I.

Herr **Brill** geht aus von der Elimination zweier Variabeln (x, y) aus drei Korrespondenzgleichungen

$$f(xy; x'y') = 0$$
$$\varphi(xy; x'y') = 0$$
$$\psi(xy; x'y') = 0$$

von den bez. Graden a, b, c in (x, y); a', b', c' in x', y'. Es seien gewisse feste Punkte in der Ebene vorhanden, derart, dass f als Funktion von (x, y) im Punkt $(u_i v_i)$ $\alpha_i$fach, als Funktion von $(x'y')$ α_i'fach verschwindet und analog φ und ψ, β_i und β_i', resp. γ_i und γ_i'fach. Endlich gehöre zu den Punkten $(u_i v_i)$ auch der Punkt $(x'y')$ selbst, d. h. es möge angenommen werden, dass für $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ f ebenfalls verschwindet und zwar αfach; ebenso φ und ψ, β resp. γfach. Indem man nun von Schritt zu Schritt den Gang der Elimination verfolgt und sämtliche überflüssigen Faktoren aus der Resultante ausscheidet, welche teils von vielfachen festen, teils vielfachen beweglichen Punkten herrühren, bekommt man schliesslich die sogenannte reduzierte Resultante, welche die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrückt, dass die drei Funktionen ausser den Wertepaaren $(u_i v_i)$ und $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ noch ein weiteres gemeinschaftlich haben. Der Grad $[R]$ der gewünschten Resultante $R(x'y')$ wird in $(x'y')$:

$$\text{I.} \qquad [R] = (bc - \Sigma\beta_i\gamma_i - \beta\gamma)\,a' + (ca - \Sigma\gamma_i\alpha_i - \gamma\alpha)\,b' + (ab - \Sigma\alpha_i\beta_i - \alpha\beta)\,c' - (\alpha\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) + 3\alpha\beta\gamma\ .$$

Ebenso stellt Herr **Brill** für die Vielfachheit $[R_i]$ des Punktes der Kurve $R(x'y') = 0$ in dem festen Punkte $(u_i v_i)$ die Formel auf:

$$\text{II.} \qquad [R_i] = (bc - \Sigma\beta_i\gamma_i - \beta\gamma)\,\alpha_i' + (ca - \Sigma\gamma_i\alpha_i - \gamma\alpha)\,\beta_i' + (ab - \Sigma\alpha_i\beta_i - \alpha\beta)\,\gamma_i' - (\alpha_i\beta\gamma + \beta_i\gamma\alpha + \gamma_i\alpha\beta) + \alpha\beta\gamma\ .$$

Ich wende mich nun zum Beweis der **Zeuthenschen** Korrespondenzformel. Er verlangt die Kenntnis eines Hilfssatzes, dessen Richtigkeit hier kurz dargethan sei.

„Der Ausdruck, dessen Verschwinden die Berührung (Berührungsinvariante) zweier Kurven f und φ von den Ordnungen m und n anzeigt, ist vom Grade $n(2m + n - 3)$ in den Koeffizienten der ersten und vom Grade $m(2n + m - 3)$ in denen der zweiten Kurve.“

Die Berührungsinvariante ergiebt sich durch Elimination von (x, y) aus den drei Gleichungen:

$$(1.) \qquad f(xy) = 0$$
$$(2.) \qquad \varphi(xy) = 0$$
$$(3.) \qquad R(xy) \equiv f'(x)\,\varphi'(y) - \varphi'(x)\,f'(y) = 0\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um den Grad der Resultante zu bekommen, ist der Charakter der Gleichung (3.) zu beachten. Für (1.) und (2.) kann man nach dem Eulerschen Satze auch schreiben:

$$x f'(x) + y f'(y) + z f'(z) = 0$$
$$x \varphi'(x) + y \varphi'(y) + z \varphi'(z) = 0; \text{ also}$$
$$x (f'(x) \varphi'(y) - \varphi'(x) f'(y)) = z (f'(y) \varphi'(z) - f'(z) \varphi'(y))$$

oder abgekürzt: $xR = z.\ S$,

also mit $z = 1$ $xR = S$.

Wenn $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ... $(x_r y_r)$ die gemeinschaftlichen Wertepaare von (1.) und (2.) sind, so ist auch:

$$x_1 x_2 \ldots. x_r . R_1 R_2 \ldots. R_r = S_1 S_2 \ldots. S_r$$

wo $R_i = R(x_i y_i)$ gesetzt ist.

Führt man nach der Poissonschen Methode eine neue Variable t durch die Gleichung

$$t = \lambda x + \mu y$$

ein, und bekommt man durch Elimination von (x, y) hieraus und aus den Gleichungen (1.) und (2.) die Resultante:

$$T = T_0 t^r + T_1 t^{r-1} + \ldots. + T_r,$$

so ist, weil S von der Dimension $m + n - 2$ ist:

$$T_0^{m+n-2} . S_1 S_2 \ldots. S_r$$

eine ganze Funktion in den Koefficienten von f und φ; also auch

$$T_0^{m+n-2} . x_1 x_2 . \ldots. x_r . R_1 R_2 . \ldots. R_r$$

eine solche.

Da nun in $x_1 x_2 . \ldots. x_r = \left[\frac{T_r}{T_0}\right]_{\lambda=1,\, \mu=0}$

T_r im allgemeinen nicht durch T_0 teilbar ist, so muss es $T_0^{m+n-2} R_1 R_2 \ldots. R_r$ sein; d. h. man braucht $R_1 R_2 . \ldots. R_r$ nur mit der $(m+n-3)$ten Potenz von T_0 zu multiplizieren, um die Berührungsinvariante als ganze Funktion in den Koeffizienten von f und φ zu bekommen. (Dass die Resultante durch T_0 teilbar sein muss, ist geometrisch evident, da die Funktion R auch verschwindet für blosse Berührungen von f oder φ mit der unendlich fernen Geraden). Somit bekommt man für den Grad der Berührungsinvariante in den Koeffizienten von f, wenn man d Doppel- und r Rückkehrpunkte von f annimmt, in welchen $R = 0$ die Kurve $f = 0$ schneidet, resp. berührt:

$$\begin{aligned} &n(m+n-3) + mn - 2d - 3r \\ &= n(2m+n-3) - 2d - 3r . \end{aligned}$$

Haben endlich f und φ in einem gemeinsamen Punkte einen i- resp. $k$fachen Punkt mit getrennten Tangenten, so wird die Berührungsinvariante, welche die nicht in diesen Punkt fallenden Berührungen angiebt, in den Koeffizienten von f vom Grade:

$$\begin{aligned} &n(2m+n-3) - 2d - 3r - k(i+k-1) - ik \\ &= 2mn + 2(p-1) - r - 2ik\ , \end{aligned}$$

wenn p das Geschlecht der Kurve f bezeichnet.

Die angegebene Abzählung lässt sich sofort auf beliebig viele Variable ausdehnen. So wird der Grad der Berührungsinvariante, welche die nicht in den gemeinschaftlichen i- resp. k-, resp. $l$fachen Punkt dreier Flächen f, φ, ψ von den bez. Ordnungen m, n, p fallenden Berührungen angiebt, etwa in den Koeffizienten von ψ:

$$mn(2p + m + n - 4) - 2ikl - ik(i + k - 2)\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die gefundenen Ausdrücke verifiziert man leicht mittelst der von Herrn **Brill** (Math. Annalen, Bd. 6 und 7) bewiesenen Korrespondenzformel. Hiernach ist die Zahl der Koinzidenzpunkte einer $(\alpha\beta)_\gamma$-Korrespondenz auf einer Kurve vom Geschlecht p_1:

$$P = \alpha + \beta + 2p_1\gamma \ .$$

Man hat z. B. für den ersten Fall auf der Kurve f die Korrespondenz:

$$(mn - 1 - ik,\ mn - 1 - ik)_1$$

zwischen den nicht in den festen gemeinschaftlichen i-, resp. $k$fachen Punkt fallenden Schnittpunkten beider Kurven. Wendet man hierauf die angegebene Korrespondenzformel an, so ist zu beachten, dass unter den P eigentlichen Koinzidenzen auch die r-Rückkehrpunkte von f enthalten sind, weil auch hier zwei Punkte unendlich benachbart auf demselben Kurvenelemente liegen; also wird die gewünschte Zahl der Berührungen des Kurvenbüschels mit der Kurve f:

$$P = 2mn + 2(p-1) - 2ik - r \ .$$

Ebenso hat man für den zweiten Fall auf der Schnittkurve der Flächen f und φ die Korrespondenz:

$$(mnp - ikl - 1,\ mnp - ikl - 1)_1 ,$$

also kommt mit

$$2p_1 = mn(m + n - 4) - ik(i + k - 2) + 2$$

die Koinzidenzzahl:

$$P = mn(2p + m + n - 4) - 2ikl - ik(i + k - 2)$$

wie oben.

Der bewiesene Hilfssatz gestattet eine einfache Ableitung der **Zeuthen**schen Formel für den Fall von „Wertigkeits"-Korrespondenzen. Herr **Zeuthen** fragt nach der Abhängigkeit des Geschlechts (p) einer Kurve f von demjenigen (p') einer Kurve (f'), wenn beide so auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte P von f α'-Punkte P' von f' entsprechen und jedem Punkte P' von f' α-Punkte von f.

Um die gewünschte Relation zu finden, sucht man die Zahlen z und z' der Koinzidenzen von zwei Punkten, welche bez. auf f und f' demselben Punkte der andern Kurve entsprechen, wobei die durch Doppelpunkte der Kurven hervorgerufenen Koinzidenzen nicht mitgezählt sind.

Sind (x,y), (x', y') zwei entsprechende Punkte,

$$f(xy) = 0$$
$$f'(x'y') = 0$$

die zwei auf einander bezogenen Kurven, so kann man sich die α'-Punkte, welche einem Punkte (xy) entsprechen, ausgeschnitten denken durch eine Kurve

$$\varphi(xy, x'y') = 0 \ ,$$

welche in xy vom Grade m, in $(x'y')$ vom Grade m', wenn

$$m'n' = \alpha' \ .$$

Durch die Kurve φ kann man auch die α-Punkte auf f herstellen, wenn ebenso

$$mn = \alpha \ .$$

Dieses Ausschneiden scheint daher nur in sehr beschränkten Fällen möglich zu sein. Die Giltigkeit des Beweises kann aber dadurch ausgedehnt werden, dass man die Kurve φ durch die nötige Anzahl fester Punkte von f, resp. f' ein- oder mehrfach hindurchgehen lässt, z. B. k_i resp. k_i'fach und nur die beweglichen Schnittpunkte zählt, so dass

$$mn = \alpha + \Sigma k_i$$
$$m'n' = \alpha' + \Sigma k_i' \ .$$

Es fallen zwei von den α beweglichen Schnittpunkten von φ mit f zusammen, wenn φ die Kurve f berührt. Hat nun die Kurve $f\, q\, \gamma_i$fache Punkte (mit getrennten Tangenten) und r-Rückkehrpunkte; lässt man ferner die Kurven f und φ durch t feste gemeinschaftliche Punkte gehen und zwar φ je $k_i$fach, so weiss man nach dem aufgestellten Hilfssatze, dass die Berührungsinvariante in den Koeffizienten von φ vom Grade wird:

$$2mn + 2\,(p-1) - 2\Sigma k_i - r\ .$$

Und da die variabeln Koeffizienten von φ selbst vom Grade m' sind, wird der gewünschte Grad in $(x'y')$:

$$m'\,(2mn + 2\,(p-1) - 2\Sigma k_i - r)\ .$$

Die $(x'y')$ haben gleichzeitig der Gleichung $f'(x'y') = 0$ zu genügen, daher wird die Zahl der Berührungsstellen:

$$m'n'\,(2mn + 2\,(p-1) - 2\Sigma k_i - r)$$

oder mit obigen Werten von mn und $m'n'$:

$$(\alpha' + \Sigma k_i')\,(2\alpha + 2(p-1) - r)$$

als Zahl der Koinzidenzen von zwei Punkten, welche auf f demselben Punkte der andern Kurve entsprechen. Wenn man daher die Koinzidenzpunkte abzieht, welche durch die fest angenommenen Punkte der andern Kurve veranlasst werden, bleibt für die gewünschte Zahl der Koinzidenzen der den beweglichen Punkten allein entsprechenden Punkte:

$$\alpha'(2\alpha + 2(p-1) - r)\ .$$

Kommt es nun βmal vor (auf jeder Kurve), dass zugleich zwei einem Punkte P entsprechende Punkte in P' zusammenfallen und umgekehrt zwei von den P' zugehörigen in P, so kommt für die Zahl der Koinzidenzpunkte auf der Kurve f:

$$\text{(1.)} \qquad z + 2\beta = 2\alpha'(\alpha - 1) + 2p\alpha' - r\alpha'\ .$$

Und analog auf der andern Kurve:

$$\text{(2.)} \qquad z' + 2\beta = 2\alpha(\alpha' - 1) + 2p'\alpha - r'\alpha\ ,$$

also durch Subtraktion

$$\text{(3.)} \qquad z - z' = 2\alpha'(p-1) - 2\alpha(p'-1) - r\alpha' + r'\alpha\ ,$$

welche Relation mit der von Herrn Zeuthen gefundenen übereinstimmt, wenn man dort noch r Rückkehrpunkte von f und r' solche von f' annimmt.

Wendet man die Formel (3.) auf zwei eindeutig auf einander bezogene Kurven an mit $\alpha = \alpha' = 1$, so folgt bei Berücksichtigung der Thatsache, dass einem Rückkehrpunkt der einen Kurve entweder wieder ein solcher oder zwei unendlich nahe Punkte der andern Kurve entsprechen, für sie die Gleichheit des Geschlechts.

Die Gleichung der Kurve, welche von den Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Kurven eingehüllt wird, erhält man durch Elimination von (x, y), (x', y') aus den fünf Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{(1.)} & f(xy) = 0 \\
\text{(2.)} & f'(x'y') = 0 \\
\text{(3.)} & \varphi\,(xy\,x'y') = 0 \\
\text{(4.)} & ux + vy + 1 = 0 \\
\text{(5.)} & ux' + vy' + 1 = 0\ .
\end{array}$$

Eliminiert man $(x'y')$ aus den Gleichungen (2.), (3.) und (5.), so kommt eine Gleichung:

$$\text{(6.)} \qquad \psi\,(xy,\ uv) = 0\ ,$$

welche in x, y vom Grade mn', in (u, v) vom Grade $m'n' - \Sigma k_i'$, sowie in jedem festen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$k_i$fachen Punkte von $\varphi\, n'k_i$fach verschwindet. Die Elimination von (x, y) aus (1.), (4.) und (6.) giebt somit in (u, v) eine Gleichung vom Grade:

$$k = n \,.\, mn' - n'\Sigma k_i + n\,(m'n' - \Sigma k_i')$$

$$\text{oder } k = n\alpha' + n'\alpha \;.$$

Dieselbe Klasse bekommt man durch blosse Abzählung mittelst des Chaslesschen Korrespondenzprinzips, indem man einen beliebigen Strahlbüschel betrachtet, dessen Strahlen nach entsprechenden Punkten hinlaufen und daher eine $(n\alpha', n'\alpha)$ Korrespondenz bilden.

Das Geschlecht p'' der Enveloppe bestimmt sich mittelst der Zeuthenschen Formel. Die Punkte auf f und der Einhüllenden stehen in einer $(1, \alpha')$ Korrespondenz und zeigen 0, resp. $z' + \beta$ Koinzidenzen, also:

$$2(p'' - 1) = 2\alpha'(p - 1) + z' + \beta - r\alpha'$$

$$(= 2\alpha\,(p' - 1) + z + \beta - r'\alpha) \;.$$

II.

Über einige Sätze von Steiner.

In „Jakob Steiners gesammelten Werken“ (herausgegeben von Weierstrass) steht (Bd. II p. 667) folgender nicht bewiesener Satz:

> „Sind in gleicher Ebene irgend zwei Kurven, die eine vom p^{ten}, die andere vom q^{ten} Grad, in fester Lage gegeben, und bewegen sich die Endpunkte einer konstanten Strecke ab einer Geraden S beziehlich in denselben, so umhüllt die Gerade eine Kurve $4pq^{\text{ter}}$ Klasse, welche die im Unendlichen liegende Gerade $G\infty$ zur $2pq$fachen Tangente hat.“

Seien die Gleichungen der beiden Kurven, auf denen sich die Endpunkte (x, y) und $(x'y')$ der konstanten Strecke $ab = r$ bewegen ,

$$f(xy) = 0 \;\text{ resp. }\; \varphi\,(xy) = 0 \;,$$

so ergiebt sich die gesuchte Klassenkurve durch Elimination von $x, y;\; x'y'$ aus den fünf Gleichungen

$$(1.)\qquad f(xy) = 0$$

$$(2.)\qquad \varphi(x'y') = 0$$

$$(3.)\qquad (x - x')^2 + (y - y')^2 - r^2 = 0$$

$$(4.)\qquad ux + vy + 1 = 0$$

$$(5.)\qquad ux' + vy' + 1 = 0 \;.$$

Bildet man aus (4.) und (5.) die neue Gleichung:

$$(5'.)\qquad (x - x')\,u + (y - y')\,v = 0 \;,$$

so verschwindet diese für $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ und wird bei der Resultantenbildung auch gleich die Vielfachheit der unendlich fernen Geraden als Tangente der Klassenkurve erkennen lassen. Um den Grad der Resultante in Bezug auf (u, v), sowie die Vielfachheit ihres Verschwindens mit $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$ zu erfahren, denke man sich etwa nach der Poissonschen Methode eliminiert. Setzt man demnach:

$$(6.)\qquad t = \alpha x' + \beta y' \;,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so kommt durch Elimination von (x', y') aus den Gleichungen (3.), (5′.) und (6.):

$$(u^2+v^2)(\alpha x+\beta y-t)^2-r^2(\beta u-\alpha v)^2=0 \quad \text{oder}$$

$$(u^2+v^2)t^2-2(\alpha x+\beta y)(u^2+v^2)t+(\alpha x+\beta y)^2(u^2+v^2)-r^2(\beta u-\alpha r^2)=0 \,, \tag{7.}$$

welche Gleichung dazu dient, die symmetrischen Funktionen in

$$\varphi(x_1'y_1') \cdot \varphi(x_2'y_2')=0 \tag{8.}$$

zu berechnen. Da Gleichung (7.) in Bezug auf (u, v) homogen vom zweiten Grade ist, so werden auch in den Ausdrücken für die symmetrischen Funktionen Zähler und Nenner homogen von derselben Dimension sein, und weil man die linke Seite von (8.) noch mit $(u^2+v^2)^q$ zu multiplizieren hat, um eine ganze Funktion von (u, v) zu bekommen, so ist die Resultante

$$R(xy, uv)=0 \tag{9.}$$

in (u, v) vom Grade $2q$ und verschwindet für $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$ ebenfalls $2q$fach. Ebenso ist die Resultante (9.) in Bezug auf (x, y) vom Grade $2q$. Eliminiert man endlich noch (x, y) aus den Gleichungen (1.), (4.) und (9.), so wird die neue Resultante in Bezug auf (u, v) vom Grade:

$$2q \cdot p+2q \cdot p=4pq \,.$$

Diese Zahl giebt die Klasse der fraglichen Kurve an, wie auch einfach die Anwendung des Chaslesschen Korrespondenzprinzipes ergiebt.

Für die Vielfachheit des Verschwindens der genannten Resultante mit $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$ bekommt man die Zahl $2pq$, was zu beweisen war.

Mittelst der oben bewiesenen Zeuthenschen Korrespondenzformel lässt sich auch das Geschlecht der betrachteten Klassenkurve bestimmen. Einem Punkte P der einen Kurve C_p^π (vom Grad p und Geschlecht π) entsprechen $2q$ Punkte der andern Kurve und also auch $2q$ Berührungspunkte der in Frage stehenden Einhüllenden. Umgekehrt entspricht einer Tangente der letzteren ein Punkt der Kurve C_p^π. Um die Zahl der Punkte P zu finden, für die zwei Tangenten der Einhüllenden zusammenfallen, bemerkt man, dass die Ordnung N der Parallelkurve zur Kurve C_p^π, deren Klasse k sei, sich berechnet zu $N=2(p+k)$; die Zahl von Schnittpunkten der Parallelkurve mit der Kurve $C_q^{\pi'}$ ist somit: $2q(p+k)$. Nach diesen Angaben giebt die Zeuthensche Formel für das Geschlecht π'' der Einhüllenden die Beziehung:

$$\begin{aligned} 2(\pi''-1) &= 2 \,.\, 2q(\pi-1)+2q(p+k) \\ \text{oder} \qquad \pi'' &= 1+2q(\pi-1)+q\,(p+k) \\ &(=1+2p(\pi'-1)+p\,(q+k')) \,. \end{aligned}$$

Bewegen sich die Endpunkte der konstanten Strecke $ab=r$ auf einer und derselben Kurve $f(xy)=0$ von der p^{ten} Ordnung, so ergiebt sich die Einhüllende der Verbindungslinie durch Elimination von $x, y, x'y'$ aus:

$$f(xy)=0 \tag{1.}$$

$$f(x'y')=0 \tag{2.}$$

$$(x-x')^2+(y-y')^2-r^2=0 \tag{3.}$$

$$ux+vy+1=0 \tag{4.}$$

$$ux'+vy'+1=0 \tag{5.}$$

$$u(x-x')+v(y-y')=0 \,. \tag{5′.}$$

Eliminiert man $(x'y')$ aus (2.), (3.) und (5′), so wird die Resultante (6.)

$$R(xy\,uv)=0 \,. \tag{6.}$$

in Bezug auf (xy) vom Grade $2(p-1)$, in Bezug auf (u, v) vom Grade $2p$ und verschwindet mit $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$ $2p$fach.

Eliminiert man nun weiter (x, y) noch aus den Gleichungen (1.), (4.) und (6.), so wird die Resultante in Bezug auf (u, v) vom Grade:

$$(p-1)\,2p + 2p\,(p-1) = 4\,p\,(p-1)\ .$$

Nun zeigen aber sowohl die angegebenen Gleichungen als auch die geometrische Betrachtung, dass sämtliche Verbindungslinien entsprechender Punkte doppelt auftreten, d. h. die ganze Kurve erscheint doppelt; also ist ihre Klasse die Hälfte der oben gefundenen Zahl oder $= 2p\,(p-1)$.

Die Vielfachheit des Verschwindens der Resultante mit $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$ wird $2p\,(p-1)$, also ist die unendlich ferne Gerade $p\,(p-1)$ fache Tangente an der gesuchten Klassenkurve.

Hieran schliesst sich die weitere Aufgabe von Steiner:

„Ist die gegebene Kurve vom vierten Grad, C^4, so umhüllt die constante Sehne ab oder ihre Verlängerung eine Kurve 24ter Klasse. Beide Kurven haben $12 . 24 = 288$ gemeinschaftliche Tangenten, wovon 16 auf die vier Asymptoten der gegebenen Kurve fallen; von den 272 übrigen soll jede durch S_1 bezeichnet werden. Berührt eine der letzteren die gegebene Kurve etwa im Punkte α und schneidet sie in den Punkten β und γ, so liegt die constante Sehne entweder zwischen diesen Schnittpunkten oder zwischen einem derselben und dem Berührungspunkt, also entweder ist $\beta\gamma = ab$ oder es ist $\alpha\beta$ oder $\alpha\gamma = ab$. Im letzteren Falle berühren sich die Kurven im Punkte α und dann zählt S_1 für zwei gemeinschaftliche Tangenten. Bezeichnet man die Zahl der Fälle, wo $\alpha\beta$ oder $\alpha\gamma = ab$ mit m und die Zahl der Fälle, wo $\beta\gamma = ab$, durch n, so ist:

$$2m + n = 272\ .$$

Die Zahlen m und n zu finden."

Die Zahl m ergiebt sich als Zahl der Wertpaare (x, y), welche den Gleichungen genügen:

$$(1.)\qquad f(xy) = 0$$

$$(2.)\qquad x'\frac{\delta f}{\delta x} + y'\frac{\delta f}{\delta y} + z'\frac{\delta f}{\delta z} = 0$$

$$(3.)\qquad f(x'y') = 0$$

$$(4.)\qquad (x-x')^2 + (y-y')^2 - r^2 = 0$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die beiden Kurven, die gegebene und die Einhüllende, sich in den Punkten (x, y) berühren, da die (x, y), welche sich aus diesen vier Gleichungen berechnen nach Elimination von $(x'y')$ auch der Tangente der Einhüllenden, nämlich

$$ux + vy + 1 = 0$$

genügen, und zwar ist dabei (x, y) der Berührungspunkt.

Eliminiert man $(x'y')$ aus den Gleichungen (2.), (3.) und (4.), so wird die Resultante

$$(5.)\qquad R\,(xy) = 0$$

in (x, y) vom Grade

$$[R] = (3 . 4 - 2)\,2 + 2 . 4 - 2 . 2 = 24\ ,$$

also bekommt man für die gesuchte Zahl m als Zahl der gemeinschaftlichen Wertpaare (x, y) von (1.) und (5.):

$$m = 4 . 24 = 96 \quad \text{und somit}$$
$$n = 80 .$$

In Steiners gesammelten Werken findet sich im zweiten Band, p. 632 auch folgender nicht bewiesener Satz:

„Der Ort der Scheitel aller rechten Winkel, welche einer gegebenen Kurve k^{ter} Klasse umschrieben sind, ist eine Kurve $k^{2\text{ten}}$ Grades."

Die gesuchte Kurve ergiebt sich durch Elimination von $(u_1 v_1)$, $(u_2 v_2)$ aus den fünf Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (1.) & \varphi(u_1 v_1) = 0 \\ (2.) & \varphi(u_2 v_2) = 0 \\ (3.) & u_1 x + v_1 y + 1 = 0 \\ (4.) & u_2 x + v_2 y + 1 = 0 \\ (5.) & u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0 \end{array}$$

Eliminiert man (u_2, v_2) aus (2.), (4.) und (5.), so kommt eine Gleichung

$$(6.) \qquad \psi(u_1 v_1 \, xy) = 0$$

welche in $(u_1 v_1)$ und ebenso in $(x_1 y)$ vom k^{ten} Grade ist. Eliminiert man $(u_1 v_1)$ aus (1.), (3.) und (6.), so wird die Resultante

$$(7.) \qquad R_1(xy) = 0$$

vom Grade $k^2 + k^2 = 2k^2$.

In (7.) muss notwendig auch die Resultante von

$$\begin{array}{l} \varphi(u_1 v_1) = 0 \\ u_1 x + v_1 y + 1 = 0 \\ u_1{}^2 + v_1{}^2 = 0 \end{array}$$

enthalten sein, welche uneigentliche Lösungen ergiebt (denn sie stellt ja das Produkt der $2k$ Tangenten dar, die man von den imaginären Kreispunkten aus an die Kurve ziehen kann), also bleibt für die eigentliche Resultante noch der Grad:

$$2k^2 - 2k = 2k(k-1) .$$

Nun zeigt aber sowohl die geometrische Betrachtung als auch die analytische Behandlung, dass jeder Punkt des beregten geometrischen Ortes doppelt erzeugt wird, d. h. die ganze Kurve erscheint doppelt und ihre Ordnung ist daher nur die Hälfte der gefundenen Zahl, d. h. $n = k(k-1)$, wie auch einfach die Anwendung des Chaslesschen Korrespondenzprinzips ergiebt. Vom beliebigen Punkte P einer willkürlich gewählten Geraden g lassen sich an die gegebene Kurve k Tangenten legen. Senkrecht zu $(k-1)$ von diesen ziehe man die $(k-1)k$ möglichen Tangenten und ordne deren Schnittpunkte mit g dem k^{ten} Berührungsstrahle durch P zu. Auf diese Weise kann man auf g eine

$$[k(k-1), k(k-1)]$$

Korrespondenz erhalten; also wird die Zahl der Koinzidenzpunkte $= 2k(k-1)$, und da jeder Punkt der Kurve doppelt auftritt, ergiebt sich für die verlangte Ordnungszahl wieder $n = k(k-1)$, eine Formel, deren Richtigkeit im Gegensatz zu der von Steiner angegebenen, für den Fall $k = 2$ bestätigt wird.

Mit $k = 3$ wird der geometrische Ort eine Kurve sechster Ordnung. Von den drei Tangenten, die von einem Punkte der letzteren an die gegebene Kurve gehen, und wo-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von zwei auf einander senkrecht stehen, kann man die dritte eindeutig dem Punkte der Kurve sechster Ordnung zuordnen, so dass diese auch vom Geschlecht 1 wird.

Zum Schlusse dieses Abschnitts sei noch die algebraische Lösung der Aufgabe gebracht:

„Gegeben sei ein einfach unendliches Kurvenbüschel, das in M beweglichen Punkten, worunter die Punkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ sich befinden mögen, die Kurve f schneidet. Es soll die Anzahl derjenigen Paare von Schnittpunkten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ bestimmt werden, welche in Bezug auf einen beliebig gegebenen Kegelschnitt polar gelegen sind."

Ist $\varphi\,(xy) = 0$ eine Kurve des Büschels, so erhält man die gesuchte Zahl als Grad der Resultante in den Koeffizienten von φ, wenn man $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ aus folgenden Gleichungen eliminiert:

$$(1.)\qquad f_m\,(x_1 y_1) = 0$$
$$(2.)\qquad \varphi_n\,(x_1 y_1) = 0$$
$$(3.)\qquad f_m\,(x_2 y_2) = 0$$
$$(4.)\qquad \varphi_n\,(x_2 y_2) = 0$$
$$(5.)\qquad x_1 \frac{\delta\psi}{\delta x_2} + y_1 \frac{\delta\psi}{\delta y_2} + z_1 \frac{\delta\psi}{\delta z_2} = 0\ ,$$

wobei $\psi_2\,(xy) = 0$ einen beliebigen Kegelschnitt repräsentiert.

Die Elimination von $(x_2 y_2)$ aus (3.), (4.) und (5.) giebt eine Gleichung

$$(6.)\qquad \chi\,(x_1 y_1) = 0\ ,$$

welche in $x_1 y_1$ vom Grade M, in den Koeffizienten von φ vom Grade m wird. Eliminiert man $(x_1 y_1)$ aus (1.), (2.) und (6.), so kommt eine Resultante, welche in den Koeffizienten von φ bis zum Grade $2mM$ ansteigt. Diese muss jedenfalls auch den Faktor enthalten, dessen Verschwinden das Zusammenbestehen der 3 Gleichungen bedingt:

$$(1.)\qquad f(x_1 y_1) = 0$$
$$(2.)\qquad \varphi\,(x_1 y_1) = 0$$
$$(3.)\qquad x_1 \frac{\delta\psi}{\delta x_1} + y_1 \frac{\delta\psi}{\delta y_1} + z_1 \frac{\delta\psi}{\delta z_1} = 0\ ,$$

der also in den Koeffizienten von φ vom $2m^{\text{ten}}$ Grade ist; also bleibt für die eigentliche Resultante der Grad $2m\,(M-1)$ in den Koeffizienten von φ. Bemerkt man nun, dass das Verschwinden der Resultante sowohl die Bedingung ausdrücken muss, dass $x_1 y_1$ zu $x_2 y_2$ polar ist, als auch umgekehrt, d. h. dass dieselbe im Quadrat auftreten wird, so ersieht man als gesuchte Zahl die Hälfte des angegebenen Grades, d. h. $m\,(M-1)$. (Vgl. Brill, Math. Annalen, Bd. VIII, p. 622).

III.

Über einige involutorisch eindeutige Transformationen.

Gegeben sei eine Schar von Kurven s^{ter} Ordnung, welche in ϱ festen, in ihrer Lage von einander unabhängigen Basispunkten $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ bezw. $t_1, t_2, \ldots t_\varrho$fache Punkte (mit getrennten Tangenten) besitzen mögen. Die Bestimmungsstücke für die Kurven der Schar seien so beschaffen, dass jene Schar eine lineare zweifach unendliche ist, d. h. dass durch zwei weitere beliebig gewählte Punkte im allgemeinen nur noch eine Kurve der Schar gelegt werden kann. Ferner sei eine feste Kurve C_r n^{ter} Ordnung gegeben, welche in den $S_1, S_2, \ldots S_\varrho$ bezw. einen $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$fachen Punkt besitzen mag. Diejenigen Kurven C_s der Schar, welche durch einen beliebig angenommenen weiteren Punkt P der festen Kurve C_n gehen, schneiden sich noch in $s^2 - \Sigma t^2 - 1$ (wo sich das Summenzeichen Σ auf alle festen Basispunkte bezieht) Punkten Q, deren Lage von P abhängt und welche, wenn P auf der festen Kurve sich bewegt, selbst eine Kurve beschreiben. Es ist die Ordnung r dieser Kurve C_r und die Vielfachheit der Punkte, welche dieselbe in den festen Punkten S besitzt, zu bestimmen.

Eine beliebige Kurve des Netzes
$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_1 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0$$
geht durch einen weitern Punkt $P(xy)$ auf C_n, wenn:
$$(1.) \qquad \alpha_1 \varphi_1 (xy) + \alpha_2 \varphi_2 (xy) + \alpha_3 \varphi_3 (xy) = 0 \ .$$
Ist ein durch das Kurvenbüschel bestimmter weiterer Schnittpunkt $Q(x'y')$, so muss:
$$(2.) \qquad \alpha_1 \varphi_1 (x'y') + \alpha_2 \varphi_2 (x'y') + \alpha_3 \varphi_3 (x'y') = 0$$
eine Folge von Gleichung (1.) sein, was ausgedrückt ist durch das Verschwinden der Matrix:
$$(3.) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_1 (xy) & \varphi_2 (xy) & \varphi_3 (xy) \\ \varphi_1 (x'y') & \varphi_2 (x'y') & \varphi_3 (x'y') \end{matrix} \right\| = 0 \ .$$
Dazu tritt die Bedingung:
$$(4.) \qquad f_n(xy) = 0.$$
Die Elimination von (x, y) aus diesen drei Gleichungen (zwei Bedingungsgleichungen für das Verschwinden der Matrix und daneben Gleichung (4.)) giebt die Gleichung des geometrischen Orts unseres Punktes Q.

Was das Eliminationsresultat aus:
$$(5.) \qquad \begin{aligned} \varphi_1 (xy) \varphi_2 (x'y') - \varphi_1 (x'y') \varphi_2 (xy) &= 0 \\ \varphi_1 (xy) \varphi_3 (x'y') - \varphi_1 (x'y') \varphi_3 (xy) &= 0 \end{aligned}$$
und
$$(4.) \qquad f_n(xy) = 0$$
anbelangt, so wird die Resultante in $(x'y')$ vom Grade:
$$[R'] = 2s(ns - \Sigma at) - n \ .$$
Nun sind aus dieser Resultante noch diejenigen Faktoren abzusondern, welche wohl das Bestehen der Gleichungen (4.) und (5.) bedingen, nicht aber das Verschwinden der Matrix (3.) und Gleichung (4.). Denn das System (4.) und (5.) besteht auch, wenn:
$$\begin{aligned} \varphi_1 (xy) &= 0 \\ \varphi_1 (x'y') &= 0 \\ f_n (xy) &= 0 \ , \end{aligned}$$
d. h. für alle Werte, welche der Gleichung
$$\varphi_1 (x'y') = 0$$
genügen, also muss die Resultante aus (4.) und (5.) jedenfalls $\varphi_1 (x'y')$ als Faktor enthalten. Und da im allgemeinen jedem Punkte $(x'y')$ der reduzierten Resultante
$$R' (x'y') = 0$$
von (4.) und (5.) ein bestimmtes Wertepaar (xy) entspricht, muss der Faktor $\varphi_1 (x'y')$ für jeden nicht in die ϱ Schnittpunkte fallenden gemeinschaftlichen Punkt von
$$\begin{aligned} \varphi_1 (xy) &= 0 \\ f_n (xy) &= 0 \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in der Resultante auftreten, d. h. $(sn - \Sigma at)$ mal; also bleibt für den verlangten Grad der reduzierten Resultante aus (3.) und (4):

$$[R] = r = 2s\,(ns - \Sigma at) - n - s\,(ns - \Sigma at)$$

oder (6.) $$r = n\,(s^2 - 1) - s\Sigma at\,,$$

ein Ausdruck, der für $s = 3, t_1 = t_2 = t_7 = 1, \varrho = 7$ in die Zahl des von Cayley (Math. Annalen, Bd. VIII, p. 360) „Geiser Cotterill Theorem" genannten Satzes übergeht.

Für die Vielfachheit r_i der Punkte, welche die Kurve $C_r = R(x'y') = 0$ in den ϱ festen Punkten erhält, kommt:

$$r_i = 2t_i\,(ns - \Sigma at) - a_i - t_i\,(ns - \Sigma at)$$

oder (7.) $$r_i = t_i\;(ns - \Sigma at) - a_i\;.$$

Verbindet man (6.) mit (7.), so erhält man noch die symmetrisch gestaltete Formel:

(8.) $$s\,(r_i + a_i) = t_i\,(r + n)\;.$$

Ausser für den Fall $s = 3$ lässt sich indes keine Anwendung finden, wie vorauszusehen war.

Auf welcher Kurve, kann man sich weiter fragen, muss sich der genannte Punkt P bewegen, dass ihm ein weiterer Schnittpunkt Q unendlich nahe rückt?

Sämtliche Kurven des Büschels durch den Punkt $P(xy)$ berühren sich in ihm, wenn die Gleichung

$$\alpha_1\varphi_1\,(xy) + \alpha_2\varphi_2\,(xy) + \alpha_3\varphi_3\,(xy) = 0$$

die weitere:

$$\alpha_1\varphi_1\,(x + dx, y + dy, z + dz) + \alpha_2\varphi_2\,(x + dx, \ldots) + \alpha_3\varphi_3\,(x + dx, \ldots) = 0$$

zur Folge hat, was ausgedrückt ist in dem Verschwinden der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1\,(xy) & \varphi_2\,(xy) & \varphi_3\,(xy) \\ \varphi_1\,(x + dz, y + dy, z + dz) & \varphi_2\,(x + dx, \ldots) & \varphi_3\,(x + dx, \ldots \end{matrix} \right\| = 0$$

oder:

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1,'(x) . x + \varphi_1\,'(y)\,y + \varphi_1\,'(z) . z & \varphi_2\,'(x) . x + \ldots . & \varphi_3\,'(x)\,x + \ldots . \\ \varphi_1\,'(x)\,dx + \varphi_1\,'(y)\,dy + \varphi_1\,'(z)\,dz & \varphi_2\,'(x)\,dx + \ldots . & \varphi_3\,'(x) . dx + \ldots . \end{matrix} \right\| = 0\;.$$

Wenn die einzelnen Determinanten dieser Matrix verschwinden, so lässt sich immer ein Faktor λ darart bestimmen, dass die drei Gleichungen:

$$\varphi_1\,'(x) . (dx + \lambda x) + \varphi_1\,'(y)\;(dy + \lambda y) + \varphi_1\,'(z)\;(dz + \lambda z) = 0$$
$$\varphi_2\,'(x) . (dx + \lambda x) + \varphi_2\,'(y) . (dy + \lambda y) + \varphi_2\,'(z)\;(dz + \lambda z) = 0$$
$$\varphi_3\,'(x) . (dx + \lambda x) + \varphi_3\,'(y) . (dy + \lambda y) + \varphi_3\,'(z) . (dz + \lambda z) = 0$$

neben einander bestehen. Aber dieses System von Gleichungen verlangt entweder, dass die Klammergrössen für sich gleich Null werden, d. h.

$$dx + \lambda x = 0$$
$$dy + \lambda y = 0$$
$$dz + \lambda z = 0\,,$$

oder dass die Determinante der Koeffizienten dieser Klammergrössen verschwinde. Das Nullwerden der vorgelegten Matrix ist also bedingt durch das Verschwinden der Matrix $\left\| \begin{matrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \end{matrix} \right\|$ oder der Determinante

$$\left| \begin{matrix} \varphi_1\,'(x) & \varphi_1\,'(y) & \varphi_1\,'(z) \\ \varphi_2\,'(x) & \varphi_2\,'(y) & \varphi_2\,'(z) \\ \varphi_3\,'(x) & \varphi_3\,'(y) & \varphi_3\,'(z) \end{matrix} \right|\;.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da die Matrix $\left\| \begin{matrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \end{matrix} \right\|$ im allgemeinen nicht verschwindet, bekommt man somit für den gesuchten Ort die Jakobische Kurve des Netzes, deren Ordnung $r = 3(s-1)$ ist und welche durch einen Grundpunkt S_i $(3t_i - 1)$mal hindurchgeht.

Ein ähnliches Verfahren löst auch einfach das zu dem gestellten analoge Problem im Raume.

Gegeben sei eine Schar von Flächen s^{ter} Ordnung, welche in ϱ festen, in ihrer Lage von einander unabhängigen Basispunkten $S_1, S_2, S_3, \ldots. S_\varrho$ bezw. $t_1, t_2, \ldots. t_\varrho$fache Punkte besitzen mögen. Die Bestimmungsstücke für die Flächen der Schar seien so beschaffen, dass jene Schar eine dreifach unendliche ist, d. h. dass durch drei weitere beliebig gewählte Punkte im allgemeinen nur noch eine Fläche der Schar gelegt werden kann. Ferner sei eine feste Fläche F_n n^{ter} Ordnung gegeben, welche in den Punkten $S_1, S_2, \ldots. S_\varrho$ bezw. a_1, a_2, a_ϱfache Punkte besitzen möge. Diejenigen Flächen der Schar, welche durch einen beliebig angenommenen Punkt P der festen Fläche F_n gehen, schneiden sich noch in $s^3 - \Sigma t^3 - 1$ Punkten Q, deren Lage von P abhängt, und welche, wenn P auf der festen Fläche sich bewegt, selbst eine Fläche beschreiben. Es ist die Ordnung dieser Fläche und die Vielfachheit der Punkte, welche dieselbe in den ϱ-Grundpunkten erhält, zu bestimmen.

Die Anwendung des Chaslesschen Korrespondenzprinzips liefert auch hier eine einfache synthetische Lösung, welche kurz der algebraischen Behandlung vorangehen möge.

Um die Ordnung der fraglichen Fläche zu bestimmen, nehme man drei beliebige weitere Punkte A, B, C an. Legt man dann durch einen Punkt einer willkürlich gewählten festen Geraden zwei Flächen des Gebüsches, welche durch B und C, resp. C und A hindurchgehen, so schneiden sich diese mit der festen Fläche Fn in $ns^2 - \Sigma at^2$ ausserhalb der Grundpunkte fallenden Punkten. Durch jeden dieser Punkte lässt sich eine weitere Fläche der Schar legen, welche durch A und B hindurchgeht. Man bekommt somit auf der genannten Geraden zum angenommenen Punkt $s(ns^2 - \Sigma at^2)$ entsprechende Punkte. Umgekehrt gehören zu einem dieser Punkte $2s(ns^2 - \Sigma at^2)$ Punkte der ersten Art. Wandert daher der Punkt P auf der festen Fläche, so erhält man auf der gedachten Geraden eine

$$[2s(ns^2 - \Sigma at^2), s(ns^2 - \Sigma at^2)]$$

Korrespondenz. Die Koinzidenzpunkte derselben sind teils Punkte der gesuchten Fläche F_r, teils solche der F_n, teils endlich Punkte derjenigen Fläche F_s der Schar, welche gleichzeitig durch die drei angenommenen Punkte A, B, C hindurchgeht. Von letzteren Punkten der Geraden absorbiert jeder $2(ns^2 - \Sigma at^2)$ Koinzidenzen; man hat daher die Beziehung:

$$3s(ns^2 - \Sigma at^2) = r + n + 2s(ns^2 - \Sigma at^2),$$

woraus sich die Ordnung der Fläche F_r bestimmt zu:

$$\text{(1.)} \qquad r = n(s^3 - 1) - s\Sigma at^2 .$$

Um die Vielfachheit der Punkte zu erfahren, welche die Fläche F_r in den ϱ Grundpunkten bekommt, lege man durch den Punkt S_i eine beliebige Ebene, welche den Tangentenkegel von F_n in diesem Punkte in a_i Geraden schneidet; ebenso die Tangentenkegel an die Flächen der Schar je in t_i Geraden. Wenn nun der Punkt P sich auf der vorgelegten Fläche F_n bewegt, so kann man, wie oben, zwischen den Mantellinien, welche von der gewählten Ebene ausgeschnitten werden, eine

$$[2t_i(ns^2 - \Sigma at^2), t_i(ns^2 - \Sigma at^2)]$$

Korrespondenz herstellen. Ihre Koinzidenzen entsprechen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) den a_i-Mantellinien von dem zu F_n gehörigen Tangentenkegel,

2) den t_i-Schnittlinien der Ebene mit dem Tangentenkegel derjenigen Fläche F_s, welche durch A, B und C zugleich hindurchgeht, jede wieder $2(ns^2 - \Sigma at^2)$fach als Koinzidenzstrahl zählend,

3) den r_i-Mantellinien vom Tangentenkegel an F_r in S_i, wo eben r_i noch zu bestimmen ist.

Man hat also: $3t_i(ns^2 - \Sigma at^2) = r_i + a_i + t_i(ns^2 - \Sigma at^2)$

oder

$$(2.) \qquad r_i = t_i(ns^2 - \Sigma at^2) - a_i \ .$$

Die gefundenen Resultate lassen sich leicht analytisch bestätigen.

Eine beliebige Fläche des Gebüsches geht durch den Punkt $P\,(xyz)$, wenn:

$$(1.) \qquad \alpha_1\varphi_1(xyz) + \alpha_2\varphi_2(xyz) + \alpha_3\varphi_3(xyz) + \alpha_4\varphi_4(xyz) = 0$$

Sie geht auch durch den weitern Punkt $(x'y'z')$, wenn die Gleichung

$$(2.) \qquad \alpha_1\varphi_1(x'y'z') + \alpha_2\varphi_2(x'y'z') + \alpha_3\varphi_3(x'y'z') + \alpha_4\varphi_4(x'y'z') = 0$$

eine Folge von (1.) ist, was sich ausdrückt durch das Verschwinden der Matrix:

$$(3.) \qquad \left\| \begin{matrix} \varphi_1(xyz) & \varphi_2(xyz) & \varphi_3(xyz) & \varphi_4(xyz) \\ \varphi_1(x'y'z') & \varphi_2(x'y'z') & \varphi_3(x'y'z') & \varphi_4(x'y'z') \end{matrix} \right\| = 0$$

Dazu kommt die Bedingung:

$$(4.) \qquad f_n(xyz) = 0$$

Wenn man aus dem System (3.) und (4.) nach dem bereits oben angegebenen Verfahren (xyz) eliminiert, bleibt in $(x'y'z')$ eine Gleichung vom Grade:

$$r = 3s(ns^2 - \Sigma at^2) - n - 2s(ns^2 - \Sigma at^2)$$

oder:

$$(5.) \qquad r = n(s^3 - 1) - s\Sigma at^2 \ .$$

Für die Vielfachheit der Punkte in den ϱ-Basispunkten kommt ebenso:

$$r_i = 3t_i(ns^2 - \Sigma at^2) - a_i - 2t_i(ns^2 - \Sigma at^2)$$

oder:

$$(6.) \qquad r_i = t_i(ns^2 - \Sigma at^2) - a_i \ .$$

Verbindet man (5.) mit (6.), so erhält man die symmetrisch gestaltete Formel:

$$s(r_i + a_i) = t_i(r + n) \ .$$

Ausser für den Fall $s = 2$ giebt es keine Anwendung. Was diesen Fall mit $s = 2$, $\varrho = 6$, $t_1 = t_2 = \ldots = t_6 = 1$ anbelangt, so zeigt die Formel (5.) für den Grad der gesuchten Fläche, dass er sich für jedes einfache a_i um 2 erniedrigt, d. h. in der Raumtransformation, die durch die dreifach unendliche Flächenschar vermittelt wird, entspricht jedem Grundpunkte eine Fläche zweiter Ordnung, welche nach (6.) in ihm selbst einen Doppelpunkt hat und durch die andern Grundpunkte einfach hindurchgeht, nämlich die Kegelfläche zweiter Ordnung, welche den betreffenden Grundpunkt zum Mittelpunkt hat und auch die fünf übrigen Basispunkte enthält. Da ferner einem beliebigen Punkte der Raumkurve dritter Ordnung durch die sechs Grundpunkte diese Raumkurve ganz entspricht, enthält die transformierte Fläche dieselbe $(3n - \Sigma a)$ fach. Ebenso ist ersichtlich, dass dieselbe Fläche z. B. die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 zur $n - (a_1 + a_2)$-fachen Geraden hat und analog die 14 andern Verbindungsgeraden der sechs Punkte. Nach diesen Angaben lässt sich auch leicht die Kurve bestimmen, welche der achte Schnittpunkt der Schar von Flächen zweiter Ordnung beschreibt, wenn der siebente eine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beliebige vorgelegte Kurve durchläuft. So geht bei dieser Transformation eine beliebige Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen in eine Raumkurve siebenter Ordnung über. Sie hat in den sechs Grundpunkten Doppelpunkte, die je den zwei Schnittpunkten der Geraden mit der Kegelfläche zweiter Ordnung entsprechen, welche in dem betreffenden Grundpunkt ihren Mittelpunkt hat und durch die übrigen fünf Punkte hindurchgeht. Oder einem beliebigen Kegelschnitte entspricht bei der gedachten Transformation eine Kurve vierzehnter Ordnung, welche durch die sechs Grundpunkte vierfach hindurchgeht.

Welchen Ort, lässt sich weiter fragen, muss der siebente Schnittpunkt beschreiben, damit ihm der achte immer unendlich nahe rückt?

Wie schon öfters erwähnt, hat die Gleichung:

$$\alpha_1 \varphi_1 (xyz) + \alpha_2 \varphi_2 (xyz) + \alpha_3 \varphi_3 (xyz) + \alpha_4 \varphi_4 (xyz) = 0$$

die weitere

$$\alpha_1 \varphi_1 (x + dx, y + dy, z + dz, \omega + d\omega) + \alpha_2 \varphi_2 (x + dx, \ldots) + \alpha_3 \varphi_8 (x + dx, \ldots.)$$
$$+ \alpha_2 \varphi_4 (x + dx, \ldots.) = 0$$

zur Folge, wenn ω die homogenmachende Veränderliche ist, und wenn

$$0 = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 (xyz) & \varphi_2 (xyz) & \varphi_3 (xyz & \varphi_4 (xyz) \\ \varphi_1 (x + dx, y + dy, z + dz, \omega + d\omega) & \varphi_2 (x + dx, \ldots.) & \varphi_3 (x + dx, \ldots) & \varphi_4 (x + dx, ..) \end{matrix} \right\|$$

Hieraus folgt bekanntlich

$$\begin{vmatrix} \varphi_1{}'(x) & \varphi_1{}'(y) & \varphi_1{}'(z) & \varphi_1{}'(\omega) \\ \varphi_2{}'(x) & \varphi_2{}'(y) & \varphi_2{}'(z) & \varphi_2{}'(\omega) \\ \varphi_3{}'(x) & \varphi_3{}'(y) & \varphi_3{}'(z) & \varphi_3{}'(\omega) \\ \varphi_4{}'(x) & \varphi_4{}'(y) & \varphi_4{}'(z) & \varphi_4{}'(\omega) \end{vmatrix} = 0$$

d. h. der gesuchte Ort ist die sogenannte Jakobische Fläche der φ, welche von der vierten Ordnung ist und in den sechs Grundpunkten Knotenpunkte hat. Dieselbe enthält, als Ort der Mittelpunkte aller Kegelflächen zweiter Ordnung durch die sechs Punkte, auch die fünfzehn Kanten des Sechsecks, sowie die zehn Durchschnittslinien seiner zehn Paar Gegenebenen. Um die Lage der kubischen Raumkurve durch die sechs Punkte auf der zu betrachtenden Fläche zu untersuchen, geht man mit Vorteil umgekehrt von der Raumkurve aus mit der Gleichung:

$$x : y : z : \omega = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1 \; .$$

Sind φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 vier beliebige Flächen zweiter Ordnung durch sechs Punkte der Raumkurve, so ist das Flächengebüsch dargestellt durch:

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha 2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 = 0 \; .$$

Nimmt man speziell:
$$\varphi_2 \equiv yz - \omega x = 0$$
$$\varphi_3 \equiv zx - y^2 = 0$$
$$\varphi_4 \equiv y\omega - z^2 = 0 \; ,$$

so kann man sich bei der vorliegenden Untersuchung für φ_1 noch eine ganz beliebige Fläche zweiter Ordnung denken und bekommt somit für die Jakobische Fläche:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1{}'(x) & \varphi_1{}'(y) & \varphi_1{}'(z) & \varphi_1{}'(\omega) \\ -\omega & z & y & -x \\ z & -2y & x & 0 \\ 0 & \omega & -2z & y \end{vmatrix} = 0,$$

mittelst welcher Form man leicht bestätigt, dass die Raumkurve auf der Fläche liegt. Aber auch die weitere von Herrn Reye (in seiner Geometrie der Lage II. Teil p. 250)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nachgewiesene Eigenschaft, dass die Raumkurve Asymtotenkurve der Fläche ist, ergiebt sich aus der aufgestellten Flächengleichung einfach. Denn eine beliebige Tangente der Kurve ist:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^3 + 3\varrho\lambda^2 \\ y &= \lambda^2 + 2\varrho\lambda \\ z &= \lambda \;\; + \varrho , \end{aligned}$$

wo ϱ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Bei der Berechnung der Schnittpunkte der Tangente mit der Fläche sieht man sofort, dass der Faktor ϱ^3 heraustritt, d. h. jede Tangente schneidet die Fläche in drei zusammengefallenen Punkten, oder die kubische Raumkurve ist Asymptotenkurve der Fläche.

IV.

Spezial-Punktgruppen in der Ebene. Singuläre Korrespondenzen.

Wie schon oben erwähnt, treten spezielle Punktgruppen bei mehrdeutigen ebenen Transformationen auf. Für den einfachen Fall einer (1,3) Transformation:

$$\begin{aligned} f_1(xy) &= \varrho f_3(x'y') \\ \varphi_1(xy) &= \varrho\varphi_3(x'y') \\ \psi_1(xy) &= \varrho\psi_3(x'y') \end{aligned}$$

wo die f_1, φ_1, ψ_1 Funktionen ersten Grades in den Variabeln (x, y), die f_3, φ_3, ψ_3 Funktionen dritten Grades in $(x'y')$ darstellen, bestimmt man aus:

$$\left\| \begin{matrix} f_1(xy) & \varphi_1(xy) & \psi_1(xy) \\ f_3(x'y') & \varphi_3(x'y') & \psi_3(x'y') \end{matrix} \right\| = 0$$

$16 - 1 . 3 = 13$ sich selbst entsprechende Punkte, d. h. solche, für welche $x = x'$, $y = y'$ ist.

Vermöge ihrer Definition besitzen diese 13 Grundpunkte die besondere Eigenschaft, nur ein Netz von Kurven vierter Ordnung zu bestimmen, welches dargestellt ist durch:

$$\alpha_1(\varphi_1\psi_3) + \alpha_2(\psi_1 f_3) + \alpha_3(f_1\varphi_3) = 0 ,$$

wo zur Abkürzung:

$$(\varphi_1\psi_3) = \varphi_1(xy)\,\psi_3(xy) - \psi_1(xy)\,\varphi_3(xy)$$

gesetzt ist, und α_1, α_2, α_3 willkürliche Parameter repräsentieren.

Durch solche Transformationen kann man also immer zu Systemen von Punkten gelangen, welche gegen die Erwartung einem Kurvennetze angehören. Und wie bereits in der Einleitung erwähnt, findet man solche besondere Punktgruppen auch bei eindeutigen Flächenabbildungen auf Ebenen. So führt Cayley in seiner Bemerkung über spezielle Punktsysteme (Proceed. Math. Soc. Dec. 1870) einige interessante Beispiele an, welche Clebsch und Herr Nöther bei ihren Flächenabbildungen gefunden haben.

Im folgenden werde ich Punktpruppen von der gewünschten Eigenschaft direkt aufsuchen und sie nach Lage und Zahl genau bestimmen.

Durch $\binom{n+2}{2} - 2$ beliebig gegebene Punkte geht ein Büschel von Kurven n^{ter} Ordnung, welches noch $\binom{n-1}{2}$ weitere Punkte mitbestimmt; oder nimmt man $\binom{n+2}{2} - 3$ beliebige Punkte fest an und lässt einen $\left(\binom{n+2}{2} - 2\right)^{\text{ten}}$ Punkt variieren, so gehören zu jeder beliebigen Lage dieses weiteren Punkts noch $\binom{n-1}{2}$ Punkte, durch welche sämtliche Kurven des Büschels mit den $\binom{n+2}{2} - 3 + 1$ Grundpunkten hindurchgehen.

Nimmt man aber bloss $\binom{n+2}{2} - 4$ Punkte willkürlich an, so wird die Frage von Interesse sein:

Giebt es nicht besondere Lagen eines weitern Punkts, dass alle Kurven n^{ter} Ordnung, welche man durch die $\binom{n+2}{2} - 4 + 1$ vorliegenden Punkte hindurchschickt, noch eine Anzahl weiterer Schnittpunkte besitzen?

Legt man durch die $\binom{n+2}{2} - 4$ beliebig gewählten Punkte irgend vier Kurven n^{ter} Ordnung mit den Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, so ist, wenn zwischen den Ausdrücken φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 keine lineare Relation besteht, jede fünfte Kurve darstellbar durch die Form:

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \alpha_4 \varphi_4 = 0 \,, \tag{1.}$$

wo die α veränderliche Parameter bedeuten. Das Kurvengebüsch (1.) wird auf ein Netz reduziert, wenn man diejenigen Kurven betrachtet, welche durch den gesuchten $\binom{n+2}{2} - 3^{\text{ten}}$ Punkt (xy) hindurchgehen, für welche also:

$$\alpha_1 \varphi_1 (xy) + \alpha_2 \varphi_2 (xy) + \alpha_3 \varphi_3 (xy) + \alpha_4 \varphi_4 (xy) = 0 \,. \tag{2.}$$

Es wurde aber verlangt, dass alle diese Kurven durch einen bestimmten andern Punkt $(x'y')$ gehen sollten, d. h. dass aus der Gleichung (2.) immer die andere folgen sollte:

$$\alpha_1 \varphi_1 (x'y') + \alpha_2 \varphi_2 (x'y') + \alpha_3 \varphi_3 (x'y') + \alpha_4 \varphi_4 (x'y') = 0 \,. \tag{3.}$$

Dies ist wieder nur möglich, wenn die vier Gleichungen bestehen

$$\varphi_i (xy) = \lambda \varphi_i x'y') \quad {\scriptstyle (i = 1, 2, 3, 4)} \tag{4.}$$

oder wenn die Determinanten der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1 (xy) & \varphi_2 (xy) & \varphi_3 (xy) & \varphi_4 (xy) \\ \varphi_1 (x'y') & \varphi_2 (x'y') & \varphi_3 (x'y') & \varphi_4 (x'y') \end{Vmatrix} = 0 \tag{5.}$$

verschwinden, was drei von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent ist. Im allgemeinen wird also einem Punkte (xy) kein weiterer bestimmter Schnittpunkt $(x'y')$ zukommen. Bildet man aber die Resultante aus den Bedingungsgleichungen (5.) in Bezug auf $(x'y')$, so zeigen alle Punkte der resultierenden Gleichung

$$R (xy) = 0$$

die ausgezeichnete Eigenschaft, einen weitern Schnittpunkt $(x'y')$ mitzubestimmen.

Die Lösungen der Matrix (5.) sind jedenfalls enthalten unter den gemeinschaftlichen Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned} \varphi_1 (x'y') \varphi_2 (xy) - \varphi_1 (xy) \varphi_2 (x'y') &= 0 \\ \varphi_1 (x'y') \varphi_3 (xy) - \varphi_1 (xy) \varphi_3 (x'y') &= 0 \\ \varphi_3 (x'y') \varphi_4 (xy) - \varphi_3 (xy) \varphi_4 (x'y') &= 0 \,. \end{aligned} \tag{6.}$$

(Vgl. Math. Annalen Bd. V p. 378, wo Herr **Brill** allgemeine Formeln für die Lösungen einer gleich Null gesetzten Matrix mit verschiedenartigen Elementen aufstellt.)

Was die linken Seiten von (6.) anbelangt, so sieht man, dass sie als Funktionen in $(x'y')$ sowie in (x, y) für die $\binom{n+2}{2} - 4$ festen Punkte einfach verschwinden, was auch für $\left\{ \begin{matrix} x = x' \\ y = y' \end{matrix} \right\}$ der Fall ist. Die Elimination von $(x'y')$ aus (6.) giebt daher eine Resultante $R_1 (xy)$, deren Grad, resp. die Vielfachheit des Verschwindens in den festen Punkten man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nach den oben angegebenen Formeln I und II bestimmen kann. Der Grad $[R_1]$ der Resultante wird:

$$[R_1] = 3n\left[n^2 - \left(\binom{n+2}{2} - 4\right) - 1\right] - 3n + 3\,.$$

Das Gleichungensystem (6.) besteht aber auch neben einander, wenn:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x'y') = 0 \\ \varphi_1(xy) = 0 \\ \varphi_3(xy)\,\varphi_4(x'y') - \varphi_3(x'y')\,\varphi_4(xy) = 0 \end{gathered}$$

d. h. für alle Werte (x, y), welche der Gleichung $\varphi_1(xy) = 0$ genügen, denn zu jedem solchen Wertepaar (x, y) kann man ja das entsprechende $(x'y')$ berechnen; also muss die Resultante aus (6.) jedenfalls $\varphi_1(xy)$ als Faktor enthalten. Und da im allgemeinen jedem Wertepaar (x, y) der reduzierten Resultante ein bestimmtes $(x'y')$ entspricht, muss der Faktor $\varphi_1(xy)$ für jeden nicht in die $\binom{n+2}{2} - 4$ festen Punkte oder den Punkt $(x'y')$ fallenden Schnittpunkt von

$$\begin{gathered} \varphi_1(x'y') = 0 \quad \text{und} \\ \varphi_3(x'y')\,\varphi_4(xy' - \varphi_3(xy)\,\varphi_4(x'y') = 0 \end{gathered}$$

in der Resultante auftreten, d. h.

$$n^2 - \left(\binom{n+2}{2} - 4\right) - 1 \text{ mal.}$$

Aus demselben Grunde wird auch der Faktor $\varphi_3(xy)$ in der $n^2 - \left(\binom{n+2}{2} - 3\right)^{\text{ten}}$ Potenz in der gedachten Resultante auftreten. Es sind nun $\varphi_1(xy)$ und $\varphi_3(xy)$ Faktoren, welche in der angegebenen Potenz in der Resultante aus (6.) erscheinen und nicht das Verschwinden der Matrix (5.) bedingen, daher aus der Resultante $R_1(xy)$ abzusondern sind, um die Funktion $R(xy)$ zu erhalten, welche, gleich Null gesetzt, das Verschwinden der einzelnen Determinanten der Matrix (5.) für ein gewisses Wertepaar $(x'y')$ ausdrückt. Für die gewünschte Resultante $R(xy)$ bleibt somit der Grad:

$$\begin{aligned} [R] &= 3n\left[n^2 - \left(\binom{n+2}{2} - 4\right) - 1\right] - 3n + 3 \\ &\quad - 2n\left[n^2 - \left(\binom{n+2}{2} - 4\right) - 1\right] \\ &= \frac{(n-3)\,(n^2-2)}{2}\,. \end{aligned}$$

Dies ist somit die Ordnung der gesuchten Kurve, auf der sich der $\binom{n+2}{2} - 3^{\text{te}}$ Punkt bewegen muss, damit durch ihn ein weiterer Schnittpunkt mitbestimmt werde, oder damit die zwei Punkte als nur für eine Bedingung zählend mit $\binom{n+2}{2} - 4$ beliebig gewählten Punkten noch die Grundpunkte eines Netzes von Kurven n^{ter} Ordnung bilden.

Für die Vielfachheit des Verschwindens der Resultante $R(xy)$ in den $\binom{n+2}{2} - 4$ festen Punkten bekommt man mit Benützung der Formel II nach Abzug der Potenzen der oben genannten Faktoren, welche in diesen Punkten einfach verschwinden:

$$\begin{aligned} [R_i] &= 3\left[n^2 - \left(\binom{n+2}{2} - 4\right) - 1\right] - 3 + 1 \\ &= \frac{n\,(n-3)}{2}\,. \end{aligned}$$

Die gefundenen Ausdrücke für $[R]$ und $[R_i]$ zeigen, dass die Ordnung n der Kurven nicht kleiner als 4 werden darf, wenn das Problem keinen Widerspruch (nicht Null oder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gar eine negative Anzahl Lösungen) enthalten soll. Auch die Annahme einer endlichen Zahl von siebenten Punkten, welche die Eigenschaft haben, dass alle Kurven dritter Ordnung, welche durch sechs beliebige Punkte und diesen siebenten hindurchgehen, einen achten Schnittpunkt mitbestimmen, so dass durch diese acht Punkte ein Netz von Kurven dritter Ordnung gienge, erweist sich z. B. sofort als unmöglich, wenn man sich diese acht Punkte als Hauptpunkte einer rationalen Transformation denkt, vermöge deren jeder beliebigen Geraden eine unikursale Kurve dritter Ordnung entsprechen müsste.

Mit $n = 4$ bekommt man als Ort der Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass alle Kurven vierter Ordnung, die durch elf beliebig gewählte Basispunkte und einen solchen zwölften hindurchgehen, noch einen dreizehnten Schnittpunkt mitbestimmen, eine Kurve siebenter Ordnung, welche in den 11 festen Punkten Doppelpunkte hat.

Die Matrix (5.) zeigt eine Reciprocität zwischen den Punkten (xy) und $(x'y')$. Diese Punkte liegen daher immer beide auf den gesuchten Ortskurven, welche lauter solche Punktepaare enthalten.

Die Kurven, deren Gleichungen als Resultanten sich ergeben, sind auch geometrisch vollständig bestimmt. So hat z. B. jene Kurve siebenter Ordnung die elf Basispunkte zu Doppelpunkten, was 33 Bedingungen für die Koeffizienten der Kurve siebenter Ordnung giebt. Da nun eine Kurve siebenter Ordnung erst durch 35 Bedingungen völlig bestimmt ist, so sind noch wenigstens zwei weitere Punkte nötig, um die hier zu betrachtende Kurve geometrisch zu bestimmen. Solche Punkte konstruiert man leicht in grösserer Anzahl, indem man spezielle Kurven vierter Ordnung durch die elf Basispunkte legt. Es giebt noch ein Büschel von Kurven vierter Ordnung, welche in einem Grundpunkt einen Doppelpunkt haben und durch die zehn übrigen einfach hindurchgehen. Diesen Kurven sind dadurch in der That dreizehn Bedingungen auferlegt, und ihre Gleichungen haben also die Form: $f + \lambda g = 0$; sie müssen sich also notwendig in sechzehn festen Punkten schneiden. Von diesen werden vierzehn durch die elf Basispunkte absorbiert; es bleiben also zwei weitere übrig, welche Punkte der Kurve siebenter Ordnung sind. Wenn man also auf die 11 verschiedenen Arten solche zwei Punkte konstruiert, hat man nicht nur 22 weitere Punkte der Kurve siebenter Ordnung, sondern auch gleich elf Tangenten der Enveloppe, welche von den Verbindungslinien der Punktepaare beschrieben wird. Ebenso lassen sich auch im allgemeinen Fall mittelst spezieller Kurven weit mehr Punkte der zu bestimmenden Kurve angeben, als zu ihrer Konstruktion nötig sind.

Wie bereits hervorgehoben, bilden die Punktepaare auf den gedachten Kurven eine Involution. Es wird nun von Interesse sein (bei der späteren Deutung der ausgeführten Operationen für die eindeutigen Flächenabbildungen auf Ebenen und namentlich bei der Betrachtung der Punktinvolutionen als singuläre Korrespondenzen), die Anzahl der zusammenfallenden Punkte dieser Involution zu kennen. Damit ist dann zugleich die Zahl der $\binom{n+2}{2} - 3^{\text{ten}}$ Punkte gefunden, welche die Eigenschaft haben, dass durch $\binom{n+2}{2} - 4$ beliebig gewählte Punkte und einen solchen $\binom{n+2}{2} - 3^{\text{ten}}$ Punkt noch eine zweifach unendliche Schar von Kurven n^{ter} Ordnung hindurchgeht, die sich alle im letztern Punkte berühren.

Die beregten Punkte bekommt man als gemeinschaftliche Lösungen der gleich Null gesetzten Matrix:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$0 = \left\| \begin{array}{cccc} \varphi_1(xy) & \varphi_2(xy) & \varphi_3(xy) & \varphi_4(xy) \\ \varphi_1(x+dx, y+dy, z+dz) & \varphi_2(x+dx, \ldots.) & \varphi_3(x+dx, \ldots.) & \varphi_4(x+dx, \ldots.) \end{array} \right\|$$

oder:

$$0 = \left\| \begin{array}{cccc} \varphi_1'(x).x + \varphi_1'(y).y + \varphi_1'(z).z & \varphi_2'(x).x + \ldots. & \varphi_3'(x)\,x + \ldots. & \varphi_4'(x)\,x + \ldots. \\ \varphi_1'(x).dx + \varphi_1'(y)\,dy + \varphi_1'(z)\,dz & \varphi_2'(x)\,dx + \ldots. & \varphi_3'(x).dx + \ldots. & \varphi_4'(x)\,dx + \ldots. \end{array} \right\|$$

Da die Matrix $\left\| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ dx & dy & dz \end{array} \right\|$ im allgemeinen nicht verschwindet, wird die gewünschte der zusammenfallenden Punkte jedenfalls enthalten sein unter den gemeinschaftlichen Lösungen des Systems:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \\ \varphi_1'(y) & \varphi_2'(y) & \varphi_3'(y) & \varphi_4'(y) \\ \varphi_1'(z) & \varphi_2'(z) & \varphi_3'(z) & \varphi_4'(z) \end{array} \right\| = 0 .$$

Das Verschwinden dieser Matrix zählt für zwei von einander unabhängige Gleichungen. Benützt man zur Bestimmung der gesuchten Wertepaare die zwei Determinanten $(123)_3$ und $(234)_3$, welche aus den drei ersten, resp. den drei letzten Reihen gebildet sind, so sind davon noch die gemeinschaftlichen Lösungen der Matrix $(23)_3$, welche aus den mittleren zwei Vertikalreihen besteht, als nur die zwei Determinanten $(123)_3$ und $(234)_3$ und nicht auch die Matrix befriedigend, abzuziehen. Also wird die Zahl der zusammenfallenden Punktepaare:

$$(3n-3)^2 - [(2n-2)^2 - (n-1)^2] = 6\,(n-1)^2 .$$

Unter diesen $6\,(n-1)^2$ Lösungen befinden sich jedoch auch die $4\left[\binom{n+2}{2} - 4\right]$ Schnittpunkte, welche von den zwei benützten Determinanten in die $\binom{n+2}{2} - 4$ Grundpunkte fallen; also bleibt für die gewünschte Zahl δ der Doppelpunkte der besagten Involution:

$$\begin{aligned} \delta &= 6\,(n-1)^2 - 4\left[\binom{n+2}{2} - 4\right] \\ &= 2\,(n-3)\,(2n-3) \end{aligned}$$

$$\text{z. B. } n = 4, \ \delta = 10 .$$

In der obigen Matrix waren die $\varphi_i(xy)$ ganze Funktionen, welche in gewissen Ausnahmepunkten der Ebene einfach verschwanden. Gehen die Kurven $\varphi_i(xy) = 0$ durch feste Punkte mehrfach hindurch, so kennt man zwar auch im allgemeinen Falle die Vielfachheit des Verschwindens der Funktionaldeterminanten $(123)_3$ und $(234)_3$. (Eine Bestimmung dieser Vielfachheit findet sich z. B. in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie S. 383). Dagegen dürften hier vielleicht einige Bemerkungen betreffs der Auffindung der gemeinschaftlichen Lösungen der Matrix $(23)_3$ nicht überflüssig sein. Hat man allgemein zwei Kurven $f_n(xy) = 0$ und $\varphi_n(xy) = 0$, welche z. B. im Nullpunkte je einen $i$fachen Punkt besitzen, und bezeichnet man die Gesammtheit der Glieder $i$ter Dimension hinsichtlich x, y durch den Index i, so erhalten f und φ die Form:

$$\begin{aligned} f &= f_i + f_{i+1} + \ldots\ldots + f_n \\ \varphi &= \varphi_i + \varphi_{i+1} + \ldots\ldots + \varphi_n . \end{aligned}$$

Damit bekommt man für die Matrix:

$$\left\| \begin{array}{ccc} f'(x) & f'(y) & f'(z) \\ \varphi'(x) & \varphi'(y) & \varphi'(z) \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} f_i'(x) + f_{i+1}'(x) + \ldots. & f_i'(y) + f_{i+1}'(y) + \ldots. & (n-i)\,z^{n-i-1} f_i + \ldots. \\ \varphi_i'(x) + \varphi_{i+1}'(x) + \ldots. & \varphi_i'(y) + \varphi_{i+1}'(y) + \ldots. & (n-i)\,z^{n-i-1} \varphi_i + \ldots. \end{array} \right\| .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Glieder niederster Dimension hinsichtlich (x, y) für die beiden Determinanten (1, 2) und (13) sind bezw.

$$f_i'(x)\,\varphi_i'(y) - \varphi_i'(x)\,f_i'(y) \quad \text{und}$$
$$(n-i)\left\{ f_i'(x)\,\varphi_i \quad - \quad \varphi_i'(x)\,f_i \right\}.$$

Der letzte Ausdruck kann auch geschrieben werden:

$$= (n-i)\left\{ f_i'(x)\,.\,\frac{1}{i}\left(x\varphi_i'(x) + y\varphi_i'(y)\right) - \varphi_i'(x)\,.\,\frac{1}{i}\left(x f_i'(x) + y f_i'(y)\right)\right\}$$
$$= \frac{n-i}{i}\,.\,y\left\{ f_i'(x)\,\varphi_i'(y) - \varphi_i'(x)\,f_i'(y)\right\}.$$

Die beiden Kurven

$$f'(x)\,\varphi'(y) - \varphi'(x)\,f'(y) = 0 \quad \text{und}$$
$$f'(x)\,\varphi'(z) - \varphi'(x)\,f'(z) = 0$$

haben daher bei obigen Annahmen im Nullpunkt $i(i+1) + i = i(i+2)$ Schnittpunkte gemeinschaftlich, was bei Abzählungen zu berücksichtigen ist.

Im Anschluss an die vorhergehende Aufgabe lässt sich auch leicht die Klasse der Kurve bestimmen, welche von den Verbindungslinien entsprechender Punkte der Involution beschrieben wird. Im allgemeinen Falle hat man auf der gedachten Kurve der $\frac{(n-3)(n^2-2)}{2}$ten Ordnung eine involutorische (1, 1) Korrespondenz mit $\delta = 2(n-3)(2n-3)$ Koinzidenzpunkten. Ein beliebiger Strahlbüschel, dessen Strahlen nach entsprechenden Punkten der Involution hinlaufen und also eine $\left[\frac{(n-3)(n^2-2)}{2}, \frac{(n-3)(n^2-2)}{2}\right]$ Korrespondenz bilden, enthält nach dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip $(n-3)(n^2-2)$ Koinzidenzstrahlen. Unter diesen Koinzidenzen befinden sich auch die $\delta = 2(n-3)(2n-3)$ Verbindungslinien nach den oben bestimmten Koinzidenzstellen der Punktinvolution. Für die Klasse k der gewünschten Kurve scheint daher noch $(n-3)(n^2-2) - 2(n-3)(2n-3) = (n-3)(n-2)^2$ zu bleiben. Allein infolge der involutorischen Korrespondenz tritt jede Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte doppelt auf, d. h. die ganze Kurve erscheint doppelt; man bekommt somit für die Klasse k der Einhüllenden der Verbindungsgeraden zusammengehöriger Punkte die Hälfte, d. h.

$$k = \frac{(n-3)(n-2)^2}{2}$$

z. B. für $n = 4$ ist $k = 2$.

Nach der oben bewiesenen Zeuthenschen Korrespondenzformel

$$z - z' = 2\alpha'(p-1) - 2\alpha(p'-1) - r\alpha' + r'\alpha$$

lässt sich auch einfach das Geschlecht der Enveloppe bestimmen. Einem Punktepaar der involutorischen Kurve entspricht ein Punkt der zugehörigen Einhüllenden. Für den einfachen Fall $n = 4$ bekommt man z. B. mit

$$\alpha = 2,\ \alpha' = 1,\ z = 10,\ z' = 0,\ p = 4$$
$$10 = 2.3 - 4p' + 4,$$
$$\text{d. h. } p' = 0\,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Deutet man die φ_i als Koordinaten einer Fläche, indem man diese Funktionen vier Grössen ξ_i proportional setzt, so liefert das hier angewandte Verfahren eine Reihe von Resultaten über eindeutige Abbildung von Flächen auf Ebenen. Die Punkte einer Doppelkurve der abzubildenden Fläche:

$$\begin{aligned} \varrho\xi_1 &= \varphi_1\,(xy) \\ \varrho\xi_2 &= \varphi_2\,(xy) \\ \varrho\xi_3 &= \varphi_3\,(xy) \\ \varrho\xi_4 &= \varphi_4\,(xy) \end{aligned}$$

bilden sich in der Ebene durch je zwei Punkte ab. Sind also (xy) und $(x'y')$ zwei solche zusammengehörige Punkte, denen derselbe Punkt ξ entspricht, so hat man:

$$\varphi_i\,(xy) = \lambda\varphi_i\,(x'y')_{\,(i\,=\,1,\,2,\,3,\,4)}$$

wo λ einen unbestimmten Faktor bedeutet, und die Abbildung der Doppelkurve ist somit auf das ausgeführte Eliminationsproblem zurückgeführt.

Sind z. B. die Abbildungsfunktionen φ vom vierten Grade mit elf gemeinschaftlichen Verschwindungswerten, so bilden sie eine Fläche fünfter Ordnung mit einer Doppellinie dritten Grades ab, die keine ebene Kurve sein kann. Für die Abbildung der Doppelkurve ergiebt sich also eine Kurve siebenter Ordnung, welche in den elf Fundamentalpunkten Doppelpunkte hat, wie auch Clebsch (Math. Annalen Bd. I p. 253) bei seinen eindeutigen Flächenabbildungen gefunden hat. Die zehn Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe bilden diejenigen Punkte der Doppelkurve ab, welche sogenannte Kuspidal- oder Zwickpunkte für die Fläche sind. Die zehn doppelt unendlichen Scharen von Kurven vierter Ordnung, die durch die elf Punkte einfach hindurchgehen und sich im zwölften berühren, entsprechen den zehn doppelt unendlich vielen ebenen Schnitten, welche in den Zwickpunkten der Fläche Rückkehrpunkte haben. Die Einhüllende der Verbindungslinien entsprechender Punkte der Involution ist die Abbildung der Schnittkurve der Tangentenfläche der Doppellinie mit der abgebildeten Fläche. Ihre Tangenten entsprechen eindeutig den Punkten der Doppelkurve, und sie hat daher mit ihr gleiches Geschlecht. Nach der erwähnten Zeuthenschen Korrespondenzformel ist also mit dem Geschlecht der Abbildung der Doppelkurve auch das Geschlecht der letzteren selbst bestimmt. Aber das Geschlecht ihrer Abbildung wird sich unmittelbar angeben lassen, wenn dieselbe nicht zerfällt und keine ausserhalb der Fundamentalpunkte liegenden mehrfachen Punkte besitzt, d. h. im Falle, dass die Doppellinie selbst eine zusammenhängende Kurve ist und keine wirklichen vielfachen Punkte hat. Ob diese Voraussetzungen zutreffen, und, wenn nicht, wie man die Zahl der scheinbaren und wirklichen singulären Punkte der Doppelkurve bestimmen kann, ergiebt sich meistens mit Benützung der Thatsache, dass sich wirkliche Doppel- und Rückkehrpunkte der Raumkurve wieder als solche abbilden. Untersucht man z. B. die Fläche fünfter Ordnung:

$$\begin{aligned} \varrho\xi_1 &= \varphi_1\,(xy) \\ \varrho\xi_2 &= \varphi_2\,(xy) \\ \varrho\xi_3 &= \varphi_3\,(xy) \\ \varrho\xi_4 &= \varphi_4\,(xy)\ , \end{aligned}$$

wo die φ Funktionen vierten Grades mit einem doppelten und sieben einfachen Nullpunkten darstellen, so findet man nach dem mehrfach ausgeführten Verfahren für die Abbildung der Doppelkurve eine Kurve siebenter Ordnung, welche den doppelten Basis-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

punkt zum dreifachen Punkte, die einfachen Basispunkte dagegen zu Doppelpunkten hat. Die Punktinvolution auf der abgebildeten Doppelkurve besitzt acht Doppelpunkte, und somit die Doppelkurve selbst acht Zwickpunkte der Fläche. Besitzt die Doppellinie, welche jedenfalls von der vierten Ordnung ist, h scheinbare und d wirkliche Doppel- und Rückkehrpunkte, so wird deren Geschlecht:

$$p' = 3 - d - h\ ,$$

das Geschlecht ihrer Abbildung:

$$p = 5 - d\ .$$

Durch Anwendung der Zeuthenschen Korrespondenzformel bekommt man daher für d und h die Gleichung:

$$8 = 2(5 - 1 - d) - 4(3 - 1 - d - h)$$

oder: $d + 2h = 4$.

Man braucht sich also nur an die Raumkurven vierter Ordnung zu erinnern, deren scheinbare und wirkliche Doppelpunkte der letzten Gleichung genügen. Die einzige Möglichkeit $d = 0$, $h = 2$ zeigt die Doppellinie als Raumkurve vierter Ordnung erster Species. Die weitere Diskussion der betrachteten Fläche, die Bestimmung der möglichen Kurven und Kurvenscharen auf derselben u. s w. wurde von Clebsch (Abhandl. der K. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, Bd. 15) nach den von ihm im ersten Band der Math. Annalen mitgeteilten Methoden selbst ausgeführt.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, spielen die Punktinvolutionen auf den Abbildungen der Doppelkurven unikursaler Flächen auch in der Theorie der Korrespondenzen eine hervorragende Rolle. Mannigfache Beispiele zeigten, dass die involutorischen (1, 1) Korrespondenzen im allgemeinen nicht mehr der bekannten Formel

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma$$

für die Anzahl der Koinzidenzpunkte einer $(\alpha, \beta)\gamma$ Korrespondenz auf einer Kurve vom Geschlecht p genügten. Die nähere Betrachtung zeigt auch leicht die Verschiedenheit des Charakters dieser involutorischen Punktreihen von dem der gewöhnlichen Korrespondenzen. Beim Beweis der erwähnten Korrespondenzformel macht Herr Brill die Annahme, dass die entsprechenden Punkte auf einer algebraischen Kurve durch eine Korrespondenzkurve ausgeschnitten werden können. Die hier auftretenden involutorisch zugeordneten Punkte dagegen haben die oben behandelte Matrix (5.) zum Verschwinden zu bringen, wozu erforderlich ist, dass sie, ausser der Resultante $R(xy) = 0$ zu genügen, auch noch mindestens zwei Determinanten der Matrix zu Null machen. Auf solche Korrespondenzen, welche nicht durch eine, sondern durch (mindestens) zwei Gleichungen (zwischen den Koordinaten der sich entsprechenden Punkte) definiert sind, die einen Teil ihrer Lösungen gemeinsam haben, wurde Herr Hurwitz durch seine Untersuchungen über Modularkorrespondenzen geführt. Er zeigte (Math. Annalen, Bd. 28: „Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip"), dass dieselben entweder Korrespondenzen mit negativer Wertigkeit oder von ihm als „singulär" bezeichnete Korrespondenzen sind. Korrespondenzen mit negativer Wertigkeit hat Herr Brill (Math. Annalen, Bd. 31: „Über algebraische Korrespondenzen") algebraisch behandelt. Die oben auftretenden involutorischen Punktreihen sind offenbar singuläre (1, 1) Korrespondenzen. Die Doppelkurven der Flächen vom Geschlecht Null besitzen also Abbildungen, auf denen sich immer eine ein-eindeutige algebraische Korrespondenz findet oder — was

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auf dasselbe hinauskommt — welche durch eine rationale eindeutig umkehrbare Transformation in sich übergeführt werden können. Um noch weitere Eigenschaften der Abbildungen von Doppelkurven unikursaler Flächen angeben zu können, z. B. ihre nähere Beziehung zu den Einhüllenden der Verbindungslinien entsprechender Punkte der Involutionen, seien hier erst einige Resultate über singuläre Korrespondenzen abgeleitet.

In dem Aufsatze „Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen (Göttinger Nachrichten, April 1887) beweist Herr Hurwitz den Satz:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das algebraische Gebilde

$$f(sz) = 0$$

eine eindeutige Transformation in sich von der Periode m besitze, ist die, dass das algebraische Gebilee $f(sz) = 0$ durch eine eindeutige Transformation

$$s_1 = \varphi(sz)$$
$$z_1 = \psi(sz)$$

in das neue $f_1(s_1^m, z_1) = 0$ übergeführt werden kann."

Mit Berücksichtigung der Thatsache, dass jede Riemannsche Fläche, welche eine eindeutige Transformation in sich besitzt, entweder eine hyperelliptische oder eine singuläre Fläche ist, erhält man daher einfach ein singuläres algebraisches Gebilde (das man als ebene Kurve oder auch als Riemannsche Fläche denken kann), indem man nur die beliebige Kurve

$$f(xy) = 0$$

der Transformation $\begin{array}{l} x = x' \\ y = y'^m \end{array}$ oder $\begin{array}{l} \varrho x = y_1 y_3^{m-1} \\ \varrho y = y_2^m \\ \varrho z = y_3^m \end{array}$

unterwirft, wodurch einem Punkte (xy) der ersten Kurve m Punkte der transformierten $(F(y_1 y_2 y_3) = 0)$ zugeordnet werden. Es wird nun von Interesse sein, die Zahl der Stellen auf der Kurve $F(y_1 y_2 y_3) = 0$ zu erfahren, in denen zwei der m einem Punkte der ursprünglichen Kurve entsprechende Punkte koinzidieren (mit $m = 2$ z. B. erhält man mit der gesuchten Zahl zugleich die Zahl der Koinzidenzpunkte einer singulären (1, 1) Korrespondenz auf der Kurve F). Die Bestimmung der gewünschten Zahl von Koinzidenzstellen lässt sich mittelst der Zeuthenschen Korrespondenzformel ausführen, wenn man erst das Geschlecht der Kurve $F(y_1 y_2 y_3) = 0$ ermittelt hat, was im folgenden geschehen möge.

Ist die Kurve $f(xyz) = 0$ von der n^{ten} Ordnung, so wird die neue Kurve im allgemeinen vom Grade mn. Vermöge des besonderen Charakters der Transformation erhält sie im Punkte $(y_2 = 0, y_3 = 0)$ gewisse Singularitäten, die zu bestimmen sind.

Ordnet man die Glieder der Gleichung

$$f(xyz) = 0$$

nach Dimensionen von x, y und bezeichnet die Gesamtheit der Glieder i^{ter} Dimension hinsichtlich x, y durch den Index i, so erhält f die Form:

$$f \equiv f_0 z^n + f_1 z^{n-1} + f_2 . z^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n$$

und also die transformierte Kurve

$$F \equiv f_0 y_3^{mn} + y^{mn-m} f_1(y_1 y_3^{m-1}, y_2^m) + \ldots\ldots\ldots + f_n(y_1 y_3^{m-1}, y_2^m) .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Verhalten der Kurve F im Punkte $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ lässt sich untersuchen mittelst des Newtonschen Parallelogramms. y_1 kommt jedenfalls in f_n in der höchsten Potenz vor. Nun schreiten aber in der Funktion f_n sowohl die Exponenten von y_3 als auch diejenigen von y_2 in arithmetischer Progression fort, d. h. sämtliche Glieder von f_n liegen im Newtonschen Parallelogramm, das für (y_2, y_3) gebildet ist, auf einer Geraden. Die Kurve

$$f_n(y_1 y_3^{m-1}, y_2^m) = 0$$

besitzt daher im Punkte $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ dieselben Singularitäten, wie das Gebilde $F(y_1 y_2 y_3)$. Wie nun überhaupt jede Summe von Gliedern, welche im Newtonschen Parallelogramm auf einer Geraden liegen, sich in ein Produkt von binomischen Parabeln

$$x^\lambda = \text{Const.}\, y^\mu$$

zerlegen lässt, so kann man auch hier schreiben:

$$f_n(y_1 y_3^{m-1}, y_2^m) \equiv (y_2^m - a_1 y_3^{m-1})(y_2^m - a_2 y_3^{m-1}) \ldots\ldots (y_2^m - a_n y_3^{m-1})$$

wenn $a_1, a_2, \ldots. a_n$ die Wurzeln der Gleichung $f_n\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ repräsentieren.

Jede der binomischen Parabeln

$$y_2^m = a y_3^{m-1}$$

besitzt nach Smith („On the higher singularities of plane curves", Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. VI)

$$k = (m-1) - 1 = m - 2$$

Rückkehrpunkte, so dass also der Punkt $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ für die zu untersuchende Kurve $n(m-2)$ Rückkehrpunkte absorbiert.

Weiter besitzt jede der binomischen Parabeln im Punkte $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ eine Anzahl Doppelpunkte, die sich nach Smith berechnet aus der Gleichung:

$$2\delta + 3k = m(m-2) \; .$$

Man bekommt also für

$$\begin{aligned} 2\delta &= m(m-2) - 3(m-2) \\ &= (m-2)(m-3) \; . \end{aligned}$$

Die Zahl der in den Punkt $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ entfallenden Schnittpunkte der n Parabeln ist: $\binom{n}{2}(m^2 - m)$, so dass also der Punkt $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ bei der Bestimmung des Geschlechts der Kurve $F(y_1 y_2 y_3) = 0$ für $n(m-2)$ Rückkehrpunkte und $n \cdot \frac{(m-2)(m-3)}{2} + \binom{n}{2}(m^2 - m) = \frac{n}{2}\left\{(m-1)(mn-4) + 2\right\}$ Doppelpunkte zu zählen ist.

Enthält die gegebene Kurve, in homogenen Kordinaten geschrieben,

$$f(xyz) = 0$$

d Doppel- und r Rückkehrpunkte, so bekommt die transformierte Kurve, ausser der oben angegebenen Zahl, md Doppel- und mr Rückkehrpunkte. Denn schliesst man den Punkt $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ aus, so dass also ϱ in den Transformationsgleichungen nicht verschwindet, so entsprechen einem Punkte (xy) auf $f(xy) = 0$ m ganz bestimmte Punkte $(y_1 y_2 y_3)$ auf der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kurve $F(y_1 y_2 y_3) = 0$. Nun geben die Transformationsgleichungen differentiirt:

$$\begin{aligned} \varrho dx + x d\varrho &= y_3^{m-1}\, dy_1, + (m-1)\, y_1 y_3^{m-2}\, dy \\ \varrho dy + y d\varrho &= m y_2^{m-1}\, dy_2 \\ \varrho dz + z d\varrho &= m y_3^{m-1}\, dy_3\,, \end{aligned}$$

so dass also jedem Wertsysteme der dx, dy, dz ein ganz bestimmtes Wertsystem der dy_1, dy_2, dy_3 zugehört, wenn man für $(y_1 y_2 y_3)$ einen der m Werte substituiert, und dies gilt auch unabhängig davon, ob die Werte der (dx, dy, dz) von einander verschieden sind oder nicht.

Mit Berücksichtigung der für die transformierte Kurve F erhaltenen Doppel- und Rückkehrpunkte bekommt man daher für deren Geschlecht π den Ausdruck:

$$\pi = \frac{(mn-1)(mn-2)}{2} - \frac{n}{2}\{(m-1)(mn-4)+2\} - n(m-2) - md - mr$$

$$\pi = \frac{(n-1)(mn-2)}{2} - md - mr$$

oder mit Einführung des Geschlechts $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$ der gegebenen Kurve f:

$$\pi = m\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r\right] - (n-1) + m(n-1)$$

$$\pi = mp + (n-1)(m-1)\,.$$

Nachdem das Geschlecht der transformierten Kurve auf diese Weise gefunden ist, lässt sich mittelst der Zeuthenschen Korrespondenzformel

$$z - z' = 2\alpha'(p-1) - 2\alpha(p'-1)$$

die gewünschte Anzahl von Koinzidenzen zweier der m einem Punkte der ersteren Kurve entsprechenden Punkte angeben. Man hat in der erwähnten Formel nur zu setzen: $z' = 0$, $\alpha = m$, $\alpha' = 1$, $p = \pi$, $p' = p$ und bekommt für die gesuchte Zahl:

$$z = 2(\pi - 1) - 2m(p-1)$$

$$\text{oder} \quad z = 2n(m-1)\,.$$

Lässt man einem Punkte der ersten Kurve zwei Punkte der transformierten entsprechen, so kann man sich zwischen den beiden Punkten auf der Kurve F eine $(1, 1)$ Korrespondenz denken und bekommt für die Zahl der Koinzidenzstellen der festgesetzten Korrespondenz:

$$z = 2n\,.$$

Die Formel für das Geschlecht der transformierten Kurve lässt auch ersehen, wie im öfters erwähnten Beispiele der Kurve siebenter Ordnung, welche $(2, 1)$ deutig auf einen gewissen Kegelschnitt bezogen ist, der Kegelschnitt und die Kurve siebenter Ordnung in einander übergeführt werden können. Der Kegelschnitt wird zunächst durch eindeutige Transformation in eine Kurve fünfter Ordnung verwandelt. Wird dann auf diese die angegebene Transformation

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y'^2 \end{aligned}$$

angewendet, so geht sie in eine Kurve zehnter Ordnung mit 32 Doppelpunkten über. In

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

letztere Kurve lässt sich aber auch die Kurve siebenter Ordnung vom Geschlecht 4 eindeutig durch algebraische Substitutionen transformieren.

Die oben gefundenen Resultate berechtigen zu der Vermutung, dass auch zu $\binom{n+2}{2} - 5$ beliebig gewählten Punkten spezielle Lagen eines weiteren Punkts existieren, der noch einen $\binom{n+2}{2} - 3^{\text{ten}}$ festen Schnittpunkt zur Folge hat, so dass durch die $\binom{n+2}{2} - 3$ Punkte noch eine dreifach unendliche Schar von Kurven n^{ter} Ordnung hindurchgeht.

Die Punktepaare, welche die gesuchte Eigenschaft haben, nur für eine Bedingung zu zählen und daher mit $\binom{n+2}{2} - 5$ willkürlich gewählten Punkten ein Netz von Kurven n^{ter} Ordnung ausnahmsweise nicht zu bestimmen, berechnen sich aus der gleich Null gesetzten Matrix:

$$(1.)\qquad \begin{Vmatrix} \varphi_1(xy) & \varphi_2(xy) & \varphi_3(xy) & \varphi_4(xy) & \varphi_5(xy) \\ \varphi_1(x'y') & \varphi_2(x'y') & \varphi_3(x'y') & \varphi_4(x'y') & \varphi_5(x'y') \end{Vmatrix} = 0$$

Diese ist vier von einander unabhängigen Gleichungen äquivalent. Bestimmt man die Zahl der Punktepaare (x, y), (x', y'), für welche die vier Gleichungen verschwinden:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(xy)\,\varphi_2(x'y') - \varphi_1(x'y')\,\varphi_2(xy) &= 0 \\ \varphi_2(xy)\,\varphi_3(x'y') - \varphi_2(x'y')\,\varphi_3(xy) &= 0 \\ \varphi_3(xy)\,\varphi_4(x'y') - \varphi_3(x'y')\,\varphi_4(xy) &= 0 \\ \varphi_4(xy)\,\varphi_5(x'y') - \varphi_4(x'y')\,\varphi_5(xy) &= 0 \end{aligned}$$

so sind unter ihnen unbrauchbare enthalten, nämlich diejenigen, welche den Systemen genügen:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \varphi_2(x'y') &= 0 \\ \varphi_2(xy) &= 0 \\ \varphi_3(xy)\,\varphi_4(x'y') - \varphi_3(x'y')\,\varphi_4(xy) &= 0 \\ \varphi_4(xy)\,\varphi_5(x'y') - \varphi_4(x'y')\,\varphi_5(xy) &= 0 \end{aligned}$$

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \varphi_3(xy) &= 0 \\ \varphi_3(x'y') &= 0 \\ \varphi_1(xy)\,\varphi_2(x'y') - \varphi_2(xy)\,\varphi_1(x'y') &= 0 \\ \varphi_4(xy)\,\varphi_5(x'y') - \varphi_4(x'y')\,\varphi_5(xy) &= 0 \end{aligned}$$

$$(5.)\qquad \begin{aligned} \varphi_4(xy) &= 0 \\ \varphi_4(x'y') &= 0 \\ \varphi_1(xy)\,\varphi_2(x'y') - \varphi_2(xy)\,\varphi_1(x'y') &= 0 \\ \varphi_2(xy)\,\varphi_3(x'y') - \varphi_2(x'y')\,\varphi_3(xy) &= 0 \end{aligned}$$

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \varphi_2(xy) &= 0 \\ \varphi_2(x'y') &= 0 \\ \varphi_4(xy) &= 0 \\ \varphi_4(x'y') &= 0 \end{aligned}$$

Die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen des Systems (2.) ergiebt sich nach dem von Herrn Krey (Math. Annalen, Band 19, p. 504) angegebenen Ausdruck für die Anzahl der Punktepaare, welche die vier Korrespondenzgleichungen befriedigen:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} f_1(xy\,x'y') &= 0 \\ f_2(xy\,x'y') &= 0 \\ f_3(xy\,x'y') &= 0 \\ f_4(xy\,x'y') &= 0\,, \end{aligned}$$

von denen angenommen sei, dass die linken Seiten in x, y sowie in $x'y'$ vom n^{ten} Grade seien, und dass sie sowohl als Funktionen von (xy) als auch von $(x'y')$ in α Ausnahmepunkten $(u_i v_i)$ einfach verschwinden und ebenso für $\begin{cases} x = x' \\ y' = y' \end{cases}$. Herr Krey findet auf synthetischem Wege die Formel:

$$(8.)\qquad (f_1 f_2 f_3 f_4) = 6n^4 - 12(\alpha + 2)n^2 + 24n + 6\alpha^2 + 18\alpha - 6\,.$$

Für das System (2.) hat man $\alpha = \binom{n+2}{2} - 5$ Ausnahmepunkte, so dass man

$$(9.)\qquad \frac{3}{2}n^4 - 9n^3 + \frac{45}{2}n^2 - 21n + 18$$

Lösungen erhält.

Korrespondenzgleichungen von der Form (3.), (4.) und (5.) behandelte Herr Brill, um die Paare von getrennt liegenden Punkten zu bestimmen, welche gleichzeitig zwei Korrespondenzen auf einer gegebenen Kurve genügen. Für das System

$$(10.)\qquad \begin{aligned} f(xy) &= 0 \\ f(x'y') &= 0 \\ \varphi(xy;\,x'y') &= 0 \\ \psi(xy;\,x'y') &= 0 \end{aligned}$$

findet er die Zahl (R) der getrennt liegenden Punkte (xy), welche gleichzeitig einem Punkte $(x'y')$ auf f entsprechen, zu:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} (R) = (ab - \Sigma\alpha_i\beta_i - \alpha\beta)(ac' - \Sigma\alpha_i\gamma_i' - \alpha\gamma) + (ac - \Sigma\alpha_i\gamma_i - \alpha\gamma)\,. \\ (ab' - \Sigma\alpha_i\beta_i' - \alpha\beta) - 2p\beta\gamma\,, \end{aligned}$$

wenn $a, b, c;\ \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ u. s. w. die schon oben gebrauchte Bedeutung haben und p das Geschlecht von f bezeichnet.

Die Anwendung der Formel (11.) auf die Korrespondenzgleichungen (3.) giebt für die Zahl (R) der gemeinsamen Wertepaare:

$$(12.)\qquad (R) = 2(n^2 - \alpha - 1) - (n-1)(n-2)\,,$$

und ebenso für System (4.) und (5.).

Das System (6.) hat

$$(13.)\qquad (n^2 - \alpha)(n^2 - \alpha - 1)$$

Lösungen, die aber bereits in (3.) und (5.) enthalten sind. Es bleiben also

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}n^4 - 9n^3 + \frac{45}{2}n^2 - 21n + 18 - 6(n^2 - \alpha - 1) + 3(n-1)(n-2) \\ + (n^2 - \alpha)(n^2 - \alpha - 1) = \frac{1}{4}(n-2)(n-4)(n^2 - 9) \end{aligned}$$

brauchbare Lösungen des Systems (2.). Wegen der Symmetrie aller Gleichungen in x, y

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und x', y' hat man von dieser Zahl noch die Hälfte zu nehmen, so dass man für die Zahl der gesuchten Punktepaare erhält:

$$(14.)\qquad \frac{1}{8}(n-2)(n-4)(n^2-9)\ ,$$

ein Ausdruck, welcher sich den Formeln

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{und}$$

$$[R] = \frac{(n-3)(n^2-2)}{2} \quad \text{(Seite 19)}$$

gut an die Seite stellt.

und x', y' hat man v… ehmen, so dass man für die Zahl der gesuchten Punk…

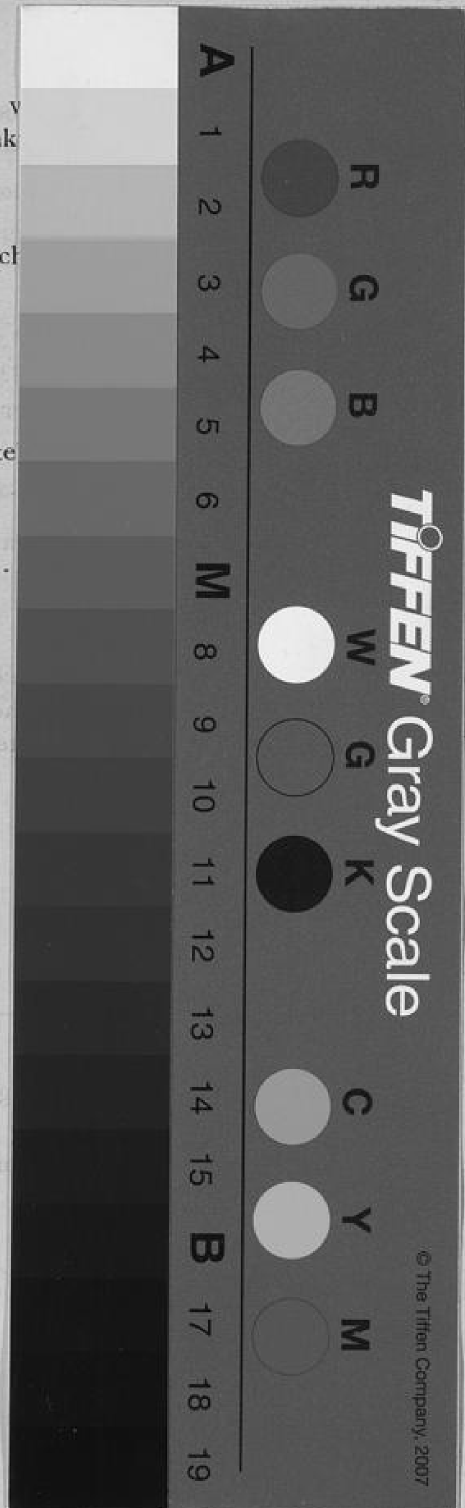
(14.) … ,

ein Ausdruck, welch…

… und

… (Seite 19)

gut an die Seite ste…



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf