Die geometrische Analysis
als Methode
zur Auflösung von Aufgaben.

Die Quelle unserer geometrischen Erkenntnisse sind Prämissen, Lehrsätze und Aufgabe. Die Prämisse, zu welcher die Erklärung, die Forderung und der Grundsatz gehören, umfaßt alle die Sätze, welche als die Grundlage des Lehrgebäudes betrachtet werden müssen, indem sie das Gegebene der Wissenschaft enthalten, und — insofern sie eine Behauptung aufstellen — keines geometrischen Beweises fähig sind, während sie selbst wieder zur Beweisführung anderer Sätze gebraucht werden. — Da sie nicht erst aus andern Principien, sondern unmittelbar aus der reinen Anschauung abgeleitet sind, so haben sie unmittelbare Gewißheit. — Der Lehrsatz enthält allgemeine geometrische Wahrheiten von mittelbarer Gewißheit, die durch den Beweis, der darzuthun hat, wie diese Wahrheiten nach den nothwendigen Gesetzen des Denkens aus schon anerkannten Wahrheiten folgen, zum Bewußtsein kommt. — Die Aufgabe dagegen verlangt die Verbindung und Darstellung (Construction) räumlicher Größen mit vorausbestimmten Eigenschaften; zu ihrer wissenschaftlichen Form gehört, daß nachgewiesen wird, wie die gesuchten Größen von den bekannten gegebenen abhängen und wie nach dieser Abhängigkeit die gesuchten Größen construirt werden. — Der Beweis hat darzuthun, daß die so construirte Figur auch wirklich die verlangten Eigenschaften hat.

Die geometrische Aufgabe ist entweder plammetrisch, wenn man zu ihrer Construction nur einer Ebene bedarf, oder sie ist stereometrisch, wenn sie deren mehrere bedarf; hier soll nur von den ersten die Rede sein.

Jede Aufgabe besteht ihrem Wesen nach aus zwei Hauptheilen; der erste Theil enthält die Forderung, daß etwas ausgeführt, construirt werde; der zweite Theil enthält die Bedingungen d. h. diejenigen Angaben, welche die Zusammensetzung einer zu construirenden Figur bestimmen; es wird dabei vorausgesetzt, daß die gegebenen Bedingungen und das Gesuchte in einem solchen Zusammenhange stehen, daß das Letztere wirklich eine Folge des Ersteren ist, und daher auch aus ihm abgeleitet werden kann.

Bei jeder Aufgabe ist zuförderst zu untersuchen, ob die Bedingungen von einander unabhängig sind, d. h. daß nicht eine derselben durch die Zusammenstellung der übrigen sich als Folgerung ergiebt. Bei der Aufgabe: »ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben von welchem die Hypotenuse und der Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises gegeben ist, ist die letzte Bedingung in der ersten mit enthalten, da der Scheitelpunkt des rechten Winkels des zu construirenden Dreiecks in dem Umfange des Kreises enthalten ist, von welchem die Hypotenuse Durchmesser, folglich die halbe Hypotenuse selbst Halbmesser des Kreises ist. — Auch dürfen die Bedingungen nicht der Art sein, daß die eine der andern oder einem anerkannt wahren Lehrsatze widerspricht; in diesem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich. Dahin gehören z. B. die Aufgaben: ein Dreieck zu construiren aus 3 Seiten, von welchen zwei Seiten der 3ten gleich sind; oder ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, so daß eine Kathete größer als die Hypotenuse ist. — Sind mehr Bedingungen gegeben, als zur Auflösung unumgänglich nothwendig sind, so ist die Aufgabe überbestimmt. So ist die Aufgabe: über einer geraden Linie ein Dreieck von gegebenem Inhalte und gegebener Höhe zu beschreiben überbestimmt, da mit der Grundlinie und dem Inhalte die Höhe, und ebenso mit Grundlinie und Höhe der Inhalt gegeben ist. — In manchen Fällen hat eine Uebereinstimmung der Aufgabe ihre Unauflöslichkeit zur Folge. Ist z. B. die Aufgabe gegeben, ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, von dem alle 3 Seiten gegeben sind, so ist durch den rechten Winkel und die beiden Katheten auch die Hypothenuse mit gegeben; ist demnach die 3te gegebene Linie der Hypotenuse des aus dem rechten Winkel und zweien Seiten construirten Dreiecks nicht gleich, so findet ein Widerspruch statt und das Dreieck ist nicht zu construiren.

Wird die Aufgabe gestellt: über einer geraden Linie als Sehne einen Kreis zu beschreiben, so sind unendlich viele unter sich verschiedene Kreise möglich, die diese gerade Linie als Sehne enthalten. Jeder Punkt in dem Perpendikel aus der Mitte dieser Linie ist Mittelpunkt eines Kreises, der die Bedingung erfüllt. — Wird aber noch die Bedingung hinzugefügt, daß der Radius des zu construirenden Kreises von gegebener Größe sei, so ist nur ein Kreis vorhanden, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In jenem Falle, wo die Auflösung unendlich viele Kreise nachwieß, die alle die Bedingung der Aufgabe erfüllen, ist die Aufgabe unbestimmt; in diesem Falle, wo nur eine Auflösung den Bedingungen genügt ist sie bestimmt. Der Unterschied zwischen einer bestimmten und einer unbestimmten Aufgabe besteht darin, daß bei den bestimmten Aufgaben jede verzeichnete Größe, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, dieselbe Gestalt und Größe hat, bei den unbestimmten Aufgaben hat dagegen nicht jede verzeichnete Größe, welche den Bedingungen der Aufgabe genügt, dieselbe Gestalt und Größe. — Die weitere Eintheilung der unbestimmten Aufgaben in beschränkt und in unbeschränkt unbestimmte beruht darauf, ob eine bestimmte Anzahl verschiedener Größen, oder ob unendlich viele verschiedene Größen den Bedingungen der Aufgabe genügen. — So ist die Aufgabe, von einem Punkte aus eine Tangente an den Kreis zu ziehen eine vollkommen bestimmte, wenn auch zwei, unter sich gleiche Tangenten von dem gegebenen Punkte an den Kreis gezogen werden können; die Aufgabe ein Dreieck zu beschreiben, von welchem zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, ist eine beschränkt bestimmte, indem die Auflösung zwei ungleiche Dreiecke darbietet, dagegen ist die Aufgabe über einer geraden Linie als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreieck zu beschreiben, eine vollkommen unbestimmte, indem unendlich viele gleichschenkelige Dreiecke der Bedingung der Aufgabe genügen.

Wir wenden uns jetzt zur »Auflösung« der (geometrischen) Aufgabe und fragen zunächst, was in der Geometrie unter Auflösung einer Aufgabe zu verstehen sei, und welche Mittel wir anwenden um diese herbeizuführen? Eine Aufgabe ist aber dann aufgelöst, wenn die gesuchten Größen in einer solchen Abhängigkeit von den gegebenen erscheinen, daß sie vermittelst dieser construirt d. h. in einem anschaulichen Bilde dargelegt werden können und wenn, nachdem dieses geschehen, der Beweis dargethan hat, daß die gesuchten Größen in der durch die Construction erhaltenen Figur wirklich vorhanden ist.

Die Anweisung so wie alle die geometrischen Untersuchungen, welche wir als Hülfsmittel der mathematischen Erfindungskraft anwenden, diese Abhängigkeit zwischen Gegebenem und Gesuchten nachzuweisen, so daß dadurch der Punkt herbeigeführt wird, von dem die Auflösung der Aufgabe ausgeht, heißt die geometrische Analysis; Analysis der Aufgabe heißt im Besondern die Angabe des Zusammenhangs zwischen den Bedingungen der Aufgabe, und der gesuchten Größe.

Das Wesen der Analysis als Methode besteht in Folgendem:

Man betrachtet die Aufgabe als gelöst d. h. man sieht die gesuchten Größen als gefunden an, indem man eine der verlangten gleichartigen Figur construirt. — In dieser Figur unterscheidet man die gegebenen und die gesuchten Stücke von einander, stellt die gegebenen, wenn sie nicht unmittelbar als Theile in derselben enthalten sind, dar; so bildet sie wirklich, wenn von einem zu construirenden Dreiecke die Summe oder Differenz von Seiten oder Winkeln gegeben ist, diese Summe oder Differenz der Seiten oder Winkel, stellt sie dann möglichst in Verbindung miteinander und überlegt, welche Eigenschaften den gesuchten Größen zukommen müßten, wenn sie wirklich den Bedingungen der Aufgabe genügen sollen. Da die Construction einer Aufgabe auf die Bestimmung der Lage von Punkten zurückgeführt werden kann, so hat man hauptsächlich zu untersuchen, welche Punkte, die in der Figur erscheinen, durch die gegebenen Stücke unmittelbar der Lage nach als gegeben angesehen und vermittelst der gegebenen Stücke unmittelbar construirt werden können. Ist man dahin gelangt, so hat man die Lage der zu suchenden Punkte mit der Lage der gegebenen in die verschiedenen möglichen Beziehungeu zu setzen um daraus vermittelst eines geometrischen Satzes, oder einer bereits aufgelösten Aufgabe oder doch irgend einer Abhängigkeit zu erkennen, wie die gesuchten Punkte aus den gegebenen gefunden werden können.

Nach diesen ersten allgemeinen Andeutungen über die Methode der Analysis, wollen wir an einigen Beispielen ihr Verfahren erläutern. —

Aufgabe. Ein Dreieck zu beschreiben, von welchem die Grundlinie $= a$, die Differenz der Seiten $= d$ und die Differenz der Winkel an der Grundlinie $= \delta$ gegeben ist.

Analysis. Es sei (Fig. 1.) das Dreieck ABC das gesuchte mit den verlangten Eigenschaften, so daß also die Grundlinie $AB = a$, die Differenz der Seiten $AC - CB = d$ und die Differenz der Winkel $CBA - CAB = \delta$

sei. Die Differenz der Seiten AC und CB wird aber nach Euklid El. I S. 3 erhalten, wenn man aus C mit CB einen Kreis beschreibt; dieser schneide die AC in D und es ist also AC — CB = AC — CD = AD = d; wird die Hülfslinie CF gezogen, so ist mit dieser auch die Differenz der Winkel an der Grundlinie gefunden, denn es ist W. CBF = W. CFB, also ist auch, da W. ACF = W. CFB — CAF, W. ACF = CBA — CAF, demnach W. ACF = δ. Die AB, AD und W. ACF stehen noch nicht in der Verbindung, daß ein nothwendiger Zusammenhang zwischen diesen gegeben Größen nachweisbar wäre. Um diesen herbeizuführen werde die BD gezogen, so ist W. ABD = $\frac{1}{2}$ ACF = $\frac{1}{2}\,\delta$; demnach sind die 3 gegebenen Stücke, aus welchen das Dreieck construirt werden soll nämlich a, d und $\frac{1}{2}\,\delta$ in dem Dreieck ABD vorhanden. Das Dreieck ABD kann hiernach construirt werden. Zu untersuchen ist jetzt in welchem Zusammenhange die Dreiecke ABD und ABC stehen, oder es ist nachzuweisen, wie man, wenn Dreieck ABD construirt ist, zur Construction des Dreiecks ABC gelangt. Es ist ersichtlich, daß die Construction des △ ABC von der Auffindung des Punktes C abhängig gemacht werden muß. Der Punkt C liegt aber in der Verlängerung der Linie AD und da W. CDB = W. CBD ist, so liegt er auch in dem Schenkel eines Winkels = BDC der an den Punkt B der Linie BD angetragen ist; er liegt also in 2 Linien die der Lage nach bekannt sind, da beide nur einen Punkt, den Durchschnittspunkt, mit einander gemein haben, so ist dieser der gesuchte Punkt C.

Aufgabe. Es ist ein Dreieck zu beschreiben von welchem die Grundlinie, die Höhe und die Differenz der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

Analysis. Es sei (Fig. 2.) △ ABC das gesuchte, welches die verlangten Eigenschaften hat, so daß also AB = a, CD = h, und W. CBA — CAB = δ ist; man suche die gegebenen Stücke an dem Dreiecke auf und bringe sie in Beziehung zu einander. Wenn wir nun wieder aus C mit CB einen Kreis beschreiben, so ist, wie schon nach der vorigen Aufgabe bekannt, W. ACE = CBA — CAB = δ; verlängert man EC bis zum Punkte G und zieht BG, so ist △ EBG in B rechtwinkelig und BG = 2CD = 2h; wird nun noch AG gezogen, so sieht man gleich, daß △ ABG aus AB = a, BG = 2h und W. ABG = R construirt werden kann. Es ist nun nachzuweisen, wie man von △ ABG zum △ ABC gelangt, oder da die beiden Winkelpunkte A und B das △ ABG auch Winkelpunkte des △ ABC sind, so ist nur noch darzuthun, durch welche Construction man zu dem Punkte C gelangt. Da CD = h und BG = 2h so liegt der Punkt C also 1) auf einer Parallele zu der AB, welche aus J, dem Mittelpunkte von BG gezogen ist; da aber auch W. ACE = d, so ist W. ACG = 2R — δ, folglich liegt 2) der Punkt C, da AG im △ ABG der Größe und Lage nach gegeben ist, auf dem Umfange eines Kreisabschnittes, welcher über AG als Sehne und fähig des W. 2R — δ beschrieben ist; da er nur in jener Parallelen und in diesem Kreisbogen enthalten ist, so ist der Durchschnittspunkt der beiden Linien der gesuchte Punkt.

Aus den Analysen dieser beiden Aufgaben ergiebt sich, wie wichtige Hülfsmittel zur Auflösung der Aufgaben die Hülfslinien darbieten; eine zweckmäßige Wahl derselben ist es vor Allem, welche zu einfachen Auflösungen führt, während eine falsche Wahl oft entweder ganz von der Auflösung abführt, oder doch solche Auflösungen giebt, die durch gänzlichen Mangel an Einfachheit und Eleganz als mißlungen betrachtet werden müssen. Führt daher irgend eine Hülfslinie gar nicht oder doch nur schwierig zum Ziele, so ist es rathsam diese zu verlassen und dagegen eine andere zu wählen. — Die Hülfslinien sind es nämlich, welche die bekannten Größen der Aufgabe mit den gesuchten in Verbindung bringt, um dadurch Mittelsätze zu erhalten, die einen Uebergang von den erstern zu den letztern herbeiführen und dadurch den Zusammenhang zwischen den gesuchten Größen und den gegebenen ermitteln. Zu dem Ende werden bekannte und gesuchte Punkte durch gerade Linien verbunden, oder es werden gerade Linien die der Lage und Größe nach bekannt sind, verlängert bis sie zum Durchschnitte mit andern der Lage und Größe nach bekannten Linien gelangen, oder es werden Parallellinien, Perpendikel, Tangenten u. s. w. gezogen, jedoch immer so, daß eine gewisse Nothwendigkeit dazu vorhanden ist.

Newton hat in der Arithm. univers. sectio IV. Cap. I. §. 17 über das Ziehen der Hülfslinien, für seinen Fall freilich für die Construction der algebraischen Aufgaben, folgende Regeln, die sich aber auch auf geometrische Aufgaben übertragen lassen, aufgestellt:

»Meistenstheils sind Figuren zu construiren, und zwar am öftersten, indem man einige Linien verlängert, bis »sie andere durchschneiden oder bis sie eine gegebene Größe erreicht haben: oder indem man durch irgend einen »ausgezeichneten Punkt Linien zieht, welche andern parallel oder lothrecht sind, oder indem man ausgezeichnete Punkte »verbindet und andere Constructionen macht, je nachdem es die Beschaffenheit der Aufgabe und die zu dessen Lösung »angewandten Lehrsätze erheischen. Wenn z. B. zwei einander nicht treffende Linien mit einer dritten gegebene »Winkel bilden, so verlängert man sie wohl, daß sie einander treffen und dadurch ein Dreieck bilden, von welchem

»dann die Winkel und somit auch das Verhältniß der Seiten gegeben wäre. Oder wenn irgend ein Winkel gegeben »oder einem gegebenen gleich wäre, so bilden wir oft ein Dreieck, das der Gattung nach gegeben, oder einem gegebenen »ähnlich ist dadurch, daß wir einige der Linien in der Figur verlängern oder die dem gegebenen Winkel gegenüberstehende »Linien anders ziehen. Wenn ein Dreieck schiefwinkelig ist, so lösen wir es oft in zwei rechtwinkelige auf, indem wir »ein Perpendikel fällen. Wenn es sich um vielseitige Figuren handelt, so lösen wir sie in Dreiecke auf, indem wir »Diagonallinien ziehen, und so in andern Fällen, indem wir immer darauf hinzielen, daß eine Figur in Dreiecke, die »entweder gegeben oder gegebenen ähnlich, oder rechtwinkelig sind, aufgelöst wird.« —

Welche Wichtigkeit gerade die zweckmäßige Wahl der Hülfslinien für die Auflösung der Aufgaben und besonders für die Mannigfaltigkeit der Auflösung hat, so daß gerade die Aufgabe einer um so mehrfachen Auflösung fähig ist, je mehr man die Hülfslinien zu verändern vermag, soll an folgender Aufgabe dargethan werden:

»Es soll in einen Quadranten ein Kreis eingeschrieben werden, so daß derselbe die Radien und den von ihnen »eingeschlossenen Bogen berührt.«

Analysis der Aufgabe. (Fig. 3.) Der gesuchte Kreis würde vollkommen bestimmt sein, wenn von demselben 1) der Mittelpunkt der Lage und 2) der Halbmesser der Größe nach bekannt wäre. Da aber der gesuchte Kreis die Bedingungen mit sich führt, daß er die Radien berührt, und die von dem Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte gezogene gerade Linie auf derselben perpendikular steht, so ist, wenn der Mittelpunkt des gesuchten Kreises der Lage nach bekannt ist, mit ihm auch der Halbmesser des Kreises gefunden, da er nämlich das Perpendikel ist, welches von dem gefundenen Punkte auf einen der Halbmesser des gegebenen Quadraten gefällt ist. Wir nehmen nun an O sei der Mittelpunkt des zu construirenden Kreises und der Kreis berühre die Halbmesser und den Bogen in den Punkten D, E und F; verbindet man nun den Punkt O mit den Punkten D, E und F durch gerade Linien, so stehen diese senkrecht auf den Linien AB, BC und GH; verbindet man nun noch den Punkt O mit dem Punkte B durch die Linie OB, so entstehen dadurch zwei congruente Dreiecke DOB und OED, weil $OD = OE$, $OB = OB$ und W. $ODB =$ W. $OEB = R$, folglich ist auch $DBO = EBO = \frac{1}{2}R$, demnach liegt der gesuchte Mittelpunkt auf einer Linie die den W. ABC halbirt. Könnte jetzt noch eine grade Linie nachgewiesen werden, auf welcher dieser Punkt ebenfalls enthalten ist, so müßte er in beiden Linien, in einem ihnen also gemeinschaftlichen Punkte enthalten sein. Wäre uns die Lage des Berührungspunktes D oder E bekannt, so hätten wir eine solche Linie in der DO, welche perpendikulär auf AB ist. Um die Lage des Punktes D zu finden verbinden wir ihn mit F, so entsteht, da $DO = OF$, ein gleichschenkeliges Dreieck. Nun folgt, da OF senkrecht auf GH, daß ihre Verlängerung auch durch B geht, folglich bilden BO und OF eine gerade Linie. W. DOB ist als äußerer W. des Dreiecks $= OFD + ODF = 2ODF$ und da $DOB = \frac{1}{2} R$, so ist $OFD = \frac{1}{4} R$, folglich findet man den Punkt D wenn an F der BF eine Linie unter einem Winkel $= \frac{1}{4} R$ angetragen und der Schenkel bis zum Durchschnitte mit dem Radius des Kreises verlängert wird. Der Durchschnittspunkt des Perpendikels in D mit dem den Winkel ABC halbirenden Halbmesser giebt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

2te Analysis. Angenommen es sei (Fig. 4.) der Kreis wieder gefunden der in den Quadranten ABC eingeschrieben werden soll und D, E und F heißen wieder die Berührungspunkte. Es ist nun nach der vorigen Analysis schon ermittelt, daß der Mittelpunkt des gesuchten Kreises in der Halbirungslinie des W. ABC enthalten ist. Wir suchen jetzt die Lage des Punktes E auf der Linie BG auf eine andere Weise zu bestimmen und verlängern die Tangente an F und den Radius BC bis zu ihrem Durchschneiden, was nothwendig geschehen wird. Wird nun F mit E und C verbunden, so entstehen dadurch zwei congruente Dreiecke BEF und FCG, denn es ist W. $FBE = FGC = \frac{1}{2} R$, W. $BFE = GFG = \frac{1}{4} R$ und überdieß ist $BF = FG$, folglich ist $GC = BE$. Wird also W. ABC halbirt und an F eine Tangente gelegt, welche die verlängerte BC in G schneidet und trägt man dann von B aus die GC auf der BC ab, so daß $BE = GC$, so ist E der gesuchte Punkt. Berücksichtigt man, daß wegen der Congruenz der $\triangle\triangle$ BEF und FCG auch $FC = FE$, so findet man den Punkt E auch, wenn aus F mit FC ein Kreis beschrieben wird; der Durchschnittspunkt desselben mit BC ist der gesuchte Punkt.

3te Analysis. Es sei wieder (Fig. 5.) der um O beschriebene Kreis der gesuchte und die Berührungspunkte seien D, E und F; verlängert man nun FD aus dem Punkte D und zieht aus irgend einem Punkte G eine Linie GH parallel zu der Linie DO, so ist $\triangle$ DOF ähnlich $\triangle$ HGF und da $DO = OF$ so ist auch $HG = GF$. Demnach liegt der Punkt H auf dem Umfange eines Kreises der aus dem Punkt G mit GF beschrieben ist; da aber auch GH als Parallele zu DO senkrecht auf AB ist, so liegt er auch in der Verlängerung des Perpendikels aus G auf AB. Da nun der

Punkt H auf die angegebene Weise immer gefunden werden kann, so ist damit der Punkt D und mit ihm der Mittelpunkt O des gesuchten Kreises gefunden.

Der beschränkte Raum gestattet nicht, zur Ausführung der oben angedeuteten Bemerkungen über das Ziehen von Hülfslinien noch mehr Analysen von unserer Aufgabe mitzutheilen.

Wenn durch die Analysis die Abhängigkeit der gesuchten Größen von den gegebenen in der Art nachgewiesen ist, daß daraus die Möglichkeit der Auflösung der Aufgabe sich ergiebt, was sich immer dadurch ausspricht, daß das Schlußglied bei der Analysis die Forderung enthält, gewisse gegebene und bekannte Größen in Verbindung zu setzen, so ist es das Geschäft der Construction aus den gegebenen Stücken die gesuchten durch Zeichnung zu finden. — Wenn man die Analysis einer Aufgabe näher auffaßt, so läßt sich daraus jedesmal nachweisen, in welcher Ordnung die zur Figur gehörigen Punkte construirt, welche Linien zur Bestimmung dieser Punkte gezogen werden müssen, welche Oerter man zu diesem Zwecke zu construiren hat und auf welche schon gelöste Aufgabe die Construction dieser Oerter zurückgeführt wird. Die Analysis schreibt daher der Construction ihren Gang vollständig vor und um das Gesuchte zu erhalten, hat man nur denselben Weg in umgekehrter Ordnung zu verfolgen, der bei der Analysis nach und nach zurückgelegt wurde. Wenn aber die Analysis in der zu ihrem Zwecke construirten Figur nicht auf die absolute Größe der Stücke Rücksicht nimmt, sondern im Allgemeinen nur untersucht, wie in derselben die gesuchten Stücke mit gegebenen derselben Art, nicht derselben Größe, wie sie die Aufgabe verlangt, zusammenhängen, so legt die Construction die gegebenen Stücke zu Grunde und construirt die Figur, so daß demgemäß die gesuchten auch der Größe nach durch die bekannten ausgedrückt sind.

Um das Gesagte zu fixiren, führen wir jetzt die Constructionen aus zu den ersten der beiden Aufgaben, von welchen wir oben die Analysen gemacht haben.

In der Analysis zu der ersten Aufgabe wurde die Construction des $\triangle$ ABC von der des $\triangle$ ABD abhängig gemacht; von diesem Dreiecke ist gegeben die Grundlinie AB, die Differenz der Seiten AD, und W. ABD = $\frac{1}{2}\,\delta$. Aus diesen 3 Stücken kann (s. unten die Determination) das Dreieck ABD construirt werden; es werde also (Fig. 6.) eine Linie AB = a, welche Grundlinie werden soll, hingelegt; an einen der Endpunkte (B) werde ein Winkel = $\frac{1}{2}\,\delta$ angetragen und aus dem andern Endpunkte A mit d ein Kreis beschreiben, von dem wir annehmen, daß er die BE in zwei Punkten D und D′ schneidet. Verbindet man nun A mit D und wird AD über D hinausverlängert, so entsteht, wenn noch an B der BD der Winkel BDC angetragen wird ein $\triangle$ ABC, was den Forderungen der Aufgabe genügt.

Verfährt man in ganz ähnlicher Weise mit dem Punkte D′, nur daß die Linie D′A nicht über D′ hinaus, sondern über A hinaus verlängert wird, so entsteht, wenn der W. AD′D an B der BD angetragen wird ein $\triangle$ ABC′, das ebenfalls den Forderungen der Aufgabe genügt.

Die Analysis zur zweiten Aufgabe machte die Construction des $\triangle$ ABC von der des $\triangle$ ABG und der Auffindung des Punktes C abhängig; das $\triangle$ ABG wieß die Analysis als ein rechtwinkeliges nach, in welchem AB = der gegebenen Linie a und BG = 2h ist; außerdem zeigte sie, daß der Punkt C 1) in einer Linie enthalten, die in einem Abstand = h parallel zu AB gezogen ist und 2) in einem Kreisbogen, der über AG als Sehne, fähig des W. 2R — δ beschrieben ist. Demnach ist die Construction der Aufgabe: Es werde (Fig. 7.) eine Linie AB = a hingelegt und an einen der Endpunkte ein Perpendikel BG = 2h errichtet, dann werde die Linie AG gezogen und aus J der Mitte von BG eine Parallele JC zu AB; über AG als Sehne werde ein Kreisbogen, fähig des Winkels 2R — δ beschrieben, so ist sein Durchschnittspunkt C mit der Parallele der 3te Winkelpunkt des $\triangle$. — Verbindet man den zweiten Durchschnittspunkt C′ mit A und B, so bekommt man ein zweites $\triangle$, in welchem die Grundlinie = a, die Höhe = h, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie = 2R — δ ist.

Wenn die Construction aus der Analysis unmittelbar als gegeben zu betrachten ist, so steht auch der Beweis mit der Construction in solcher Beziehung, daß er aus dieser unmittelbar abgeleitet werden kann. Der Beweis hat die Ueberzeugung zu gewähren, daß die auf dem Wege der Construction erlangte Figur wirklich alle diejenigen Eigenschaften enthält, wie es die Aufgabe verlangte. Seine Form ist auch die, wie bei dem Lehrsatze, daß nachgewiesen wird, wie diese Behauptung nach den uns angeborenen Gesetzen des Denkens und Schließens eine nothwendige Folge anderer Sätze ist, deren Richtigkeit wir bereits anerkannt haben. Wenn aber der Beweis bei dem Lehrsatze ein doppelter sein kann, der directe oder der indirecte — d. h. daß die Richtigkeit der in dem Lehrsatze aufgestellten Behauptung unmittelbar nachgewiesen, also gezeigt wird, wie diese geradezu eine Folge anderer als wahr anerkannter Sätze ist, oder in dem gezeigt wird, es sei das Gegentheil von dem was behauptet wird unmöglich, indem aus der Annahme, die

Behauptung des Lehrsatzes finde nicht statt, ein Widerspruch folgt — so ist der Beweis bei der Aufgabe vorzugsweise der directe, da alle die Lehrsätze, von welchen bei der Auflösung der Aufgabe Gebrauch gemacht wird, als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

Construction und Beweis nannten die Griechen im Gegensatze zur Analysis die Synthesis der Aufgabe, und nur die Aufgabe wurde von ihnen als aufgelöst betrachtet, bei welchen die Synthesis nicht fehlte. —

Bei der Construction der ersten Aufgabe wurde angenommen, daß die Linie BE von dem Kreise aus mit d beschrieben in zwei Punkten geschnitten werde. Es kann jedoch der Fall eintreten, daß dieser Kreis mit der Linie BE entweder gar keinen Punkt gemeinschaftlich hat, oder daß er ihn berührt. In beiden Fällen ist die Construction des $\triangle$ ABC nicht ausführbar und daher die Auflösung der Aufgabe unmöglich; denn wenn auch eine Berührung statt findet, so liefert doch, wenn man den Punkt A mit dem Berührungspunkte verbindet, die weiter geführte Construction, kein Resultat. Wird nämlich der Punkt A mit dem Berührungspunkte verbunden, so ist der dadurch entstandene W. = R, folglich auch sein Nebenwinkel = R und da dieser Winkel an den Punkt B der BD angetragen wird um den Punkt C zu erhalten, so sind in unserem Falle, da die inneren Gegen-Winkel = 2R, die Linien durch welche wir einen Durchschnittspunkt erhalten sollten parallel; da die Construction des $\triangle$ ABC von der Auffindung des Punktes C abhängig gemacht wurde, so ist da dieser nirgends zu finden, die Construction des $\triangle$ aus den gegebenen Stücken nicht möglich.

Betrachtet man hingegen die Construction zur zweiten Aufgabe, so wird man finden, daß das $\triangle$ ABC immer construirt werden kann, vorausgesetzt jedoch daß der gegebene Winkel $<$ 2R, was aber für unsere Aufgabe immer stillschweigend zugegeben wird. Denn von dem $\triangle$ ABG sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, folglich kann das $\triangle$ immer construirt werden; auch kann man immer, wie hier über AG, über einer Linie einen Kreisbogen beschreiben fähig eines Winkels $<$ 2R, und die aus J zu der AB immer mögliche Parallele wird den Kreisbogen schneiden, folglich erhält man den gesuchten Punkt C und damit das $\triangle$ ABC.

Der Grund dieser beiden ungleichartigen Erscheinungen liegt darin, daß für manche Aufgaben die gegebenen Größen ein gewisses Verhältniß nicht überschreiten dürfen, wenn die Aufgabe möglich sein soll, während sie bei andern Aufgaben ein jedes beliebige Verhältniß unter einander haben können. Zu einer vollständigen Auflösung einer Aufgabe gehört aber immer die Untersuchung, welche Verhältnisse oder welche allgemeine Beziehungen die gegebenen Größen unter sich beobachten müssen, damit die Aufgabe aus den gegebenen Bedingungen aufgelöst werden kann. Diese Untersuchung, so wie die, die Gränze zu bestimmen, über welche hinaus für die gegebene Größe der übrigen Bedingungen eine Bedingung entweder nicht größer oder kleiner werden darf, wenn die Auflösung möglich sein soll, heißt die Gränzbestimmung oder die Determination der Aufgabe.

In den Bedingungen der Aufgabe 1) liegt mit Nothwendigkeit daß a $>$ d oder daß AB $>$ AD, also da auch W. ABD gegeben ist, so ist dort ein $\triangle$ zu construiren, von welchen zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist. Wir wollen diese Aufgabe, um in ihr die Determination aufzusuchen, auflösen.

Analysis. Es sei (Fig. 8.) ABC das verlangte $\triangle$, so daß also AB = a, AC = b, W. ABC = a, auch soll AB $>$ AC sein. — Da die gegebene Linie oder eine ihr gleiche Linie Grundlinie des zu construirenden $\triangle$ werden soll, so kennt man zwei Winkelpunkte des $\triangle$'s, gesucht ist also noch der 3te. Derselbe liegt aber, da W. ABD = a, auf einer Linie die an den Punkt B der AB unter einem Winkel = a angetragen ist, und da auch AC = b, so liegt er auch auf dem Umfange eines Kreises der aus A mit b beschrieben ist. Hieraus ergiebt sich die Construction. Es werde eine Linie AB = a hingelegt und an deren Endpunkt B ein Winkel = a angetragen, aus A werde dann mit b ein Kreis beschrieben, so wird dieser mit der Linie BE entweder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben, oder er wird ihn berühren, oder er wird ihn schneiden. Angenommen das letzte finde statt, so verbinde man die beiden Durchschnittspunkte C und C′ (Fig. 9.) mit A so sind die dadurch entstandenen $\triangle\triangle$ ABC und ABC′ die verlangten.

Beweis. Denn es ist AB = a, AC = b = AC′ und Winkel ABC = a.

Die beiden $\triangle\triangle$ ABC und ABC′ enthalten also beide die gegebenen Stücke und sind demnach die verlangten.

Die Determination für diese Aufgabe ist aber folgende:

Da a $>$ b, so ist auch AB $>$ AC, demnach auch W. ABC $<$ ACB; wenn also die Aufgabe möglich sein soll, so muß 1) der gegebene Winkel kleiner als R sein. Wird das Perpendikel AD auf BE gefällt, so ist W. ADB = R, folglich ADB + ABD $<$ 2R und W. ACD $<$ R. Daher ADC $>$ ACD, folglich auch AC $>$ AD.

Hieraus ergiebt sich, daß 2) die Seite b nicht kleiner sein darf als das Perpendikel von A auf BE, wenn anders die Aufgabe möglich sein soll.

Ist b = AD, so fällt der Punkt C mit C' zusammen und man hat statt zweier Dreieck nur eins, was die verlangten Bedingungen erfüllt.

Nicht immer bedarf die Determination dieser mehrfachen Schlüsse, in vielen Fällen kann sie unmittelbar aus Lehrsätzen abgeleitet werden. So ist die Determination für die Aufgabe ein △ aus 3 gegebenen Seiten zu construiren, daß die Summe oder die Differenz je zweier derselben kleiner als die 3te ist. — In andern Fällen, namentlich in denen, wo die Größe einer Linie von der Größe eines Winkels abhängig ist (wie oben) oder umgekehrt, ist die Elementargeometrie nicht immer im Stande die Gränzbestimmungswerthe anzugeben, da ihr häufig die Lehrsätze fehlen, aus welchen die Art der Abhängigkeit erkannt werden kann. In diesem Falle tritt die Trigonometrie hinzu, und bringt die Größen in Verbindung um daraus die eine aus der andern auszudrücken. — So ist trigonometrisch die Determination der vorhergehenden Aufgabe, daß sie in allen den Fällen lösbar ist, in welchem $b \gtreqless a \sin. \alpha$ wobei jedoch immer vorausgesetzt ist, daß $b < a$ ist.

Obgleich dieselbe Aufgabe oft auf ganz verschiedene Weise aufgelöst werden kann, so daß es schwer erscheint, die verschiedenen Wege, auf welchem man zur Auflösung einer Aufgabe gelangt, unter bestimmte Gesichtspunkte zu bringen, so lassen sich doch im Allgemeinen gewisse Hauptabtheilungen der geometrischen Analysis nachweisen, welche die Hülfsmittel bezeichnen, die man zur Auflösung einer Aufgabe anzuwenden hat. Diese Hülfsmittel finden wir entweder in dem Zusammenhange einer Aufgabe mit andern schon gelösten Aufgaben, oder in ihrem Zusammenhange mit geometrischen Wahrheiten. Faßt man diesen Zusammenhang schärfer auf, so ergeben sich darnach folgende fünf verschiedene Hauptwege, die zur Auflösung geometrischer Aufgaben führen, jedoch so, daß entweder schon einer dieser Wege zur Auflösung führt, oder daß eine Verbindung zweier oder mehrerer derselben erst zur Auflösung führt.

1) Auflösung durch Analogie.
2) Auflösung durch Reduction auf schon gelöste Aufgaben.
3) Auflösung durch Lehrsätze.
4) Auflösung durch geometrische Oerter.
5) Auflösung durch Data. —

Es werde jetzt das Wesen einer jeden dieser Auflösungsarten näher erörtert.

I. Auflösung der Aufgaben durch Analogie.

Hat eine Aufgabe mit einer bereits aufgelösten gleichartige Bedingungen, so ist zu vermuthen, daß die gesuchte Auflösung mit der bereits gefundenen in Beziehung steht, und in der That gelangt man auch in vielen Fällen durch eine etwas veränderte Analysis, die sich in der Regel auch durch die Bedingungen der Aufgabe ergiebt, zu einer Auflösung der Aufgabe. Wird die Auflösung auf diesem Wege bewirkt, so ist sie durch **Analogie** aufgelöst.

Bei einer zur Auflösung vorgelegten Aufgabe ist zu untersuchen, ob sie mit einer andern in dem Zusammenhange stehen, daß die Bedingungen jener Aufgabe sich für diese in analoge verwandeln lassen. Vielfache Beziehungen dieser Art bietet die Klasse der Dreiecksaufgaben dar; zur Construction derselben können Seiten und Winkel, je nachdem sie zu Summen oder Differenzen angeordnet werden, dienen. Fast immer wird man aber aus analogen Bedingungen analoge Analysen und Constructionen erhalten.

Es seien z. B. die beiden Aufgaben gegeben: 1) ein rechtwinkeliges △ zu construiren von welchem gegeben ist die Summe aus der Hypotenuse h und der anliegenden Kathete c, und die Summe aus der Kathete b und dem Perpendikel p. 2) ein rechtwinkeliges △ zu construiren, von welchem gegeben ist die Differenz zwischen der Hypotenuse h und der Kathete c, und die Differenz zwischen der Kathete b und dem Perpendikel p.

Analysis zu 1) Es sei (Fig. 10) ABC das verlangte △. Es werde AC verlängert bis AE = AC + CB und ebenso AB bis AD = AB + BF. Da nun ABF ähnlich ABC, so verhält sich AB : BF = AC : BC und AB + BF : AB = AC + BC : AC oder: AD : AB = AE : AC, so ist DE parallel BC, folglich auch ADE = R; das △ ADE kann demnach construirt werden. Es ist nun zu untersuchen, wie man, wenn △ ADE construirt ist, zur Construction des △ ABC gelangt. Wird B mit E durch eine grade Linie verbunden, so ist W. CBE = BED und da BC = CE, so ist W. CBE = BEC, folglich W. CEB = BED, also W. CED durch BE halbirt; demnach liegt der Scheitelpunkt B des gesuchten $\triangle$ ABC in der Halbirungslinie des W. AED und da er auch in AD liegt, so liegt er in beider Linien Durchschnittspunkt. Demnach ist die Construction: aus $h + c$, $b + p$ und R werde das $\triangle$ ADE construirt, halbire W. AED und ziehe aus B die BC parallel DE, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

Ganz in ähnlicher Weise wird die Analysis zur zweiten Aufgabe gemacht, nur daß jetzt, statt der Summen der Seiten ihre Differenz gebildet wird. Es sei jetzt z. B. (Fig. 11) ABC das gesuchte $\triangle$; mache $AE = AC - BC$ und $AD = AB - BF$ ziehe DE, so ist $\triangle$ ADE ähnlich ABC, denn es ist wieder: $AB : BF = AC : BC$ und daraus $AB - BF : AB = AC - BC : AC$, d. h. $AD : AB = AE : AC$, also ist auch hier DE parallel BC und $\triangle$ ADE ähnlich ABC; das $\triangle$ ADE kann nun aus $h - c$, $b - p$ und R construirt werden. Verbindet man jetzt den Punkt E mit B, so ist $\triangle$ BDE congruent BEF da $BD = BF$, $BE = BE$ und W. $BDE = BEF = R$, folglich W. $BED = BEF$. Demnach liegt der gesuchte Punkt B in der Halbirungslinie des Nebenwinkels vom W. AED und da BC parallel DE, so liegt C in der zu DE parallelen Linie BC.

Die Analysis dieser Aufgabe ist der der vorigen ganz analog; die Construction ist aber von der vorigen darin verschieden, daß in dieser Aufgabe der Nebenwinkel des W. AED halbirt wird um zum Punkte B zu gelangen, statt daß in der vorigen Aufgabe, der W. AED selbst halbirt wurde.

Es seien die Aufgaben aufzulösen: 1) ein Dreieck zu beschreiben, in welchem der Unterschied der Abschnitte der Grundlinie = a, die Summe der beiden andern Seiten = b und die Summe der Winkel an der Grundlinie = α ist.

2) ein Dreieck zu beschreiben in welchem wieder der Unterschied der Abschnitte der Grundlinie = a, die Summe der beiden andern Seiten = s und die Differenz der Winkel an der Grundlinie = δ ist.

Analysis. Es sei (Fig. 12) für Aufgabe 1) ADC das gesuchte $\triangle$; beschreibt man aus dem Punkte D mit DC einen Kreis und wird angenommen, daß AC in B geschnitt n wird, so ist, wie sich leicht ergiebt, wenn das Perpendikel DG gezogen wird, AB die Differenz der Abschnitte der Grundlinie, und verlängert man auch AD bis zum Durchschnitte mit dem Umfange in F, so ist $AF = AD + DC$, außerdem entsteht dadurch ein Winkel $FDC = DAC + DCA = \alpha$; zieht man die FB, so ist W. $FBC = \frac{1}{2} FDC = \frac{1}{2}\alpha$, folglich $ABF = 2R - \frac{1}{2}\alpha$; man kennt also vom $\triangle$ ABF, $AB = a$, $AF = AD + DC = b$ und W. $ABF = 2R - \frac{1}{2}\alpha$; es kann also construirt werden. — Den Punkt D, findet man aber, wenn an B der BF ein W. = W. AFB angetragen und zum Durchschnitt mit AF verlängert wird.

Da in der zweiten Aufgabe statt der Summe die Differenz der Winkel gegeben ist, so findet man gleich, daß (Fig. 13) W. $ADB = DCA - DAC = \delta$ ist und da $AFB = \frac{1}{2} ADB = \frac{1}{2}\delta$, so ist vom $\triangle$ ABF $AB = a$, $AF = AD + DC = b$ und W. $AFB = \frac{1}{2}\alpha$ gegeben, es kann also construirt werden. Auf gleiche Weise wie in der vorigen Aufgabe wird auch hier der Punkt D bestimmt; der Punkt C liegt aber für beide Aufgaben in der Verlängerung der Linie AB und in dem Umfange des Kreises der aus D mit DB beschrieben ist.

Construction, Beweis und Determination dieser Aufgaben werden zur Ersparung des Raumes nicht beigefügt; die beiden ersten werden sich leicht aus der Analysis ergeben. Die Determination kann mit Hülfe von Lehrsätzen nach der oben ausgeführten abgeleitet werden.

Es ergiebt sich, in wie genauem Zusammenhange die Auflösungen beider Aufgaben stehen; ähnliche Resultate ergeben sich bei allen solchen Aufgaben, bei denen, während die übrigen Bedingungen bleiben, Summen von Seiten und Winkeln sich in Differenzen und diese sich in jene verwandeln. Die Constructionen zu solchen analogen Aufgaben, sind ebenfalls analog, nur finden wir, daß gewisse Theile einer Figur entgegengesetzte Richtungen annehmen in Beziehung auf die gleichartigen Theile der andern.

Als letztes Beispiel für die Auflösung durch Analogie seien die beiden folgenden Aufgaben gewählt:

1) In einer der Lage nach gegebenen geraden Linie CD (Fig. 14.) einen Punkt E zu finden, so daß die von ihm nach zweien der Lage nach gegebenen Punkten A und B gezogenen geraden Linien mit der CD gleiche Winkel bilden.

2) Es sind zwei Kreise und eine gerade Linie der Lage nach gegeben; es soll ein Punkt in dieser Linie gesucht werden, so daß die von ihm an die Kreise geführten Berührungslinien mit der gegebenen Linie gleiche Winkel bilden.

Analysis zu 1). Es sei E der gesuchte Punkt, so daß also W. AEC = W. BED; fället man von A und B auf die CD die Perpendikel AF und BG, so sind die $\triangle\triangle$ AFE und BGE ähnlich und es verhält sich: $AF : BG = FE : GE$. Da nun die Punkte A und B so wie die Linie CD der Lage nach gegeben sind, so sind dadurch auch die Perpendikel mitgegeben. Fället man demnach die Perpendikel BF und BG und theilt die zwischen ihren Fußpunkten enthaltene FG nach dem Verhältnisse von AF zu BG so ist der Theilungspunkt E der gesuchte Punkt.

Oder: man verlängere AF und mache FJ = AF, ziehe BJ, so ist der Durchschnittspunkt E der verlangte. Denn △ EFA congruent EFJ, weil AF = FJ, FE = FE und W. AFE = JFE = R, folglich auch W. AEF = W. FEJ. Da nun W. FEJ = BEG, so ist auch W. BEG = W. AEF.

Analysis zu A. 2. Wenn in der vorigen Aufgabe Punkte der Lage nach gegeben waren, so sind es hier Kreise, zu welchen die Tangenten gezogen werden sollen; im Uebrigen bleibt die Aufgabe unverändert. Die Aufgabe läßt darum eine der vorigen analogen Auflösung vermuthen. Ist dort das Gesuchte ein Punkt (J), der gegen die Linie CD dieselbe Lage hat, wie der Punkt A, so ist es hier, da dem Gegebenen etwas Analoges entsprechen soll, ein Kreis. Dort sollen Linien gezogen werden, die nur noch die Bedingung erfüllen, daß sie mit einer gegebenen Linie gleiche Winkel bilden, hier kommt zu der letzten Bedingung noch hinzu, daß sie an zwei der Lage nach gegebene Kreise Tangenten seien. Werden diese Gesichtspunkte festgehalten, so ergiebt sich folgendermaßen die Construction. Es werde von O (Fig. 15) ein Perpendikel OA auf CD gefällt und dasselbe verlängert bis AO″ = AO ist. Aus O″ wird mit dem Radius des Kreises um O ein Kreis beschrieben, wird dann zu den Kreisen um O″ und O′ die gemeinschaftliche Tangente construirt, so ist der Durchschnittspunkt G mit der CD der gesuchte Punkt.

Beweis. Zieht man die Tangente GH, so ist △ OAG congruent O″AG, folglich OG = O″G und da auch OH = O″E und W. OHG = O″EG = R, so ist auch △ OHG congruent O″EG, folglich W. OGH = O″GE und W. HGA = AGE; W. AGE = FGB, folglich W. AGH = FGB.

II. Auflösung der Aufgaben durch Reduction.

Gelangt man bei der Auflösung einer zusammengesetzteren Aufgabe durch Zerlegung in ihre Bestandtheile dahin, daß man ihre Auflösung von einer einfacheren früher schon gelösten Aufgabe abhängig gemacht sieht, so daß man also um die neue Aufgabe zu lösen, zunächst die früher gelöste wieder zu construiren hat, so kann man sie selbst als gelöst betrachten und ihre Auflösung ist durch Reduction bewirkt. Am einfachsten ist die Auflösung dann, wenn sie durch die Auflösung einer Fundamental-Aufgabe, wohin z. B. die Aufgaben gehören: einen Winkel oder eine gerade Linie zu halbiren, ein Perpendikel zu fällen, aus drei gegebenen geraden Linien ein Dreieck zu construiren, eine Parallellinie zu ziehen, eine Linie nach gegebenem Verhältnisse zu theilen u. s. w. bedingt ist. Es sei z. B. die Aufgabe gegeben:

Von den Endpunkten einer Sehne nach einem Punkte im Umfange des Kreises zwei gerade Linien zu ziehen, so daß diese geraden Linien das Verhältniß zweier gegebenen geraden Linien a und b haben. Es soll dieser Punkt gesucht werden.

Analysis. Es sei (Fig. 16) AB die gegebene Sehne, und C der gesuchte Punkt im Umfange des Kreises, zieht man also AC und CB so hat man dieser Annahme gemäß AC : CB = a : b. Nimmt man nun auch an, daß AB in D nach demselben Verhältnisse getheilt sei, so hat man auch AD : DB = a : c. Aus der Verbindung dieser Proposition mit der vorhergehenden ergiebt sich: AC : CB = AD : DB, folglich halbirt die die Punkte C und D verbindende Linie CD den Winkel ACB und bei ihrer Verlängerung halbirt sie auch den Bogen AEB; es geschehe dieses in E. Der gesuchte Punkt C, der Punkt D in welchem AB nach dem gegebenen Verhältnisse geschnitten wird, und der Halbirungspunkt E des Bogens AEB liegen also in gerader Linie und da die Lage zweier derselben E und D immer gefunden werden kann, so ist damit auch der Punkt C gefunden. Hiernach ergiebt sich die

Construction: Man halbire den Bogen AEB, theile die Linie AB nach dem Verhältnisse von a : b und verbinde den Halbirungspunkt E mit dem Theilungspunkte D; wird diese ED bis zum Umfange des Kreisbogens verlängert, so ist der Durchschnittspunkt der gesuchte Punkt.

Beweis. Man ziehe die Linien AC und CB, so ist, da der Bogen AE = EB, W. ACB = W. BCD folglich AC : CB = AD : DB und da nach der Construction AD : DB = a : b, so ist auch AC : CB = a : b; demnach ist C der gesuchte Punkt.

Mehr als die vorhergehende Aufgabe, deren Lösung allein auf die Construction von Fundamental-Aufgaben zurückgeführt wurde, entspricht die Auflösung der folgenden Aufgabe dem Begriffe der Auflösung durch Reduction.

Ein Dreieck zu beschreiben, von welchem die Grundlinie der Größe und Lage nach, und die Differenz der beiden anderen Seiten gegeben ist; außerdem ist eine gerade Linie der Lage nach gegeben, auf welcher die Spitze des Dreiecks liegt.

Analysis. Es sei (Fig. 17) ABC das gesuchte Dreieck und DE sei die der Lage nach gegebene gerade Linie. Ist nun $AB > AC$ und beschreibt man aus dem Punkte A mit AC als Halbmesser einen Kreis, so ist $AF = AC$ und $AB - AF = AB - AC = BF = d$. Der Punkt F von dessen Auffindung die Auflösung der Aufgabe abhängig ist, ist aber nur örtlich bekannt, indem er auf dem Umfange eines Kreises liegt, der den Punkt B zum Mittelpunkte und die gegebene Differenz der Seiten zum Radius hat; derselbe liegt aber auch auf dem Umfange eines Kreises, der den Punkt A zum Mittelpunkt und die AF zum Radius hat; da nun $AF = AC$ ist, so ist unsere Aufgabe auf die zurückgeführt: einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis von Außen berührt, der durch einen gegebenen Punkt C geht und dessen Mittelpunkt auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie liegt. — Fället man von C aus auf die DE das Perpendikel CH und verlängert es bis zum Umkreise, so ist $CH = HG$; der Kreis der den um B mit BF beschriebenen Kreis in F berührt, geht also auch noch durch den der Lage nach gegebenen Punkt G; unsere Aufgabe ist also auf die Auflösung folgender Aufgabe zurückgeführt: durch zwei der Lage nach gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der einen mit einem gegebenen Halbmesser beschriebenen Kreis von außen berührt. Wird die Auflösung dieser Aufgabe als bekannt vorausgesetzt, so ist damit auch die gegebene Aufgabe als aufgelöst anzusehen.

Construction. Man beschreibe (Fig. 18) aus einem der Endpunkte der der Lage und Größe nach gegebenen AB einen Kreis mit der gegebenen Differenz der Seiten = d und fälle von B auf die der Lage nach bekannte Linie DE die Senkrechte BC und verlängere sie bis $CF = BC$ ist; wird dann durch die Punkte B und F ein Kreis gelegt, der zugleich den Kreis um A berührt, so ist der Mittelpunkt dieses Kreises, der in der DE liegen muß, da BF von demselben Sehne ist, der gesuchte 3te Winkelpunkt des Dreiecks.

Beweis. Denn ist G der Mittelpunkt des construirten Kreises, der durch die Punkte B und F geht und der den Kreis um A in dem Punkte J berührt, so bilden die Linien AJ und JG eine gerade Linie und da $BG = GJ$, so ist $AG - GB = AG - GJ = AJ = d$; außerdem ist AB der Lage und Größe nach gegeben und die Spitze des Dreiecks liegt auf der der Lage nach gegebenen geraden Linie DE, folglich ist Dreieck ABG das gesuchte mit den verlangten Eigenschaften.

Der Zusammenhang, welcher zwischen Dreiecken und Vierecken und besonders zwischen Dreiecken und Parallelogrammen statt findet, indem jedes Dreieck als Hälfte eines Parallelogramms gedacht werden kann, in welchem eine der Seiten des Dreiecks Diagonale ist, läßt schon vermuthen, daß die Construction der Parallelogramme sehr häufig von der der Dreiecke, so wie die Construction dieser auch umgekehrt von der Construction der Parallelogramme, besonders wenn Transversalen der Dreiecke gegeben sind, abhängig ist. Es sei z. B. die Aufgabe gegeben:

Ein gleichseitiges Parallelogramm zu beschreiben, von welchem eine Seite und die Summe der Diagonalen gegeben ist.

Analysis. Es sei (Fig. 19) ABCD das zu construirende gleichseitige Parallelogramm, so daß also in demselben die Seite CD = der gegebenen Linie a und die Summe der Diagonalen $AD + BC$ = der Linie s ist. Da in jedem Parallelogramme die Diagonalen sich gegenseitig halbiren, so ist also $CO = OB$, $AO = OD$, und da das Parallelogramm ein gleichseitiges ist, so schneiden sich die Diagonalen unter rechten Winkeln; von jedem der durch das Ziehen der Diagonalen entstandenen Dreiecke weiß man also, daß es rechtwinkelig ist, überdieß kennt man von demselben die Hypotenuse und die Summe der Katheten. Es ist aber einleuchtend, daß wenn man eins dieser Dreiecke construirt hat, man vermittelst desselben zu dem Parallelogramm gelangt, indem die Katheten um Gleiches über den gemeinschaftlichen Punkt hinaus verlängert werden. Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe ist also auf die zurückgeführt: ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, von welchem die Hypotenuse und die Summe der Katheten gegeben ist; da die Auflösung dieser Aufgabe als bekannt vorausgesetzt wird, so ist die

Construction: Es werde (Fig. 20) eine Linie AB = der halben Summe der Diagonalen s hingelegt und an den Endpunkt B eine Linie BC unter einem Winkel von ½ R. an AB angetragen; aus A werde mit a ein Kreis beschrieben, von dem wir annehmen, daß er die BC in den Punkten E und E′ schneide. Von einem der Punkte E werde das Perpendikel EG auf AB gefällt und die AE gezogen, so ist $\triangle AEG$ das rechtwinkelige $\triangle$, in welchem eine Seite $AE = a$ und $AG + GE = \frac{1}{2}s$ ist. Macht man noch $GF = AG$ und verlängert EG, so daß $GH = EG$ und zieht man noch die Linien AH, HF und EF, so ist, wie leicht zu erweisen, AEFH das gleichseitige Parallelogramm, in welchem jede der Seiten = a und die Summe der Diagonalen = s ist. — Der Punkt E′ kann in gleicher Weise wie der Punkt E benutzt werden. — Die Aufgabe hat eine Determination.

Die Auflösung der folgenden Aufgabe zeigt, wie die Construction eines Dreiecks auf die eines Vierecks zurückgeführt ist.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, von welchem gegeben ist: zwei Seiten und die Transversale zu der dritten Seite (eine Linie aus einem Winkelpunkte auf die Mitte der Gegenseite).

Analysis. Es sei (Fig. 21) ABC das verlangte Dreieck, so daß also AB = a, AC = b und AD = c. Denkt man sich nun △ BAC als die Hälfte eines Parallelogramms, von welchem BC die Diagonale ist, und construirt dann dieses Parallelogramm ABEC, so ist AE = 2 AD = 2 c. Von dem Parallelogramm kennt man also zwei Seiten AB und AC, so wie die von ihnen eingeschlossene Diagonale, dasselbe kann also construirt werden; mit der Construction des Parallelogramms ABCE erhält man also auch, wenn man die Diagonale BC zieht, das gesuchte Dreieck ABC; die Auflösung der Aufgabe ist daher auf die zurückgeführt: ein Parallelogramm zu beschreiben, von welchem die Diagonale und die an derselben anliegenden Seiten gegeben sind. Da aber AC = BE, so sind von dem △ ABE alle 3 Seiten gegeben und demnach ist die Construction des Parallelogramms auf die des △ ABE zurückgeführt.

Construction: Aus den 3 gegebenen Linien a, b und 2 c werde das △ GHJ (Fig. 22) construirt, so daß GH = a, HJ = b und GJ = 2 c sei; durch G und J ziehe man Parallele zu den Seiten HJ und GH, wodurch das Parallelogramm GHJK entsteht; wird noch die Diagonale HK gezogen, so ist △ GHK das verlangte.

Beweis. Denn es ist in demselben GH = a, GK = HJ = b und GL = ½ GJ = c; auch ist Punkt L der Mittelpunkt von HK, folglich genügt △ GHK den Forderungen.

III. Auflösung der Aufgaben durch Lehrsätze.

Die hierher gehörigen Aufgaben sind vorzugsweise diejenigen, deren Auflösung als ein unmittelbares Ergebniß geometrischer Lehrsätze zu betrachten ist. In Euklides Elemente sind solche Aufgaben häufig zwischen die Lehrsätze eingestreut, und bei einiger Aufmerksamkeit wird man leicht jedesmal die Analysis zu derselben auffinden. So kann die Auflösung der Aufgabe »durch einen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche mit einer gegebenen parallel ist« durch den Lehrsatz bewirkt werden, daß Linien parallel sind, wenn ihre Wechselwinkel gleich sind. Ist in (Fig. 23) AB parallel mit CD, so ist, wenn irgend ein Punkt E mit F verbunden wird, W. AEF = EFB; soll umgekehrt durch den Punkt E eine gerade Linie gelegt werden, welche mit der CD parallel ist, so geschieht dieses, indem man den Punkt E mit irgend einem Punkte F in der Linie CD verbindet und einen der dadurch an F entstandenen Winkel, z. B. EFB so an den Punkt E der Linie EF anträgt, daß er von ihm Wechselwinkel wird; ist dieses der Winkel AEF, so ist, da AEF = EFD, AB parallel mit CD.

Von dem Lehrsatze: »daß die Tangente mit einer Sehne im Kreise einen Winkel bildet, der gleich ist dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte« kann eine Anwendung gemacht werden auf die Auflösung der Aufgabe: »in einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen gleichwinkelig sei.«

Denn es sei (Fig. 24) ABC das in den Kreis zu beschreibende Dreieck, welches dem Dreiecke abc gleichwinkelig ist, so daß W. A = a, W. B = b, W. C = c. Erinnert man sich nun des Satzes Eukl. III. 32 und legt man an irgend einen Winkelpunkt B eine Tangente DE, so ist W. CBE = A = a, W. ABD = C = c, folglich auch W. ABC = b. Es liegen also die drei Winkel des Dreiecks abc an dem Punkte B der Tangente DE, so daß die Schenkel AB und BC Seiten des gesuchten Dreiecks sind. Durch diese Analysis ist die Auflösung der Aufgabe gefunden: es werde an irgend einen Punkt B im Umfange des Kreises eine Tangente DE gelegt und an denselben Punkt W. ABD = a, und W. CBE = c, wird dann noch AC gezogen, so ist Dreieck ABC gleichwinkelig mit abc.

Die Aufgabe: »eine gerade Linie zu finden, welche zwischen zweien andern die mittlere Proportionallinie ist«, kann auf mehrfache Weise durch Lehrsätze gelöst werden. Wir wenden dazu den Lehrsatz an, daß das Perpendikel aus dem rechten W. eines rechtwinkeligen Dreiecks die mittlere Proportionallinie ist zwischen den durch das Perpendikel gebildeten Abschnitten der Hypotenuse; es setzt aber die Auflösung unserer Aufgabe noch die einer andern als bekannt voraus: »über einer gegebenen geraden Linie als Hypotenuse ein rechtwinkeliges Dreieck zu beschreiben.« Man hat also die beiden gegebenen geraden Linien als Abschnitte der Hypotenuse eines rechtw. Dreiecks zu betrachten, die durch das Perpendikel aus dem Gegenwinkel derselben erhalten sind. Hiernach ist die Construction: es werden die beiden gegebenen Linien zur Summe aneinander gelegt und über derselben als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben; aus dem, den beiden Linien gemeinschaftlichen Verbindungspunkte wird ein Perpendikel errichtet, so ist dieses die gesuchte mittlere Proportionallinie.

Nach dem nämlichen oben angeführten Satze ist aber auch jede Kathete die mittlere Proportionallinie zwischen dem der Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse und dieser Hypotenuse selbst. Legt man also die beiden gegebenen Linien zur Differenz an einander, beschreibt über der größeren als Durchmesser einen Halbkreis (Fig. 25.) und errichtet man aus dem Punkte B das bis zum Durchschnitte D mit der Peripherie verlängerte Perpendikel, so ist, wenn AB die andere gegebene Linie ist, AD die gesuchte mittlere Proportionallinie.

Eine dritte Auflösung der Aufgabe gewinnt man nach dem Satze, daß jede Tangente die mittlere Proportionale ist zwischen der aus einem Punkte derselben in den Kreis gezogenen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte. Ist nämlich (Fig. 26.) AD die Tangente und sind AB und AC die gegebenen Linien, so ist, da $AB : AD = AD : AC$, AD die gesuchte mittlere Proportionole. Hieraus ergiebt sich die Construction: man trage die kleinere Linie auf der größeren zur Differenz ab, beschreibe über dieser als Sehne einen Kreis und lege von dem Punkte A aus an denselben eine Tangente, so ist diese, wie sich aus dem oben angeführten Satze ergiebt, die gesuchte mittlere Proportionale.

Die Auflösung der vorliegenden Aufgaben lag nahe, da die Sätze, durch welche sie bewerkstelligt wurde, solche sind, die in dem Systeme der Geometrie häufig wieder kehren; ist hingegen eine Aufgabe gegeben, welche man durch die bekannten Lehrsätze nicht auflösen kann, so hat man die zu ihrer Lösung nöthigen Sätze aufzusuchen.

Es sei die Aufgabe gegeben, ein Dreieck zu construiren, von welchem eine Seite gegeben ist und die Transversalen der beiden anderen Seiten.

Analysis. Man nehme an, das △ ABC (Fig. 27.) sei das gesuchte, und AB, AD und BE seien darin die gegebenen Linien, aus welchen das △ construirt ist. Es ist klar, daß wenn man den Durchschnittspunkt der beiden Transversalen kennt, man auch das △ ABC construiren kann, da die AD und BE der Größe nach gegeben sind. Zieht man nun die Hülfslinie ED, so ist, da $CE = \frac{1}{2}\, AC$ (nach der Hyp.) und CD auch $\frac{1}{2}$ BC, ED parallel mit AB und △ AFB ähnlich EFD, woraus man die Proportion hat: $AF : FD = AB : ED = AC : CE = 2 : 1$, und $BF : EF = AB : ED = AC : CE = 2 : 1$. Es ergiebt sich hieraus also der Satz, daß die beiden Transversalen sich in einem Punkte F durchschneiden, so, daß die zwischen diesem Punkte und den beiden Winkelpunkten enthaltenen Stücke $\frac{2}{3}$ von der Größe sind der ganzen Transversalen. — Das △ ABF wird demnach aus AB und den beiden Transversalen construirt, wenn man von den letzten $\frac{2}{3}$ ihrer Länge nimmt; verlängert man nun AF und BF bis die Linien AD und BE den beiden gegebenen Transversalen gleich sind, und führt man durch die Punkte E und D von A und B gerade Linien bis sie sich durchschneiden, so ist das dadurch entstandene △ das verlangte.

IV. Auflösung der Aufgaben durch geometrische Oerter.

Die Eintheilung der unbestimmten Aufgaben in beschränkt und in unbeschränkt unbestimmte beruhte, wie oben ausgeführt wurde, darauf, ob die Aufgabe eine bestimmte endliche Anzahl von Auflösungen, oder ob sie eine unendliche Anzahl von Auflösung gestattete. Die Aufgabe: über einer geraden Linie ein Dreieck mit gegebener Höhe zu beschreiben läßt unendlich viele Auflösungen zu, da jeder Punkt in einer zu der Grundlinie im gegebenen Abstande parallel gezogenen geraden Linie, Scheitelpunkt des zu construirenden Dreiecks sein kann. Wird statt der Höhe des Dreiecks der Gegenwinkel der Grundlinie gegeben, so ist die Aufgabe wieder eine unbeschränkt unbestimmte, indem die Gipfel aller Dreiecke, die den Bedingungen dieser Aufgabe genügen, in dem Kreisbogen enthalten sind, der über der gegebenen Linie, fähig des gegebenen Winkels beschrieben ist. Werden aber alle drei Bedingungen, Grundlinie, Gegenwinkel derselben und Höhe zu den Bedingungen der Aufgabe vereinigt, so wird die Aufgabe eine bestimmte oder doch eine beschränkt bestimmte, sofern die Linie, welche in einem Abstande $= h$ parallel zu der Grundlinie genommen wird, den Kreisbogen berührt oder schneidet. Da der Gipfel des gesuchten Dreiecks in der Parallellinie zu der Grundlinie und auch in dem Kreisbogen enthalten ist, so muß er nothwendig in dem Punkte enthalten sein, den beide gemeinschaftlich haben. Man nennt jene gerade Linie und diesen Kreisbogen, fähig des gegebenen Winkels, den geometrischen Ort für alle die Punkte, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Ueberhaupt heißt jede gerade oder krumme Linie, in der jeder beliebige Punkt gegen einen oder mehrere der Lage nach gegebene Punkte dieselbe Beziehung hat, der geometrische Ort dieser Punkte.

Aus dem Vorigen ergiebt sich, daß eine Aufgabe unbestimmt wird, sobald eine der Bedingungen, die sie zu einer bestimmten macht, wegfällt. — Solche Aufgaben lassen sich größtentheils mit Hülfe der Sätze über geometrische Oerter auflösen. Man berücksichtigt nämlich die eine oder die andere Bedingung einer bestimmten geometrischen Aufgabe nicht und untersucht dann, welche Resultate und welche allgemeine Beziehungen für die Auflösung sich hieraus ergeben; man findet dann für das Gesuchte, was in der Regel ein Punkt ist, einen geometrischen Ort. Vertauscht man die Bedingung mit einer andern und wiederholt dasselbe Verfahren, so wird sich für denselben Punkt ein zweiter geometrischer Ort ergeben; die Verbindung beider Oerter giebt den gesuchten Punkt und es ist damit die Analysis geschlossen.

Da die Kenntniß der geometrischen Oerter für die Auflösung von Aufgaben sehr wichtig ist, so mögen hier einige Sätze über geometrische Oerter, wie sie sich entweder aus Definitionen oder Lehrsätzen ergeben, folgen.

1) Der geometrische Ort für alle die Punkte in einer Ebene, welche von einem gegebenen Punkte dieselbe Entfernung haben, ist der Umfang des Kreises, welcher diesen Punkt zum Mittelpunkte und seine Entfernung von einem der Punkte zum Radius hat.

2) Der Umfang eines Halbkreises ist der geometrische Ort für die Scheitelpunkte aller rechtwinkeligen Dreiecke, welche den Durchmesser zur Hypotenuse haben.

3) Das Perpendikel aus der Mitte einer geraden Linie ist der geometrische Ort für alle gleichschenkeligen Dreiecke, die über derselben beschrieben werden können.

4) Der geometrische Ort für alle die Punkte, die von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie den Abstand h haben, ist die in einem Abstande h zu derselben gezogene Parallele.

5) Der geometrische Ort für die Gipfel aller Dreiecke, welche mit einem gegebenen dieselbe Grundlinie und gleichen Inhalt haben und an derselben Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen, ist die durch die Spitze jenes Dreiecks parallel der Grundlinie gezogene Linie.

6) Das im Halbirungspunkte einer Linie errichtete Perpendikel ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die über dieser Linie als Sehnen beschrieben werden können.

7) Von zwei concentrischen Kreisen ist der innere der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Sehnen, die in den Kreisring eingetragen werden können und die für den innern Kreis Tangenten sind.

8) Das aus irgend einem Punkte in einer Linie errichtete Perpendikel ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die durch den Fußpunkt des Perpendikels gehen und jene Linie berühren.

9) Die Halbirungslinie eines Winkels ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Schenkel des Winkels berühren.

10) Der über einer gegebenen Linie als Sehne, fähig eines gegebenen Winkels a beschriebene Kreisbogen, ist der geometrische Ort für alle die Dreiecke, welche die gegebene Linie als Grundlinie haben und deren Winkel an der Spitze = a ist.

Obgleich die Anzahl der Sätze über geometrische Oerter sich noch vielfach vermehren lassen, so gestattet doch der Raum nicht, noch mehrere mitzutheilen. Dafür soll ihre Anwendung an einigen Aufgaben nachgewiesen werden.

Aufgabe: Ueber einer geraden Linie als Sehne einen Kreisbogen zu beschreiben, der eines gegebenen Winkels fähig ist.

Analysis. Es sei (Fig. 28.) ACB der über der gegebenen Linie AB fähig des gegebenen Winkels α beschriebenen Kreisbogen, so daß also $ACB = \alpha$ und $AB = a$ ist. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt des Kreises, der die Linie AB zur Sehne hat, ist nach den Sätzen über geometrische Oerter Nr. 6 das Perpendikel aus dem Mittelpunkt D der Linie AB. Ist nun AD Tangente an A, so ist W. $BAD = ACB$; nach Nr. 8 der Sätze über geometr. Oerter liegt der Mittelpunkt der Kreises auch in dem Perpendikel aus A auf AD. Da wir nun für den Mittelpunkt des Kreises, welcher hier das allein Gesuchte ist, indem mit dem Mittelpunkte und der der Lage nach gegebenen Linie AB auch der Radius gegeben ist, zwei geometrische Oerter haben, so ist der Durchschnittspunkt beider der gesuchte Mittelpunkt. Hiernach ergiebt sich die

Construction. An den Endpunkt A der Linie $AB = a$ werde der W. α angetragen, und aus dem Mittelpunkte C der AB, so wie aus A auf AD Perpendikel errichtet; der Durchschnittspunkt beider ist des Kreises Mittelpunkt, so wie seine Verbindung mit dem Endpunkte der gegebenen Linie der Radius des gesuchten Kreisabschnittes.

Aufgabe. Von einem Punkte A außerhalb des Kreises an demselben eine Tangente zu ziehen.

Analysis. In dieser Aufgabe ist allein der Berührungspunkt gesucht; derselbe würde sich (Fig. 29.) als Durchschnittspunkt der geraden Linie BC mit dem Kreisumfange ergeben, wenn nur ein Punkt nachgewiesen werden könnte, durch welche die verlängerte BC geht, indem die Verbindung dieses Punktes mit dem Mittelpunkte B den Punkt C giebt. Wird nun $CD = BC$ gemacht und AD gezogen, so ist aus Congruenz der Dreiecke ACD und ABC, AD = AB; demnach ist ein geometrischer Ort des Punktes D der Umfang des Kreises, der aus A mit AB beschrieben ist; und da auch BC = CD, also BD = dem Durchmesser des gegebenen Kreises, so haben wir einen zweiten geometr. Ort in dem Umfange des Kreises, der aus B mit dem Durchmesser des gegebenen Kreises beschrieben ist. Der Durchschnittspunkt beider Kreise giebt den Punkt D. Hieraus ergiebt sich die Construction und daraus der Beweis ohne Schwierigkeit; eine Determination giebt es für diese, wie für die vorige Aufgabe nicht.

Als drittes Beispiel folge noch die Aufgabe: Von einem Punkte A (Fig. 30.) in einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis eine Sekante zu ziehen, so daß der Theil derselben, welcher Sehne des Kreises wird, einer gegebenen geraden Linie a gleich sei.

Analysis. Der gegebene Punkt heiße A, der Mittelpunkt des Kreises O und die Sekante, welche die Bedingung der Aufgabe erfüllt, so daß also BC = a, sei AB. Wird die Bedingung aufgehoben, daß die Sekante vom Punkte A ausgehe, und wird vielmehr nur die Bedingung gestellt, daß die in den Kreis zu legende Sehne = a sei, so ist die Aufgabe unbestimmt, da unendlich viele Sehnen von der angegebenen Größe in den Kreis gelegt werden können, wie z. B. ED, FG u. s. w. Da aber alle diese Sehnen gleich sind, so haben sie die gemeinsame Beziehung, daß ihre Abstände vom Mittelpunkte OH, OJ, OK gleich sind; da die Punkte H, J, K zugleich Mittelpunkte dieser Sehnen sind, so folgt daraus nach den Sätzen über geometr. Oerter Nr. 7, daß der geometrische Ort dieser Mittelpunkte der Umfang eines Kreises ist, der mit ihrem Abstande vom Mittelpunkte O beschrieben ist. Es ist demnach schon ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt der aus A in den Kreis zu legenden Sehne gefunden. Da aber W. AHO = R, so finden wir für den Mittelpunkt der Sehne als 2ten Ort nach Nr. 2 der Sätze über geometr. Oerter den Umfang eines Kreises, der über AO als Durchmesser beschrieben ist. Hiernach ist die

Construction: Trage (Fig. 31.) die gegebene a als Sehne in den Kreis = ED; fälle von O auf dieselbe das Perpendikel OJ und beschreibe mit diesem aus O einen Kreis; verbindet man noch A mit O, beschreibt über AO als Durchmesser einen Kreis und führt von A durch die Durchschnittspunkte L und K die Linien AP und AN, so sind MN und OP die verlangten Sehnen.

Beweis. Denn da W. AKO = ALO = R, so ist OK = OL = OJ, demnach Sehne MN = OP = ED = a.

Die Determination geht dahin, daß in allen den Fällen die Aufgabe gelöst werden kann, in welchen a $\leqq$ der Durchmesser des gegebenen Kreises um O ist.

V. Auflösung der Aufgaben durch Data.

Bei der Auflösung der Aufgaben ist es von Wichtigkeit zu wissen, was in einer Aufgabe als bekannt oder als gegeben angesehen werden kann, wenn man das Gesuchte als gegeben annimmt; überhaupt zu wissen, welche Größen durch andere gegebene zugleich mitgegeben sind, um daraus abzuleiten, was durch dieses Bekannte wiedergegeben sei, bis man auf etwas kommt, das wirklich durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben ist. In vielen Fällen kann man schon aus den Elementen erkennen, welche Größen durch andere gegebene zugleich mitgegeben sind; so ist z. B., wenn ein Kreis gegeben ist, mit ihm auch sein Mittelpunkt und sein Halbmesser gegeben, da beide sich finden lassen; mit der Sehne im Kreise ist auch ihr Abstand vom Mittelpunkt, so wie auch umgekehrt mit dem Abstande die Sehne gegeben ist; ist ein Dreieck gegeben, so ist damit auch der Kreis gegeben, der in und um dasselbe sich beschreiben läßt, da wirklich beide gefunden werden können u. s. w.

Die Data des Euklids, ein Muster geometrischer Schärfe, enthalten eine systematisch geordnete Sammlung von Sätzen, worin vermittelst der geraden Linie und des Kreises gezeigt wird, welche Größen als gegebene betrachtet werden müssen, so daß sie sich construiren lassen, wenn gewisse andere Größen gegeben sind, von denen sie abhängig sind. — Obgleich die Kenntniß dieser Data für ein weiteres Studium der Geometrie unerläßlich ist, so reicht doch für die beschränkte Anzahl von Aufgaben, welche in den Gymnasial-Klassen gelöst werden können, die Kenntniß der Data, wie sie aus den Elementen genommen werden kann, zur Lösung dieser Aufgabe hin.

Die Data erscheinen nicht immer wie die oben angeführten in einem so einfachen Zusammenhange mit den gegebenen Größen, vielmehr kann in vielen Fällen der Zusammenhang der gegebenen und der mitgegebenen Größen erst durch eine längere Schlußreihe ermittelt werden, wie in folgendem

Lehrsatz. Zieht man von einem Winkelpunkte eines Dreiecks auf ihre Gegenseite eine gerade Linie, so daß dieser Winkel dadurch halbirt wird, und fällt man von demselben Punkte auf diese Gegenlinie ein Perpendikel, so ist der von diesen beiden Linien gebildete Winkel = der halben Differenz der Winkel an der Grundlinie.

Beweis. Erster Fall. (Fig. 32.) Beide Winkel an der Grundlinie sind spitz. — Es ist W. CAE = CAD — DAE = $\frac{1}{2}$ W. BAD — W. EAD; W. EAD = R — β; also W. CAE = $\frac{\alpha}{2} - (R - \beta) = \frac{\alpha}{2} + \beta - R$; also 2 W. CAE = $\alpha + 2\beta - 2R = \beta + \beta + \alpha - 2R = \beta - (2R - \alpha - \beta)$; es ist aber W. $2R - \alpha - \beta$ = W. γ, also 2 W. CAE = $\beta - \gamma$, W. CAE = $\frac{\beta - \gamma}{2}$.

Zweiter Fall. (Fig. 33.) Einer der beiden Winkel (β) ist stumpf. — Es ist W. CAE = CAD + DAE = $\frac{1}{2}\alpha$ + DAE = $\frac{1}{2}\alpha + [2R - (AED + ADE)] = \frac{1}{2}\alpha + [2R - (R + 2R - \beta)] = \frac{1}{2}\alpha + \beta - R$; also ist 2 CAE = $\alpha + 2\beta - 2R = \beta + \alpha + \beta - 2R = \beta - (2R - \alpha - \beta)$; es ist auch W. $2R - \alpha - \beta = \gamma$, also 2 W. CAE = $\beta - \gamma$, und W. CAE = $\frac{\beta - \gamma}{2}$. Aus diesem Lehrsatze ergiebt sich nun das folgende

Datum. In jedem Dreieck stehen die Halbirungslinie eines Winkels, das Perpendikel aus demselben W. auf die Grundlinie und der Unterschied der an dieser Seite liegenden Winkel in solcher Beziehung, daß immer durch zwei von diesen Stücken das dritte mitgegeben ist. — Der Beweis dafür ist, daß alle diese Stücke in demselben rechtwinkeligen Dreiecke enthalten sind, so daß also durch 2 derselben das dritte mitgegeben ist.

Zur Benutzung dieses Datums diene folgende

Aufgabe: Ein Dreieck zu beschreiben, von dem eine Seite, die Halbirungslinie eines Winkels bis auf die Gegenseite und die Differenz der Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

Analysis. Es sei (Fig. 34.) in diesem Dreiecke gegeben die Seite AC = a, die Halbirungslinie AD = b und W. ACB — ABC = δ. Wird das Perpendikel AE gefällt, so ist nach obigem Lehrsatze W. DAE = $\frac{\beta - \gamma}{2}$, und da von dem rechtwinkeligen Dreieck ADE auch noch AD gegeben ist, so kann dasselbe construirt werden, wodurch AE gefunden wird; da ferner in dem rechtwinkeligen Dreiecke AEC auch AC gegeben ist, so wird der Punkt C gefunden, indem aus A mit AC ein Kreis beschrieben wird, wobei nur die Determination statt findet, daß AC > AE, da überdieß W. DAB = DAC, so wird der Punkt B erhalten, indem an A ein Winkel = DAC angetragen und die DC bis zum Durchschnitte mit dem Schenkel AB verlängert wird, wodurch man den dritten Winkelpunkt des $\triangle$ findet.

Construction. Es werde (Fig. 35) ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Halbirungslinie und dem W. $\frac{\beta - \gamma}{2}$ construirt (ADE); aus A werde mit der gegebenen Seite ein Kreis beschrieben, der die verlängerte DE in B schneidet; darauf werde in A an AE ein Winkel CAE = BAE angetragen und BE bis zum Durchschnitt mit derselben in C verlängert, so ist $\triangle$ BAC das verlangte.

Beweis. Da AB = der gegebenen Linie a, W. BAE = EAC und W. DAE = $\frac{\beta - \gamma}{2}$, da auch AD = der gegebenen Linie b ist, so ist nur noch zu zeigen, daß $\frac{\text{W. B} - \text{W. C}}{2}$ = W. DAE. Es ist W. EAD = R — AED; 2 EAD = 2 R — 2 AED, und da AED = ACE + CAE und 2 AED = 2 ACE + 2 CAE = CAB + 2 ACE, so ist auch 2 EAD = 2 R — (A + 2 ACE) = 2 R — A — 2 C = (2 R — A — C) — C = B — C; also W. EAD = $\frac{B - C}{2}$. (Der andere analoge Fall ist nicht berücksichtigt.)