in Rede stehende Formel.

$$\varphi_r = (-1)^r \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & & & & & \\ -\alpha_1\,\alpha^{1}_{1,2} & & 1 & & & & & & \\ +\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha^{1}_{1,3} & & \alpha_1 & 1 & & & & & \\ -\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha^{1}_{1,4} & & & \alpha^{1}_{1,2} & 1 & & & & \\ +\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_4\,\alpha^{1}_{1,5} & & & \alpha^{2}_{1,3} & \alpha^{1}_{1,3} & 1 & & & \\ -\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_5\,\alpha^{1}_{1,6} & & & & \alpha^{2}_{1,4} & \alpha^{1}_{1,4} & 1 & & \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{r-1}\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha^{r-1}\,\alpha^{1}_{1,r} & & & & & \alpha^{\vartheta-1}_{1,r-2} & \alpha^{\vartheta-2}_{1,r-2} & \cdot & \alpha^{1}_{1,r-2} \end{vmatrix}.$$

Fährt man fort, die Determinante zu verwandeln, indem man jetzt die beiden ersten Zeilen unverändert lässt, aber die mit α_1 multiplicirte zweite Zeile von der dritten subtrahirt, u. s. w., so erhält man eine neue Determinante mit veränderter erster Columne, während die zweite Columne unverändert bleibt, die dritte, vierte, fünfte, ... Columne aber die je um eine Zeile tiefer gerückten Elemente der zweiten, dritten, vierten, ... Columne obiger Determinante erhalten. Durch mehrmalige Wiederholung einer ähnlichen Operation, bei welcher man jedes Mal die ausser der ersten Columne nur noch eine 1 enthaltenden Zeilen unverändert lässt, gelingt es daher, sämtliche ausserhalb der ersten Columne stehenden, von 1 verschiedenen Elemente zu eliminiren, gewissermassen entlang der Diagonale hinaus zu schieben; so dass das Endresultat aller dieser Operationen folgendes ist:

$$\varphi_r = (-1)^r \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & & & \\ -\alpha_1\,(\alpha)^{1}_{1,2} & & 1 & & & & \\ +\alpha_1\,(\alpha)^{2}_{1,3} & & & 1 & & & \\ -\alpha_1\,(\alpha)^{3}_{1,4} & & & & 1 & & \\ \cdot & & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ (-1)^{r-2}\,\alpha_1\,(\alpha)^{r-2}_{1,r-1} & & & & & & 1 \\ (-1)^{r-1}\,\alpha_1\,(\alpha)^{r-1}_{1,r} & & & & & & \end{vmatrix}$$

oder:

$$\varphi_r = (-1)^r\,\alpha_1\,(\alpha)^{r-1}_{1,r}. \tag{25.}$$

Das Bildungsgesetz der hier durch eingeklammerte α mit Indices bezeichneten Grössen wird durch die folgenden Formeln ausgedrückt:

$$\left\{ \begin{aligned} (\alpha)^{1}_{k,n} &= \alpha^{1}_{k,n} = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots + \alpha_n \\ (\alpha)^{r+1}_{k,n} &= \alpha_k\,(\alpha)^{r}_{k,k+r} + \alpha_{k+1}\,(\alpha)^{r}_{k,k+r+1} + \cdots + \alpha_{n-r}\,(\alpha)^{r}_{k,n}. \end{aligned} \right. \tag{26.}$$

$(\alpha)^{r}_{k,n}$ bezeichnet also eben so, wie $\alpha^{r}_{k,n}$, eine Summe von Producten der r^{ten} Dimension, deren Factoren nur aus den Grössen $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ genommen werden; jedoch findet der wesentliche Unterschied Statt, dass $(\alpha)^{r}_{k,n}$ Potenzen der α_r und Producte aus den auf einander folgenden Gliedern ihrer Reihe enthält.

Da wir hier keine Veranlassung haben, uns mit den $(\alpha)^{r}_{k,n}$ näher zu beschäftigen, so möge diese Bemerkung genügen. Aus der Natur ihres Bildungsgesetzes in Verbindung mit Gl. (25.) erkennt man aber sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ sämtlich reelle und mit einerlei Vorzeichen versehene Grössen sind, so verschwindet kein Coefficient der Reihe

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \varphi_3 x^3 + \cdots$$

oder, was dasselbe ist, keiner der Differentialquotienten $\overset{(r)}{\mathfrak{F}}_{1,n}(0)$. — Sind die α_r sämtlich positiv, so hat φ_r mit $(-1)^r$ einerlei Vorzeichen; sind aber die α_r sämtlich negativ, so haben die φ_r sämtlich das positive Vorzeichen.

§. 16.

Durch eine von der im vorigen §. angewandten etwas verschiedene Behandlungsweise der dort zum Ausgangpunkte genommenen Determinante gelangt man u. A. zu der orthosymmetrischen Determinante:

$$\varphi_r = (-1)^r \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & & & \\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1 & 1 & & \\ +\alpha_1\alpha_2(\alpha)^1_{2,3} & -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \\ -\alpha_1\alpha_2(\alpha)^2_{2,4} & +\alpha_1\alpha_2(\alpha)^1_{2,3} & -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ (-1)^{r-1}\alpha_1\alpha_2(\alpha)^{r-2}_{2,r} & (-1)^{r-2}\alpha_1\alpha_2(\alpha)^{r-3}_{2,r-1} & (-1)^{r-3}\alpha_1\alpha_2(\alpha)^{r-4}_{2,r-2} & \cdot & \cdot \quad \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Ihre Ableitung gelingt ohne Schwierigkeit, wenn man, von der zweiten Determinante des §. 15. ausgehend, jede Transformation damit beginnt, dass man von der $\alpha^1_{1,2}$ enthaltenden Zeile die mit α_2 multiplicirte vorhergehende Zeile subtrahirt.

Wir erwähnen dieser Determinante vor einer grösseren Anzahl interessanter orthosymmetrischer Ausdrücke, weil die in der ersten Columne stehenden Grössen mit den Coefficienten der Reihe

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_{1,n}(x)} = 1 + \chi_1 x + \chi_2 x^2 + \chi_3 x^3 + \cdots$$

identisch sind, welche von $x = 0$ bis zu der kleinsten Wurzel der Gleichung $\mathfrak{N}_{2,n}(x) = 0$ convergirt.

Der Beweis für diese Behauptung lässt sich in gleicher Kürze auf mehrfache Weise führen.

Geht man von Entwickelung obiger Determinante nach den in der ersten Columne stehenden Elementen aus, so findet man zunächst:

$$(27.)\quad \varphi_r = -\alpha_1\varphi_{r-1} + \alpha_1\alpha_2\varphi_{r-2} - \alpha_1\alpha_2(\alpha)^1_{2,3}\varphi_{r-3} + \alpha_1\alpha_2(\alpha)^2_{2,4}\varphi_{r-4} - \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots - (-1)^r\alpha_1\alpha_2(\alpha)^{r-3}_{2,r-1}\varphi_1 + (-1)^r\alpha_1\alpha_2(\alpha)^{r-2}_{2,r}$$

und hieraus auf bekannte Weise, indem man die von den φ der rechten Seite verschiedenen Grössen als Unbekannte ansieht:

$$\alpha_1\alpha_2(\alpha)^{r-2}_{2,r} = -\begin{vmatrix} \varphi_1 & 1 & & & & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & 1 & & & \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{r-1} & \varphi_{r-2} & \varphi_{r-3} & \varphi_{r-4} & \cdot\ \cdot & 1 \\ \varphi_r & \varphi_{r-1} & \varphi_{r-2} & \varphi_{r-3} & \cdot\ \cdot & \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

eine Gleichung, welche man nach der zu Ende des §. 12. über die Vertauschung der φ mit den μ gemachten Bemerkung auch sofort aus der oben für φ_r angegebenen Determinante hätte niederschreiben können.

Bekanntlich ist aber (vergl. §. 12.):

$$\chi_r = (-1)^r \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & 1 & & & \\ \varphi_2 & \varphi_1 & 1 & & \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_r & \varphi_{r-1} & \varphi_{r-2} & \cdot & \varphi_1 \end{vmatrix},$$

also:

$$(28.) \quad \begin{cases} \chi_r = (-1)^{r-1} \alpha_1 \, \alpha_2 \, (\alpha)_{2,r}^{r-2}, \\ \chi_1 = \alpha_1, \\ \chi_2 = -\alpha_1 \, \alpha_2; \end{cases}$$

wie behauptet wurde.

Ein anderer, eben so bequemer Beweis ergiebt sich durch die Bemerkung, dass

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_{1,n}(x)} = 1 + \alpha_1 x \cdot [1 : | 1 + \alpha_2 x : | 1 + \alpha_3 x : | 1 + \cdots + \alpha_n x : | 1]$$

ist, und durch Anwendung der Formel (25.) auf diesen Kettenbruch.

IV. Ueber die Wurzeln der monodromen und monogenen Functionen.

§. 17.

Bevor wir uns zu den unendlichen monodromen und monogenen Kettenbrüchen wenden, scheint es nöthig, einige Bemerkungen über die Wurzeln der monodromen und monogenen Functionen im Allgemeinen voraus zu schicken. Es werde deshalb zunächst der folgende Satz bewiesen:

Lehrsatz. Wenn die Function $f(x)$ für $x = a$ nicht verschwindet, von $x = a$ bis zu der diesem Werthe zunächst liegenden Wurzel x_1 der Gleichung $f(x) = 0$, also in dem Intervall

$$0 \gtreqless mod.\,(x - a) \leq mod.\,(x_1 - a),$$

monodrom und monogen ist, die Wurzel x_1 nur einmal und keine andere Wurzel x_2 von der Beschaffenheit $mod.\,(x_2 - a) = mod.\,(x_1 - a)$ besitzt, so verschwindet von einer gewissen Stelle an kein Glied der Reihenentwickelung

$$\frac{1}{f(x)} = \chi_0 + \chi_1 (x - a) + \chi_2 (x - a)^2 + \chi_3 (x - a)^3 + \cdots,$$

das Product $\chi_r (x_1 - a)^r$ nähert sich bei wachsendem r einer endlichen bestimmten Grenze,

$$\lim_{r = \infty} \chi_r (x_1 - a)^r = -\frac{1}{(x_1 - a) f'(x_1)},$$

und die Wurzel x_1 kann durch die Formel

$$x_1 - a = \underset{r=\infty}{Lim.} \frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}$$

berechnet werden.

Beweis. Setzt man

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) f_1(x),$$

so ist bekanntlich*) $f_1(x)$ ebenfalls eine in derselben Ausdehnung, wie $f(x)$, monodrome und monogene Function, welche sich von $f(x)$ nur dadurch unterscheidet, dass sie nicht mehr die Wurzel x_1 hat; so dass die Reihe

$$\frac{1}{f_1(x)} = \psi_0 + \psi_1(x-a) + \psi_2(x-a)^2 + \psi_3(x-a)^3 + \cdots$$

auch noch für $mod.\,(x-a) = mod.\,(x_1 - a)$ convergirt. Multiplicirt man die letztere mit der für $mod.\,(x-a) < mod.\,(x_1-a)$ convergirenden Reihe

$$\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}} = \frac{x_1}{x_1-a}\left\{1 - \frac{x-a}{x_1-a}\right\}^{-1} = \frac{x_1}{x_1-a}\left\{1 + \frac{x-a}{x_1-a} + \frac{(x-a)^2}{(x_1-a)^2} + \cdots\right\},$$

so sind die Coefficienten der Potenzen von $(x-a)$ in der so erhaltenen Reihe identisch mit den entsprechenden Coefficienten der Reihe

$$\frac{1}{f(x)} = \chi_0 + \chi_1(x-a) + \chi_2(x-a)^2 + \chi_3(x-a)^3 + \cdots\cdots;$$
$$\{0 \leqq mod.\,(x-a) < mod.\,(x_1-a)\}$$

mithin:

$$\chi_r = \frac{x_1}{x_1-a}\cdot\left\{\frac{\psi_0}{(x_1-a)^r} + \frac{\psi_1}{(x_1-a)^{r-1}} + \cdots + \frac{\psi_r}{(x_1-a)^0}\right\},$$

$$\chi_r(x_1-a)^r = \frac{x_1}{x_1-a}\cdot\left\{\psi_0 + \psi_1(x_1-a) + \psi_2(x_1-a)^2 + \cdots + \psi_r(x_1-a)^r\right\}$$
$$= \frac{x_1}{x_1-a}\cdot\left\{\frac{1}{f_1(x_1)} - \omega\right\},$$

wo, wie man sich aus dem Obigen leicht überzeugt, ω eine bei wachsendem r allmählich verschwindende Grösse bezeichnet.

Da ferner $f_1(x_1)$ eine von Null verschiedene, endliche bestimmte Grösse ist, und Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{x_1}{(x_1-a)\,f_1(x)} = \frac{x_1\left(1-\frac{x}{x_1}\right)}{(x_1-a)\,f(x)} = \frac{x_1-x}{(x_1-a)\,f(x)}$$

bei der Annäherung von x an x_1 in unendlich kleine Grössen des ersten Grades übergehen, so folgt auf bekannte Weise die Richtigkeit dessen, was in dem Lehrsatze über χ_r und $\underset{r=\infty}{Lim.}\,\chi_r(x_1-a)^r$ behauptet wurde.

---

*) U. A.: Briot et Bouquet. Théorie des fonctions doublement périodiques. §. 35. Paris. 1859.

Aus der nunmehr verificirten Gleichung

$$\underset{r=\infty}{Lim.}\ \chi_{r+1}(x_1-a)^{r+1} = \underset{r=\infty}{Lim.}\ \chi_r(x_1-a)^r$$

ergiebt sich endlich

$$x_1-a = \underset{r=\infty}{Lim.}\ \frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}.$$

§. 18.

Der im letzten §. bewiesene Satz lässt sich auf folgende Weise erweitern:

Lehrsatz. Wenn die Function $f(x)$ für $x=a$ nicht verschwindet, von $x=a$ bis zu der diesem Werthe zunächst liegenden Wurzel x_1 der Gleichung $f(x)=0$, also in dem Intervall

$$0 < mod.\,(x-a) \leq mod.\,(x_1-a)$$

monodrom und monogen ist, die Wurzel x_1 als eine n-fache, aber keine andere Wurzel x_2 von der Beschaffenheit $mod.\,(x_2-a) = mod.\,(x_1-a)$ besitzt, so verschwindet von einer gewissen Stelle an kein Glied der Reihenentwickelung

$$\frac{1}{f(x)} = \chi_0 + \chi_1(x-a) + \chi_2(x-a)^2 + \chi_3(x-a)^3 + \cdots;$$

es ist

$$\underset{r=\infty}{Lim.}\ \frac{\chi_r(x_1-a)^r}{\binom{n+r-1}{n-1}}$$

$$= \underset{r=\infty}{Lim.}\left\{\chi_r(x_1-a)^r - \binom{n-1}{1}\chi_{r-1}(x_1-a)^{r-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\chi_{r-n+1}(x_1-a)^{r-n+1}\right\}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x_1-a)^n f^{(n)}(x_1)}$$

eine von Null verschiedene, endliche bestimmte Grösse, und

$$x_1-a = \underset{r-\infty}{Lim.}\ \frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}.$$

Beweis. Setzt man

$$f(x) = \left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{n-1} f_1(x),\quad \frac{1}{f_1(x)} = \left(\frac{x_1-a}{x_1}\right)^{n-1}\cdot\frac{\left(1-\frac{x-a}{x_1-a}\right)^{n-1}}{f(x)},$$

so findet man, indem ψ_r die im vorigen §. angegebene Bedeutung behält:

$$\psi_r(x_1-a)^r = \left(\frac{x_1-a}{x_1}\right)^{n-1}\cdot\left\{(-1)^r\binom{n-1}{r}\chi_0(x_1-a)^0 + (-1)^{r-1}\binom{n-1}{r-1}\chi_1(x_1-a)^1 + \cdots\right.$$

$$\left. + (-1)^0\binom{n-1}{0}\chi_r(x_1-a)^r\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{x_1-a}{x_1}\right)^{n-1}\cdot\chi_r(x_1-a)^r=(-1)^r.\begin{vmatrix} \psi_0(x_1-a)^0 & 1 & & & \\ \psi_1(x_1-a)^1 & -\binom{n-1}{1} & 1 & & \\ \psi_2(x_1-a)^2 & +\binom{n-1}{2} & -\binom{n-1}{1} & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \psi_r(x_1-a)^r & (-1)^r\binom{n-1}{r} & (-1)^{r-1}\binom{n-1}{r-1} & \cdot & -\binom{n-1}{1} \end{vmatrix}.$$

Addirt man in dieser Determinante zu jeder Zeile alle vorhergehenden und verfährt im Ganzen $(n-1)$mal auf dieselbe Weise, so erhält man eine Determinante, in welcher alle hier durch Binomialcoefficienten ausgefüllten Stellen eine Null enthalten. Macht man dann noch die letzte Zeile zur ersten, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{x_1-a}{x_1}\right)^{n-1}\cdot\chi_r(x_1-a)^r=\binom{n+r-2}{n-2}\psi_0(x_1-a)^0+\binom{n+r-3}{n-2}\psi_1(x_1-a)^1+\cdots$$
$$+\binom{n-2}{n-2}\psi_r(x_1-a)^r.$$

Da $f_1(x)$ die Wurzel x_1 nur einmal besitzt, so nähert sich $\psi_r(x_1-a)^r$ bei wachsendem r einer endlichen Grenze Ψ [§. 17.], m. a. W.; wenn man $\psi_r(x_1-a)^r=\Psi+\omega_r$ setzt, so ist $Lim.\ \omega_r=0$. Substituirt man aber diesen Werth, so wird:

$$\left(\frac{x_1-a}{x_1}\right)^{n-1}\cdot\chi_r(x_1-a)^r=\binom{n+r-1}{n-1}\Psi+\binom{n+r-2}{n-2}\omega_0+\binom{n+r-3}{n-2}\omega_1+\cdots+\binom{n-2}{n-2}\omega_r,$$

$$\left(\frac{x_1-a}{x_1}\right)^{n-1}\cdot\frac{\chi_r(x_1-a)^r}{\binom{n+r-1}{n-1}}=\Psi+\frac{\binom{n+r-2}{n-2}\omega_0+\binom{n+r-3}{n-2}\omega_1+\cdots+\binom{n-2}{n-2}\omega_r}{\binom{n+r-2}{n-2}+\binom{n+r-3}{n-2}+\cdots+\binom{n-2}{n-2}}.$$

Da der auf der rechten Seite der letzten Gleichung zu Ψ addirte Bruch sich bei wachsendem r der Null als Grenze nähert, so folgt:

$$\underset{r=\infty}{Lim.}\ \frac{\chi_r(x_1-a)^r}{\binom{n+r-1}{n-1}}=(n-1)!\ \underset{r=\infty}{Lim.}\ \frac{\chi_r(x_1-a)^r}{r^{n-1}}=\left(\frac{x_1}{x_1-a}\right)^{n-1}\Psi$$

d. i. wegen der Bedeutung von Ψ und §. 17.:

$$=\underset{x=x_1}{Lim.}\left(\frac{x_1}{x_1-a}\right)^n\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^n}{f(x)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x_1-a)^n f^{(n)}(x_1)}.$$

Dass

$$x_1-a=\underset{r=\infty}{Lim.}\ \frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}$$

ist, ergiebt sich jetzt ohne Schwierigkeit.

§. 19.

Um diese Untersuchung über die Wurzeln der synectischen Functionen, oder, wenn man will, über das Verhalten des Quotienten $\frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}$, nicht weiter auszudehnen, als wir hier ihrer Resultate bedürfen, wollen wir nur noch den Fall betrachten, dass $f(x)$ zwei Wurzeln x_1, x_2 besitzt, welche der Gleichung $mod.\,(x_1 - a) = mod.\,(x_2 - a)$ genügen, und den folgenden Satz beweisen.

Lehrsatz. Wenn die Function $f(x)$ zwei Wurzeln x_1, x_2 von der Beschaffenheit

$$mod.\,(x_1 - a) = mod.\,(x_2 - a)$$

besitzt und von $x = a$ bis zu diesen Wurzeln nicht verschwindet, monodrom und monogen ist, so nähert sich der aus den Coefficienten der Reihe

$$\frac{1}{f(x)} = \chi_0 + \chi_1 (x-a) + \chi_2 (x-a)^2 + \chi_3 (x-a)^3 + \dots$$

gebildete Quotient

$$\frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}$$

bei wachsendem r keiner Grenze, sondern oscillirt.

Beweis. Setzt man wieder

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) f_1(x),$$

so oscillirt die in der Klammer auf der rechten Seite der Relation

$$\chi_r (x_1 - a)^r = \frac{x_1}{x_1 - a} \cdot \{\psi_0 + \psi_1 (x_1 - a) + \psi_2 (x_1 - a)^2 + \dots + \psi_r (x_1 - a)^r\}$$

stehende Reihe bei wachsendem r. Man überzeugt sich hiervon sehr leicht mit Hülfe des in §. 16. bewiesenen Satzes. Denn da x_2 nur eine einfache Wurzel der Gleichung $f_1(x) = 0$ ist, so nähert sich $\psi_r (x_2 - a)^r$ einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze A, weshalb

$$\psi_r (x_1 - a)^r = (A + \omega)\, e^{r\vartheta i}$$

gesetzt werden kann, wo ω eine für $r = \infty$ verschwindende und ϑ eine reelle, von $2k\pi$ verschiedene Grösse bezeichnet.

Deshalb oscillirt ferner nicht nur $\chi_r (x_1 - a)^r$, sondern auch

$$\frac{\chi_r (x_1 - a)^r}{\chi_{r+1} (x_1 - a)_{r+1}} = \frac{\chi_r}{\chi_{r+1}} \cdot \frac{1}{(x_1 - a)}$$

und, weil $(x_1 - a)$ eine bestimmte Grösse ist, $\frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}$ bei wachsendem r.

§. 20.

Dass diese Sätze, wenn man in ihnen $\frac{1}{f(x)}$ für $f(x)$ schreibt, in ganz analoge Sätze über die Wurzeln übergehen, für welche $f(x) = \infty$ wird, ist einleuchtend. Auch braucht wohl kaum erst erwähnt zu werden, dass sie benutzt werden können, um jede Wurzel von monodromen und monogenen Functionen beliebig genau zu berechnen und zugleich zu beurtheilen, eine wievielfache dieselbe ist. Man bedarf, wie wir uns überzeugt haben, dazu nur der Taylor'schen Reihe und gemeiner Division. — Das Vorkommen des Falles, welcher im letzten §. besprochen wurde, lässt sich durch geeignete

Wahl des Werthes von a nehmlich immer vermeiden, da sie keiner andern Beschränkung unterworfen ist, als dass a nicht selbst eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sei. Was die Umkehrung dieser Sätze betrifft, so überzeugt man sich leicht, dass dieselbe keineswegs allgemein geschehen kann, da die Taylor'sche Reihe nicht nur dort zu convergiren aufhört, wo die erzeugende Function unendlich wird, sondern auch, wo diese nicht mehr monodrom oder monogen bleibt. Die sich auf dieses Verhalten beziehenden Betrachtungen würden uns aber hier zu weit führen.

V. Unendliche monodrome und monogene Kettenbrüche.

§. 20.

Wie wir in einem früheren Abschnitt gesehen haben, kann man jeden endlichen Kettenbruch, dessen Theilzähler Potenzen von x als Factoren enthalten, in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, welche in der Nähe von $x = 0$ convergirt; und wir haben auch die Mittel erlangt, um die Coefficienten dieser Reihe aus den Theilzählern zu berechnen. Wenn es nun gelingt, Kennzeichen aufzufinden, an welchen die Identität eines unendlichen Kettenbruchs mit einer solchen Reihe beurtheilt werden kann, so wird dadurch nicht nur seine Convergenz, sondern auch die Eigenschaft nachgewiesen sein, dass er eine in der Nähe von $x = 0$ synectische Function darstellt. Auch wird sich dann beurtheilen lassen, bis zu welcher Grenze dieses sicher geschieht, jedoch keineswegs damit unter allen Umständen ausgemacht sein, dass die Convergenz des Kettenbruchs mit derjenigen der Reihe aufhöre. — Wir werden unten mehrmals Gelegenheit haben, das Gegentheil nachzuweisen, zumal, wo der Kettenbruch noch über jene Grenze hinaus monodrom und monogen bleibt.

Es möge noch gestattet sein, im Voraus darauf aufmerksam zu machen, dass der Kettenbruch mit lauter gleichen Theilzählern in Bezug auf die synectischen Kettenbrüche eine ähnliche Rolle spielt, wie die geometrische Reihe in Bezug auf die synectischen Reihen.

§. 21.

Lehrsatz. Der unendliche Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{1 + \alpha x : \{1 + \alpha x : \{1 + \alpha x : \{1 + \cdots\cdot$$

ist eine in dem Intervall

$$0 \leqq mod.\ x \leq mod.\ \frac{1}{4\alpha}$$

synectische Function von x, und sein Werth in dieser Ausdehnung identisch mit dem Werthe der innerhalb derselben Grenzen convergirenden Reihe

$$1 - \alpha x + \alpha\,(\alpha)^{1}_{1,2}\, x^2 - \alpha\,(\alpha)^{2}_{1,3}\, x^3 + \alpha\,(\alpha)^{3}_{1,4}\, x^4 - \cdots\cdot$$

Er convergirt aber auch ausserdem noch für jedes x mit Ausnahme derjenigen, für welche $1 + 4\alpha x$ eine reelle negative Zahl wird; und zwar jederzeit zu dem Werthe

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha x}}{2\alpha x}.$$

Beweis. Setzt man

$$f(y) = \frac{1}{1 - y - \alpha x y^2},$$

so ist $f(y)$ offenbar eine von $y = 0$ bis zu der kleinsten Wurzel der Gleichung $1 - y - \alpha x y^2 = 0$ synectische Function von y und kann folglich in eine nach den pos. ganzen Potenzen von y fortschreitende, in diesem Intervall convergirende Reihe entwickelt werden:

$$f(y) = \chi_0 + \chi_1 y + \chi_2 y^2 + \chi_3 y^3 + \cdots\cdots.$$

Wenn nun die beiden Wurzeln der Gleichung $1 - y - \alpha x y^2 = 0$ nicht gleiche Moduln bei verschiedenem Argument haben, so nähert sich der Quotient $\frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}$ nach den im letzten Abschnitt bewiesenen Sätzen einer endlichen Grenze, welche mit der kleinsten Wurzel jener Gleichung übereinstimmt:

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha x}}{2\alpha x} = \underset{r=\infty}{Lim.} \frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}.$$

Die Moduln der beiden Wurzeln

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha x}}{2\alpha x}$$

sind aber immer von einander verschieden, wenn nicht $1 + 4\alpha x$ eine reelle negative Zahl oder Null ist, welcher letztere Fall wegen Gleichheit beider Wurzeln nach §. 18. die Gleichung

$$y_1 = \underset{r=\infty}{Lim.} \frac{\chi_r}{\chi_{r+1}}$$

bestehen lässt.

Benutzt man jetzt die zu Ende des §. 16. für χ_r gegebene Determinante und beachtet, dass hier $1 - y - \alpha x y^2 = 1 + \varphi_1 y + \varphi_2 y^2$, also $\varphi_1 = -1$, $\varphi_2 = -\alpha x$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \cdots = 0$ gesetzt werden muss, so folgt [vergl. d. Anm. zu §. 2.]:

$$\chi_r = (-1)^r . \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & & & & \\ -\alpha x & -1 & 1 & & & \\ & -\alpha x & -1 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -\alpha x & -1 & 1 \\ & & & & -\alpha x & -1 \end{vmatrix}}_{(r \text{ Zeilen})} = (-1)^r \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & & \\ +\alpha x & -1 & -1 & & & \\ & +\alpha x & -1 & -1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & +\alpha x & -1 & -1 \\ & & & & +\alpha x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -\alpha x & 1 & 1 & & & \\ & -\alpha x & 1 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -\alpha x & 1 & 1 \\ & & & & -\alpha x & 1 \end{vmatrix}}_{(r \text{ Zeilen})} = \mathfrak{N}_{1,r-1}(x) = \mathfrak{N}_{2,r}(x); \text{ [vergl. (5.)]}$$

also in Verbindung mit (2.) [§. 1.]:

$$y_1 = \underset{r=\infty}{Lim.} \frac{\mathfrak{N}_{2,r}(x)}{\mathfrak{N}_{1,r}(x)} = \mathfrak{F}(x).$$

Hiermit ist Alles bewiesen, was über die Convergenz des Kettenbruchs $f(x)$ behauptet wurde. Dass er von $x = 0$ bis $mod.\ (4\alpha x) = 1$ eine synectische Function sei, wird ohne Mühe aus seinem Werthe

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha x}}{2\alpha x}$$

erkannt, welcher erst bei der Wurzel der Gleichung $1 + 4\alpha x = 0$ monodrom zu sein aufhört. Wegen dieser Eigenschaft muss er sich aber auch in diesem Intervall durch eine nach den pos. ganzen Potenzen von x geordnete Reihe entwickeln lassen; und da dieses nur auf eine Weise geschehen kann, so ist (vergl. §. 16.):

$$\mathfrak{F}(x) = 1 - \alpha x + \alpha(\alpha)_{1,2}^{1} x^2 - \alpha(\alpha)_{1,3}^{2} x^3 + \cdots,$$

eine auch noch für $mod.\ x = mod.\ \frac{1}{4\alpha}$ convergirende Reihe, weil der Exponent der zu entwickelnden Binomialpotenz positiv ist.

§. 22.

Lehrsatz. Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{1 + \alpha_1 x : \{1 + \alpha_2 x : \{1 + \alpha_3 x : \{1 + \cdots$$

die Moduln der (reellen oder imaginären) Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ eine endliche Grösse α nicht übersteigen, so ist derselbe mindestens in dem Intervall

$$0 \overline{\gtrless} mod.\ x \leqq \frac{1}{4\alpha}$$

nicht nur convergent, sondern auch eine synectische Function von x.

Beweis. Nach den in Abschnitt III. ausgeführten Untersuchungen lässt sich der n^{te} Näherungsbruch

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 : \{1 + \alpha_1 x : \{1 + \alpha_2 x : \{1 + \cdots + \alpha_n x : \{1$$

in eine Reihe

$$\mathfrak{F}_{1,n}(x) = 1 - \alpha_1 x + \alpha_1 (\alpha)_{1,2}^{1} x^2 - \alpha_1 (\alpha)_{1,3}^{2} x^3 + \cdots$$

entwickeln, deren Coefficienten durch Addition und Multiplication aus den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ gebildet werden [§. 15. (25.), (26.)].*) Daher sind die Moduln dieser Coefficienten nicht grösser, als die Coefficienten, welche man erhält, wenn man die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ sämtlich durch α ersetzt; m. a. W.: die Moduln der Coefficienten unserer Reihe sind nicht grösser, als die Moduln der Reihe, in welche der unendliche Kettenbruch

$$1 : \{1 + \alpha x : \{1 + \alpha x : \{1 + \alpha x : \{1 + \cdots$$

entwickelt werden kann.

---

*) Es ist hierbei zu erinnern, dass, wenn $r > n$ ist, bei der Bildung von $(\alpha)_{1,r}^{r-1}$ für die Grössen $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \cdots, \alpha_r$ Null gesetzt werden muss.

Da nun die letztere in dem Intervall

$$0 \overline{\gtrless} \, mod.\, x \leqq \frac{1}{4\alpha}$$

convergirt, so gilt ein Gleiches für die Reihe, in welche wir $\mathfrak{F}_{1,n}(x)$ aufgelöst haben, und zwar für jedes noch so grosse n. Erwägt man endlich, dass nach §. 11. zwei auf einander folgende Näherungsbrüche $\mathfrak{F}_{1,n}(x)$ und $\mathfrak{F}_{1,n+1}(x)$ Reihen liefern, welche bis zum $(n+1)^{\underline{\text{ten}}}$ Gliede mit einander übereinstimmen, so erkennt man, da diese Reihen nach dem Obigen convergiren, dass die Differenz $\mathfrak{F}_{1,n}(x) - \mathfrak{F}_{1,n+1}(x)$ bei wachsendem n sich der Null als Grenze nähert.

Daher convergirt der Kettenbruch $\mathfrak{F}(x)$ in dem gedachten Intervall und ist wegen seiner Identität mit einer synectischen Reihe selbst synectisch.

Zusatz. Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x : \{ 1 + \alpha_2 x : \{ 1 + \alpha_3 x : \{ 1 + \cdots\cdots$$

die Moduln der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ eine endliche Grösse α nicht übersteigen, so liegt in dem Intervall

$$0 \overline{\gtrless} \, mod.\, x \leqq \frac{1}{4\alpha}$$

keine Wurzel der Gleichung

$$\mathfrak{N}_{k,r}(x) = 0,$$

welchen Werth man auch den Nummern k und r geben mag.

— Denn die Näherungsbrüche $\mathfrak{F}_{1,r}(x)$ sind synectisch; was auch gilt, wenn man die Nummern der α beliebig erhöht.

§. 23.

Lehrsatz. Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x : \{ 1 + \alpha_2 x : \{ 1 + \alpha_3 x : \{ 1 + \cdots\cdots$$

die Moduln der durch α_r bezeichneten Grössen einen endlichen Werth α nicht mehr übersteigen, nachdem r grösser als eine gewisse endliche Zahl geworden, so ist der Kettenbruch mindestens in dem Intervall

$$0 \overline{\gtrless} \, mod.\, x \leqq \frac{1}{4\alpha}$$

eine monodrome und monogene Function von x: — er kann innerhalb desselben nicht oscilliren, wohl aber bei gewissen Werthen des x (den Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{F}(x) = \infty$) divergiren.

Beweis. Sei r die Nummer, von welcher an die Moduln der α_r nicht grösser als α werden, so ist nach dem vorhergehenden Lehrsatz

$$\mathfrak{F}_{r+1}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_{r+1} x : \{ 1 + \alpha_{r+2} x : \{ 1 + \cdots$$

eine in dem Intervall

$$0 \overline{\gtrless} \, mod.\, x \leqq \frac{1}{4\alpha}$$

synectische Function von x. Da man nun

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x : \{ 1 + \cdots + \alpha_{r-1} x : \{ 1 + \alpha_r x \mathfrak{F}_{r+1}(x) : \{ 1$$
$$= \frac{\mathfrak{N}_{2,r-1}(x) + \alpha_r x \mathfrak{F}_{r+1}(x) . \mathfrak{N}_{2,r-2}(x)}{\mathfrak{N}_{1,r-1}(x) + \alpha_r x \mathfrak{F}_{r+1}(x) . \mathfrak{N}_{1,r-2}(x)}$$

schreiben kann [(2.), (6.)], wo die Functionen $\mathfrak{N}$ für alle x synectisch sind [§. 10.], so wird $\mathfrak{F}(x)$ zwischen den oben angezeigten Grenzen zwar unendlich für die etwa vorhandenen Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{N}_{1,r-1}(x) + \alpha_r x \mathfrak{F}_{r+1}(x) \cdot \mathfrak{N}_{1,r-2}(x) = 0,$$

hört aber nicht auf, monodrom und monogen zu sein. — Dass Zähler und Nenner des gemeinen Bruchs, durch welchen hier $\mathfrak{F}(x)$ dargestellt wurde, nicht zugleich verschwinden können, erkennt man ohne Schwierigkeit mit Hülfe der in §. 10. gezeigten Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{N}$; und selbst wenn beide zugleich verschwinden könnten, würde doch die Function $\mathfrak{F}(x)$ einen bestimmten Werth behalten wegen der Art ihrer Zusammensetzung aus synectischen Functionen. Daher ist auch bewiesen, dass der Kettenbruch $\mathfrak{F}(x)$ zwischen den in Rede stehenden Grenzen nicht oscillirt.

§. 24.

Lehrsatz. Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x : \{ 1 + \alpha_2 x : \{ 1 + \alpha_3 x : \{ 1 + \cdots$$

α_r sich bei wachsendem r einer Grenze α nähert, so ist derselbe in dem Intervall

$$0 \gtreqqless mod.\, x < mod.\, \frac{1}{4\alpha}$$

eine monodrome und monogene Function von x und hat, wenn die Annäherung von unten her geschieht, auch noch für

$$mod.\, x = mod.\, \frac{1}{4\alpha}$$

einen bestimmten Werth. — Unter den x mit dem zuletzt erwähnten Modul giebt es aber jedenfalls eines, für welches $\mathfrak{F}(x)$ aufhört, eine monodrome und monogene Function darzustellen.

Beweis. Bezeichnet man durch ω eine beliebig kleine reelle positive Zahl und durch α' den Modul von α, so kann man r immer so gross annehmen, dass $mod.\, \alpha_r < \alpha' + \omega$ ist. Geschieht die Annäherung von unten her, so hat man, nachdem r einen gewissen endlichen Werth überschritten, sogar $mod.\, \alpha_r < \alpha'$.

Daher ist der Kettenbruch nach dem vorhergehenden Satze monodrom und monogen: im ersten Falle für

$$0 \gtreqqless mod.\, x \leqq \frac{1}{4(\alpha' + \omega)} < mod.\, \frac{1}{4\alpha},$$

im zweiten Falle für

$$0 \gtreqqless mod.\, x \leqq \frac{1}{4\alpha'} = mod.\, \frac{1}{4\alpha}.$$

Wird *mod.* x grösser, so hört der Kettenbruch auf, eine monodrome und monogene Function darzustellen, weil sich die durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x : \{ 1 + \cdots + \alpha_{r-1} x : \{ 1 + \alpha_r x \, \mathfrak{F}_{r+1}(x)$$

definirte Function $\mathfrak{F}_{r+1}(x)$ für diese Werthe von x nicht mehr durch eine, nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lässt. [§. 21.].

§. 25.

Zusatz. Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x : \{ 1 + \alpha_2 x : \{ 1 + \alpha_3 x : \{ 1 + \cdots$$

α_r sich bei wachsendem r der Null als Grenze nähert, so ist derselbe eine für jedes x monodrome und monogene Function von x; — er kann nicht oscilliren.

Wenn aber α_r bei wachsendem r ins Unendliche wächst, so stellt $\mathfrak{F}(x)$, wenn überhaupt eine endliche bestimmte Grösse, keine in der Nähe von $x = 0$ monodrome und monogene Function dar.*)

§. 26.

Lehrsatz. Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \left\{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \left\{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \left\{ 1 + \alpha_3 x^{\varepsilon_3} : \left\{ 1 + \cdots, \right.\right.\right.\right.$$

in welchem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ lauter positive ganze Zahlen bedeuten, x sich so annehmen lässt, dass der Modul von $\alpha_r x^{\varepsilon_r}$, nachdem die Nummer r eine gewisse endliche Zahl überschritten, nicht mehr grösser als $\frac{1}{4}$ wird, so ist, indem ξ den grössten, diese Bedingung erfüllenden Modul von x bezeichnen möge, $\mathfrak{F}(x)$ eine mindestens in dem Intervall

$$0 \overline{\overline{<}} \, mod.\, x \leq \xi$$

monodrome und monogene Function von x.

Beweis. Sei r die Nummer, von welcher an die Ungleichungen

$$mod.\, x \overline{\overline{<}} \xi, \qquad mod.\,(\alpha_r x^{\varepsilon_r}) \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}$$

zugleich erfüllt werden, so ist zunächst der Kettenbruch

$$\mathfrak{F}_{r+1}(x) = 1 : \left\{ 1 + \alpha_{r+1} x^{\varepsilon_{r+1}} : \left\{ 1 + \alpha_{r+2} x^{\varepsilon_{r+2}} : \left\{ 1 + \cdots \right.\right.\right.$$

convergent, wovon man sich ohne Schwierigkeit durch Vergleichung mit §. 22. überzeugt, und lässt sich durch die convergirende Reihe

$$\mathfrak{F}_{r+1}(x) = 1 - \alpha_{r+1} x^{\varepsilon_{r+1} - 1} \cdot x + \alpha_{r+1} x^{\varepsilon_{r+1} - 1} \left(\alpha x^{\varepsilon} - 1\right)^1_{r+1, r+2} \cdot x^2$$
$$- \alpha_{r+1} x^{\varepsilon_{r+1} - 1} \left(\alpha x^{\varepsilon} - 1\right)^2_{r+1, r+2} \cdot x^3 + \cdots.$$

---

*) Z. B. der unendl. Kb. $1 : \{ 1 + ax : \{ 1 + (a+1)x : \{ 1 + (a+2)x : \{ 1 + \cdots$

darstellen. — Die Bedeutung der in ihr vorkommenden Symbole wird aus dem Früheren verständlich sein [m. vergl. §. 15. (26.)].

Da die ε sämtlich positive ganze Zahlen $\geqq 1$ bedeuten, so sind die einzelnen Glieder dieser Reihe

$$\alpha_{r+1} x^{\varepsilon_{r+1}-1} \left(\alpha x^{\varepsilon}-1\right)^{s}_{r+1,\, r+s+1} \cdot x^{s},$$

(sogar nach Weglassung des Factors x^s) wegen des in den Formeln (26.) ausgesprochenen Bildungsgesetzes der in ihnen mit Indices versehenen Grössen ganze rationale algebraische Functionen von x, also synectisch.

Nun wird aber, wie oben angezeigt wurde, $\mathfrak{F}_{r+1}(x)$ bloss durch Addition und Subtraction solcher synectischen Functionen erhalten, so lange

$$0 \eqslantless mod.\, x \leq \xi$$

ist; folglich ist $\mathfrak{F}_{r+1}(x)$ in diesem Intervalle selbst synectisch.

Daher gilt ein Gleiches von dem Zähler und dem Nenner des gemeinen Bruchs, durch welchen $\mathfrak{F}(x)$ in der Weise

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \cdots + \alpha_r x^{\varepsilon_r} \mathfrak{F}_{r+1}(x) : \{ 1$$

$$= \frac{\mathfrak{N}_{2,r-1}(x) + \alpha_r x^{\varepsilon_r} \mathfrak{F}_{r+1}(x).\ \mathfrak{N}_{2,r-2}(x)}{\mathfrak{N}_{1,r-1}(x) + \alpha_r x^{\varepsilon_r} \mathfrak{F}_{r+1}(x).\ \mathfrak{N}_{1,r-2}(x)}$$

dargestellt werden kann [vergl. §. 10.]; und hieraus schliesst man, dass $\mathfrak{F}(x)$ in demselben Intervall monodrom und monogen ist.

§. 27.

Zusätze. Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \left\{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \left\{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \left\{ 1 + \alpha_3 x^{\varepsilon_3} : \left\{ 1 + \cdots, \right.\right.\right.\right.$$

in welchem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ lauter positive ganze Zahlen bedeuten, α_r sich der Null als Grenze nähert und ε_r nicht ins Unendliche wächst, so ist $\mathfrak{F}(x)$ eine ohne Einschränkung monodrome und monogene Function von x.

Wenn α_r bei wachsendem r endlich bleibt, aber ε_r ins Unendliche wächst, so ist $\mathfrak{F}(x)$ eine zwischen den Grenzen

$$0 \eqslantless mod.\, x < 1$$

monodrome und monogene Function von x; — sie behält diese Eigenschaft noch für

$$mod.\, x = 1,$$

wenn

$$mod.\, \alpha_r \eqslantless \frac{1}{4}$$

bleibt, nachdem r eine gewisse endliche Zahl überschritten.

Wenn α_r bei wachsendem r ins Unendliche wächst, so ist $\mathfrak{F}(x)$, wenn überhaupt eine bestimmte Grösse, keine monodrome und monogene Function von x.

§. 28.

Lehrsatz. Wenn der unendliche Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \alpha_3 x^{\varepsilon_3} : \{ 1 + \ldots$$

in dem Intervall

$$0 \gtreqless mod.\, x \leqq \xi$$

eine monodrome und monogene Function von x ist, so gilt dieses nicht nur ebenfalls über den umgekehrten Kettenbruch

$$\mathfrak{F}_{r,k}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} : \{ 1 + \alpha_{r-1} x^{\varepsilon_{r-1}} : \{ 1 + \cdots + \alpha_k x^{\varepsilon_k} : \{ 1$$

bei jedem noch so grossen r, sondern man kann auch r so gross annehmen, dass $\mathfrak{F}_{r,1}(x)$ zwischen denselben Grenzen des x eine nicht verschwindende synectische Function von x wird und es bei wachsendem r bleibt, so wie, dass für jedes endliche k mit beliebigem Grade der Genauigkeit die Gleichung

$$\mathfrak{F}_{r,1}(x) = \mathfrak{F}_{r,k}(x)$$

Geltung erlangt.

Nimmt man x nicht grösser, als dass $mod.\, \alpha_r x^{\varepsilon_r} \gtreqless \frac{1}{4}$ bleibt, nachdem r einen gewissen endlichen Werth überschritten, so hat $\mathfrak{F}_{r,1}(x)$, so wie der Rest $\mathfrak{F}_r(x)$ des Kettenbruchs $\mathfrak{F}(x)$, die Eigenschaft, dass sein Modul bei hinreichend grossem r zwischen $\frac{2}{3}$ und 2, sein Argument aber zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.*)

Von dem Werthe des r an, nach welchem $\mathfrak{F}_{r,1}(x)$ zwischen den zuletzt erwähnten Grenzen, oder allgemeiner

$$mod.\, (\mathfrak{F}_{r,1}(x) - 1) \gtreqless 1,$$

bleibt, convergirt der Kettenbruch $\mathfrak{F}(x)$ stetig, d. h. es kömmt ihm jeder Näherungsbruch $\mathfrak{F}_{1,r}(x)$ eben so nahe oder näher, als der vorhergehende; — und umgekehrt.

Beweis. Aus (11.) folgt [(4.)]:

$$\mathfrak{F}_{1,r-1} - \mathfrak{F}_{1,r} = (-1)^{r-1} \frac{\alpha_1 x_1^{\varepsilon_1} \cdot \alpha_2 x^{\varepsilon_2} \cdots \alpha_r x^{\varepsilon_r}}{\mathfrak{N}_{1,r-1}\, \mathfrak{N}_{1,r}}$$

wo der grösseren Bequemlichkeit wegen die Angabe der Veränderlichen x bei den Functionen unterlassen ist.

Da die $\mathfrak{N}$ ganze Functionen von x sind, also für endliche x nicht unendlich werden können, so sieht man zunächst, dass die Differenz $\mathfrak{F}_{1,r-1} - \mathfrak{F}_{1,r}$ für kein endliches x ausser für $x = 0$ verschwindet. Ferner ist nach der Voraussetzung, wenigstens mit Ausnahme der Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{F}(x) = \infty$, $\underset{r=\infty}{Lim.} (\mathfrak{F}_{1,r-1} - \mathfrak{F}_{1,r}) = 0$; weshalb

*) Im Allgemeinen ist $\underset{r=\infty}{Lim.}\, \mathfrak{F}_{r,1}(x)$ keine bestimmte Grösse.

man r immer so gross annehmen kann, dass für alle einer solchen Wurzel beliebig nahe kommenden x die Differenz $\mathfrak{F}_{1,r-1} - \mathfrak{F}_{1,r}$ einen beliebig kleinen Modul hat. Folglich kann ihr Modul auch für die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{F}(x) = \infty$ nicht grösser sein; denn sie ist, als die Differenz zwischen monodromen und monogenen Functionen, selbst eine solche Function, springt also bei stetiger Veränderung des x nicht von einem endlichen Werthe zu einem andern Werthe. Daher ist $\underset{r=\infty}{Lim.}\ (\mathfrak{F}_{1,r-1} - \mathfrak{F}_{1,r}) = 0$ für jedes in dem Intervall $0 \overline{\gtrless}\ mod.\ x \leqq \xi$ liegende x.

Beachtet man, dass $\mathfrak{N}_{1,r} = \mathfrak{N}_{1,r-1} + \alpha_r x^{\varepsilon_r} . \mathfrak{N}_{1,r-2}$, also

$$1 = \frac{\mathfrak{N}_{1,r-1}}{\mathfrak{N}_{1,r}} + \alpha_r x^{\varepsilon_r} \frac{\mathfrak{N}_{1,r-1}}{\mathfrak{N}_{1,r}} \cdot \frac{\mathfrak{N}_{1,r-2}}{\mathfrak{N}_{1,r-1}}$$

oder [§. 2.]

$$1 = \mathfrak{F}_{r,1} + \alpha_r x^{\varepsilon_r} \mathfrak{F}_{r,1} \mathfrak{F}_{r-1,1}$$

ist, so folgert man aus der obigen Gleichung leicht:

$$\frac{\mathfrak{F}_{1,r} - \mathfrak{F}_{1,r-1}}{\mathfrak{F}_{1,r-1} - \mathfrak{F}_{1,r-2}} = -\alpha_r x^{\varepsilon_r} \mathfrak{F}_{r,1} \mathfrak{F}_{r-1,1} = \mathfrak{F}_{r,1} - 1.$$

Nach dem Vorhergehenden können der Zähler und der Nenner des Bruches auf der linken Seite dieser Gleichung ausser für $x = 0$ weder verschwinden, noch bei hinreichend grossem r einen, eine beliebig gegebene endliche Grösse übersteigenden Modul haben, wenn nur $0 \overline{\gtrless}\ mod.\ x < \xi$ ist. Daher können der Bruch und die beiden mit ihm identischen Ausdrücke unter denselben Bedingungen weder verschwinden, noch unendlich werden. Nimmt man hinzu, dass $\mathfrak{F}_{r,1}(0) = 1$ und $\mathfrak{F}_{r,1}(x) = \frac{\mathfrak{N}_{1,r-1}}{\mathfrak{N}_{1,r}}$ der Quotient zweier ganzen Functionen von x ist, so folgt, wie behauptet wurde, dass $\mathfrak{F}_{r,1}(x)$ zwischen den Grenzen $0 \overline{\gtrless}\ mod.\ x \leqq \xi$ bei hinreichend grossem r eine nicht verschwindende synectische Function von x sei.

Auch erkennt man auf der Stelle die Richtigkeit des letzten Theils der Behauptung, da die Ungleichung $mod.\ (\mathfrak{F}_{r,1} - 1) \overline{\gtrless}\ 1$ nicht anders erfüllt werden kann, als wenn

$$mod.\ (\mathfrak{F}_{1,r} - \mathfrak{F}_{1,r-1}) \overline{\gtrless}\ mod.\ (\mathfrak{F}_{1,r-1} - \mathfrak{F}_{1,r-2})$$

ist; — und umgekehrt.*)

Setzt man ferner in (11.) $k - 3$ für s, r für n, und dividirt mit der so erhaltenen Gleichung in diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung von r mit $r - 1$ hervorgeht, so ergiebt sich [§. 2.]:

$$\frac{\mathfrak{F}_{1,k-3} - \mathfrak{F}_{1,r-1}}{\mathfrak{F}_{1,k-3} - \mathfrak{F}_{1,r}} = \frac{\mathfrak{F}_{r,k}}{\mathfrak{F}_{r,1}},$$

eine auch für $k = 3$ und $k = 2$ geltende Relation, wenn man $\mathfrak{F}_{1,0} = 1$, $\mathfrak{F}_{1,-1} = 0$ nimmt [(4.)]. Da sich ihre linke Seite in dem Intervall $0 \overline{\gtrless}\ mod.\ x \leqq \xi$ bei wachsendem r der Grenze 1 nähert, und $\mathfrak{F}_{r,k}$ weder verschwindet, noch unendlich wird, so folgt: $\mathfrak{F}_{r,1} = \mathfrak{F}_{r,k}$ beliebig genau für hinreichend grosse r. — Dasselbe folgt auch mit Leichtigkeit aus (12.), so wie aus den in der Anm. zu §. 6. abgeleiteten Formeln.

*) Dass jederzeit $mod.\ (\mathfrak{F}_{r,1} - 1) \overline{\gtrless}\ 1$ sei, lässt sich offenbar nicht schliessen, weil der Modul des Bruchs auf der linken Seite jener Gleichung bald > 1, bald < 1 sein kann.

Wenn schliesslich $mod.\ \alpha_r x^{\varepsilon_r}$ von der Nummer $r = k$ an nicht grösser als $\frac{1}{4}$ wird, so kann man, wie schon in §. 26. und §. 22. ausgeführt wurde, $\mathfrak{F}_{r,k}(x)$ in eine Reihe entwickeln, deren Glieder sicher keine grösseren, vom $(r-k+1)^{\underline{\underline{ten}}}$ an aber zweifellos kleinere Moduln haben, als die Glieder der Reihe

$$1 - \alpha x + \alpha(\alpha)_{1,2}^{1} x^2 - \alpha(\alpha)_{1,3}^{2} x^3 + \alpha(\alpha)_{1,4}^{3} x^4 - \cdots\cdots$$

$$= 1 : |1 + \alpha x : |1 + \alpha x : |1 + \alpha x : |1 + \cdots\cdot$$

$$\left\{ 0 \overline{\gtrless} mod.\ x \leqq \frac{1}{4\alpha} \right\}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha x}}{2\alpha x}.$$

Diese Reihe hat ihren grössten Werth $= 2$ für $\alpha x = -\frac{1}{4}$. Also ist unter der gemachten Voraussetzung stets $mod.\ \mathfrak{F}_{r,k}(x) < 2$; folglich nach dem Obigen bei hinreichend grossem r auch $mod.\ \mathfrak{F}_{r,1}(x) < 2$, und weil

$$\mathfrak{F}_{r,1}(x) = \frac{1}{1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} \mathfrak{F}_{r-1,1}(x)},\ mod.\ \alpha_r x^{\varepsilon_r} \overline{\gtrless} \frac{1}{4}$$

ist:

$$mod.\ \mathfrak{F}_{r,1}(x) > \frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\pi < argum.\ \mathfrak{F}_{r,1}(x) < +\frac{1}{2}\pi.$$

Dass ein Gleiches über den Rest $\mathfrak{F}_r(x)$ des Kettenbruchs gilt, ergiebt sich hiernach von selbst.

§. 29.

Zusatz. Nähert sich $\alpha_r x^{\varepsilon_r}$ bei wachsendem r einer endlichen bestimmten Grenze, so nähern sich der umgekehrte Kettenbruch $\mathfrak{F}_{r,1}(x)$ und der Rest $\mathfrak{F}_r(x)$ des Kettenbruchs $\mathfrak{F}(x)$ einer und derselben Grenze. Diese ist eine nicht verschwindende, synectische Function von x in derselben Ausdehnung, in welcher $\mathfrak{F}(x)$ monodrom und monogen bleibt, nehmlich:

$$\underset{r=\infty}{Lim.}\ \mathfrak{F}_{r,1}(x) = \underset{r=\infty}{Lim.}\ \mathfrak{F}_r(x) = \underset{r=\infty}{Lim.}\ \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha_r x^{\varepsilon_r}}}{2\alpha_r x^{\varepsilon_r}}.$$

— Diese Grenze ist $= 1$, wenn $\alpha_r x^{\varepsilon_r}$ die Null zur Grenze hat.

VI. Entwickelung der monodromen und monogenen Functionen durch Kettenbrüche.

§. 30.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$ eine in der Nähe von $x = 0$ monodrome und monogene Function mit dem besonderen Werthe $f(0) = 1$ ist, so kann man jederzeit

$$f(x) = \frac{1}{1 + \alpha x^{\varepsilon} f_1(x)}$$

darstellen, wo α eine von Null verschiedene endliche Grösse, ε eine positive ganze Zahl und $f_1(x)$ eine in gleicher Ausdehnung mit $f(x)$ monodrome und monogene Function bedeutet, welche ebenfalls den besonderen Werth $f_1(0) = 1$ hat.

Beweis. Wegen der über $f(x)$ gemachten Voraussetzung ist

$$\frac{1}{f(x)} - 1$$

eine in gleicher Ausdehnung mit $f(x)$ monodrome und monogene Function, welche für $x = 0$ verschwindet. Daher kann man sie nach einem bekannten Satze als $x^\varepsilon F(x)$ darstellen, wo ε eine positive ganze Zahl und $F(x)$ eine in gleicher Ausdehnung mit $f(x)$ monodrome und monogene Function bedeutet, welche für $x = 0$ einen nicht verschwindenden, endlichen bestimmten Werth $F(0) = \alpha$ hat.

Setzt man nun $F(x) = \alpha f_1(x)$, so unterscheiden sich $F(x)$ und $f_1(x)$ in ihren Eigenschaften nur durch den constanten Factor α; und es ist $f_1(0) = 1$. Aus der Relation

$$\frac{1}{f(x)} - 1 = \alpha x^\varepsilon f_1(x)$$

folgt aber die behauptete.

§. 31.

Zusatz I. Wenn $f(x)$ eine in der Nähe von $x = 0$ monodrome und monogene Function ist, so kann man jederzeit

$$f(x) = \alpha x^\varepsilon : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \cdots + \alpha_{r-1} x^{\varepsilon_{r-1}} : \{ 1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1}(x)$$

darstellen, wo $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \alpha_r$ von Null verschiedene, endliche bestimmte Grössen, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r$ von Null verschiedene ganze positive Zahlen, r eine beliebige Nummer und $f_{r+1}(x)$ eine in gleicher Ausdehnung mit $f(x)$ monodrome und monogene Function bedeutet, welche den besonderen Werth $f_{r+1}(0) = 1$ hat. Die ganze Zahl ε ist positiv, $= 0$ oder negativ, je nachdem $f(0)$ verschwindet, endlich oder unendlich ist.*)

Zusatz II. Jede in der Nähe von $x = 0$ monodrome und monogene Function $f(x)$ kann dargestellt werden als

$$f(x) = \alpha x^\varepsilon \cdot \left[1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \cdots + \alpha_{r-1} x^{\varepsilon_{r-1}} : \{ 1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1}(x) \right],$$

wo $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \alpha_r; \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r; f_{r+1}(x)$ eine ähnliche Bedeutung haben, wie in Zusatz I. — Denn die Functionen $f(x)$ und $\frac{1}{f(x)}$ sind zugleich monodrom und monogen.

---

*) Die Mittel zur recurrirenden Bestimmung von ε_r und α_r ergeben sich aus Abschn. III. Wir müssen hier wegen Mangels an Raum von ihrer Besprechung absehen und bemerken nur noch, dass, wenn alle ε_r gleich gross sind, (24.) in §. 15. unter den bisher bekannten Formeln zu den zweckmässigsten gehören dürfte. — Auf den letztgenannten Fall bezieht sich auch der von Grunert erfundene Algorithmus (s. d. oben angef. Abh.).

§. 32.

Lehrsatz. Wenn der unendliche Kettenbruch

$$\mathfrak{F}(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \alpha_3 x^{\varepsilon_3} : \{ 1 + \cdots,$$

welcher durch die Entwickelung

$$f(x) = \alpha x^{\varepsilon} : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \cdots + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1}(x)$$

oder

$$f(x) = \alpha x^{\varepsilon} \cdot \left[1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \cdots + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1}(x) \right]$$

der in der Nähe von $x = 0$ monodromen und monogenen Function $f(x)$ erzeugt wird, ebenfalls in der Nähe von $x = 0$ monodrom und monogen ist; so ist beziehungsweise:

$$f(x) = \alpha x^{\varepsilon} \mathfrak{F}(x), \text{ oder: } f(x) = \frac{\alpha x^{\varepsilon}}{\mathfrak{F}(x)}$$

in der Ausdehnung, in welcher weder $f(x)$, noch $\mathfrak{F}(x)$ aufhört, monodrom und monogen zu sein.

Beweis. Um die vollständige Richtigkeit dieses Satzes darzuthun, braucht man hn offenbar nur für den Fall zu beweisen, dass sich

$$f(x) = 1 : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \cdots + \alpha_{r-1} x^{\varepsilon_{r-1}} : \{ 1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1}(x)$$

entwickeln lässt.

Sei dieses der Fall, so folgt (wobei wieder bei den Functionen die Angabe der Veränderlichen unterlassen werde) [§. 1 u. §. 2]:

$$f = \frac{\mathfrak{N}_{2,r-1} + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1} \mathfrak{N}_{2,r-2}}{\mathfrak{N}_{1,r-1} + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1} \mathfrak{N}_{1,r-2}} = \mathfrak{F}_{1,r-1} \frac{1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1} \mathfrak{F}_{r-1,2}}{1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1} \mathfrak{F}_{r-1,1}}.$$

Nach §. 31. ist aber f_{r+1} in gleicher Ausdehnung mit f monodrom und monogen; und nach §. 28. gilt nicht nur ein Gleiches von $\mathfrak{F}_{r-1,2}$ und $\mathfrak{F}_{r-1,1}$ mit $\mathfrak{F}$, sondern $\mathfrak{F}_{r-1,2}$ und $\mathfrak{F}_{r-1,1}$ werden bei wachsendem r sogar synectisch und immer mehr einander gleich. Daher sind Zähler und Nenner des in obiger Gleichung mit $\mathfrak{F}_{1,r-1}$ multiplicirten Bruchs monodrome und monogene Functionen, welche bei wachsendem r beliebig genau gleiche Werthe erhalten. Mithin nähert sich der Bruch selbst der 1 als Grenze; so dass

$$f = \underset{r=\infty}{Lim.}\ \mathfrak{F}_{1,r-1} = \mathfrak{F}$$

erhalten wird, wie behauptet wurde.

Es könnte dieser Schluss allerdings noch durch den Einwurf angefochten werden, dass die Grenze des Bruchs

$$\frac{1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1} \mathfrak{F}_{r-1,2}}{1 + \alpha_r x^{\varepsilon_r} f_{r+1} \mathfrak{F}_{r-1,1}}$$

möglicher Weise in unbestimmter Form erscheine. Allein auch dann muss diese Grenze den Werth 1 haben, weil der Bruch in der hier betrachteten Ausdehnung der x monodrom und monogen ist, also nur für discrete Werthe der x eine solche Form annehmen und nicht von einem endlichen Werthe 1 zu einem andern Werthe springen kann, wenn sich x stetig ändert.

§. 33.

In Betreff der Einschränkung des vorigen Lehrsatzes, nach welcher man sich davon überzeugen muss, in welcher Ausdehnung die Function $f(x)$ und der aus ihr abgeleitete Kettenbruch zugleich monodrom und monogen sind, möge hier noch eine Bemerkung erlaubt sein.

Da, wie aus §. 30. erhellt, zur Bestimmung der α und ε nur erfordert wird, dass $f(x)$ in unmittelbarer Nähe von $x = 0$ monodrom und monogen ist, so kann der Fall eintreten, dass der erzeugte Kettenbruch diese Eigenschaft in grösserer Ausdehnung bewahrt, als die erzeugende Function. Sei die letztere z. B. eine nach Potenzen von x geordnete Reihe, welche sich in den Kettenbruch

$$1 : \{ 1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \alpha_3 x^{\varepsilon_3} : \{ 1 + \cdots$$

entwickeln lässt, so wird sich die Reihe, welche den reciproken Werth der ersteren angiebt, in den Kettenbruch

$$1 + \alpha_1 x^{\varepsilon_1} : \{ 1 + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} : \{ 1 + \alpha_3 x^{\varepsilon_3} : \{ 1 + \cdots$$

entwickeln lassen. Die beiden Reihen sind aber häufig in ungleicher Ausdehnung synectisch und hören nach Aufgabe dieser Eigenschaft auch auf, monodrom und monogen zu sein, während die beiden Kettenbrüche in gleicher Ausdehnung synectisch, monodrom und monogen sind.

Bei dem Quotienten der hypergeometrischen Reihen tritt, wie man sich durch die Lehrsätze des vorigen Abschnittes leicht überzeugt, allerdings der Fall ein, dass er in gleicher Ausdehnung mit dem Kettenbruch monodrom und monogen ist: — daher die völlige Identität des letzteren mit jenem Quotienten, wie weit die beiden Reihen synectisch bleiben. Diese Ausdehnung ist aber im Allgemeinen grösser, als diejenige, in welcher die den Quotienten beider Reihen angebende Reihe convergirt, aus welcher man denselben Kettenbruch erhalten würde.

Auf weitere Ausführungen müssen wir hier verzichten. Es mag daher genügen, darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass die Ausdehnung der Identität der erzeugenden Function und des Kettenbruchs aus dem letzteren allein nicht beurtheilt werden kann — eine übrigens keineswegs auffallende Erscheinung, da eine analoge bei jeder Entwickelung durch unendliche Ausdrücke vorausgesetzt werden darf und aus der Reihentheorie bekannt ist.

Druckfehler: S. 13. Zeile 18. lies: $\frac{1 - e^{n-2}}{1 - e}$ für: $\frac{1 - e^{n}}{1 - e}$.