Geometrische Untersuchungen über Kegelschnitts- und Kreisbüschel,

und deren Anwendung auf Erzeugung von Curven 3. und 4. Ordnung.

Es sollen in dieser Arbeit einige Gruppen von Curven untersucht werden, welche man durch Hülfe von Kegelschnittsbüscheln und in Verbindung mit einfachen Strahlbüscheln erzeugen kann. Namentlich soll immer aufmerksam gemacht werden auf specielle Fälle, die gewöhnlich für sich behandelt zu werden pflegen und die nur dann ihre rechte Bedeutung erhalten, wenn sie als Folgen und in Verbindung mit allgemeinen Resultaten erscheinen. Meine Zeit erlaubt es mir nicht, nachzusehen, welche von den Resultaten, zu denen ich gelangt bin, auch schon von andern gefunden worden sind. Ich trete zum Voraus die Prioritätsrechte etwa schon bekannter Lehrsätze an ihren Autor ab; überzeugt, der Leser werde aus der Art, wie solche Sätze hier behandelt werden, schon ersehen, dass dieselben hier nicht gestohlenes Gut sind.

Nur in solchen Fällen überlasse ich es dem Leser den Beweis mitgetheilter Thatsachen zu führen, wo dieser Beweis etwa schon in bekannten Abhandlungen geführt ist, oder derselbe sich mit Leichtigkeit aus dem Gesagten ergiebt, in allen andern Fällen soll der Beweis immer geführt werden, auch da, wo er mir für schon bekannte Thatsachen neu erscheint.

§ 1.

Unter **Kegelschnittsbüschel** versteht man, wie bekannt, die Gesammtheit aller der Kegelschnitte, welche durch dieselben 4 festen Punkte einer Ebene gehen, oder genauer genommen durch die 4 Punkte gehen, in welchen sich zwei Kegelschnitte schneiden, mögen nun diese Punkte reell oder auch imaginär sein.

Die 4 Schnittpunkte sollen im Folgenden immer **Fundamentalpunkte** des Kegelschnittsbüschels genannt und mit a, b, c, d bezeichnet werden.

Vorausgesetzt, dass alle Fundamentalpunkte reell sind, giebt es unter den Kegelschnitten in allen Fällen 3 Paar grade Linien: Die Gegenseiten des Vierecks a, b, c, d $(\overline{ab}\ \overline{cd})$ $(\overline{ac}\ \overline{bd})$ $(\overline{ad}\ \overline{bc})$. Im Uebrigen kann man je nach der Lage der 4 Punkte verschiedene Arten von Kegelschnittsbüscheln unterscheiden. Bilden die 4 Punkte ein unregelmässiges hohles Viereck, so giebt es unter den Kegelschnitten beliebig viele Hyperbeln und Ellipsen, 2 Parabeln und möglicherweise einen Kreis; ist das Viereck regelmässig, z. B. ein Parallelogramm oder ein Rechteck, so enthält das Büschel nur Ellipsen und Hyperbeln und im letztern Falle einen Kreis; dazu sind, wie auch beim folgenden, die Fälle hinzuzurechnen, wo 2 oder mehr Punkte zusammenfallen und die Kegelschnitte des Büschels sich auf verschiedene Weise berühren. Liegen aber die 4 Punkte so, dass immer einer von dem Dreieck eingeschlossen wird, welches die drei andern bilden, dann enthält das Kegelschnittsbüschel nur Hyperbeln. Sind von den 4 Punkten a, b, c, d, zwei z. B. a, b, reell, die beiden andern imaginär, so hat man wiederum 2 Fälle zu unterscheiden. Sind die beiden Punkte die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte, d. h. zweier Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln, dann enthält das Büschel auch wieder solche Kegelschnitte. Sind aber die Punkte Schnittpunkte von 2 Kreisen, so sind auch alle übrigen Kegelschnitte des Büschels Kreise. In diesem Falle liegen nämlich die andern beiden Punkte c, d imaginär im Unendlichen, wie ja bekannt, und da alle andern Kegelschnitte ebenfalls durch diese Punkte gehen müssen, so müssen diese auch ebenfalls Kreise sein. Auf analytischem Wege kommt man leicht zu demselben Resultat. Wenn $Q + \lambda Q_1 = o$ die Gleichung eines Kegelschnittsbüschels bedeutet, und $Q = o$ und $Q_1 = o$ die Gleichungen der beiden Kegelschnitte, deren Schnittpunkte das Fundamental-Viereck bilden, so ist die Gleichung $Q + \lambda Q_1 = o$ in dem Fall immer wieder ein Kreis, wo $Q = o$ und $Q_1 = o$ Gleichungen von Kreisen sind. Sind schliesslich alle vier Punkte a, b, c, d imaginär, so sind wieder dieselben 2 Fälle zu unterscheiden; entweder sind sie die imaginären Durchschnittspunkte wirklicher Kegelschnitte, dann kommen auch die verschiedenen Arten dieser Curven in dem Büschel vor, oder aber das Büschel besteht nur aus Kreisen, zu denen dann in diesem Falle auch 2 Punkte gehören, die in der Folge singuläre Punkte genannt werden sollen. Besteht das Kegelschnittsbüschel nur aus Kreisen, so soll es Kreisbüschel genannt werden und ich denke, dass dieser Name besser geeignet sein wird, die Natur dieses Curvencomplexes darzustellen, als die früheren Namen „System von Potenzkreisen“ und „Kreise mit derselben Radicalachse“, die ihm von Steiner und Poncelet gegeben worden sind. Die besonderen Eigenschaften solcher Kreisbüschel sollen später zur Sprache kommen, hier finde nur als Folgerung aus dem vorhergehenden folgender Satz eine Stelle:

1. Befinden sich unter den Kegelschnitten eines Kegelschnittsbüschels irgend zwei Kreise, so besteht das ganze Büschel aus Kreisen, d. h. es ist ein Kreisbüschel.

§ 2.

Gehen wir nun dazu über, einige Sätze über Kegelschnittsbüschel zu entwickeln.

Eine der wichtigsten Eigenschaften, welche sich auf diese Büschel im Allgemeinen beziehen, ist in folgendem Satz enthalten: Die harmonischen Polaren eines festen Punktes in Bezug auf ein Kegelschnittsbüschel schneiden sich in einem Punkt. Dieser bekannte Satz lässt sich auf einfache Art beweisen. Der feste Punkt heisse o; für jeden Kegelschnitt erhält man eine bestimmte Polare p. Fragt man nun nach der Klasse der Curve, welche von allen Polaren p (in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels genommen) umhüllt wird, so genügt es, zu bestimmen, wie viel Tangenten der Curve gehen durch einen bestimmten festen Punkt. Nehmen wir dazu den Punkt o. Durch den Punkt o geht nur ein Kegelschnitt des Büschels. Für diesen

Kegelschnitt ist, wie bekannt, die Tangente in o die zu o gehörige harmonische Polare. Es geht also nur eine der Polaren durch o; die Curve ist also von 1. Klasse, das heisst sie ist ein Punkt. Liegt der Punkt o auf einer der Seiten des Vierecks a, b, c, d, so liegt der Punkt, in welchem sich die auf ihn bezüglichen Polaren des Büschels schneiden, ebenfalls auf derselben Seite, weil diese Seite als Polare in Bezug auf sich selbst betrachtet werden muss. Die Seite stellt nämlich zusammen mit einer zweiten Seite des Fundamental-Vierecks einen Kegelschnitt des Büschels dar. Fällt der Punkt o mit einem der 4 Fundamentalpunkte zusammen, so fällt der Schnittpunkt der Polaren auch mit ihm zusammen, denn in diesem Falle sind die Polaren die Tangenten der einzelnen Kegelschnitte in eben demselben Punkt. Die Polaren der 4 Punkte a, b, c, d sind also die Tangentenbüschel in denselben 4 Punkten. Diese Tangentenbüschel sind unter einander projektivisch (im Steiner'schen Sinne) weil jedem Kegelschnitte nur eine Tangente in jedem der 4 Büschel entspricht. Sie sind aber auch perspektivisch, das heisst, ihre entsprechende Strahlen schneiden sich in graden Linien, weil in den gemeinschaftlichen Strahlen z. B. ab und ba immer entsprechende Strahlen auf einander fallen. Diese Grade ist nämlich sowohl in a wie in b Polare in Bezug auf sich selbst. Nennt man den Durchschnittspunkt von $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ x; den von $\overline{ac}$ und $\overline{bd}$ y; den von $\overline{ad}$ und $\overline{bc}$ z; so ist $\overline{zy}$ die projektivische Durschnittslinie der beiden Büschelpaare (a) und (b) sowie (c) und (d): denn in den Büscheln (a) und (b) sind sowohl $\overline{ay}$ und $\overline{by}$ als auch $\overline{az}$ und $\overline{bz}$ entsprechende Strahlen, weil sie jedesmal als demselben Kegelschnitt angehörig, und in Bezug auf diesen als Polaren betrachtet werden müssen. In ähnlicher Weise ist $\overline{xz}$ für die Büschelpaare (a) (c) und (b) (d) perspektivische Durchschnittslinie, und $\overline{xy}$ für die Paare (a) (d) und (b) (c). Hier und im folgenden wird immer unter (a) das einfache Strahlbüschel verstanden, dessen Mittelpunkt a ist.

Etwas anders stellt sich die Sache, wenn man die Polarenbüschel zweier beliebig liegenden Punkte o und q in Bezug auf dasselbe Kegelschnittsbüschel betrachtet. Es heisst der Schnittpunkt der Polaren in Bezug auf o o_1; in gleicher Weise der andere q_1; dann sind allerdings die beiden Strahlbüschel (o_1) und (q_1) untereinander projektivisch, weil in jedem Büschel nur je ein Strahl einem bestimmten Kegelschnitt des Kegelschnittsbüschels entspricht. Sie liegen aber nicht perspektivisch, da die Grade $\overline{o_1 q_1}$ nicht zugleich Polare eines und desselben Kegelschnitts in Bezug auf o und q sein kann. Sie liegen also schief, und die Durchschnittslinie der entsprechenden Strahlenpaare ist ein Kegelschnitt, der durch o_1 und q_1 geht. Dieser Kegelschnitt ist nichts anders, als der geometrische Ort der Parmonischen Pole der Graden $\overline{op}$ in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels (a, b, c, d). Liegen die Punkte o, p, also auch die ganzen Grade $\overline{op}$ im Unendlichen, so sind die Pole, in Bezug auf diese Grade die Mittelpunkte der entsprechenden Kegelschnitte; diese Mittelpunkte liegen also auf einem Kegelschnitt, der, wie bekannt, eine Hyperbel ist. Daraus beweist sich auch die oben ausgesprochene Behauptung, dass in einem Kegelschnittsbüschel höchstens 2 Parabeln sich befinden; die Mittelpunkte dieser Parabeln sind die unendlich entfernten Punkte der in Rede stehenden Hyperbel, wie das auch schon von Steiner in anderer Weise hergeleitet worden ist. Die Kreisbüschel machen hierbei eine Ausnahme, wie wir später sehen werden. Doch giebt es auch Kegelschnittsbüschel, deren

Kegelschnitte nicht so liegen, dass ihre Mittelpunkte eine Hyperbel beschreiben. Fallen nämlich irgend 2 Mittelpunkte von Kegelschnitten zusammen, dann fallen mit ihnen alle Mittelpunkte desselben Büschels zusammen, die beiden Strahlbüschel (o_1) und (p_1) sind concentrisch und ihre Strahlen schneiden sich alle in demselben Punkt. Das ist der Fall, wenn das Fundamentalviereck als Durchschnitt zweier concentrischer Kegelschnitte erscheint, wenn es also ein Quadrat, Rechteck, Parallelogramm oder Rhombus ist. Hieraus erklärt sich denn auch, dass in diesen Fällen das Büschel keine Parabeln enthält, da kein Mittelpunkt unendlich weit entfernt ist.

§ 3.

Durch Erweiterung des Begriffs Polare gelangt man zunächst für einen festen Kegelschnitt zu Sätzen, die bemerkenswerth sind, und dann auch auf ganze Kegelschnittsbüschel übertragen werden können. Mögen sie hier eine Stelle finden. Wenn man einen festen Punkt p und einen Kegelschnitt Q hat, der nicht durch p geht, und schneidet ein beweglicher Strahl des Büschels (p) Q in den zwei Punkten r, s, so ist die harmonische Polare des Punktes p in Bezug auf Q bekanntlich der geometrische Ort des Punktes q auf prs, der so liegt, dass $\frac{pr}{ps} = -\frac{qr}{ps}$; oder besser $\frac{pr}{ps} : \frac{qr}{qs} = -1$. Nehmen wir nun allgemeiner an, dass das Doppelschnitts-Verhältniss der 4 Punkte p, r, q, s, nicht gleich -1 sei, sondern einen beliebigen Werth λ habe, und fragen wir uns, welches ist unter diesen Umständen der geometrische Ort von q. Dieser Ort kann in analoger Weise die „anharmonischen Polare" des Punktes p in Bezug auf den Kegelschnitt Q genannt werden. Der Punkt p kann nicht auf dieser Polare liegen, wie man leicht einsieht, denn 2 Punkte eines Doppelschnitts-Verhältnisses
? $\lambda = 1$
können sich nicht decken, so lange dieses Verhältniss nicht $= o$ oder $= \infty$ ist. Es fragt sich also, in wieviel Punkten wird ein Strahl, der durch p geht, von der Polare geschnitten. Einen Punkt giebt es jedenfalls. Er heisse q_1, er liegt so, dass man hat $\frac{pr}{ps} : \frac{q_1 r}{q_1 s} = \lambda$. Wenn man sich nun den Strahl mit dem Punkt s fest verbunden denkt, und den Punkt auf dem Kegelschnitt Q herumbewegt, so wird der Strahl wieder in seine ursprüngliche Lage gelangen, wenn s die Lage von r einnimmt. Es muss also auf dem Strahl noch einen zweiten Punkt q_2 geben, der so liegt, dass $\frac{ps}{pr} : \frac{q_2 s}{q_2 r} = \lambda$. Einen weiteren Punkt giebt es nicht auf dem Strahle. Der geometrische Ort des Punktes q wird also von einer beliebigen Graden in 2 Punkten geschnitten, die anharmonische Polare von p in Bezug auf Q ist also ein Kegelschnitt. Untersuchen wir die Lage dieses Kegelschnitts etwas genauer. Berührt ein Strahl des Büschels (p) den Kegelschnitt Q, so fallen darin die beiden Punkte r und s zusammen, es müssen also auch die beiden Punkte q_1 und q_2 mit einander und mit ihnen zusammen fallen, die beiden Kegelschnitte berühren sich. Da man von p aus 2 Tangenten an Q ziehen kann, so haben die beiden Kegelschnitte eine doppelte Berührung. Man sieht ferner leicht ein, dass beide Kegelschnitte gleichartig sind, d. h. sie sind entweder beide Ellipsen (einschliesslich des Kreises) oder Hyperbeln oder Parabeln, denn, liegt z. B. p ausserhalb Q, und ist Q eine Ellipse, so sind nur die Strahlen, welche in dem

Winkel der beiden Tangenten von p an Q liegen, solche, die Punkte der anharmonischen Polare tragen, diese Curve ist also nothwendiger Weise eine Ellipse. Für jedes verschiedene λ erhält man eine besondere Polare, und alle diese Polaren bilden ein Kegelschnittsbüschel, zu dem der ursprüngliche Kegelschnitt Q mit gehört; die 4 Fundamentalpunkte sind zu 2 und 2 zusammenfallend, die beiden Berührungspunkte der von p an Q gezogenen Tangenten. Liegt der Punkt p innerhalb des Kegelschnitts Q, so werden die Tangenten und ihre Berührungspunkte imaginär, und man hat in obigen Bemerkungen ein Mittel, Kegelschnittsbüschel zu zeichnen, deren Kegelschnitte eine imaginäre doppelte Berührung unter sich haben.

Fassen wir alles zusammen, so erhalten wir folgenden Satz:

2. Die anharmonische Polare eines Punktes p in Bezug auf einen Kegelschnitt Q, und für das Doppelschnitts-Verhältniss λ, ist ein neuer Kegelschnitt, von derselben Art, wie Q, welcher Q in den beiden Punkten doppelt berührt, in welchen dieser von den beiden durch p gehenden Tangenten berührt wird. Für verschiedene Werthe von λ erhält man verschiedene Kegelschnitte, die in ihrer Gesammtheit ein Kegelschnittsbüschel darstellen; für $\lambda = -1$ erhält man die harmonische Polare.

Zu bemerken ist noch, dass für $\lambda = -1$ die beiden Punkte q_1 und q_2 immer zusammenfallen, dass also die Gerade, welche die harmonische Polare darstellt, eigentlich doppelt gedacht werden muss, und nicht in ihrer ganzen Ausdehnung, sondern bei der Ellipse nur die Strecke zwischen den beiden Berührungspunkten (gleichsam eine zusammengeklappte Ellipse) und bei der Hyperbel die beiden Stücke zu beiden Seiten der von den Tangenten abgeschnittenen Strecke. ?

Manche Leser werden wünschen, diese Thatsachen auch durch Rechnung bewahrheitet zu sehen, und da diese Rechnung auch für sich nicht uninterressant ist, will ich sie ebenfalls hier ausführen. Wir wollen, um die Rechnung zu erleichtern, den festen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen, und ihn mit O bezeichnen. Dann sei die Gleichung des Kegelschnitts $Q = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Eq + F = o$. Setzen wir nun $x = m\rho$, $y = n\rho$, dann ist die Entfernung der Schnittpunkte eines Strahles durch O mit dem Kegelschnitt Q gegeben durch die Gleichung $\rho_2\,(Am^2 + Bmn + Cn^2) + \rho\,(Dm + En) + F = o$. Es heisse die eine Wurzel der Gleichung ρ_1, die andere ρ_2, ferner die Schnittpunkte des Strahls mit Q, r, s, dann soll gesucht werden der geometrische Ort des Punktes q, der so auf Ors liegt, dass $\lambda \frac{Or}{Os} = \frac{qr}{qs} = \frac{Oq - Or}{Oq - Os}$ oder $\lambda \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{Oq - \rho_1}{Oq - \rho_2}$; daraus folgt $Oq = \frac{\rho_1 \rho_2 (1 - \lambda)}{\rho_2 - \lambda \rho_1}$. Die Gleichung in ρ giebt aufgelöst

$$\rho = \frac{-(Dm + En) \pm \sqrt{-4F\,(Am^2 + Bmn + Cn^2) + (Dm + En)^2}}{2\,(Am^2 + Bmn + Cn^2)}$$

für ρ^1 das obere, für ρ_2 das untere Vorzeichen genommen, erhalten wir

$$Oq = \frac{2F}{\mu \sqrt{(Dm + En)^2 - 4F\,(Ax^2 + Bxy + Cy^2)} - (Dm + En)} \text{ wo } \mu = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$$

Betrachten wir nun Oq als neues ρ und setzen wieder umgekehrt für ρm x und ρn y, so erhalten wir als Gleichung für den geometrischen Ort von q

$$\text{I.}\quad \mu^2 (Dx + Ey)^2 - 4F (Ax^2 + Bxy + Cy^2) - (Dx + Ey + 2F)^2 = o.$$

Setzt man $\lambda = -1$, so wird $\mu = o$, die Gleichung reducirt sich also auf $(Dx + Ey + 2F)^2 = o$, oder $Dx + Ey + 2F = o$, die bekannte Gleichung der harmonischen Polare für den Coordinaten-Anfang. Dieselbe tritt hier auch im Quadrat auf, deutet also auch an, dass die Grade doppelt genommen werden muss.

Es ist nun leicht, auch die Gleichung zu entwickeln für die anharmonischen Polaren eines Punktes in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte eines Kegelschnittsbüschels. Man braucht blos in die Gleichung I. für A, B, C u. s. w. die Werthe einzusetzen, welche man aus der allgemeinen Gleichung $Q + \alpha Q_1$ eines solchen Kegelschnitts erhält. Es sei $Q \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$; $Q^1 \equiv A^1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = o$; dann erhält man für I.

$$\mu^2 \left[(Dx + \alpha D_1 x + Ey + \alpha E_1 y)^2 - 4 (F + \alpha F_1) \left[(A + \alpha A_1) x^2 + (B + \alpha B_1) xy + (C + \alpha C_1) y^2\right] - \left[(D + \alpha D_1) x + (E + \alpha E_1) y + 2 (F + \alpha F_1)\right]^2 = o.\right.$$

Will man nun die Umhüllungscure haben, welche durch die anharmonischen Polaren gebildet wird, so hat man diese Gleichung in Bezug auf α zu differentiiren und aus den beiden Gleichungen α zu eliminiren. Man erhält nach gehöriger Umordnung eine Gleichung 6. Grades, die hier wegen ihrer etwas ungeschickten Gestalt nicht mitgetheilt wird. Die entstehende Umhüllungscurve ist also von 6. Ordnung. Liegt der Punkt o auf einer der Seiten des Fundamentalvierecks, so gehen alle anharmonischen Polaren durch 2 feste Punkte auf derselben Seite und berühren dabei noch einen Kegelschnitt. Ist aber der Punkt o ein Schnittpunkt von 2 Seiten des Vierecks, so gehen alle Polaren durch 4 feste Punkte, die zu je zwei auf diesen Seiten liegen und bilden daher ein neues Kegelschnittsbüschel, das zu dem ursprünglichen in der Beziehung steht, dass je ein Kegelschnitt des einen einen bestimmten Kegelschnitt des anderen doppelt berührt, wobei dann die Berührungsehnen alle durch einen bestimmten andern Schnittpunkt von 2 Gegenseiten des Fundamental-Vierecks gehen. Ist nämlich der Punkt x (s. o.), so müssen alle Kegelschnitte des anharmonischen Büschels durch diejenigen 2 Punkte q_1, q_2 von $\overline{xab}$ gehen, in denen man hat $\frac{xa}{xb} : \frac{q^1 a}{q_1 b} = \lambda$ und $\frac{xb}{qa} : \frac{q_2 b}{x_2 a} = \lambda$; dasselbe gilt für $\overline{xcd}$. Auch hier bekommt man für die verschiedenen λ verschiedene Kegelschnittsbüschel, welche immer in je 2 Punkten die Graden $\overline{xb}$ und $\overline{xd}$ schneiden und in ihrer Gesammtheit die ganze Ebene bedecken. Es wird Gegenstand einer besondern Arbeit sein müssen, die hier sich darbietenden Verhältnisse gehörig auseinander zu setzen, sowie auch die Frage zu beantworten, wie verhalten sich die anharmonischen Polaren eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn dieser Punkt sich auf einer Graden oder auch wieder auf einem Kegelschnitt bewegt u. s. w. Ebenso müssen dann durch reciproke Betrachtungen die entsprechenden Eigenschaften für Kegelschnitte als Curven 2. Klasse angesehen, behandelt werden.

§ 4.

Gehen wir wieder zu den Kegelschnittsbüscheln über, und betrachten die gegenseitigen Beziehungen, die zwischen zwei solchen Büscheln oder auch zwischen Kegelschnittsbüscheln und einfachen Strahlbüscheln stattfinden. Man sagt, 2 Kegelschnittsbüschel sind projektivisch, wenn sie so einander zugeordnet sind, dass je einem Kegelschnitt des einen ein bestimmter Kegelschnitt des andern entspricht, und umgekehrt. Chasles hat bewiesen, dass dann der Ort der Durchschnittspunkte eine allgemeine Curve 4. Ordnung ist, d. h. eine solche, die durch 14 beliebig gewählte Punkte geht. Man benutzt, um auf geometrische Weise diese projektivische Beziehung herzustellen, die Tangentenbüschel an den Ecken der einzelnen Fundamental-Vierecke. Aber auch hier kann man allgemeiner verfahren. Die Tangentenbüschel sind ja nichts anders, als die Polarenbüschel, in Bezug auf ihren Mittelpunkt selbst, wie wir oben gesehen haben. Man nimmt also besser und allgemeiner die Polarenbüschel zweier Kegelschnittsbüschel in Bezug auf einen beliebigen Punkt. Wir werden weiter unten einige specielle Fälle von solchen Curven kennen lernen. Dann kann ein Kegelschnittsbüschel und ein einfaches Strahlbüschel so aufeinander bezogen werden, dass je zwei Elemente sich entsprechen. Man erhält in diesem Fall, wie ebenfalls bekannt, die allgemeinste Form der Curven 3. Ordnung. Auch hier kann die Beziehung zwischen den beiden Büscheln mit Hilfe von Polarenbüscheln hergestellt werden. In unmittelbarstem Zusammenhang steht aber ein Polarenbüschel als einfaches Strahlbüschel mit dem Kegelschnittsbüschel, und es wird also auch durch die entsprechenden Durchschnittspunkte eine Curve 3. Ordnung erzeugt werden. In der That, es seien die Fundamentalpunkte des Kegelschnittsbüschels wie oben a, b, c, d; Ein fester Punkt p sei in der Ebene des Büschels gegeben, und die harmonischen Polaren dieses Punktes in Bezug auf dasselbe mögen das Strahlbüschel (q) bilden. Jeder Strahl dieses Strahlbüschels schneidet den ihm entsprechenden Kegelschnitt in zwei Punkten, der Punkt q gehört aber selbst einmal mit zu der entstehenden Curve, und zwar in dem Falle, wo er auf einem Kegelschnitt des Büschels liegt, was bekanntlich nur einmal geschieht; dann schneidet die entsprechende Polare den Kegelschnitt in dem Punkte q selbst. Die entstehende Curve ist also von 3. Ordnung. Da diese Schnittpunkte zugleich die Punkte sind, in welchen die von p gezogenen Tangenten die einzelnen Kegelschnitte des Büschels berühren, so können wir folgenden Satz aussprechen.

3. Zieht man von einem festen Punkt p an alle Kegelschnitte eines Kegelschnittsbüschels Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einer Curve 3. Ordnung.

Die Curve geht ausser durch q also auch durch p, weil p auch einmal auf einem Kegelschnitt des Büschels liegt, und die entsprechende Polare in dem Falle Tangente dieses Kegelschnittes in p ist. Ausserdem geht die Curve durch die 4 Fundamental-Punkte a, b, c, d, denn in jedem derselben berührt die Grade, die von p aus nach ihm gezogen werden kann, einen bestimmten Kegelschnitt. Ferner geht sie durch die 3 Schnittpunkte der Gegenseiten des Fundamental-Vierecks, die, wie oben, x, y, z heissen mögen, denn in ihnen schneidet die jedesmalige Polare die beiden entsprechenden Gegenseiten. Wenn man z. B. die beiden Graden $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ zusammen als Kegelschnitt des Büschels betrachtet, so hat dieser Kegelschnitt auch seine harmonische Polare in Bezug auf p, nämlich den 4. zu den 3 Graden $\overline{xb}$, $\overline{xd}$, $\overline{xp}$ zugehörigen harmonischen Strahl, der $\overline{xp}$ zugeordnet ist. Es ist gut, hier noch einen andern Grund zu betrachten, weshalb z. B. x zu der in Rede stehenden Curve gehört. Jede Tangente an einem Kegelschnitt hat mit demselben zwei mit einander zusammenfallende Punkte gemein, die beiden Graden $\overline{xb}$ und $\overline{xd}$ haben aber nur im Punkte x zwei Punkte gemeinschaftlich, also muss px als Tangente an diese beiden Graden, die hier als Kegelschnitt zu betrachten sind, angesehen werden, desshalb gehören also auch nach Satz 3 die 3 Punkte x, y, z zur Curve. Jede zu einem Punkte p zugehörige Curve, welche durch die Berührungspunkte der Tangenten gebildet wird, geht also immer durch die 7 Punkte a, b, c, d, x, y, z, wo auch p liegen mag. Denken wir uns nun p auf einer Graden P beweglich, und untersuchen wir die Lagen der verschiedenen Curven C_3, die zu den jedesmaligen Punkten p gehören. Die Grade P berührt 2 Kegelschnitte des Büschels, wie bekannt, und zwar sind die Berührungspunkte die singulären Punkte des Involutionssystems, in welchem P von dem Kegelschnittsbüschel geschnitten wird. Diese beiden Punkte seien u, v. Sie werden ebenfalls jeder der entstehenden Curve angehören, wo auch der Punkt p auf P liegen mag. Man erhält also für alle Punkte p ein Büschel von Curven 3. Ordnung, die alle durch dieselben 9 Punkte gehen. Man hat demnach:

4. Zieht man von den einzelnen Punkten einer Geraden P Tangenten an ein Kegelschnittsbüschel, so liegen die Berührungspunkte nach Satz 3 für jeden einzelnen Punkt auf einer Curve 3. Ordnung. Alle diese Curven gehen 1) durch die 4 Fundamentalpunkte des Büschels, 2) durch die 3 Schnittpunkte der Gegenseiten desselben, 3) durch die zwei Punkte, in welchen die Gerade P von 2 Kegelschnitten des Büschels berührt wird.

Zu bemerken ist dabei, dass, während p die Grade P durchläuft, der zugeordnete Punkt q einen Kegelschnitt beschreibt, und dass man also auch von den einzelnen Punkten dieses Kegelschnitts aus das Curvenbüschel entstehen lassen könnte. Auch bei diesem Curvenbüschel giebt es Gränzfälle, in denen die Curven in Grade und Kegelschnitte zerfallen. Sie werden bei der folgenden Betrachtung zur Sprache kommen.

Liegt der Punkt p auf einer der Seiten des Fundamental-Vierecks, z. B. auf $\overline{ab}$, und zieht man nun von ihm aus Tangenten an die einzelnen Kegelschnitte des Büschels, so liegen die Berührungspunkte nicht mehr auf einer Curve 3. Ordnung, sondern auf einem Kegelschnitt. Die Curve zerfällt nämlich in diesen Kegelschnitt und eine Grade: die Seite $\overline{ab}$ selbst. Denn wenn man vom Punkte p aus nach irgend einen Punkt der Graden $\overline{ab}$ eine neue Grade zieht, so fällt diese ganz mit $\overline{ab}$ zusammen, kann also als Tangente an $\overline{ab}$ angesehen werden, also als Tangente an einen Kegelschnitt des Büschels. Folglich gehört jeder Punkt der Graden $\overline{ab}$ der entstehenden Curve an, und der übrigbleibende Theil derselben ist ein Kegelschnitt, der in diesem Falle noch durch c und d, sowie durch y und z geht, wo auch p auf $\overline{ab}$ liegen mag. Das Büschel von Curven dritter Ordnung hat sich also für diesen speciellen Fall, wenn p die Grade $\overline{ab}$ durchläuft, in diese Grade und ein Kegelschnittsbüschel c, d, y, z aufgelöst. Dasselbe gilt für die andern Seiten des Vierecks.

Uebersichtlich hat man also:

Für die Grade	ab	das Kegelschnittsbüschel	(c,d,y,z)
„ „ „	ac	„ „	(b,d,x,z)
„ „ „	ad	„ „	(b,c,x,y)
„ „ „	bc	„ „	(a,d,x,y)
„ „ „	bd	„ „	(a,c,x,z)
„ „ „	cd	„ „	(a,b,y,z)

Das heisst in Worten ausgedrückt:

Zieht man von den einzelnen Punkten einer der Graden, welche
zwei Fundamentalpunkte eines Kegelschnittsbüschels mit ein-
ander verbinden, Tangenten an die einzelnen Kegelschnitte
5. dieses Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf neuen
Kegelschnitten, welche alle durch dieselben 4 Punkte gehen.
Die beiden andern Fundamentalpunkte und die beiden Seiten-
schnittpunkte, welche nicht auf der erstern Seite liegen.

Hierdurch erledigt sich auch die Bemerkung zu Satz 4. Die Grade P schneidet nämlich die 6 Seiten des Fundamental-Vierecks in 6 Punkten, für diese Punkte zerfällt die Curve 3. Ordnung in die entsprechende Seite und einen Kegelschnitt. Sämmtliche 6 Seiten gehören also mit zu dem in obigen Lehrsatz behandelten Curvenbüschel.

§ 5.

Wir wollen uns jetzt einige der Curven etwas näher ansehen, welche durch Hilfe von Kreisbüscheln erzeugt werden können, und zu dem Zweck zunächst die Natur und die Verschiedenheiten der Kreisbüschel untersuchen. Heissen die beiden reellen gemeinschaftlichen Schnittpunkte eines Systems von Kreisen a und b, so sieht man gleich, dass die Mittelpunkte aller dieser Kreise auf einer Graden liegen, welche auf der Mitte von $\overline{ab}$ senkrecht steht. In Bezug auf diese Grade sind die Kreise symmetrisch vertheilt, und sie selbst ist als Kreis mit unendlich grossem Radius mit zu dem System zu rechnen. Ein solches System soll im folgenden mit Kreisbüschel erster Art bezeichnet werden. Die Grade, auf welcher die Kreismittelpunkte liegen, soll Achse, die Grade $\overline{ab}$ Querachse des Kreisbüschels heissen. Fallen die beiden Punkte a und b zusammen, so berühren sich alle Kreise in dem Schnittpunkte der beiden Achsen, und werden zugleich von der Querachse berührt. Ein solches Büschel heisse Kreisbüschel 2. Art. Sind auch die Punkte a und b imaginär, so erhalten wir ein System von Kreisen, deren Mittelpunkte ebenso auf einer Graden liegen, 2 von den Kreisen haben den Radius $= o$, d. h. sie sind Punkte, die symmetrisch in Bezug auf eine Grade liegen, die auch hier den Namen Querachse führen soll, da sie senkrecht auf der Achse steht, und das ganze Kreisbüschel in 2 congruente Hälften theilt. Diese Punkte sind, wie schon oben erwähnt, die singulären Punkte des Büschels. Das Büschel soll heissen Kreisbüschel 3. Art. Endlich schliesst sich daran noch ein System von Kreisen, deren Mittelpunkte zusammenfallen. Hier kann natürlich weder von Achse, noch von Querachse die Rede sein. Es soll dies System **Kreisbüschel** 4. Art heissen. Durch Rechnung kommt man, wie bekannt, dazu, sich vorzustellen, dass die Kreise eines solchen Büschels sich alle in 2 imaginären Punkten im Unendlichen doppelt berühren. Alle Kreisbüschel lassen sich leicht construiren und geben deshalb auch Gelegenheit, sich einzelne Curven 3. und 4. Ordnung zu zeichnen, was zum Verständniss solcher Curven von wesentlichem Vortheil ist, und bitte ich den Leser, sich zu den folgenden Beispielen auch wirkliche Bilder zu entwerfen, die leichte Mühe wird sich reichlich belohnen. Auch für die Rechnung ist die Behandlung dieser Curven äusserst bequem, und ich will daher hier, neben rein geometrischen Betrachtungen, die analytischen Rechnungen ausführen. In rechtwinkligen Coordinaten ist die Gleichung eines beliebig liegenden Kreisbüschels

$$\text{I.}\quad (x-m)^2+(y-n)^2-r^2+\lambda\,[(x-m_1)^2+(y-n_1)^2-r_1^2]=o$$

wo λ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren kann. Die beiden Hälften der Gleichung sind die Gleichungen zweier Kreise, die mit zum Büschel gehören, und deren Durchschnittspunkte die Fundamentalpunkte, deren Centrale die Achse des Büschels bilden. Als Bedingung für die 4 Arten erhält man:

$$\begin{aligned}
&1.\ \text{Art}\ r+r' > \sqrt{(n-n_1)^2+(m-m_1{}^2)}\\
&2.\ \ „\ \ r+r' = \sqrt{(n-n_1)^2+(m-m_1)^2}\\
&3.\ \ „\ \ r+r' < \sqrt{(n-n_1)^2+(m-m_1)^2}\\
&4.\ \ „\ \ o = \sqrt{(n-n_1)^2+(m-m_1)^2}
\end{aligned}$$

Will man ein einzelnes Büschel mit einem Strahlbüschel in Verbindung setzen, so ist es am zweckmässigsten, die Achse desselben als x-Achse, die Querachse als y-Achse anzunehmen. Bezeichnet dabei λ den Abstand eines beliebigen Kreismittelpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, und h die Entfernung eines festen Punktes a auf der y-Achse von demselben Punkte, so ist die Gleichung eines Kreisbüschels erster Art, dessen einer Fundamentalpunkt a ist, $y^2+(x-\lambda)^2=h^2+\lambda^2$, oder besser

$$\text{II.}\quad y^2+x^2-h^2-2x\lambda=o;$$

die Kreise des Büschels gehen alle noch durch den zweiten Fundamentalpunkt b, der symmetrisch zu a auf der y-Achse liegt. Die Gleichung der zweiten Art ergiebt sich daraus für $h=o$ $y^2+x^2-2x\lambda=o$; die der dritten, die so liegt, dass die singulären Punkte die Entfernungen $+h$ und $-h$ auf der x-Achse vom Coordinaten Anfang haben;

$$\text{III.}\quad y^2+x^2+h^2-2x\lambda=o;$$

Die Gleichung der 4. Art, den Coordinatenanfang zum Mittelpunkt genommen, ist in einfachster Form: $\quad\text{IV.}\quad x^2+y^2-\lambda r^2=o.$

Ehe wir in diesen Rechnungen weiter fortfahren, sollen noch einige geometrische Betrachtungen angestellt werden. Es gelten natürlich auch für Kreisbüschel die Sätze 3, 4 und 5. Hier bekommt aber der specielle Fall eine ganz andere Bedeutung. Von den 6 Seiten des Fundamentalvierecks ist bei den ersten 3 Arten nur eine reell; die Querachse. Zieht man nun von einem Punkt dieser Querachse Tangenten an die Kreise des Büschels, die sich in den Punkten a und b schneiden, so werden die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, der durch 4 feste Punkte geht. Diese festen Punkte sind aber hier imaginär, und 2 davon (die zu a und b gehörigen Fundamentalpunkte) liegen im Unendlichen, also ist der Kegelschnitt ein Kreis. Für alle Punkte der Querachse erhält man ein Kreisbüschel, dessen Achse die Querachse des erstern ist, jeder Kreis schneidet jeden Kreis des ersten Kreisbüschels rechtwinklig, und umgekehrt. Die Punkte a und b sind die singulären Punkte des neuen Büschels; es ist ein Büschel dritter Art. Es soll dies Büschel orthogonales Kreisbüschel in Bezug auf das erste Büschel genannt werden. Man hat kurz zusammengefasst und ohne Beweis, da alles ja schon bekannt ist:

6. Das Orthogonalbüschel eines Kreisbüschels erster Art ist ein Büschel dritter Art, und umgekehrt. Die Achsen vertauschen sich gegenseitig, die Fundamentalpunkte des einen Büschels sind die singulären Punkte des andern. Das Orthogonalbüschel eines Büschels zweiter Art ist ebenfalls zweiter Art.

Man sieht in diesen Eigenschaften wieder den engen Zusammenhang zwischen Kreisbüscheln und Kegelschnittsbüscheln, und das war auch nur der Grund, warum ich diese sonst bekannten Dinge hier kurz behandelt habe. Hier gleich ein kleines Beispiel von der Anwendbarkeit der Orthogonalkreise.

Wenn man die Schnittpunkte, in denen zwei Orthogonalkreise einen und denselben Kreis des Hauptkreisbüschels schneiden, unter einander durch Graden gegenseitig verbindet, so gehen diese Grade paarweise durch zwei Punkte, und eine leichte Betrachtung lehrt, dass diese beiden Punkte auf der Querachse des Kreisbüschels liegen, sowie, dass sie die äusseren und inneren Aehnlichkeitspunkte jener beiden Kreise sind. Zieht man nun von den Mittelpunkten der Kreise nach den Schnittpunkten Radien, so sind die Radien Tangenten des geschnittenen Kreises. Diese Tangeuten schneiden sich paarweise in je 2 Punkten. Nimmt man nun die Gesammtheit dieser Punkte für alle Kreise des Kreisbüschels, und erinnert sich, dass die Summe der Radiivectores, die man nach einem Punkt eines Kegelschnitts gezogen, constant und gleich der grossen Achse sind, so hat man folgenden Satz:

7. Zieht man von 2 beliebigen Punkten der Querachse eines Kreisbüschels Tangenten an die Kreise desselben, so bilden die Schnittpunkte der an je denselben Kreis gezogenen Tangentenpaare einen Kegelschnitt, dessen Brennpunkte jene beiden Punkte sind. Liegen die beiden Punkte an derselben Seite der Axe des Kreisbüschels, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, liegen sie an verschiedenen Seiten, eine Hyperbel.

Ist die Gleichung eines Kreisbüschels erster Art wie oben $y^2 + x^2 - h^2 - 2x\lambda = o$. so ist die Gleichung des orthogonalen Büschels $x^2 + y^2 + h^2 - 2y\lambda = o$ also dritter Art; die Gleichung $y^2 + x^2 - 2x\lambda = o$, so ist die des orthogonalen Büschels $x^2 + y^2 - 2y\lambda = o$, also von derselben Art. Für die vierte Art giebt es kein orthogonales Büschel.

§ 6.

Es sei nun für einen festen Punkt p, $x = u$; $y = v$. Bezeichnet μ den Abstand eines veränderlichen Punktes auf der xAchse vom Coordinatenanfange, so bezeichnet die Gleichung $xv - yu + \mu(y - v) = o$ ein einfaches Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt p ist, und dessen Strahlen die xAchse in der Entfernung μ vom Anfangskunkt schneiden. Soll nun ein solches Strahlbüschel mit einem der oben behandelten Kreisbüschel projektivisch sein, so muss zwischen λ und μ die Relation bestehen $\lambda\mu + l\lambda + m\mu + n = o$, worin l, m, n Constante. Man erhält daraus als allgemeinste Gleichung der durch ein Kreisbüschel und Strahlbüschel zu erzeugenden Curve dritter Ordnung.

I. $(x^2+y^2-h^2)\,(yu-xv)+l\,(x^2+y^2-h^2)\,(y-v)+2mx\,(yu-xv)+2nx\,(y-v)=o.$

Die Gleichung wird nicht wesentlich verändert, wenn man die Gleichung des Strahlbüschels in der gewöhnlichen Form $x-u+\mu\,(y-v)=o$ schreibt. Die geometrische Construction der Curven, welche durch die Gleichung I. dargestellt worden, sowie der entsprechenden für die anderen Arten, ergiebt sich nun leicht. Für jedes λ construirt man nach der vorstehenden Relationsgleichung das entsprechende μ, nachdem man vorher für l, m, n bestimmte Strecken angenommen hat. Dann geben die beiden Durchschnittspunkte des Kreises und des Strahls zwei Punkte der Curve. Es versteht sich von selbst, dass man noch weiter ausholen kann, und das Strahlbüschel (p) durch eine Reihe anderer Strahlbüschel $(p')\,(p'')\ldots$ projektivisch mit dem Kreisbüschel verbinden. Wesentlich anders wird dadurch die Curve nicht. Jede solche Curve geht natürlich in Folge der obigen allgemeinen Betrachtungen durch den Punkt p, sowie durch die Fundamentalpunkte a und b des Kreisbüschels.

Nehmen wir nun als ersten speciellen Fall an, dass $\mu=\lambda$, d. h., dass jeder Strahl des Büschels durch den Mittelpunkt des entsprechenden Kreises geht, dann wird für die drei ersten Arten der Kreisbüschel (für den vierten giebt's keine) die Gleichung der entstehenden Curve.

II.
$(y^2-h^2)\,(y-v)+x^2\,(y+v)-2xyu=o$ für das Kreisbüschel erster Art
$y^2\,(h-v+x^2\,(y+v)-2xyu=o$ „ „ „ zweiter „
$(y^2+h^2)\,(y-v)+x^2\,(y+v)-2xyu=o$ „ „ „ dritter „

Alle drei Curven haben gleichmässig ein Assymptote parallel der x Achse in der Entfernung $-v$ von derselben. Die äussere Form der Curven ist aber wesentlich verschieden. Die erste hat ein abgesondertes Oval, die zweite einen Doppelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten, und die dritte besteht aus einem einzigen Zweige. Vollständig symmetrisch werden die Curven, wenn p auf der Querachse liegt, d. h. wenn $u=0$, diese Symmetrie ergiebt sich auch schon aus den Gleichungen:

$$(y^2-h^2)\,(y-v)+x^2\,(y+v)=o;$$

III. $$(y^2+h^2)\,(y-v)+x^2\,(y+v)=o;$$

$$y^2\,(h-v)+x^2\,(h+v)=o.$$

Die erste schneidet die y-Achse in drei Punkten, die getrennt sind, und zwar für $y=\pm h;\ y=v$. In allen drei Punkten wird sie von Graden berührt, die der x-Achse parallel sind. Die Assymptote ist hier eine dreipunktig osculirende für $y=-v$, denn sie schneidet die Curve sonst in keinem Punkte. Dieser unendlich entfernte Punkt ist zugleich Wendepunkt der Curve, die beiden andern reellen Wendepunkte liegen symmetrisch gegen die y-Achse auf der negativen Seite der x-Achse, mit ihm auf einer Parallele zu dieser x-Achse. Liegt p weiter von der x-Achse entfernt, als der auf derselben Seite liegende Fundamentalpunkt, so ist der andere Fundamentalpunkt der der x-Achse am nächsten liegende Punkt der Curve, von da entfernt sie sich nach beiden Seiten von derselben bis zur Assymptote, umgekehrt ist es in dem Fall, wo p näher liegt. Fällt p mit einem Fundamentalpunkt zusammen, so zerfällt die Curve in diesen Fundamentalpunkt und eine Grade, die durch den andern parallel zur x-Achse geht. Das abgesonderte Oval hat ungefähr die Form einer Ellipse oder eines Kreises, doch erreicht sie diese Gestalt nicht, weil sonst der andere Ast eine Grade werden müsste. Man kann aber umgekehrt fragen, welche Curve entsteht, wenn man statt des Ovals einen Kreis annimmt, mit seinem Mittelpunkt auf der y-Achse, nun durch p (den einen Schnittpunkt der Achse und des Kreises) Grade zieht, und auf der andern Seite der x-Achse die gleiche Entfernung abträgt, wie zwischen dieser Achse und dem festen Kreise auf der Graden. In dem Falle wird man kein Kreisbüschel in gewöhnlichem Sinne erhalten, wenn man mit diesen Entfernungen um die Schnittpunkte der x-Achse Kreise schlägt. Die entstehende Curve ist ebenfalls vom dritten Grade. Vielleicht findet sich später Gelegenheit, solche und ähnliche Curven zu behandeln. Bei der zweiten Curve schneiden sich die beiden Tangenten im Anfangspunkt der Coordinaten unter rechten Winkeln, und sind gleich geneigt gegen die Achsen. Bei der dritten liegen die Wendepunkte auf der positiven Seite der x-Achse.

Heissen die Punkte bei einer der drei Curven z. B. der ersten, welche auf einem Strahle durch p liegen q und r, und zieht man in q und r Tangenten an den vom Strahle geschnittenen Kreis, so stehen diese auf pqr senkrecht. Die Schnittpunkte, in welchen sie die Querachse des Büschels treffen, mögen q^1 und r^1 heissen. Dann sind diese beiden Punkte Mittelpunkte zweier orthogonalen Kreise mit den Radien $\overline{q^1 q}$ und $\overline{r^1 r}$. Die Kreise berühren pqr in den Punkten q und r. Die Curve kann also auch entstanden gedacht werden durch die Berührungspunkte der Tangenten, die man von p aus an das orthogonale Kreisbüschel gezogen hat. Dieselbe Beweisführung gilt auch für den allgemeineren Fall, wo p beliebig liegt, und zwar für alle drei ersten Arten von Kreisbüscheln. Es lassen also alle diese Curven eine doppelte Erzeugung zu, einmal durch Schnittpunkte eines Strahlbüschels mit einem Kreisbüschel, dann durch Berührungspunkte mit dem orthogonalen Kreisbüschel. Ja, man kann sie sich noch auf eine dritte Art erzeugt denken, nämlich durch die Schnittpunkte der beiden einander orthogonalen Kreisbüschel.

Es entsteht hier zunächst die Frage, welche Curve wird von den Graden $q\,q^1$ und $r\,r^1$ berührt, wenn q und r die Curve dritter Ordnung durchlaufen. Es handelt sich hauptsächlich darum, die Zahl der Tangenten zu bestimmen, welche durch einen festen Punkt t gehen. Es muss die jedesmalige Tangente $q\,t$ auf dem entsprechenden Strahl $p\,q$ senkrecht stehen; die Punkte q (oder r) müssen also ausser auf der Curve dritter Ordnung noch auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser $p\,t$ ist. Dieser Kreis hat ausser p noch die beiden imaginären unendlich entfernten Punkte mit der Curve gemein, schneidet dieselbe also sonst noch in höchstens 3 reellen Punkten. Es gehen also durch einen festen Punkt höchstens 3 Tangenten der neuen Curve, dieselbe ist von 3. Klasse. Bezeichnet man den Mittelpunkt des Kreises $q\,r$ mit m, und errichtet in m eine Senkrechte auf $q\,r$, so berühren alle diese Senkrechten eine Parabel, deren Brennpunkt p, deren Achse die Querachse des Kreisbüschels ist. Die Tangenten der neuen Curve sind also paarweise in gleicher Entfernung liegend, den Tangenten dieser Parabel parallel. Die Curve besteht aus zwei Aesten, (bei einem Kreisbüschel erster Art, wie es überhaupt bei dieser Betrachtung vorausgesetzt ist). Der eine Ast, der aus den Tangenten gebildet wird, welche p am nächsten liegen, bildet ein Curvendreieck mit drei Spitzen, und berührt mit einer Seite das abgesonderte Oval der Curve 3. Ordnung in a, dem Fundamentalpunkt, der p zunächst liegt. Der andere Ast ist parabolisch in derselben Richtung, wie die eben erwähnte Parabel, der Scheitel desselben berührt in b die andere Curve. Eine ähnliche Curve entsteht bei den andern Kreisbüscheln; auch dann noch, wenn p nicht auf der Querachse der Büschel liegt. Man hat also allgemein:

8. Zieht man von einem festen Punkt p Strahlen durch die Mittelpunkte der Kreise eines Kreisbüschels, und dann in den Schnittpunkten der Strahlen und Kreise Tangenten an letztere, so berühren diese Tangenten eine Curve 3. Klasse.

Aehnliche Verhältnisse finden bei Kegelschnittsbüscheln statt. Hier stellt sich die Frage so: Wenn man in den Schnittpunkten der Kegelschnitte eines Büschels (a, b, c, d) mit den Strahlen eines projektivischen Strahlbüschels Tangenten an die Kegelschnitte zieht, welche Curve wird von diesen Tangenten umhüllt. Die Berührungspunkte bilden eine Curve dritter Ordnung. Zieht man von einem andern festen Punkt q auch Tangenten an dieselben Kegelschnitte, so bilden die Berührungspunkte ebenfalls eine solche Curve. Die gemeinschaftlichen Punkte dieser Curven werden die Zahl der Tangenten bestimmen, welche man von q aus an die Umhüllungscurve ziehen kann. Die beiden Curven gehen durch die 4 Fundamentalpunkte a, b, c, d. Sie haben also sonst noch 5 Punkte gemein, folglich ist die von den Tangenten umhüllte Curve im allgemeinen von 5. Klasse. Dabei ist es noch interessant, zu wissen, welche Curve beschreibt der Schnittpunkt von je zwei Tangenten, die denselben Kegelschnitt berühren? Bei Satz 8 sind diese Tangenten immer parallel, schneiden sich also auf der unendlich entfernten Graden. In diesem allgemeinen Falle ist aber der geometrische Ort ein Kegelschnitt. Der Schnittpunkt je zweier solcher Tangenten ist nämlich der harmonische Pol zu dem Strahl des Strahlbüschels, der durch ihre Berührungspunkte geht. Er liegt also auf der Polare des Strahlbüschelmittelpunktes in Bezug auf denselben Kegelschnitt. Diese Polaren schneiden sich alle in demselben Punkt. Auf jeder Polare liegt ein Pol, ausserdem ist aber der gemeinschaftliche Schnittpunkt der Polaren selbst einmal Pol; denn von den Polaren in Bezug auf diesen letzteren Punkt, die sich ebenfalls in einem Punkt schneiden, geht eine, und zwar nur eine, durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels. Die entstehende Curve wird also von einer Graden in höchstens zwei Punkten getroffen, ist also ein Kegelschnitt. Man hat demnach:

9. Die harmonischen Pole der Strahlen eines Strahlbüschels, welches mit einem Kegelschnittsbüschel projektivisch ist, in Bezug auf die entsprechenden Kegelschnitte, beschreiben einen Kegelschnitt; die Tangenten, die von den Polen an die entsprechenden Kegelschnitte gezogen werden können, umhüllen dabei eine Curve 5. Klasse.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zu den Curven zurück, deren Gleichungen mit III. bezeichnet sind. Es ist leicht, in gegebenen Punkten dieser Curven die Tangenten zu construiren. Bei derselben Bezeichnung, wie oben, schneide pqr die Achse des Kreisbüschels im Punkte m, dem Mittelpunkte des Kreises qr; ein anderer Strahl durch p gehe durch einen andern Mittelpunkt m_1 und schneide den entsprechenden Kreis in q_1 und r_1. Dann bilden die 4 Punkte q, r, q_1, r_1 ein Kreisviereck, dessen Mittelpunkt man erhält, wenn man in m und m_1 Lothe auf pm und pm_1 errichtet. Rücken die beiden Punktpaare $q\,q_1\;r_1\,r_1$ aneinander, so wird die Verbindungslinie der Punkte Tangente der Curve, die Lothe berühren eine Parabel, deren schon oben Erwähnung geschah. Die Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise, welche in den Punkten q und r $q_1 r_1$ u. s. w. gleichzeitig die Curve berühren. Die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise und der Curve sind die verlangten. Die Curve kann also auch als Enveloppe dieser Kreise betrachtet werden. Die wirkliche Construktion der Tangenten oder Normalen ergiebt sich nach diesen Betrachtungen ohne Schwierigkeit, und ist dieselbe vollständig elementar. Rückt der Punkt p sowohl bei den Curven III. als auch bei II. in's Unendliche, so werden die Strahlen parallel, und man erhält eine Hyperbel, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt des Kreisbüschels ist. Die dadurch gegebene Construction der Hyperbel ist bemerkenswerth, weil sie einfach ist. Man hat ohne weitern Beweis folgenden Satz:

10. Zieht man durch die Mittelpunkte der Kreise eines Kreisbüschels in irgend einer Richtung Parallele, so schneiden diese Parallelen die entsprechenden Kreise in Punkten einer Hyperbel bei der 1. und 3. Art. Bei der zweiten zerfällt diese Hyperbel in 2 sich schneidende Grade. Stehen die Parallelen auf der Achse des Büschels senkrecht, so ist die Hyperbel eine gleichseitige.

Auch hier kann man dieselben Hyperbeln durch Tangenten erhalten; denn die Tangenten in den Schnittpunkten der Parallelen sind ebenfalls unter sich parallel, weil sie senkrecht auf jenen stehen, man erhält demnach einen entsprechenden Satz. Für alle möglichen Richtungen erhält man also in beiden Fällen einen Hyperbelnbüschel, dessen Hyperbeln concentrisch sind und alle durch 2 feste Punkte gehen.

§ 7.

Man kann durch Kreisbüschel und Strahlbüschel auch Curven 4. Ordnung erzeugen, indem man die Beziehungsgleichung zwischen den veränderlichen Parametern der beiden Büschel vom zweiten Grade sein lässt, oder geometrisch gesprochen, indem man immer einem Kreis des Kreisbüschels zwei Strahlen des Strahlbüschels entsprechen lässt, oder umgekehrt. Man erreicht dieses am einfachsten auf folgende Weise. Einem Kreisbüschel (a, b) entspreche ein einfaches Strahlbüschel (p) so, dass je ein Strahl durch den Mittelpunkt eines Kreises geht. Ein fester Kreis wird von jedem Strahl des Büschels in 2 Punkten q, r geschnitten. Ist nun (p_1) der Mittelpunkt eines neuen Strahlbüschels, und man zieht die Strahlen durch die Schnittpunkte q, r, so entsprechen jedem Kreis des Büschels (ab) 2 Strahlen des Büschels (p_1); die neuen Schnittpunkte bilden also eine Curve 4. Ordnung. Man wird symmetrische Curven erhalten durch besondere Lagen der drei Elemente (p) (p_1) und (a, b).

Am einfachsten aber erhält man Curven 4. Ordnung durch 2 Kreisbüschel, die einander so zugeordnet sind, dass jedem Kreis des einen nur ein Kreis des andern entspricht. Ich will hier nur einige besondere Fälle hervorheben. Auf der x-Achse liegen in der Entfernung $+$ und $-l$ zwei Punkte, m und m_1, die als Mittelpunkte zweier Kreisbüschel 4. Art betrachtet werden sollen. Dann ist die Gleichung des Büschels (m) $y^2+(x-l)^2=\alpha^2$; die des Büschels m_1 $y^2+(x+l)^2=\beta^2$; besteht nun zwischen α und β die Gleichung $\alpha\beta=c$, so wird die Gleichung der durch die Schnittpunkte der sich entsprechenden Kreise erzeugten Curve

$$\text{I.}\quad y^4+2y^2(x^2+l^2)+(x^2-l^2)^2-c^4=o;$$

die Punkte der Curve haben die Eigenschaft, dass das Produkt ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten (m und m_1) constant ist. Die Curve ist also die sogenannte Ellipse des Cassini. Wird $c=l$, so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$\text{II.}\quad (y^2+x^2)^2+2l^2(y^2-x^2)=o.$$

Die Curve heisst in diesem Fall Lemniscate des Bernoulli. Die wirkliche Construction dieser Curven bietet gar keine Schwierigkeiten dar. Für ein bestimmtes α findet sich leicht das entsprechende β, nachdem man für c eine bestimmte Strecke angenommen hat. Mit den Radien α und β schlägt man dann sowohl um m als auch um m^1 Kreise, die 4 Schnittpunkte gehören der Curve an, die in Folge dieser Construktion symmetrisch gegen beide Achsen liegt und bei II. durch den Anfangspunkt der Coordinaten doppelt hindurch geht.

Die Gleichung eines Kreisbüschels erster Art sei $x^2+y^2-l^2-2x\alpha=o$; die eines zweiten $x^2+y^2-l_1^2-2y\beta=o$; dann haben beide Büschel gemeinschaftlich den Coordinatenanfang zum Mittelpunkt, die Fundamentalpunkte des einen liegen auf der x-Achse in der Entfernung $\pm l$, die des andern auf der y-Achse in der Entfernung $\pm l_1$. Ist nun $\alpha\beta=c^2$; so erhält man für die Durchschnittscurve der beiden Büschel:

$$\text{III.}\quad (x^2+y^2-l^2)(x^2+y^2-l_1^2)=4c^2xy.$$

Eine Gleichung 4. Grades, die sich also leicht construiren lässt. Ist sowohl l als auch $l_1=o$, hat man also 2 Büschel zweiter Art, so wird die Gleichung $(y^2+x^2)^2=4c^2xy$.

Man kann auch Curven 3. Ordnung durch zwei Kreisbüschel erhalten. Sind die Gleichungen der beiden Büschel dieselben, wie vorhin, und bestimmt man die Kreise so, dass $\alpha=\beta$, so erhält man als Gleichung der erzeugten Curve:

$$\text{IV.}\quad y(y^2+x^2-l^2)=x(y^2+x^2-l_1^2);$$

Wie man sieht, ist diese Gleichung vom 3. Grade. Die Curve geht durch alle 4 Fundamentalpunkte, sowie durch den Anfangspunkt der Coordinaten, besteht aus einem Zuge und hat eine reelle Assymptote, die ebenfalls durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Dieser Punkt ist zugleich Wendepunkt der Curve.

Ist die Bedingungsgleichung zwischen α und β vom zweiten Grade, so erhält man Curven 6. Grades. Davon hier noch zum Schluss ein einfaches Beispiel, die Gleichungen seien dieselben, wie in den beiden vorhergehenden Fällen. Aber zwischen α und β bestehe die Gleichung $\alpha^2+\beta^2=c^2$, eine Gleichung, mit deren Hülfe man sehr leicht zu jedem α die entsprechenden beiden β erhalten kann. Dann wird die Gleichung der erzeugten Curve:

$$\text{V.}\ \left(\frac{x^2+y^2-l_1{}^2}{2x}\right)^2+\left(\frac{x^2+y^2-l'^2}{2y}\right)^2=c^2;$$

Die Curve ist von 6. Ordnung, hat in jedem der 4 Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt, und sieht aus, man verzeihe mir diesen trivialen Vergleich, als wenn man 2 Löffelbiscuits kreuzweise mit ihren Mittelpunkten auf einander gelegt hätte. Für $l=o$ und $l'=o$ erhält man eine Curve, welche im Anfangspunkt der Coordinaten einen vierfachen Punkt hat, und aus zwei Aesten besteht, die beide einer Lemniscate ähnlich sehen. Ihre Gleichung ist:

$$(x^2+y^2)^3=4\,c^2\,x^2\,y^2.$$

Man kann ein Kreisbüschel ansehen als den Inbegriff aller Kreise, welche durch einen Punkt gehen, und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, dann gehen alle diese Kreise auch noch durch einen zweiten festen Punkt. Man kann, davon ausgehend, nun die Sache allgemeiner auffassen, und alle Kreise betrachten, welche immer noch durch einen Punkt gehen, deren Mittelpunkte aber auf einem neuen Kreise liegen. Man könnte ein solches Kreisbüschel füglich Kreisbüschel zweiter Ordnung nennen. Mit Hülfe von Strahlbüscheln oder andern Kreisbüscheln wird man auch hier Curven höherer Ordnungen erzeugen können, die sich ebenso leicht construiren lassen, wie die vorhergehenden. Ich erinnere dabei nur an die Trisektionscurve als specielles Beispiel. Ich überlasse die weitere Ausführung dem Leser.

§ 8.

Gehen wir nun zu einer anderen Gruppe von Curven über, die man mit Hülfe von Kegelschnittsbüscheln erzeugen kann. Eine Grade G schneide die Kegelschnitte eines solchen Büschels $(a,\ b,\ c,\ d)$ einzeln in den Punkten $q,\ r,\ q_1\,r_1\ldots$ Durch einen festen Punkt p, der nicht auf einer der Seiten des Vierecks $abcd$ liegt, zieht man die Graden $pq,\ pr,\ pq_1\ pr_1\ldots$ Es fragt sich nun, welche Curve wird von den Punkten gebildet, in welchen diese Graden nochmal von den entsprechenden Kegelschnitten geschnitten werden. Der Punkt p ist hier als Mittelpunkt eines Strahlbüschels anzusehen, das auf gewisse Weise mit dem Kegelschnittsbüschel projektivisch ist. Die projektivische Beziehung ist hier aber eine andere, als die in den vorhergehenden Paragraphen angewendete, denn hier entsprechen jedem Kegelschnitt 2 Strahlen des Strahlbüschels, das Strahlbüschel ist also in Beziehung auf das Kegelschnittsbüschel ein doppeltes. Es müssen demnach die Schnittpunkte beider Büschel eine Curve vierter Ordnung bilden. Hier ist aber ein Theil dieser Curve die Grade G selbst, folglich muss der andere Theil derselben eine Curve 3. Ordnung sein. Das lässt sich nun in diesem Fall auch leicht direct nachweisen. Der Punkt p liegt einmal selbst auf einem Kegelschnitt des Büschels $(a,\ b,\ c,\ d)$; heissen die beiden Schnittpunkte dieses Kegelschnitts mit der Graden G q_2 und r_2, so schneiden pq_2 und pr_2 den Kegelschnitt nochmal im Punkt p selbst, p ist also ein Doppelpunkt der entstehenden Curve. Es fragt sich nun, wieviel Punkte der Curve noch ausserdem auf einem Strahl, der durch p geht, liegen. Durch jeden Punkt der Graden G geht nur ein Kegelschnitt des

Büschels, also wird der entsprechende Strahl auch nur in einem Punkt geschnitten. In den beiden Punkten, in welchen 2 Kegelschnitte des Büschels die Grade G berühren, fallen je zwei Strahlen zusammen. Man erhält demnach eine Curve dritter Ordnung. Also:

11. Zieht man von einem festen Punkt p nach den Punkten, in welchen eine feste Grade G von den Kegelschnitten eines Kegelschnittsbüschels (a, b, c, d) geschnitten wird, Strahlen, so liegen die zweiten Schnittpunkte dieser Strahlen auf einer Curve 3. Ordnung, welche den Punkt p als Doppelpunkt enthält, und zugleich durch die 4 Fundamentalpunkte des Büschels geht.

Die letzte Behauptung des Satzes ist ebenfalls leicht zu beweisen. Denn die Grade pa z. B. schneidet die Grade G in einem Punkte, durch den ein Kegelschnitt des Büschels geht, dieser Kegelschnitt wird aber von pa in a zum zweiten Male geschnitten, a gehört also zur Curve, ebenso b, c, und d.

Auf doppelte Weise kann man statt der Curve 3. Ordnung eine Grade und einen Kegelschnitt erhalten. Einmal, wenn der Punkt p auf einer der Seiten des Fundamentalvierecks liegt, dann gehört diese Seite selbst mit zu der entstehenden Curve, der andere Theil derselben ist also ein Kegelschnitt; dieser Kegelschnitt geht durch die beiden andern Fundamentalpunkte, welche nicht auf der Seite liegen, auf der sich p befindet; ferner durch den Punkt p selbst. Betrachtet man nun ein Büschel von Graden G, die alle durch einen und denselben Punkt q gehen, so werden alle die Kegelschnitte, welche in der oben (Satz 11) angegebenen Weise den Graden G entsprechen, ausser durch den Punkt p und die beiden Fundamentalpunkte auch noch durch den Punkt gehen, in welchem pq von dem entsprechenden Kegelschnitt geschnitten wird. Man wird also haben:

12. Zieht man von einem Punkte p, der auf einer der Seiten des Fundamentalvierecks eines Kegelschnittsbüschels (a, b, c, d) z. B. auf ab liegt, Strahlen nach den Durchschnittspunkten der Strahlen eines einfachen Strahlbüschels (q) mit den Kegelschnitten des Büschels, so schneiden diese die Kegelschnitte des Büschels, den einzelnen Strahlen des Büschels (q) entsprechend, in den Kegelschnitten eines neuen Büschels (p, c, d, q_1), wobei q_1 auf pq liegt.

Auf die zweite Art erhält man Kegelschnitte, wenn die Grade G durch einen der 4 Fundamentalpunkte des Kegelschnittsbüschels geht. Denn dann gehört die Grade, welche man von dem festen Punkte nach diesem Fundamentalpunkte zieht, mit zu der entstehenden Curve, da sie in jedem ihrer Punkte zum zweiten Mal von einem Kegelschnitt des Büschels geschnitten wird. Auch hier ist also der andere Theil der Curve ein Kegelschnitt, der, wie auch die Grade G liegen mag, (vorausgesetzt, dass sie durch denselben Fundamentalpunkt geht) durch die 3 andern Fundamentalpunkte und durch p geht. Für alle möglichen Graden G erhält man also auch hier, wie im Satz 12, ein Kegelschnittsbüschel. Lässt man die Grade G fest, und denkt sich den Punkt p auf einer Graden K beweglich, so erhält man für alle Lagen von p ebenfalls ein Kegelschnittsbüschel, das durch die drei übrigen Fundamentalpunkte geht und durch den Punkt, in welchem die Grade K von dem ihr als Strahl durch p entsprechenden Kegelschnitt geschnitten wird.

Auch hier soll ein specieller Fall hervorgehoben werden, der sich auf Kreisbüschel bezieht. Die Grade G sei die Achse eines Kreisbüschels erster Art; die beiden reellen Fundamentalpunkte desselben heissen a und b. Die Schnittpunkte eines Kreises mit G seien q und r; die beiden Strahlen, die von einem festen Punkt p nach q und r gezogen sind, schneiden den Kreis nochmal in den Punkten s und t. Dann werden nach Satz 12 die Punkte s, t auf einer Curve 3. Ordnung liegen, deren Doppelpunkt q ist, und die durch a und b geht. Hier möge gleich bemerkt werden, dass die Curve sich in einen Kegelschnitt, und zwar in eine Hyperbel verwandelt, wenn der Punkt p unendlich weit entfernt ist. Der Strahl durch p, der nach der Mitte von ab gerichtet ist, schneidet die Curve im Unendlichen. Zieht man nun as und bs, so wird der Winkel asb durch ps halbirt, weil der Punkt q der Mittelpunkt des Bogens aqb ist. Dasselbe gilt für den Punkt t. Denkt man sich nun mit den Radien as und bs eine Ellipse construirt, deren Brennpunkte a und b sind, deren grosse Achse gleich $as + bs$ ist, so wird der Strahl ps in s eine Normale der Ellipse sein, oder Tangente der Hyperbel mit denselben Brennpunkten und der Achse $as - bs$. Die Ellipse (oder Hyperbel) wird im Allgemeinen von der Curve 3. Ordnung in 6 Punkten s geschnitten, und in allen sechs Punkten wird entweder der Winkel asb oder sein Nebenwinkel von dem entsprechenden Strahl ps halbirt, das heisst, die 4 Schnittpunkte der Normalen, und die zwei Berührungspunkte der Tangenten, die man von p aus an den Kegelschnitt ziehen kann, sind die 6 Schnittpunkte desselben mit der Curve 3. Ordnung. Dasselbe gilt für jeden andern Kreis des Büschels, für jeden andern Kegelschnitt, der dieselben Brennpunkte a, b hat. Ganz dasselbe gilt auch, wenn man statt des Büschels (ab) das orthogonale Kreisbüschel 3. Art nimmt, und als Grade G die Achse dieses Büschels, denn auch dort wird der Winkel asb immer durch ps halbirt, weil dann die 4 Punkte q, r, a, b harmonische Punkte sind, und die beiden Strahlen qs und rs rechtwinklig zu einander stehen. Mit Rücksicht auf die vorhin behandelten speciellen Fälle hat man demnach:

13. Zieht man von einem festen Punkt (p) an alle Kegelschnitte, welche dieselben Brennpunkte a und b haben, sämmtliche Normalen und Tangenten, so liegen alle Schnittpunkte und Berührungspunkte auf einer Curve dritter Ordnung, welche durch a und b hindurchgeht und den Punkt p zum Doppelpunkt hat. Liegt p auf der kleinen Achse der confocalen Kegelschnitte, so zerfällt die Curve in diese Achse selbst, und in einen Kreis, der durch p, a, b geht. Liegt p auf der grossen Achse, so ist diese ein Theil der Curve, der andere Theil ist ein Kreis, dessen zweiter Schnittpunkt mit der Achse der vierte zu a, b, p gehörige harmonische Punkt ist. Die Curve ist eine Hyperbel, wenn der Punkt p unendlich weit entfernt ist.

§ 9.

Zum Schluss wollen wir noch die Curven betrachten, welche entstehen, wenn man die Schnittpunkte zweier Graden G, G_1 mit einem Kegelschnittsbüschel untereinander durch Grade verbindet, das heisst, jedesmal die 4 Punkte verbindet, in denen die beiden Graden von einem und demselben Kegelschnitt geschnitten werden. Es wird sich zunächst nur darum handeln, wieviel Tangenten man von einem festen Punkt p aus an diese Curve ziehen kann. Zieht man von dem Punkte p aus Strahlen nach dem Schnittpunkte der einen Graden, z. B. G mit den Kegelschnitten des Büschels, so liegen die zweiten Schnittpunkte auf einer Curve 3. Ordnung, wie wir oben sahen. Diese Curve schneidet die zweite Grade G_1 in 3 Punkten. Die Strahlen, die man von p aus nach diesen 3 Punkten zieht, sind die Tangenten der Curve, welche durch p gehen. Die neue Curve ist also von 3. Klasse. Die beiden Graden G und G_1 sind Tangenten der Curve, und zwar werden sie in den Punkten berührt, in welchen sie von dem Kegelschnitt geschnitten werden, der durch ihren Schnittpunkt geht. Ferner sind die 6 Seiten des Fundamentalvierecks Tangenten, da sie, zu je zweien zusammengenommen, als Kegelschnitte des Büschels betrachtet werden müssen. Fällt der Schnittpunkt der Graden G und G_1 mit einem der 4 Fundamentalpunkte des Büschels zusammen, dann zerfällt die Curve in diesen Punkt und eine Curve zweiter Klasse, das heisst einen Kegelschnitt, dessen Lage durch 5 Tangenten bestimmt ist, nämlich die 3 Seiten des Fundamentalvierecks, die nicht durch den Schnittpunkt von G und G_1 gehen, und die beiden Graden G und G_1 selbst. Lässt man nun die eine Grade G fest, und dreht die andere um den festen Schnittpunkt, so erhält man für jede neue Lage einen neuen Kegelschnitt, der immer dieselben 4 Graden berührt, man erhält also die Gesammtheit der Kegelschnitte, die von 4 Graden gemeinschaftlich berührt werden. Man hat also:

14. Verbindet man die Schnittpunkte, in welchen zwei Grade G, G_1 von den Kegelschnitten eines Büschels (a, b, c, d) geschnitten werden, unter einander durch neue Grade, so umhüllen diese Grade eine Curve 3. Klasse, welche von den 6 Seiten des Vierecks (a, b, c, d) und von den Graden G und G_1 berührt wird. Fällt der Schnittpunkt von G, G_1 mit einem der Punkte a, b, c, d zusammen, so zerfällt die Curve in diesem Punkt und einem Kegelschnitt. Man erhält ein ganzes Büschel solcher Kegelschnitte, welche alle dieselben 4 Graden berühren, wenn die eine Grade G um den festen Schnittpunkt gedreht wird.

Auch hier sollen wieder einige specielle Fälle bei Kreisbüscheln untersucht werden. Wenn die beiden Graden G, G' sich im Mittelpunkte des Büschels schneiden, und dabei gleich geneigt gegen die Achse sind, so wird ein Theil der Verbindungsgraden unter sich parallel, die Curve verwandelt sich demnach in einen Punkt, denselben, in dem sich die Parallelen schneiden und einen Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt ist in diesem Falle eine Hyperbel bei den Kreisbüscheln erster und dritter Art; die Graden G und G_1 sind ihre Assymptoten. Bei dem Kreisbüschel zweiter Art zerfällt natürlich die Hyperbel in die beiden Graden G und G_1. Sind die Graden G und G_1 der Achse des Kreisbüschels parallel, und auf beiden Seiten in gleicher Entfernung von derselben, so sind ebenfalls die Verbindungsgraden, die senkrecht auf der Achse stehen, unter sich parallel, die andern berühren demnach einen Kegelschnitt. Denke man sich ein Kreisbüschel erster Art, dessen Fundamentalpunkte a und b heissen sollen. In einer Entfernung $\pm l$, grösser als die Entfernung dieser Punkte von der Achse, seien die beiden Graden G und G_1 parallel mit derselben gezogen. Dann giebt es auf beiden Seiten der Querachse p einen Kreis, der die beiden Graden gleichzeitig berührt. Die Verbindungsgraden der jedesmaligen Berührungspunkte stehen senkrecht auf der Achse; das Rechteck, aus diesen beiden Graden und den Graden G und G_1 gebildet, schliesst den entstehenden Kegelschnitt vollständig ein. Dieser Kegelschnitt ist demnach eine Ellipse; die grosse Achse derselben ist die Querachse des Kreisbüschels. Ein Kreis kann die Ellipse niemals werden, da das eben erwähnte Rechteck nur dann ein Quadrat wird, wenn die beiden Graden G und G_1 unendlich weit entfernt sind. Die Berührungspunkte dieser Graden mit den jedesmaligen beiden Kreisen bilden nämlich eine gleichseitige Hyperbel, woraus sich die Behauptung leicht ergiebt. Die Seiten des Rechtecks sind in Bezug auf die Ellipse 4 harmonische Tangenten, das heisst, die 4 Schnittpunkte, in denen irgend eine fünfte Tangente von ihnen geschnitten wird, sind harmonische Punkte, und umgekehrt, alle Grade, welche von diesen 4 Tangenten in harmonischen Punkten geschnitten werden, sind Tangenten derselben Ellipse. Nun lässt sich hier leicht nachweisen, dass die Graden, welche die Schnittpunkte der Kreise des Kreisbüschels (a, b) mit den Graden G und G_1 untereinander verbinden, in der That von den Seiten des Rechtecks harmonisch geschnitten werden. Man benutzt zu dem Beweise noch das zu (ab) orthogonale Kreisbüschel, dessen Kreise so liegen, dass die Strecken der Tangenten zwischen den beiden längeren Seiten des Rechtecks (den Berührungssehnen der beiden Kreise und G und G_1) ihre Durchmesser sind. Dann ergiebt sich aus dem blossen Anblick der Figur ebenso leicht, dass a und b die Brennpunkte der Ellipse sind. Rücken die Graden G und G_1 den Punkten a und b näher, dann wird die entsprechende Ellipse immer schmäler, gehen die Graden durch a und b, dann hat sich die Ellipse in die Strecke $\overline{ab}$ verwandelt. Rücken nun die Graden noch näher der Achse, so erhält man statt der Ellipsen, Hyperbeln, und diese verwandeln sich in eine Grade, die Achse des Kreisbüschels, wenn die beiden Graden mit dieser Achse zusammenfallen. Hiernach hat man also folgenden Satz:

15. Wenn man in den Endpunkten der grossen und kleinen Achse einer Ellipse Tangenten an diese Curve zieht; ferner eine veränderliche Tangente diese 2 Paar Tangenten schneiden lässt, und dann mit den Strecken zwischen den parallelen Tangenten als Durchmesser Kreise beschreibt, so bildet die eine Hälfte dieser Kreise ein Kreisbüschel, dessen Fundamentalpunkte die Brennpunkte der Ellipse sind. Die andere Hälfte bildet das zu diesem orthogonale Kreisbüschel, in welchem also die Brennpunkte als singuläre Punkte auftreten. Das erste Kreisbüschel

wird gebildet von den Kreisen, deren Durchmesser zwischen den beiden Tangenten an den Endpunkten der grossen Achse liegen, das zweite von denen mit den Durchmessern zwischen den Tangenten an den Endpunkten der kleinen Achse. Zur Hälfte hat dieser Satz auch für die Hyperbel Giltigkeit.

§ 10.

Obgleich der Titel nichts von Oberflächen erwähnt, so sei es mir doch noch gestattet, hier gleichsam als Anhang einige Untersuchungen kurz auszuführen, die sich als die unmittelbarste Folge der Kreisbüschel in Bezug auf den Raum darstellen.

Alle Kugeln, welche durch einen und denselben Kreis gehen, bilden zusammen ein Kugelbüschel. Der Kreis ist der Fundamentalkreis; die Kugeln schneiden sich ausserdem noch in einem unendlich entfernten imaginären Kreis. Die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf einer Graden, der Achse des Kugelbüschels. Wie bei den Kreisbüscheln giebt es auch hier 4 Arten von Kugelbüscheln. Jede Ebne wird von einem Kugelbüschel in einem Kreisbüschel geschnitten, und ist dabei die Grade, in welcher die Ebne von der Fundamentalebne geschnitten wird, die Querachse des entstehenden Büschels, die 2 Berührungspunkte zweier Kugeln, wenn vorhanden, die singulären Punkte desselben. Ein Kugelbüschel 4. Art wird von Ebnen auch nur in Kreisbüscheln 4. Art geschnitten. Die Umhüllungskegel, die man von einem festen Punkt p aus an die Kugeln des Büschels legen kann, berühren die einzelnen Kugeln in Kreisen. Die Ebnen, in welchen diese Kreise liegen, (die Polarebnen in Bezug auf p) schneiden sich alle in einer Graden, und bilden zusammen mit dieser Graden eine Oberfläche dritter Ordnung; denn jede Ebne, welche durch p gelegt werden kann, schneidet diese Oberfläche in einer Curve dritter Ordnung, wie nach den oben angeführten Sätzen direkt klar ist. Das Büschel von Polarebnen kann auch als einfaches Ebnenbüschel angesehen werden, welches mit dem Kugelbüschel projektivisch ist, und mit ihm also auch deshalb eine Oberfläche dritter Ordnung erzeugt. Liegt der Punkt p in der Ebne des Fundamentalkreises, so schneiden sich seine Polarebnen in einer Graden derselben Ebne. Die Oberfläche zerfällt in diese Ebne und eine Kugel. Nimmt man diese Kugeln in Bezug auf alle Punkte p, die auf einer Graden liegen, die durch den Mittelpunkt des Fundamentalkreises gezogen ist, so bilden diese Kugeln ein Kugelbüschel dritter Art, welches in Bezug auf das erste Kugelbüschel orthogonal ist. Es giebt also in Bezug auf ein Kugelbüschel unendlich viele orthogonale Kugelbüschel. Denken wir uns nun ein Kugelbüschel erster Art, dessen Fundamentalkreis K heissen mag. Ein Ebnenbüschel (G) sei so mit ihm projektivisch, dass durch den Mittelpunkt jeder Kugel eine Ebne des Ebnenbüschels geht, dann werden die Durchschnittskreise eine Oberfläche dritter Ordnung bilden. Liegt die Grade G in der Ebne des Fundamentalkreises, so wird die Oberfläche symmetrisch und es ist sehr leicht, sich eine Vorstellung von derselben zu bilden. Man nehme an, dass die Entfernung h zwischen G und dem Mittelpunkte des Fundamentalkreises grösser sei, als der Radius dieses Kreises. Dann schneidet jede Ebne, welche durch die Achse des Kugelbüschels geht, die Oberfläche in einer

Curve dritter Ordnung, die oben behandelt wurde. Die Assymptoten dieser Curven liegen in einer Ebne, welche auf der andern Seite des Mittelpunktes in der Entfernung h der Graden G parallel liegt. Diese Ebne berührt die Oberfläche in 3 unendlich entfernten Graden. Jede Ebne, die dieser Assymptotenebne parallel ist, schneidet die Oberfläche in einer Hyperbel; in den beiden dieser Ebnen, welche den Fundamentalkreis berühren, zerfällt die Hyperbel in je 2 sich schneidende Grade. Diese 4 Graden, die Grade G und die 3 unendlich entfernten Graden sind die einzigen reellen Graden, welche die Oberfläche enthält. Am besten kann man die Form der Oberfläche studiren, wenn man die Form der Curven verfolgt, in denen dieselbe durch Ebnen geschnitten wird, die senkrecht auf G stehen. Es kommen in diesen Ebnen alle 3 oben betrachtete Curven vor. Liegt die Grade G unendlich weit, so verwandelt sich die Oberfläche beim Kugelbüschel erster Art in ein einschaliges Hyperboloid. Jede Ebne, welche den Fundamentalkreis berührt und zugleich senkrecht auf der Ebne desselben steht, wird von dem einschaligen Hyperboloid in zwei sich schneidenden Graden geschnitten, denn jede dieser Ebnen schneidet das Kugelbüschel in einem Kreisbüschel 2. Art, und die Ebnen, die durch die Mittelpunkte der Kugeln gehen, schneiden die Kreise des Büschels in Graden, die unter sich parallel sind und ebenfalls durch die Mittelpunkte der Kreise gehen. Die Schnittpunkte liegen also, wie man leicht sieht, auf zwei sich schneidenden Graden, deren Winkel durch die Achse des Kreisbüschels halbirt wird. Das Hyperboloid ist ein Revolutions-Hyperboloid, wie auch das folgende. Beim Büschel zweiter Art verwandelt sich die Oberfläche in einen Kegel, und bei dem dritter Art in ein zweischaliges Hyperboloid. Dasselbe findet auch dann statt, wenn die Grade G in einer beliebigen Ebne unendlich entfernt liegt. Die Hyperboloide sind dann nicht mehr Revolutions-Oberflächen, sondern allgemeinerer Art.

Die Gleichungen dieser Oberflächen lassen sich ebenfalls leicht herleiten. Es sei die Achse eines Kugelbüschels erster Art die x-Achse, die Ebne des Fundamentalkreises die yz-Ebne. Der Radius des Fundamentalkreises sei r, und der Abstand eines Kugelmittelpunktes vom Anfangspunkte α. Dann ist die Gleichung des Kugelbüschels:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\alpha - r^2 = o, \text{ wo } \alpha \text{ variabel von } -\infty \text{ bis } +\infty$$

Es sei nun die Gleichung eines Ebnenbüschels $x + ay + b + \beta\,(z + a_1 y + b_1) = o$, so kann man durch die bekannte Bedingungs-Gleichung zwischen α und β die beiden Büschel projektivisch aufeinander beziehen, und wird dann die allgemeinste Form der hier möglichen Oberflächen erhalten. Sollen die Ebnen des Ebnenbüschels immer durch die Mittelpunkte der ihnen entsprechenden Kugeln gehen, so wird die Gleichung des Büschels:

$$x b_1 + y\,(a b_1 - a_1 b) - z b - \alpha\,(z + a_1 y + b_1) = o.$$

Und die Gleichung der durch die Durchschnitte der Ebnen und Kugeln entstehenden Oberfläche wird, wenn man vorher noch die Achse des Ebnenbüschels parallel der yz-Ebne annimmt, was ohne der Allgemeinheit zu schaden, geschehen kann.

$$2x\,[b_1\,(x + ay) + bz] - (b_1 - z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = o.$$

Liegt nun noch die Achse des Ebnenbüschels ganz in der yz-Ebne und parallel zur y-Achse in der Entfernung b_1, so wird die Gleichung:

$$x^2\,(b_1 + z) + (b_1 - z)\,(y^2 + z^2 - r^2) = o.$$

Eine zweite Gruppe von Oberflächen entsteht, wenn die Schnittpunkte zweier Graden mit den Kugeln eines Kugelbüschels untereinander paarweise in jeder Kugel durch grade Linien verbunden werden. Die Oberfläche ist natürlich eine liniirte Oberfläche, und kann angesehen werden, als entstanden durch 2 doppelte Ebnenbüschel, d. h. solche Ebnenbüschel, in denen jeder Ebne des einen 2 Ebnen des andern entsprechen, und umgekehrt. Die Oberfläche ist vom 4. Grade. Die beiden Graden sind die Achsen der beiden Ebnenbüschel, und kommen in der entstehenden Oberfläche beide als Doppelgrade vor, jede Ebne eines solchen Ebnenbüschels schneidet die Oberfläche in einem Dreieck. Wenn sich die beiden Graden nicht kreuzen, sondern in derselben Ebne liegend, sich schneiden, so umhüllen, wie wir oben gesehen haben, die Verbindungslinien der Schnittpunkte eine Curve 3. Klasse. Man kann sich leicht eine Vorstellung von einer solchen Oberfläche verschaffen, wenn man die eine Grade als Achse des Kreisbüschels, die andere parallel der Ebne des Fundamentalkreises annimmt. Dann enthält die Oberfläche ausser diesen beiden Doppelgraden noch zwei Rückkehrgrade, nämlich die beiden Graden, die man von dem Berührungspunkt der einen Graden mit einer Kugel des Büschels nach den Schnittpunkten dieser Kugel und der Achse ziehen kann. Jede Curve, welche durch eine Ebne aus der Oberfläche ausgeschnitten wird, hat in dem Schnittpunkte mit diesen beiden Rückkehrgraden eine Spitze. Ich mache auf diese beiden Oberflächen-Gruppen noch besonders aufmerksam, weil sie mir am leichtesten eine Vorstellung von Oberflächen höherer Grade verschafft haben. Die genauere Ausführung des hier nur skizzenhaft gegebenen wird dem Leser nicht schwer werden, der die Ausführungen über Kreisbüschel aufmerksam verfolgt und sich die betreffenden Zeichnungen dazu angefertigt hat.

Dr. Sarres.