Beiträge
zur
geometrischen und trigonometrischen Analysis.

Die nachstehenden Aufgaben sind theils von den Schülern, theils mit denselben durchgearbeitet worden. Die vorliegende Ueberarbeitung ist bestimmt, den Schüler von neuem auf die Winke aufmerksam zu machen, welche ihm die Bearbeitung einer Aufgabe ermöglichen oder doch erleichtern.

Die Auflösung mancher Dreiecks-Aufgaben beruht ja auf Sätzen, welche in dem von ihm benutzten System der Planimetrie nicht vorkommen; ohne Kenntniß derselben geht man bei der Analyse der Aufgabe keinen sicheren Schritt. Dasselbe gilt auch für die trigonometrische Auflösung einer Aufgabe, obgleich hier zuweilen mit ungleich größerer Sicherheit gearbeitet wird, so daß es sich häufig empfiehlt, eine Aufgabe zuerst trigonometrisch zu behandeln und dann das gewonnene Resultat geometrisch zu deuten.

Es sind zunächst einige geometrische und trigonometrische Relationen gewisser Stücke eines Dreiecks zu andern mitgetheilt, und zwar hauptsächlich solche, welche dem Schüler weniger nahe liegen; daran schließen sich geometrische wie trigonometrische Auflösungen von Dreiecks-Aufgaben.

Die zu den Dreiecks-Seiten a, b, c gehörenden Mittellinien sind bezeichnet durch m_a, m_b, m_c, die entsprechenden Höhen durch h_a, h_b, h_c. Den Seiten a, b, c liegen gegenüber die Winkel α, β, γ, deren Halbirungslinien durch t_α, t_β, t_γ bezeichnet werden. Der umbeschriebene Kreis hat den Mittelpunkt O und den Radius r, der inbeschriebene den Mittelpunkt Q und den Radius ρ. $\sphericalangle$ (a, b) bezeichnet den von den Geraden a und b eingeschlossenen Winkel.

1. Dat. a, α.

Geom. Ueber a ist ein des Winkels α fähiger Kreisabschnitt zu beschreiben. Durch a und α ist bestimmt r und (Fig. 1) OF, die Entfernung des Punktes O von a.

Wird durch A gezogen AL $\parallel$ BC und FO über O verlängert, bis sie die Parallele schneidet in G, so ist

$$\text{arc AL} = \text{arc ALC} - \text{arc LC} = \text{arc ALC} - \text{arc AB}$$

folglich $\sphericalangle \text{AOG} = \frac{1}{2} \text{AOL} = \text{ABC} - \text{ACB} = \beta - \gamma.$

Trigonom.

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad OF = r \cos \alpha = \tfrac{1}{2} a \cot \alpha$$

$$FG = h_a; \text{ also } OG = h_a - r \cos \alpha$$

$$OG = b \sin \gamma - r \cos \alpha = 2 r \sin \beta \sin \gamma - r \cos \alpha$$

$$= r \left(\cos (\beta - \gamma) - \cos (\beta + \gamma) - \cos \alpha\right) = r \cos (\beta - \gamma)$$

Anmerkung. Es ist $\sphericalangle \text{AOG} = \beta - \gamma = \text{OAD}$; also $\sphericalangle (r, h_a) = \beta - \gamma$, d. h. der Winkel, welcher gebildet wird von dem zum Scheitel eines Dreiecks-Winkels gezogenen Radius des umbeschriebenen Kreises und von der aus demselben Scheitel gefällten Höhe des Dreiecks ist gleich der Differenz der beiden anderen Dreiecks-Winkel.

2. Unter den gegebenen Elementen kommen Mittellinien vor.

a. Dat. m_a.

Geom. Wird (Fig. 2) AF (m_a) über F um FI = FA verlängert und IC gezogen, so ist

$$AI = 2 m_a, \; IC = c; \; \sphericalangle ACI = \beta + \gamma = 180^0 - \alpha$$

Trigonom. Ist r' der Radius des um ACI beschriebenen Kreises, so ist

$$2 m_a = 2 r' \sin (\beta + \gamma) = 2 r' \sin \alpha$$

$$\left.\begin{aligned} AC = b = 2 r' \sin \eta = \frac{2 m_a}{\sin \alpha} \sin \eta \\ CI = AB = c = 2 r' \sin \delta = \frac{2 m_a}{\sin \alpha} \sin \delta \end{aligned}\right\} \delta + \eta = \alpha$$

b. Dat. m_a, m_b.

Mittellinien theilen einander im Verhältnisse von 2 : 1. (Fig. 2.)

$$AS : SF = BS : SG = 2 : 1;\quad AS = \tfrac{2}{3}\, m_a,\quad BS = \tfrac{2}{3}\, m_b,$$
$$GF = \tfrac{1}{2}\, AB = \tfrac{1}{2}\, c.$$

Wird SF um FK = FS verlängert und KC gezogen, so ist $FK = \frac{1}{3}\, m_a$, $CK = \frac{2}{3}\, m_b$, $FC = \frac{1}{2}\, a$.

3. Unter den gegebenen Elementen kommen Halbirungslinien der Winkel vor.

Geom. a. Die Halbirungslinie eines Dreiecks-Winkels theilt die gegenüberliegende Seite in Theile, welche proportional sind den anliegenden Dreiecks-Seiten.

b. Der Winkel, welcher gebildet wird von der Halbirungslinie eines Dreiecks-Winkels und der aus dem Scheitel desselben Winkels gefällten Höhe, ist gleich der halben Differenz der beiden anderen Dreiecks-Winkel.

Wenn $b > c$, so ist (Fig. 3)

$$\sphericalangle\, (t_\alpha, h_a) = 90^0 - \tfrac{1}{2}\,\alpha - \gamma = \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \beta + \gamma) - \tfrac{1}{2}\,\alpha - \gamma = \tfrac{1}{2}\,(\beta - \gamma)$$

Ist $b < c$, so ist $\sphericalangle\, (t_\alpha, h_a) = \frac{1}{2}\,(\gamma - \beta)$

c. Dasselbe gilt von dem Winkel, welchen die Halbirungslinie eines Dreiecks-Winkels bildet mit dem zum Scheitel desselben Winkels gezogenen Radius des umbeschriebenen Kreises.

Wenn $b > c$, so ist

$$\sphericalangle\, (t_\alpha, r) = \sphericalangle\, (r, c) - \sphericalangle\, (t_\alpha, c) = 90^0 - \gamma - \tfrac{1}{2}\,\alpha = \tfrac{1}{2}\,(\beta - \gamma)$$

Ist $b < c$, so ist $\sphericalangle\, (t_\alpha, r) = \frac{1}{2}\,(\gamma - \beta)$

d. t_α und h_a (AG und AD Fig. 3) bestimmen das Dreieck ADG mit dem Winkel δ, also den Scheitel A und die Lage der Grundlinie BC. Ist nun auch noch ρ gegeben, so ist zugleich der Mittelpunkt Q des inbeschriebenen Kreises bekannt. Es erübrigt nur noch, aus A an den um Q mit ρ als Radius beschriebenen Kreis Tangenten zu ziehen; dann sind die Seiten und Winkel gefunden.

Trigonom. a.

$$\sin\delta = \frac{h_a}{t_\alpha};\quad \sin\tfrac{1}{2}\,\alpha = \frac{\rho}{AQ} = \frac{\rho}{t_\alpha - \dfrac{\rho}{\sin\delta}} = \ldots$$

b. Wird CA (b) um AH = AB = c verlängert und HB gezogen, so ist

$$b : b + c = t_\alpha : HB$$

$$t_\alpha = \frac{b}{b+c}\,HB = \frac{b}{b+c}\,2\,c\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2bc\cos\frac{1}{2}\alpha}{b+c}$$

Oder: t_α theilt a in $m + n$; es ist

$$m = \frac{t_\alpha \sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\beta}\,;\ n = \frac{t_\alpha \sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\gamma}$$

$$m + n = a = t_\alpha \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$t_\alpha = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha\,(\sin\beta + \sin\gamma)} = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\,\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\,\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}$$

$$= \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)} = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)} = \frac{c\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}$$

Wird substituirt

$$\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta) = \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{b+c}{a}\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

so ergibt sich wieder obige Formel

$$t_\alpha = \frac{c\sin\beta}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)} = \frac{a\,c\sin\beta}{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{b\,c\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2\,b\,c\cos\frac{1}{2}\alpha}{b+c}$$

4. Unter den gegebenen Elementen kommen die Winkel α, β, γ vor.

Es läßt sich ein Dreieck construiren, welches dem gesuchten ähnlich ist. In ähnlichen Dreiecken stehen gleichnamige Stücke in demselben Verhältnisse zu einander. Zu einer Seite des ähnlichen Dreiecks nimmt man entweder eine beliebige Gerade, oder man macht, daß dieselbe übereinstimmt mit einer Geraden, welche unter den gegebenen Elementen vorkommt.

5. Unter den gegebenen Elementen kommt vor die Summe oder die Differenz zweier Seiten des Dreiecks.

A. Dat. $a + b = s$.

Geom. Construire am Dreiecke $a + b$. Verlängere (Fig. 4) AC über C um CD = CB, ziehe DB. Es ist entstanden ein Dreieck, in welchem der $a+b$ anliegt α und $\frac{1}{2}\gamma$, gegenüberliegt $\beta + \frac{1}{2}\gamma = \beta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = 90^0 + \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$. Das Dreieck ADB gibt die Eckpunkte A und B; die im Mittelpunkte der DB zu DB errichtete Senkrechte bestimmt den Eckpunkt C.

B. Dat. $a - b = d$.

Geom. Construire (Fig. 4) $a - b$, verbinde den Endpunkt der $a - b$ (F) mit A; es entsteht ein Dreieck, in welchem der $a - b$ anliegt β und $90^0 + \frac{1}{2}\gamma$, gegenüberliegt $\alpha - (90^0 - \frac{1}{2}\gamma) = \alpha - 90^0 + \frac{1}{2}\gamma = \alpha - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Das Dreieck AFB gibt die Eckpunkte A und B, die im Mittelpunkte der AF zu AF errichtete Senkrechte bestimmt den Eckpunkt C.

Trigonom. ad A.

I. Man folge der Construction oder bestimme eine der Größen durch die andere oder beide Größen durch dieselbe dritte.

$$BD = \frac{AD \sin\alpha}{\sin\left[90^0 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right]} = \frac{(a+b)\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{s \sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$CD = a = \frac{\frac{1}{2} BD}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{s\sin\alpha}{2\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = \frac{s\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

u. s. w.

Oder:
$$a + b = a + \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = a\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$a = \frac{(a+b)\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{s\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

Oder:
$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$
$$a : a + b = \sin\alpha : \sin\alpha + \sin\beta$$
$$a = \frac{(a+b)\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} = \ldots$$

Oder:
$$a + b = 2\,r\sin\alpha + 2\,r\sin\beta = 2\,r(\sin\alpha + \sin\beta)$$
$$= 2\,r \,.\, 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$2\,r = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$a = 2\,r\sin\alpha = \frac{s\sin\alpha}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

II. Ist gegeben α, β, so läßt sich ein Dreieck mit a', α, β construiren, das dem gesuchten ähnlich ist. Es ist dann aber

$$a : a + b = a' : a' + b'$$
$$a' : a' + b' = \sin\alpha : \sin\alpha + \sin\beta$$
$$\overline{a : s = \sin\alpha : \sin\alpha + \sin\beta}$$

Oder:
$$a' = \frac{c'\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

und, wenn a′ verlängert wird um b′,

$$a' + b' = \frac{c' \sin (\alpha + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{c' \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}\gamma};$$

Daher

$$a : a + b = \frac{c' \sin \alpha}{\sin \gamma} : \frac{c' \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma} : \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$$

$$a = (a + b) \frac{\sin \alpha}{2 \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} = \ldots$$

Wird $a' = s$ gemacht, so ist

$$a : a + b = a' : a' + b'; \; a : s = s : s + b'; \; a = \frac{s^2}{s + b'},$$

folglich a die dritte geometrische Proportionale zu $s + b'$ und s.

Trigonom. ad B. (Fig. 4)

$$AF = \frac{BF \sin \beta}{\sin BAF} = \frac{(a - b) \sin \beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{d \sin \beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

$$AC = b = \frac{\frac{1}{2} AF}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{d \sin \beta}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{d \sin \beta}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Oder: $$a - b = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} - b = \frac{b (\sin \alpha - \sin \beta)}{\sin \beta}$$

$$b = \frac{(a - b) \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{d \sin \beta}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Oder: $a : a - b = \sin \alpha : \sin \alpha - \sin \beta$ u. s. w.

Oder: $a - b = 2r \sin \alpha - 2r \sin \beta = 2r (\sin \alpha - \sin \beta) = \ldots$

Oder benutze das dem gesuchten ähnliche Dreieck wie oben in A. II.

C. I. Sind gegeben die Elemente $a + b = s$ und die Projectionen der a und b auf die Seite c gleich p und q, so beachte man, daß, wenn mit der kleineren Seite (Fig. 5a, 5b) CA um C ein Kreis beschrieben wird, welcher die andere Seite CB in F und ihre Verlängerung in F′ schneidet, die verlängerte BC und die BA (oder, wenn $\alpha > 90^0$ ist, die um 2q verlängerte BA) zwei aus B gezogene Sekanten werden; die außerhalb des Kreises liegenden Theile derselben sind aber $a - b$, bezüglich $p - q$.

II. Ist $\alpha < 90^0$ ($\beta < 90^0$), so sind in F'GB (Fig. 5a) die Stücke $a + b$, $p - q$, β und $\sphericalangle$ F'GB $= 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$, denn es ist $\sphericalangle$ GCB $= \alpha - \beta$, also CGF' = CF'G $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; demnach F'GB = F'GC + CGB $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 180^0 - \alpha = 180^0 + \frac{1}{2}\alpha - \alpha - \frac{1}{2}\beta = \alpha + \beta + \gamma + \frac{1}{2}\alpha - \alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\beta + \gamma + \frac{1}{2}\alpha = 90^0 + \frac{1}{2}\gamma$

D. Sind gegeben die Elemente $a + b$ und $\alpha - \beta$, so ist (Fig. 4), wenn AC über C um CD = CB verlängert und DB gezogen wird, $\sphericalangle$ ABD $= \beta + \frac{1}{2}\gamma$. Ist auf CB abgetragen CF = CA und FA gezogen, so ist $\sphericalangle$ BAF $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Wird nun BV $\parallel$ FA gezogen, so ist $\sphericalangle$ ABV $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $\sphericalangle$ VBD $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta + \frac{1}{2}\gamma = 90^0$, also BV $\perp$ BD. Ist demnach $a + b$ (AD), $\alpha - \beta$ (2 VBA) und noch c (AB) gegeben, so ist mit Hülfe von $\sphericalangle$ VBD $= 90^0$ und VBA $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ $\triangle$ ABD leicht zu finden; durch die im Mittelpunkte der BD errichtete Senkrechte wird C bestimmt.

Trigonom.

$$c = \frac{(a + b)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma)} = \frac{(a + b)\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

$$\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{c\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{a + b}$$

E. Sind gegeben $a + b = s$, h_a, h_b, so ist

$$a : a + b = h_b : h_a + h_b$$

also a leicht zu finden.

F. Sind gegeben $a + b = s$, h_a, m_b, so ziehe (Fig. 6) durch A eine Linie parallel zu a, verlängere m_b, bis sie die Parallele schneidet in G, verlängere GA um AF = AC; nun ist BG $= 2\, m_b$ und GF $= a + b = s$. Weil h_a gegeben ist, so ist $\sphericalangle$ FGD $= \delta$ bestimmt. Nun ist die aus dem Mittelpunkte der BG ($= 2\, m_b$), aus D, gezogene DA $= \frac{1}{2}$ AF, also auch, wenn der bekannte Punkt D mit dem bekannten Punkt F verbunden und aus einem beliebigen Punkte der FA, aus H, die HI $\parallel$ AD gezogen wird, HI $= \frac{1}{2}$ FH; die Richtung der HI kann also gefunden werden. Ist H von F um v entfernt, so ist I (in FD) von H um $\frac{1}{2}$ v entfernt. DA muß dann aus D parallel zu IH gezogen werden; u. s. w.

Trigonom.

$$\sin\delta = \frac{h_a}{2\, m_b}\text{, also } \cos\delta = \frac{\sqrt{4\, m_b^2 - h_a^2}}{2\, m_b}$$

Das Dreieck FDG gibt

$$FD = \sqrt{s^2 + m_b^2 - 2\, s\, m_b \cos\delta} = \sqrt{s^2 + m_b^2 - s\sqrt{4\, m_b^2 - h_a^2}}$$

$$\cot GFD = \cot\eta = \frac{FK}{DK} = \frac{s - m_b \cos\delta}{m_b \sin\delta} = \frac{2s - \sqrt{4\, m_b^2 - h_a^2}}{h_a}$$

Nun ist $FA = b = \frac{FH}{FI}\, FD$

$$HI^2 = \tfrac{1}{4}\, FH^2 = FH^2 + FI^2 - 2\, FH . FI \cos\eta;$$

$$-\tfrac{3}{4}\, FH^2 = FI^2 - 2\, FH . FI \cos\eta$$

$$FI = FH \cos\eta + \tfrac{1}{2}\, FH \sqrt{-3 + 4\cos^2\eta}$$

$$\frac{FH}{FI} = \frac{1}{\cos\eta \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3+4\cos^2\eta}} = \frac{\cos\eta \mp \frac{1}{2}\sqrt{-3+4\cos^2\eta}}{\frac{3}{4}}$$

$$FA = b = \frac{4\cos\eta \mp 2\sqrt{4\cos^2\eta - 3}}{3}\, FD \text{ u. s. w.}$$

Oder: $FA = b = \frac{FD \sin\iota}{\sin(\eta + \iota)}$;

$$\sin\eta : \sin\iota = AD : AF = 1 : 2$$

$$\sin\iota = 2\sin\eta$$

$$\sin(\eta + \iota) = \sin\eta\cos\iota + \cos\eta\sin\iota = \sin\eta\sqrt{1 - 4\sin^2\eta} + \cos\eta . 2\sin\eta$$

$$= \sin\eta\left(2\cos\eta + \sqrt{1 - 4\sin^2\eta}\right)$$

$$FA = b = \frac{2\, FD \sin\eta}{\sin\eta\,(2\cos\eta + \sqrt{1-4\sin^2\eta})} = \frac{2\, FD}{2\cos\eta + \sqrt{1-4\sin^2\eta}}$$

$$= \frac{4\cos\eta - 2\sqrt{1-4\sin^2\eta}}{4\cos^2\eta - 1 + 4\sin^2\eta}\, FD = \frac{4\cos\eta - 2\sqrt{1-4\sin^2\eta}}{3}\, FD$$

$$= \frac{4\cos\eta - 2\sqrt{4\cos^2\eta - 3}}{3}\, FD \text{ u. s. w.}$$

G. Es seien gegeben $b + c$, m_b, α.

Wird (Fig. 7) c um b verlängert und der Endpunkt der Verlängerung mit dem Endpunkte der b verbunden, so entsteht ein Winkel gleich $\frac{1}{2}\,\alpha$. Wird der Endpunkt der Verlängerung auch verbunden mit dem Mittelpunkte der b, so halbirt diese Verbindungslinie auch jede Linie, welche parallel zu b, also unter einem Winkel gleich α gegen $c + b$ zwischen den Schenkeln des Winkels $\frac{1}{2}\alpha$ gezogen wird; ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt der b ist demnach u. s. w.

Trigonom.

$$\cot AFD = \cot \eta = \frac{FG + D'G \cos \alpha}{D'G \sin \alpha} = \frac{FG + \frac{1}{2} FG \cos \alpha}{\frac{1}{2} FG \sin \alpha} = \frac{2 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \ldots$$

$$\sin FDB = \frac{FB}{BD} \sin \eta = \frac{s}{m_b} \sin \eta$$

$$FD = \frac{s \sin (\eta + FDB)}{\sin FDB}; \quad AD = \frac{1}{2} b = \frac{FD \sin \eta}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{m_b \sin (\eta + FDB)}{\sin \eta}; \qquad = \frac{m \sin (\eta + FDB)}{\sin \alpha}$$

u. s. w.

H. Sind gegeben $a - b$, p, q, so beachte C. I. In Fig. 5 kommen in FGB vor $a - b$, $p \mp q$, β, $\frac{1}{2}\gamma$.

I. Unter den gegebenen Elementen kommen $a - b$ und $\alpha - \beta$ vor.

Geom. Dem $a - b$ liegt gegenüber $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Ist auch c gegeben, so ist (Figur 4) $\triangle$ ABF bekannt; die im Mittelpunkte der AF errichtete Senkrechte bestimmt C.

Trigonom.

$$c = \frac{(a - b) \sin \left[\beta + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{(a - b) \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

$$\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{c \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{a - b}$$

K. Ist $a - b$, c und α gegeben, so ist (Fig. 4) $\triangle$ VAB bekannt, folglich auch $\sphericalangle VBA = BAF = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, also β, γ. Wird $BH \perp AC$ gefällt, so ist

$$\sphericalangle VBH = 90^0 - BVA = 90^0 - (90^0 - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\gamma.$$

Trigonom.

$$\tang \frac{1}{2}\gamma = \tang VBH = \frac{VA + HA}{BH} = \frac{a - b + c \cos \alpha}{c \sin \alpha}$$

$$\frac{c - (a - b)}{c + (a - b)} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\left[90^0 - \frac{1}{2}\,\gamma - \frac{1}{2}\,(\alpha - \beta)\right]}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\left[90^0 - \frac{1}{2}\,\gamma + \frac{1}{2}\,(\alpha - \beta)\right]} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\beta}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\alpha}$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\beta = \frac{c - (a - b)}{c + (a - b)}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\alpha.$$

L. Unter den gegebenen Elementen kommen $b - c$ und t_α vor.

Geom. Wird (Fig. 8.) $DF \perp AB$, $DG \perp AC$ gefällt, so ist $b - c = CG - BF$. Wird in D die DH ($= DF = DG$) $\perp$ BC errichtet, durch H zu HD eine Senkrechte LM, dann $DI \parallel AB$, $DK \parallel AC$ gezogen, so ist

$$\triangle\, DIH \cong DBF,\ DKH \cong DCG$$

also $\quad b - c = CG - BF = KH - HI.$

Ist nun noch α gegeben, so ist von $\triangle$ KDI bekannt $HK - HI = p - q$, $\measuredangle\, KDI = \alpha$ und $DH = DF$. DF ist Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks (ADF), welcher gegenüberliegt $\frac{1}{2}\,\alpha$; die Hypotenuse des Dreiecks ist t_α. Durch $\triangle$ DKI ist dann ABC zu bestimmen. (Vgl. 7. F und G.)

6. Unter den gegebenen Elementen kommt vor $a + b + c = s$ oder $a + b - c = d$.

Verfahre in derselben Weise wie oben.

$$a + b + c = a + \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = a\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$= a\,\frac{4\cos\frac{1}{2}\,\alpha\,\cos\frac{1}{2}\,\beta\,\cos\frac{1}{2}\,\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\,\alpha\,\cos\frac{1}{2}\,\alpha} = a\,\frac{2\cos\frac{1}{2}\,\beta\,\cos\frac{1}{2}\,\gamma}{\sin\frac{1}{2}\,\alpha}$$

$$a = \frac{s\,\sin\frac{1}{2}\,\alpha}{2\cos\frac{1}{2}\,\beta\,\cos\frac{1}{2}\,\gamma}\ ;\quad \text{u. s. w.}$$

Oder $\quad a + b + c = 2\,r\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2r.\ 4\cos\frac{1}{2}\,\alpha\cos\frac{1}{2}\,\beta\cos\frac{1}{2}\,\gamma$

$$2r = \frac{s}{4\cos\frac{1}{2}\,\alpha\,\cos\frac{1}{2}\,\beta\,\cos\frac{1}{2}\,\gamma}$$

$$a = 2r\,\sin\alpha = \frac{s\,\sin\alpha}{4\cos\frac{1}{2}\,\alpha\,\cos\frac{1}{2}\,\beta\,\cos\frac{1}{2}\,\gamma} = \ldots$$

$$a + b - c = a\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha} = a\,\frac{4\sin\frac{1}{2}\,\alpha\sin\frac{1}{2}\,\beta\cos\frac{1}{2}\,\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\,\alpha\,\cos\frac{1}{2}\,\alpha} = \ldots$$

7. Unter den gegebenen Elementen kommen vor die Projectionen zweier Seiten auf die dritte Seite, p, q, oder $p + q$, $p - q$.

A. **Geom.** Vgl. 5. C. (Fig. 5 a. $\alpha < R$, $\beta < R$; Fig. 5 b. $\alpha > R$).

Trigonom.

$$p = a\cos\beta = 2r\sin\alpha\cos\beta \qquad p = a\cos\beta = 2r\sin\alpha\cos\beta$$

$$q = b\cos\alpha = 2r\sin\beta\cos\alpha \qquad q = -b\cos\alpha = -2r\sin\beta\cos\alpha$$

B. $$p - q = 2r(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \qquad p + q = 2r(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= 2r\sin(\alpha - \beta) \qquad = 2r\sin(\alpha - \beta)$$

Oder $$p \mp q = a\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha} = 2r\sin(\alpha - \beta)$$

$$p \mp q = (a + b)\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}; \quad p \mp q = (a - b)\frac{\sin(\beta + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

C. $$p + q : a - b = a + b : p - q$$

D. $$\frac{p}{q} = \frac{2r\sin\alpha\cos\beta}{2r\sin\beta\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}$$

$$\frac{p + q}{p - q} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

E. Es war oben (B)

$$p \mp q = 2r\sin(\alpha - \beta)$$

Wird durch C (Fig. 9. a, 9. b.) die CH $\|$ AB und HA gezogen, so ist, da arc AC = arc BH, $\measuredangle$ HAC = CAB $-$ HAB $= \alpha - \beta$; da auch CH $= p \mp q$, so ist

$$CH = p \mp q = \frac{AC\sin(\alpha - \beta)}{\sin AHC} = \frac{2r\sin\beta\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta} = 2r\sin(\alpha - \beta)$$

F. Durch $p - q$ ist bestimmt FD, die Entfernung der Fußpunkte der h_c und m_c. In Fig. 9. a ist $p = \frac{1}{2}c + FD$; $q = \frac{1}{2}c - FD$, demnach $p - q = 2\,FD$; $FD = \frac{1}{2}(p - q)$. In Fig. 9. b ist $p = \frac{1}{2}c + FD$; $q = FD - \frac{1}{2}c$, also $p + q = 2\,FD$; $FD = \frac{1}{2}(p + q)$.

G. Kommen also unter den gegebenen Elementen $p - q$ und h_c oder $p - q$ und m_c vor, so ist $\triangle$ DCF bestimmt. Wie durch h_a, m_a, α das Dreieck bestimmt ist, siehe Aufgabe 4.

H. Wird (Fig. 9. a) in G zu BG eine Senkrechte errichtet, AC über C verlängert, bis sie die in G errichtete Senkrechte schneidet in L, so ist AD : AG = 1 : 2 = DC : GL = DC : 2 DC; also GL $= 2\,h_c$. Durch $p - q$ und h_c ist also auch $\triangle$ BGL gegeben. Die über G verlängerte BG ist ein geometrischer Ort für **A**;

eine zu BG in einer Entfernung gleich h_c gezogene Parallele ein geometrischer Ort für C. Ist nun als drittes Element gegeben γ, so ist auch $\sphericalangle$ BCL $= 180^0 - \gamma$ bekannt; demnach ein zweiter geometrischer Ort für C ein über BL beschriebener, des Winkels $(180^0 - \gamma)$ fähiger Kreisabschnitt.

8. Unter den gegebenen Elementen kommt $a + r$ vor.

Geom. Wird (Fig. 10) OC, OB gezogen, OB um BF = BC verlängert, endlich FC gezogen, so entsteht ein Dreieck mit den Seiten $OC = r$, $OF = r + a$ und FC; $\sphericalangle F = \frac{1}{2} OBC = \frac{1}{2}(90^0 - \alpha) = 45^0 - \frac{1}{2}\alpha$; $\sphericalangle O = 2\alpha$; $\sphericalangle OCF = 180^0 - O - F = 180^0 - 2\alpha - 45^0 + \frac{1}{2}\alpha = 135^0 - \frac{3}{2}\alpha$.

Trigonom. A.

$$a + r = a + \frac{a}{2 \sin \alpha} = a\left(1 + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) = a\,\frac{1 + 2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$a = \frac{2(a + r) \sin \alpha}{1 + 2 \sin \alpha}$$

$$\frac{1}{1 + 2 \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin(90^0 - \alpha)}{\sin(90^0 - \alpha) + \sin 2\alpha}$$

$$= \frac{2 \sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) \cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}{2 \sin(45^0 + \frac{1}{2}\alpha) \cos(45^0 - \frac{3}{2}\alpha)} = \frac{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(45^0 + \frac{3}{2}\alpha)}$$

$$a = \frac{2(a + r) \sin \alpha \sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(45^0 + \frac{3}{2}\alpha)}$$

B. $$OC = r = \frac{OF \sin F}{\sin OCF} = (a + r)\frac{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(135^0 - \frac{3}{2}\alpha)} = (a + r)\frac{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(45^0 + \frac{3}{2}\alpha)}$$

$$a = 2r \sin \alpha = \frac{2(a + r) \sin \alpha \sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(45^0 + \frac{3}{2}\alpha)}$$

C. $$FC = (a + r)\frac{\sin 2\alpha}{\sin(135^0 - \frac{3}{2}\alpha)} = (a + r)\frac{\sin 2\alpha}{\sin(45^0 + \frac{3}{2}\alpha)}$$

$$a = \frac{\frac{1}{2} FC}{\cos F} = \frac{\frac{1}{2} FC}{\cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}$$

$$= \frac{(a + r) \sin 2\alpha}{2 \cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) \sin(45^0 + \frac{3}{2}\alpha)} = \frac{2(a + r) \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) \sin(45^0 + \frac{3}{2}\alpha)}$$

$$= \frac{2\,(a+r)\sin\alpha\sin(90^0-\alpha)}{2\cos(45^0-\frac{1}{2}\alpha)\sin(45^0+\frac{3}{2}\alpha)} = \frac{4(a+r)\sin\alpha\sin(45^0-\frac{1}{2}\alpha)\cos(45^0-\frac{1}{2}\alpha)}{2\cos(45^0-\frac{1}{2}\alpha)\sin(45^0+\frac{3}{2}\alpha)}$$

$$= \frac{2\,(a+r)\sin\alpha\sin(45^0-\frac{1}{2}\alpha)}{\sin(45^0+\frac{3}{2}\alpha)}$$

9. Unter den gegebenen Elementen kommt ρ vor.

Geom. A. Es ist ρ die zu BC (Fig. 11) gehörende Höhe des $\triangle$ BQC. $\sphericalangle$ BQC ist Supplementwinkel zu $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, also gleich $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$. Geometrische Oerter für Q sind demnach die in einer Entfernung gleich ρ zu BC gezogene Parallele und der über BC beschriebene, des Winkels $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ fähige Kreisabschnitt. Durch $\triangle$ BQC ist $\frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}\gamma$, also β und γ bestimmt.

Trigonom. Da $\sphericalangle$ BOD $= 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$, BOQ $= \gamma$, so ist $\sphericalangle$ QOD $= 90^0 - \frac{1}{2}\alpha - \gamma = \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$.

$$\cos QOD = \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{OF}{OQ} = \frac{OD+DF}{OQ} = \frac{OD+\rho}{OQ}$$

$$OD = BD\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha$$

$$OQ = OB = \frac{OD}{\cos OBD} = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{\frac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha+\rho}{\frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}} = \frac{a\sin\frac{1}{2}\alpha + 2\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a}$$

$$= \sin\frac{1}{2}\alpha + \frac{2\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a}$$

Oder:

$$a = \rho\,(\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma) = \rho\,\frac{\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

$$= \rho\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma} = \rho\,\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

$$\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a}$$

$$2\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

$$= \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) - \sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{2\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{2\rho \cos \frac{1}{2}\alpha}{a} + \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

Oder:
$$\triangle = \tfrac{1}{2}(a + b + c)\,\rho = \tfrac{1}{2}\,ah = \tfrac{1}{2}\,a\,c \sin\beta = \tfrac{1}{2}\,a \sin\beta\,\frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$a + b + c = a\left(1 + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)$$

$$= \frac{a}{\sin\alpha}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

$$= \frac{4\,a}{\sin\alpha}\cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\triangle = \frac{2\,a\,\rho}{\sin\alpha}\cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,a^2\,\frac{4\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\rho\cos\tfrac{1}{2}\alpha = a\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\frac{\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a} = \sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\beta\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\frac{1 - \cos\beta}{2}$$

$$\frac{2\,\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a} = \sin\beta\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\beta - \sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\frac{2\,\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a} + \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

Soll durch $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \dfrac{2\,\rho\cos\frac{1}{2}\alpha}{a} + \sin\frac{1}{2}\alpha$ der Winkel $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ oder der Complementwinkel dieses, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$, und so γ durch Construction gefunden werden, so setze man

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin(\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{\rho\cos\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\,a\sin\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\,a}$$

Wird (Fig. 12) an DC ($= \frac{1}{2}\,a$) in C angelegt XCD $= \frac{1}{2}\alpha$ und gefällt DH $\perp$ CX, so ist DH $= \frac{1}{2}\,a\sin\frac{1}{2}\alpha$; wird durch H die YHI $\perp$ DC gezogen und DH verlängert, so ist YHV $= \frac{1}{2}\alpha$. Trägt man nun auf HY ab HK $= \rho$ und fällt KL $\perp$ HV, so ist HL $= \rho \cos\frac{1}{2}\alpha$; demnach $\rho \cos\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} a \sin\frac{1}{2}\alpha$ $=$ DH $+$ HL $=$ DL und

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \sin(\gamma+\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{DL}{\frac{1}{2}a} = \frac{DL}{DC}.$$

Beschreibt man nun über DC als Durchmesser einen Halbkreis, legt in denselben von D aus die Sehne MD $=$ DL und zieht MC, so ist

$$\sin DCM = \frac{DM}{DC} = \frac{DL}{DC} = \sin(\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha),$$

mithin $\sphericalangle$ DCM $= \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ und, weil XCD $= \frac{1}{2}\alpha$, XCM $= \gamma$.

B. Ein anderer Ort für Q ist (Fig. 11) die QH $\perp$ BC. Wie groß ist aber BH? Wird QI $\perp$ AB, QG $\perp$ AC gefällt, so ist BH $= x =$ BI; HC $=$ CG $= a - x$; AI $=$ AG $= \rho \cot\frac{1}{2}\alpha = v$. Es ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,.\,AC\cos\alpha$$
$$a^2 = (x+v)^2 + (a-x+v)^2 - 2(x+v)(a-x+v)\cos\alpha$$

Durch a, ρ und α ist somit x, also $x + v = c$ bestimmt. In diesem Falle aber geht man besser von α aus (die t_α ist ja auch geometrischer Ort für Q), construirt mit einem Radius gleich ρ einen Kreis, welcher die Schenkel von α berührt, und sucht dann AB $= c = v + x$, um aus B an den mit ρ beschriebenen Kreis eine dritte Tangente zu ziehen; dann ist

$$a^2 = c^2 + (a + 2v - c)^2 - 2c(a + 2v - c)\cos\alpha$$

$$c = \frac{1}{2}a + v \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - av\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}\alpha - v^2\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}\alpha\right)}$$

$$v = \rho\cot\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2}a + \rho\cot\tfrac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\left[\frac{a^2}{4} - \rho(\rho + a\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha)\right]}$$

C. Daß $\triangle = \frac{1}{2}(a + b + c)\rho$ ist, wurde oben schon bemerkt. — Andere geometrische Oerter für Q siehe sub 10. B.

10. Unter den gegebenen Elementen kommen r und ρ vor.

A. Die Entfernung OQ $= d$ wird bestimmt durch

$$d^2 = r^2 - 2r\rho$$

Es ist (Fig. 13) $OB = r$; $\sphericalangle QBA = QBC = \frac{1}{2}\beta$; $\sphericalangle QCB = QCA = \frac{1}{2}\gamma$; $QF\ (\perp BC) = \rho$. Wird gefällt $OG \perp BQ$, so ist:

$$d^2 = OQ^2 = OG^2 + GQ^2 = OB^2 - BG^2 + GQ^2 = r^2 - (BG^2 - GQ^2)$$
$$= r^2 - (BG + GQ)(BG - GQ)$$

Wird BQ verlängert bis in den umbeschriebenen Kreis, so ist $BG = GH$, $BG - GQ = GH - GQ = QH$; also

$$d^2 = r^2 - BQ \cdot QH$$

Werden die Geraden HOI und IC, CH gezogen, so ist:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\sphericalangle BHC = \alpha$$
$$\overline{\eta = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma}$$
$$\overline{QH = HC}$$

Ferner ist: $\triangle ICH \sim BFQ$

$$\overline{IH : HC = BQ : QF}$$
$$\overline{BQ \cdot HC = IH \cdot QF = 2\,r\,\rho}$$
$$\overline{BQ \cdot QH = 2\,r\,\rho}$$
$$d^2 = r^2 - 2\,r\,\rho$$

Fälle die Gerade $ODL \perp BC$, beschreibe über OL ($= r$) einen Halbkreis, trage auf LO ab $LM = 2\,\rho$, errichte in M die $MN \perp OL$, welche den Halbkreis schneide in N, ziehe ON, so ist:

$$ON^2 = OM \cdot OL = (r - 2\,\rho)\,r = r^2 - 2\,r\,\rho = d^2$$

B. Da $\sphericalangle BAQ = \frac{1}{2}\alpha$ und arc $BL = LC$, so geht AQ verlängert durch L; wird gezogen BL, so ist:

$$\sphericalangle BLA = BCA = \gamma$$
$$\sphericalangle QBC + CBL = QBL = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$\overline{\sphericalangle BQL = \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha)}$$
$$\overline{BL = LQ}$$

d. h. Q ist von L um BL entfernt; geometrische Oerter für Q sind die in einer Entfernung gleich ρ zu BC gezogene Parallele und der aus O mit einem Radius gleich d ($d^2 = r^2 - 2\,r\rho$) oder der aus L ($ODL \perp BC$) mit einem Radius gleich BL beschriebene Bogen.

C. Wird OA gezogen, so ist:

$$\sphericalangle\, OAQ = \sphericalangle\, (t_\alpha,\ r) = \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) \text{ (vgl. 3, c)}$$

es ist aber $\qquad \sphericalangle\, OAQ = OLQ$

demnach

$$\cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \cos OLQ = \frac{LO^2 + LQ^2 - OQ^2}{2\ LO\ .\ LQ} = \frac{r^2 + LQ^2 - r^2 + 2r\,\rho}{2r\ .\ LQ}$$

$$= \frac{\rho}{LQ} + \frac{LQ}{2r} = \frac{\rho}{BL} + \frac{BL}{2r}$$

Wird aus O die OP $\perp$ BL gefällt, also $\sphericalangle$ BOL ($= \alpha$) und BL halbirt, so ist:

$$\triangle\ BOP \sim LBD$$

$$OB : \tfrac{1}{2}\ BL = BL : DL$$

$$2r : BL = BL : DL$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\rho}{BL} + \frac{DL}{BL} = \frac{\rho + DL}{BL} = \frac{\rho + DL}{LQ}$$

Oder: Fälle aus Q die QR $\perp$ OL;

$$\cos OLQ = \cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{LR}{LQ} = \frac{\rho + DL}{LQ} = \frac{\rho + DL}{BL}$$

d. h. Q ist von BC um ρ und von L um BL entfernt.

D. $$\cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\rho}{BL} + \frac{DL}{BL}$$

$$BL = 2\ BP = 2r \sin \tfrac{1}{2}\alpha;\ \frac{DL}{BL} = \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{\rho}{2r \sin \frac{1}{2}\alpha} + \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\frac{\rho}{2r \sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\rho \cos \frac{1}{2}\alpha}{2r \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\rho \cos \frac{1}{2}\alpha}{r \sin \alpha}$$

$$= \frac{2\ \rho \cos \frac{1}{2}\alpha}{2r \sin \alpha} = \frac{2\ \rho \cos \frac{1}{2}\alpha}{a}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{2\,\rho \cos \frac{1}{2}\alpha}{a} + \sin \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{(Vgl. 9. A.)}$$

E. $$a = 2r \sin \alpha = \rho\,(\cot \tfrac{1}{2}\beta + \cot \tfrac{1}{2}\gamma) = \rho\,\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma} \quad \text{(Vgl. 9. A.)}$$

$$4\,r \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \rho\,\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}$$

$$4\,r \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \rho$$

Oder da $\rho = QB \sin\frac{1}{2}\beta = QC \sin\frac{1}{2}\gamma$

$$\tfrac{1}{2}\,QC = QH \sin\tfrac{1}{2}\alpha; \quad (QH = CH \quad (\text{Vgl. } 10. A.))$$

$$\rho^2 = QB \sin\tfrac{1}{2}\beta \,.\, 2\,QH \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$QB \,.\, QH = 2\,r\,\rho \quad (\text{Vgl. } 10. A.)$$

$$\rho^2 = 4\,r\,\rho \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\rho = 4\,r \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

F. Ist gegeben $r + \rho$, so hat man:

$$s = r + \rho = r\,(1 + 4 \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma)$$

$$= r\,(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = r\,[\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\frac{s}{r} = \cos\alpha - 2 \sin\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha + \beta) \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha - \beta)$$

$$= \cos\alpha - 2 \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin(-\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$= \cos\alpha + 2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{\frac{s}{r} - \cos\alpha}{2 \sin\frac{1}{2}\alpha}$$

$$r = \frac{a}{2 \sin\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2s \sin\alpha}{a} - \cos\alpha}{2 \sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2s \sin\alpha - a \cos\alpha}{2\,a \sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Durch a und α ist r bestimmt; also auch $\rho = s - r$; u. s. w.

11. Unter den gegebenen Elementen kommt $h_a \pm h_c$ vor.

A. **Geom.** Werden durch A und in der Entfernung $h_a \pm h_c$ zu a Parallelen gezogen, wird c verlängert, bis die Verlängerung die zweite Parallele schneidet, wird aus dem Durchschnittspunkte zu a eine Senkrechte gefällt, so entsteht im ersten Falle zunächst ein Dreieck, dessen eine Kathete h_c ist, ihr liegt gegenüber ein Winkel gleich β; die Hypotenuse des Dreiecks, die Verlängerung der c, ist somit gleich a. Demnach hat sich ergeben ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Hypotenuse $a + c$; die eine Kathete ist $h_a + h_c$; ihr liegt gegenüber β.

Im anderen Falle entsteht zunächst ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen einer Kathete ($= h_c$) gegenüberliegt β; die Hypotenuse desselben ist somit a. Die Hypotenuse des anderen rechtwinkeligen Dreiecks ist somit $c - a$, ein Winkel des Dreiecks β und diesem liegt gegenüber $h_a - h_c$.

Trigonom. $h_a \pm h_c = c \sin\beta \pm a \sin\beta = (c \pm a) \sin\beta$
d. h. wird ein rechtwinkeliges Dreieck construirt, dessen einer Kathete $h_a \pm h_c$ gegenüberliegt β, so ist die Hypotenuse $c \pm a$.

$$h_a : h_c = c : a; \quad h_a \pm h_c : h_a = c \pm a : c$$

$$h_a = (h_a + h_c) \frac{c}{c \pm a}$$

$$\frac{c}{c \pm a} = \frac{c}{c \pm \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma \pm \sin\alpha}$$

$$h_a = (h_a + h_c) \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma \pm \sin\alpha}$$

Oder: $h_a \pm h_c = b\,(\sin\gamma \pm \sin\alpha)$

$$b = \frac{h_a \pm h_c}{\sin\gamma \pm \sin\alpha}$$

$$h_a = b \sin\gamma = (h_a \pm h_c) \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma \pm \sin\alpha}$$

$$h_a = (h_a + h_c) \frac{\sin\gamma}{2 \sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} = (h_a - h_c) \frac{\sin\gamma}{2 \cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}$$

B. Es ist:

$$h_a = (h_a + h_c) \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma + \sin\alpha} = (h_a + h_c) \frac{(h_a + h_c) \sin\gamma}{(h_a + h_c)(\sin\gamma + \sin\alpha)}$$

Es ist aber (Fig. 14), wenn $\measuredangle\, XDY = \gamma$ hingelegt, $DA = h_a + h_c$ gemacht und $AG \perp DX$ gefällt wird, $AG = (h_a + h_c) \sin\gamma$. Wird an XD gelegt $\measuredangle\, XDZ = \alpha$, $DF = h_a + h_c$ gemacht und $FH \perp DX$ gefällt, so ist $FH = (h_a + h_c) \sin\alpha$; also, wenn AG um $GI = HF$ verlängert wird,

$$AI = (h_a + h_c)(\sin\gamma + \sin\alpha); \quad \frac{(h_a + h_c) \sin\gamma}{(h_a + h_c)(\sin\gamma + \sin\alpha)} = \frac{AG}{AI};$$

also
$$h_a = (h_a + h_c)\,\frac{AG}{AI}\,;\quad h_a : AG = h_a + h_c : AI$$

Wird daher DI gezogen und GK ∥ DI, so ist $AK = h_a$, $KD = h_c$

C. Wird in
$$h_a = (h_a + h_c)\,\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma + \sin\alpha}$$
$$\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = \text{tang } P$$
also
$$\sin\gamma + \sin\alpha = \sin\gamma + \frac{\cos\gamma}{\text{tang } P} = \frac{\sin\gamma\sin P + \cos\gamma\cos P}{\sin P} = \frac{\cos(\gamma - P)}{\sin P}$$
gesetzt, so ist
$$h_a = (h_a + h_c)\,\frac{\sin\gamma\,\sin P}{\cos(\gamma - P)}$$
Nun ist (Fig. 14)
$$\text{tang } AID = \frac{GD}{GI} = \frac{AD\cos\gamma}{HF} = \frac{(h_a + h_c)\cos\gamma}{(h_a + h_c)\sin\alpha}$$
$$= \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = \text{tang } P$$

Demnach ist ∢ AID der oben eingeführte Hülfswinkel.

Weiter ist:
$$AK = h_a = \frac{AG\sin AGK}{\sin AKG} = \frac{(h_a + h_c)\sin\gamma\sin P}{\sin(P + 90^0 - \gamma)}$$
$$= (h_a + h_c)\,\frac{\sin\gamma\,\sin P}{\cos(\gamma - P)}\ \text{(vgl. oben.)}$$

u. s. w.

Aufgaben.

Bemerkung. Von den folgenden Aufgaben sind die ersten in den hier üblichen Formen behandelt; bei den übrigen ist der Weg zur Auffindung der geometrischen Auflösung meistens nur angedeutet.

1. Aufgabe. Dat. a, ∢ $(m_b, b) = \delta$, ∢ $(m_b, c) = \eta$.

a. **Analysis.** Durch a sind vom gesuchten Dreiecke die Eckpunkte B und C gegeben. Weil BD (Fig. 15) Mittellinie, also DA = DC sein muß, so ist der dritte Eckpunkt des Dreiecks, der Scheitel A, bestimmt durch die Lage und

Größe der CD, durch die Lage des Punktes D zu BC. Es ist aber gegeben $\measuredangle (m_b, b) = \delta$; $\measuredangle$ BDC ist Winkel über BC; ein geometrischer Ort für D ist folglich ein über BC beschriebener, des Winkels δ fähiger Kreisabschnitt.

Legt man also eine Linie BC = a als Grundlinie des gesuchten Dreiecks hin, beschreibt über BC einen Kreisabschnitt, fähig δ, so ist dieser ein geometrischer Ort für D, für den Mittelpunkt der AC.

Es ist ferner gegeben $\measuredangle (m_b, c) = \eta$. Wird zu AC aus D eine Parallele gezogen, welche BC schneide in F, so ist $\measuredangle$ BDF $= \eta$ und BF = FC $= \frac{1}{2}$ a; ein zweiter geometrischer Ort für D ist demnach ein Kreisabschnitt, beschrieben über BF ($= \frac{1}{2}$ a), fähig η. Beschreibt man nun diesen Kreisabschnitt, welcher den ersteren Kreisabschnitt schneide in D, so ist der Mittelpunkt der CA gefunden. Zieht man CD und verlängert CD über D um DA = DC, zieht AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

b. **Synthesis.** α. **Construction.** Lege eine Linie BC = a als Grundlinie hin; beschreibe über BC einen Kreisabschnitt, fähig δ; beschreibe über BF ($= \frac{1}{2}$ BC) einen Kreisabschnitt, fähig η; verbinde C mit D, dem Durchschnittspunkte beider Kreisabschnitte, verlängere CD über D um DA = DC, ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

β. **Beweis.** Zum Beweise ziehe BD, DF.

AD = DC (Constr.)

BD Mittellinie zu AC

$\measuredangle$ BDC $= \measuredangle (m_b, b)$; $\measuredangle$ ABD $= \measuredangle (m_b, c)$

AD = DC, BF = FC (Constr.)

DF ∥ AB

$\measuredangle$ ABD = BDF

BDF $= \eta$ (Constr.)

1. $\measuredangle$ ABD $= \eta = \measuredangle (m_b, c)$.
2. $\measuredangle$ BDC $= \measuredangle (m_b, b) = \delta$ (Constr.)
3. BC = a (Constr.)

Trigonom. Ueber BC = a ist beschrieben ein Kreisabschnitt, fähig δ; es ist somit $QB = r' = \frac{a}{2 \sin \delta}$; $\measuredangle$ BQF $= 180^0 - \delta$; es ist ferner über BF $= \frac{1}{2}$ a beschrieben ein Kreisabschnitt, fähig η; also ist $OB = r'' = \frac{a}{4 \sin \eta}$; $\measuredangle$ BOG $= \eta$.

Durch die Centrale QO und die Radien r′ und r″ ist bestimmt der Punkt D, das Dreieck QDO, die Winkel QOD, OQD oder die Winkel QOB, OQB. Es ist aber

$$\sphericalangle\, QBO = QBF + OBG = 90^0 - (180^0 - \delta) + 90^0 - \eta = \delta - \eta = \alpha$$

$$\sphericalangle\, OQB = \gamma$$

folglich $\sphericalangle\, QOB = 180^0 - (\alpha + \gamma) = \beta$

Daher:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{r' - r''}{r' + r''} \cot \tfrac{1}{2}(\delta - \eta)$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2 \sin \delta} - \dfrac{1}{4 \sin \eta}}{\dfrac{1}{2 \sin \delta} + \dfrac{1}{4 \sin \eta}} \cot \tfrac{1}{2}(\delta - \eta) = \frac{2 \sin \eta - \sin \delta}{2 \sin \eta + \sin \delta} \cot \tfrac{1}{2}(\delta - \eta).$$

Wird $\dfrac{\cos \delta}{2 \sin \eta} = \cot \varphi$, also $2 \sin \eta = \cos \delta \operatorname{tang} \varphi$ gesetzt, so ist

$$\frac{2 \sin \eta - \sin \delta}{2 \sin \eta + \sin \delta} = \frac{\cos \delta \operatorname{tang} \varphi - \sin \delta}{\cos \delta \operatorname{tang} \varphi + \sin \delta} = \frac{\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi}{\cos \delta \sin \varphi + \sin \delta \sin \varphi}$$

$$= \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\sin (\varphi + \delta)}$$

und

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\sin (\varphi + \delta)} \cot \tfrac{1}{2}(\delta - \eta).$$

Oder: Fälle OI $\perp$ BQ (Fig. 15.);

$$\cot \gamma = \cot OQB = \frac{QI}{OI} = \frac{QB - BI}{OI}$$

$$QB = r' = \frac{a}{2 \sin \delta}; \; BI = OB \cos OBQ = \frac{a}{4 \sin \eta} \cos (\delta - \eta)$$

$$OI = OB \sin OBQ = \frac{a}{4 \sin \eta} \sin (\delta - \eta)$$

$$\cot \gamma = \frac{\dfrac{2}{\sin \delta} - \dfrac{\cos (\delta - \eta)}{\sin \eta}}{\dfrac{\sin (\delta - \eta)}{\sin \eta}} = \frac{2 \sin \eta - \sin \delta \cos (\delta - \eta)}{\sin \delta \sin (\delta - \eta)} = \frac{2 \sin \eta}{\sin \delta \sin (\delta - \eta)} - \cot (\delta - \eta).$$

Oder

$$\cot \gamma = \frac{2 \sin \eta - \sin \delta \cos (\delta - \eta)}{\sin \delta \sin (\delta - \eta)} = \frac{\sin \eta + \sin \eta - \sin \delta \cos (\delta - \eta)}{\sin \delta \sin (\delta - \eta)}$$

$$\frac{\sin \eta - \sin \delta \cos (\delta - \eta)}{\sin \delta \sin (\delta - \eta)} = \frac{\sin \eta - \sin \delta \cos \delta \cos \eta - \sin^2 \delta \sin \eta}{\sin \delta \sin (\delta - \eta)}$$

$$= \frac{\sin\eta\,(1-\sin^2\delta) - \sin\delta\cos\delta\cos\eta}{\sin\delta\,\sin(\delta-\eta)} = \frac{\sin\eta\cos^2\delta - \sin\delta\cos\delta\cos\eta}{\sin\delta\,\sin(\delta-\eta)}$$

$$= \frac{\cos\delta\,(\sin\eta\cos\delta - \cos\eta\sin\delta)}{\sin\delta\,\sin(\delta-\eta)} = \frac{\cos\delta\,\sin(\eta-\delta)}{\sin\delta\,\sin(\delta-\eta)}$$

$$= -\cot\delta$$

$$\cot\gamma = \frac{\sin\eta}{\sin\delta\sin(\delta-\eta)} + \frac{\sin\eta - \sin\delta\cos(\delta-\eta)}{\sin\delta\,\sin(\delta-\eta)} = \frac{\sin\eta}{\sin\delta\sin(\delta-\eta)} - \cot\delta.$$

Fälle $QL \perp OB$;

$$\cot\beta = \cot QOB = \frac{OL}{QL} = \frac{OB - BL}{QL}$$

$$OB = \frac{a}{4\sin\eta};\quad BL = BQ\cos QBO = \frac{a}{2\sin\delta}\cos(\delta-\eta)$$

$$QL = QB\sin QBO = \frac{a}{2\sin\delta}\sin(\delta-\eta)$$

$$\cot\beta = \frac{\dfrac{1}{2\sin\eta} - \dfrac{\cos(\delta-\eta)}{\sin\delta}}{\dfrac{\sin(\delta-\eta)}{\sin\delta}} = \frac{\sin\delta - 2\sin\eta\cos(\delta-\eta)}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)}$$

$$= \frac{\sin\delta - 2\sin\eta\cos\delta\cos\eta - 2\sin\eta\sin\delta\sin\eta}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)}$$

$$= \frac{\sin\delta\,(1-2\sin^2\eta) - \cos\delta\,.\,2\sin\eta\cos\eta}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)} = \frac{\sin\delta\cos2\eta - \cos\delta\sin2\eta}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)}$$

$$= \frac{\sin(\delta-2\eta)}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)}.$$

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha};\quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

2. Ein anderer geometrischer Ort für D ist ein über $FC = \frac{1}{2}a$ beschriebener Kreisabschnitt, fähig des Winkel $FDC = \delta - \eta$; u. s. w.

Trigonom. Fig. 16.

Es ist wie oben $QC = r' = \dfrac{a}{2\sin\delta}$; $\measuredangle FQC = 180^0 - \delta$.

Ueber $FC = \frac{1}{2}a$ ist ein Kreisabschnitt beschrieben, fähig $\delta - \eta$; es ist also $CO = r'' = \dfrac{a}{4\sin(\delta-\eta)}$; $\measuredangle COG = \delta - \eta$.

Durch die Centrale QO, r' und r'' ist bestimmt der Punkt D, das Dreieck QOD, die Winkel QDO und QOD. Es ist aber

$$\sphericalangle\, OQD = DBC = \iota = \beta - \eta$$

$$\sphericalangle\, QDO = QCO = OCG + GCQ = 90^0 - (\delta - \eta) + 90^0 - (180^0 - \delta) = \eta;$$

mithin $\sphericalangle\, QOD = 180^0 - \eta - \iota = 180^0 - \eta - \beta + \eta = 180^0 - \beta = \gamma + \alpha = \gamma + \delta - \eta$

und $\sphericalangle\, QOD + \iota = (\gamma + \alpha + \beta - \eta =)\ 180^0 - \eta$

$$\sphericalangle\, QOD - \iota = (\gamma + \alpha - \beta + \eta =) \gamma + \delta - \eta - \beta + \eta = \gamma - \beta + \delta$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(QOD - \iota)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(QOD + \iota)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma - \beta + \delta)}{\cot\frac{1}{2}\eta} = \frac{r' - r''}{r' + r''} = \frac{4\sin(\delta - \eta) - 2\sin\delta}{4\sin(\delta - \eta) + 2\sin\delta}$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma - \beta + \delta) = \frac{2\sin(\delta - \eta) - \sin\delta}{2\sin(\delta - \eta) + \sin\delta}\cot\frac{1}{2}\eta.$$

Wird $\frac{\cos\delta}{2\sin(\delta - \eta)} = \cot\psi$, also $2\sin(\delta - \eta) = \cos\delta\operatorname{tang}\psi$ gesetzt, so ist

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma - \beta + \delta) = \frac{\cos\delta\operatorname{tang}\psi - \sin\delta}{\cos\delta\operatorname{tang}\psi + \sin\delta}\cot\frac{1}{2}\eta = \frac{\cos\delta\sin\psi - \sin\delta\cos\psi}{\cos\delta\sin\psi + \sin\delta\cos\psi}\cot\frac{1}{2}\eta$$

$$= \frac{\sin(\psi - \delta)}{\sin(\psi + \delta)}\cot\frac{1}{2}\eta = \operatorname{tang}\omega;$$

$$\frac{1}{2}(\gamma - \beta + \delta) = \omega;\ \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \omega - \frac{1}{2}\delta$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + \beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\eta$$

$$\gamma = 90^0 + \omega - (\delta - \tfrac{1}{2}\eta);\ \beta = 90^0 - \omega + \tfrac{1}{2}\eta.$$

3. Geometrische Oerter für D sind ein über BF $= \frac{1}{2}$ a beschriebener Kreisabschnitt, fähig η, und ein über FC $= \frac{1}{2}$ a beschriebener Kreisabschnitt, fähig $\delta - \eta$.

Trigonom. Fig. 17.

$$OD = r' = \frac{a}{4\sin\eta};\quad QD = r'' = \frac{a}{4\sin(\delta - \eta)}$$

Es ist DF gemeinschaftliche Sehne, daher die Centrale OQ $\perp$ DF, $\sphericalangle\, OQD = OQF = \gamma$; $\sphericalangle\, QOD = QOF = DBF = \beta - \eta$; $\sphericalangle\, FOG = BDF = \eta$; $\sphericalangle\, QOG = \beta$.

$$\frac{OD + DQ}{OD - DQ} = \frac{r' + r''}{r' - r''} = \frac{\frac{a}{4\sin\eta} + \frac{a}{4\sin(\delta - \eta)}}{\frac{a}{4\sin\eta} - \frac{a}{4\sin(\delta - \eta)}} = \frac{\sin(\delta - \eta) + \sin\eta}{\sin(\delta - \eta) - \sin\eta} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\delta - \eta)}$$

$$\frac{OD+DQ}{OD-DQ}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\beta-\eta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\eta)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\beta+\alpha-\delta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\eta)}=\frac{\cot\frac{1}{2}\delta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\eta)}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta+\eta)=\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\delta-\eta\right)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta}\cot\tfrac{1}{2}\delta=\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\delta-\eta\right)\cot^2\tfrac{1}{2}\delta.$$

Oder: Fälle $OI \perp QD$;

$$\cot OQD=\cot\gamma=\frac{QI}{OI}=\frac{QD+DI}{OI}.$$

Weil $\triangle\, ODQ \sim BDC$, so ist $\sphericalangle\, ODQ=\delta$.

Es ist

$$QD=\frac{a}{4\sin(\delta-\eta)};\quad DI=-\frac{a}{4\sin\eta}\cos\delta;\quad OI=\frac{a}{4\sin\eta}\sin\delta;$$

$$\cot\gamma=\frac{\frac{1}{\sin(\delta-\eta)}-\frac{\cos\delta}{\sin\eta}}{\frac{\sin\delta}{\sin\eta}}=\frac{\sin\eta-\cos\delta\sin(\delta-\eta)}{\sin\delta\sin(\delta-\eta)}=\frac{\sin\eta}{\sin\delta\sin(\delta-\eta)}-\cot\delta.$$

$$\cot\beta=\cot QOG=\frac{OG-QH}{GH}=\frac{OF\cos\eta-QF\cos(\delta-\eta)}{\frac{1}{2}a}$$

$$=\frac{\frac{a}{4\sin\eta}\cos\eta-\frac{a}{4\sin(\delta-\eta)}\cos(\delta-\eta)}{\frac{1}{2}a}=\frac{\cos\eta\sin(\delta-\eta)-\cos(\delta-\eta)\sin\eta}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)}$$

$$=\frac{\sin(\delta-\eta-\eta)}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)}=\frac{\sin(\delta-2\eta)}{2\sin\eta\sin(\delta-\eta)}.$$

4. Da $\alpha=\delta-\eta$, so ist ein geometrischer Ort für A ein über $BC=a$ beschriebener Kreisabschnitt, fähig $\delta-\eta$. Wird nun dieser Kreisabschnitt construirt (Fig. 18) und auch über $BF=\frac{1}{2}a$ ein des Winkels η fähiger (oder . . . .) Kreisabschnitt beschrieben, so ist von C aus in den ersten Kreisabschnitt eine Sehne so zu ziehen, daß sie von dem anderen Kreisabschnitte halbirt wird, weil $CD=DA$ sein muß. Nun halbirt aber der über einen Radius eines Kreises beschriebene Kreis alle im großen Kreise aus dem Berührungspunkte beider Kreise gezogenen Sehnen. Da hier von C aus die Sehne zu ziehen ist, muß C der Berührungspunkt der beiden Kreise werden. Verbindet man also C mit dem Mittelpunkte des ersten Kreises (Q), beschreibt über den Radius CQ einen Kreis, so ist auch dieser Kreis ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt der CA, für D. u. s. w.

Trigonom. Ueber BC = a ist beschrieben ein Kreisabschnitt, fähig $\delta - \eta$; es ist $QC = \frac{a}{2 \sin (\delta - \eta)}$; $\sphericalangle$ FQC = $\delta - \eta$; über BF = $\frac{1}{2}$ a ist beschrieben ein Kreisabschnitt, fähig η; es ist $OB = \frac{a}{4 \sin \eta}$. Darauf ist QC gezogen, $QP = PC = \frac{a}{4 \sin (\delta - \eta)}$ gemacht. Da QF $\perp$ BC (Constr.), so ist $\sphericalangle$ QFC = 90^0; also geht der aus P mit PQ beschriebene Kreis durch F; der Kreisabschnitt FQDC, beschrieben über FC = $\frac{1}{2}$ a mit einem Radius PQ = $\frac{a}{4 \sin (\delta - \eta)}$, ist also fähig $\delta - \eta$. Obige Construction stimmt also in der Sache überein mit der Construction in 3. (Fig. 17).

5. Wird (Fig. 19) BD über D um DA′ = DB verlängert und A′C gezogen, so ist $\sphericalangle$ BA′C = η; BDC = δ. Wird (nach 4) BA′C construirt, so ist CD zu ziehen und CD um DA = DC zu verlängern, endlich AB zu ziehen.

6. Da η gegeben und $\sphericalangle$ ADB = $180^0 - \delta$ bekannt ist, läßt sich ein Dreieck BD′A′ (Fig. 20) mit den Winkeln η, $180^0 - \delta$, $\delta - \eta$ construiren und hieraus, da D′C′ = D′A′ sein muß, das Dreieck A′BC′ finden. Wird dann a auf BC′ abgetragen und b $\parallel$ b′ gezogen, so ist die Aufgabe gelöst.

Construction. Lege eine beliebige Linie BD′ hin, lege an BD′ in B einen Winkel XBD′ = η, in D′ einen Winkel YD′B = $180^0 - \delta$, dessen Schenkel YD′ die XB schneide in A′, verlängere A′D′ um D′C′ = D′A′, ziehe C′B, trage auf BC′ ab BC = a, ziehe aus C eine Parallele zu C′A′, welche die BA′ schneide in A, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis leicht.

Trigonom. a. Die Construction gibt zunächst durch die beliebige BD′ = μ und δ und η den Werth von A′D′ = $\frac{1}{2}$ b′ und von c′;

$$\frac{1}{2} b' = \frac{\mu \sin \eta}{\sin (\delta - \eta)}; \quad b' = \frac{2 \mu \sin \eta}{\sin (\delta - \eta)}; \quad c' = \frac{\mu \sin \delta}{\sin (\delta - \eta)};$$

ferner durch BD′, D′C′ und δ die Winkel γ und $\beta - \eta$ wie auch BC′ = a′; endlich durch a : a′ = b : b′ = c : c′ die Seiten b und c.

$$\frac{BD'+D'C'}{BD'-D'C'}=\frac{\mu+\dfrac{\mu\sin\eta}{\sin(\delta-\eta)}}{\mu-\dfrac{\mu\sin\eta}{\sin(\delta-\eta)}}=\frac{\sin(\delta-\eta)+\sin\eta}{\sin(\delta-\eta)-\sin\eta}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\delta-\eta\right)}$$

Es ist auch $\dfrac{BD'+D'C'}{BD'-D'C'}=\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\beta-\eta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\eta)}=\dfrac{\cot\frac{1}{2}\delta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\eta)}$;

$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\beta+\eta)=\dfrac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\delta-\eta\right)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta}\cot\frac{1}{2}\delta=\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\delta-\eta\right)\cot^2\frac{1}{2}\delta$ (Vgl. 3).

$BC'=a'=\dfrac{\frac{1}{2}b'\sin\delta}{\sin\iota}=\dfrac{\mu\sin\eta\sin\delta}{\sin(\delta-\eta)\sin\iota}$; $(\iota=\beta-\eta)$

$$a:a'=b:b';\ b=\frac{a\,b'}{a'}=a\,\frac{2\,\mu\sin\eta}{\sin(\delta-\eta)}\cdot\frac{\sin(\delta-\eta)\sin\iota}{\mu\sin\eta\sin\delta}$$

$$=\frac{2\,a\sin\iota}{\sin\delta}.$$

u. s. w.

Oder: Aus $\triangle$ DCB folgt

$\frac{1}{2}b=\dfrac{a\sin\iota}{\sin\delta}$; $b=\dfrac{2\,a\sin\iota}{\sin\delta}$; u. s. w.

b. Es ist

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\frac{b'-c'}{b'+c'}\cot\frac{1}{2}\alpha=\frac{2\sin\eta-\sin\delta}{2\sin\eta+\sin\delta}\cot\frac{1}{2}(\delta-\eta);$$

u. s. w. (vgl. die Auflösung 1.)

c. Fälle BG $\perp$ A'C':

$\cot\gamma=\dfrac{GC'}{BG}=\dfrac{A'C'-A'G}{BG}$;

$A'C'=b'=\dfrac{2\,\mu\sin\eta}{\sin(\delta-\eta)}$; $A'G=c'\cos(\delta-\eta)=\dfrac{\mu\sin\delta}{\sin(\delta-\eta)}\cos(\delta-\eta)$;

$BG=\mu\sin\delta$;

$$\cot\gamma=\frac{\dfrac{2\,\mu\sin\eta}{\sin(\delta-\eta)}-\dfrac{\mu\sin\delta}{\sin(\delta-\eta)}\cos(\delta-\eta)}{\mu\sin\delta}=\frac{2\sin\eta-\sin\delta\cos(\delta-\eta)}{\sin\delta\sin(\delta-\eta)}$$

$$= \frac{2 \sin \eta}{\sin \delta \sin (\delta - \eta)} - \cot (\delta - \eta); \text{ (vgl. die Auflösung 1)}$$

$$\cot \beta = \cot (\eta + \iota) = \frac{\cot \eta \cot \iota - 1}{\cot \eta + \cot \iota}.$$

Fälle $C'H \perp BD'$;

$$\cot \iota = \frac{BH}{HC'} = \frac{BD' + D'H}{HC'};$$

$$BD' = \mu; \; D'H = - D'C' \cos \delta = - \frac{\mu \sin \eta \cos \delta}{\sin (\delta - \eta)}$$

$$HC' = D'C' \sin \delta = \frac{\mu \sin \eta \sin \delta}{\sin (\delta - \eta)}$$

$$\cot \iota = \frac{\mu - \frac{\mu \sin \eta \cos \delta}{\sin (\delta - \eta)}}{\mu \frac{\sin \eta \sin \delta}{\sin (\delta - \eta)}} = \frac{\sin (\delta - \eta) - \sin \eta \cos \delta}{\sin \eta \sin \delta};$$

$$\cot \eta + \cot \iota = \frac{\cos \eta \sin \delta + \sin (\delta - \eta) - \sin \eta \cos \delta}{\sin \eta \sin \delta} = \frac{2 \sin (\delta - \eta)}{\sin \eta \sin \delta};$$

$$\cot \eta \cot \iota - 1 = \frac{\cot \eta \sin (\delta - \eta) - \cot \eta \sin \eta \cos \delta - \sin \eta \sin \delta}{\sin \eta \sin \delta}$$

$$= \frac{\cos \eta \sin (\delta - \eta) - \cos \eta \sin \eta \cos \delta - \sin^2 \eta \sin \delta}{\sin \eta \sin \eta \sin \delta};$$

$$\cot \beta = \frac{\cos \eta \sin (\delta - \eta) - \cos \eta \sin \eta \cos \delta - \sin^2 \eta \sin \delta}{2 \sin \eta \sin (\delta - \eta)}$$

$$= \frac{\cos \eta \sin (\delta - \eta) - \sin \eta (\cos \eta \cos \delta + \sin \eta \sin \delta)}{2 \sin \eta \sin (\delta - \eta)} = \frac{\cos \eta \sin (\delta - \eta) - \sin \eta \cos (\delta - \eta)}{2 \sin \eta \sin (\delta - \eta)}$$

$$= \frac{\sin (\delta - \eta - \eta)}{2 \sin \eta \sin (\delta - \eta)} = \frac{\sin (\delta - 2 \eta)}{2 \sin \eta \sin (\delta - \eta)}; \text{ (vgl. die Auflösung 1.)}$$

2. Aufgabe. Dat. $a + h_a = s$, b, β.

a. **Analysis.** Es sei (Fig. 21) ABC das verlangte Dreieck, also 1) $AC = b$; das kann man machen; 2) $\sphericalangle ABC = \beta$; es muß daher B ein Punkt des über $AC = b$ beschriebenen Kreisabschnitts, fähig des Winkels β, sein; dieser Kreisabschnitt kann über $AC = b$ construirt werden. Legt man also eine Linie $AC = b$ hin und beschreibt über AC einen Kreisabschnitt, fähig β, so hat man zwei Eckpunkte des gesuchten Dreiecks, die Punkte A und C, und einen geometrischen Ort für den dritten Eckpunkt B. Ein anderer Ort für B ist also noch zu suchen. Es muß aber auch 3) $BC + AD = s$, also, wenn BC über C nun $CF = AD$ verlängert wird, $BF = s$ sein. Das Dreieck CDA werde verlegt; es werde in F die FG ($= CD$) $\perp CF$ ($= h_a$) errichtet und GC gezogen; es ist dann $\triangle GFC \cong CDA$, $GC = CA = b$ und $\sphericalangle GCF = CAD$, daher, weil $\sphericalangle CAD + ACD = R$, also auch $\sphericalangle GCF + ACD = R$ ist, $\sphericalangle ACG = R$; die Größe der CG und ihre Lage zu AC ist demnach bekannt, also auch der Mittelpunkt der CG, der Punkt O′. Wird nun aber aus O′ mit $O'C = \frac{1}{2}$ b ein Kreis beschrieben, so geht dieser, weil $\sphericalangle CFG = R$ ist, durch F und schneidet den über AC beschriebenen Kreisabschnitt. Es ist nun durch C, also durch einen der Durchschnittspunkte der beiden Kreise, eine Gerade $BCF = s$ durch beide Kreise gezogen. Wird nun $OK \perp BF$ und $O'M \perp BF$ gefällt, so ist $KM = \frac{1}{2}$ s; wird $OL \parallel KM$ gezogen, so ist auch $OL = \frac{1}{2}$ s; daher das Dreieck OLO′ vollständig bestimmt, da OO′ bekannt und $\sphericalangle OLO' = R$ ist; durch OL ist dann aber die Lage der BCF, des zweiten geometrischen Ortes für den dritten Eckpunkt des gesuchten Dreiecks, für B, bestimmt.

Errichtet man also zu CA in C die CG ($= b$) $\perp$ CA, halbirt CG in O′, zieht OO′, beschreibt über OO′ einen Kreis, legt in diesen von O aus eine Sehne $OL = \frac{1}{2}$ s, zieht durch C eine Parallele zu OL, welche den Kreisabschnitt über AC schneide in B, so ist B der dritte Eckpunkt des gesuchten Dreiecks. Wird noch AB gezogen, so hat $\triangle$ ABC die verlangten Eigenschaften.

b. Synthesis.

α. **Construction.** Lege eine Linie $AC = b$ hin, beschreibe über AC einen Kreisabschnitt, fähig β, errichte in C die CG ($= b$) $\perp$ CA, halbire CG in O′, ziehe O′O, beschreibe über OO′ als Durchmesser einen Kreis, lege in diesen Kreis von O aus eine Sehne $OL = \frac{1}{2}$ s, ziehe durch C eine Linie parallel zu OL, welche den Kreisabschnitt über AC schneide in B, ziehe BA, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

β. **Beweis.** Zum Beweise beschreibe aus O′ mit O′C als Radius einen Kreis, verlängere BC über C bis sie den Kreis um O′ schneidet in F, ziehe FG, ziehe O′L und verlängere O′L über L, bis sie schneidet die BF in M, fälle $OK \perp BF$, $AD \perp BC$; nun ist:

$$\frac{OK \perp BC \text{ (Constr.)}}{BC = 2\,KC} \qquad \frac{\measuredangle\, OLO' = R \text{ (Constr.)}}{O'LM \perp OL}$$

$$OL \parallel BF \text{ (Constr.)}$$

$$O'M \perp BF$$

$$CF = 2\,CM$$

$$BC + CF = 2\,(KC + CM) = 2\,KM$$

$$OK \parallel LM;\; OL \parallel KM \text{ (Constr.)}$$

$$KM = OL$$

$$OL = \tfrac{1}{2}\,s \text{ (Constr.)}$$

$$KM = \tfrac{1}{2}\,s$$

$$BC + CF = s$$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle\, ACG = R \\ \measuredangle\, ACD + ACG + GCF = 2\,R \end{array}\right\} \text{(Constr.)}$$

$$\measuredangle\, ACD + GCF = R$$

$$\measuredangle\, ACD + CAD = R \text{ (Constr.)}$$

$$\measuredangle\, GCF = CAD$$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle\, ADC = R \\ \measuredangle\, CFG = R \\ CG = CA = b \end{array}\right\} \text{(Constr.)}$$

$$\triangle\, GCF \cong CAD$$

$$CF = AD$$

1) $BC + CF = BC + AD = s.$

2) $AC = b$ (Constr.); 3) $\measuredangle\, ABC = \beta$ (Constr.).

Trigonom. Ziehe OC, verlängere O'C über C, fälle ON $\perp$ O'C; es ist $\measuredangle\, OCO' = 90^0 + 90^0 - \beta = 180^0 - \beta$; $\measuredangle\, OCN = \beta$;

$$OC = r = \frac{b}{2 \sin \beta};\quad O'O^2 = O'C^2 + OC^2 - 2\,O'C \,.\, OC \cos O'CO$$

$$= r^2 + \frac{b^2}{4} + r\,b \cos \beta;$$

$$O'O^2 = \frac{b^2}{4 \sin^2 \beta} + \frac{b^2}{4} + \frac{b}{2 \sin \beta} \,.\, b \cos \beta = \frac{b^2}{4 \sin^2 \beta}\,(1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta)$$

$$= \frac{b^2}{4 \sin^2 \beta}\,(1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta);$$

$$O'O = \frac{b}{2 \sin \beta} \sqrt{1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta};$$

$$\cot OO'C = \cot \mu = \frac{O'C + CN}{ON} = \frac{\frac{1}{2} b + r \cos \beta}{\frac{1}{2} b} = \frac{b + 2 r \cos \beta}{b}$$

$$= \frac{b + \frac{b \cos \beta}{\sin \beta}}{b} = 1 + \cot \beta;$$

$$\sin OO'L = \sin (\mu + \gamma) = \frac{OL}{O'O} = \frac{s \sin \beta}{b \sqrt{1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta}}.$$

Wird
$$\frac{s \sin \beta}{b \sqrt{1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta}} = p$$
gesetzt, so hat man

$$\sin (\mu + \gamma) = \sin \mu \cos \gamma + \cos \mu \sin \gamma = p;$$

$$\cos \gamma + \cot \mu \sin \gamma = \frac{p}{\sin \mu}$$

$$\cot \mu \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{p}{\sin \mu} - \cos \gamma$$

$$\cot^2 \mu - \cot^2 \mu \cos^2 \gamma = \frac{p^2}{\sin^2 \mu} - \frac{2p}{\sin \mu} \cos \gamma + \cos^2 \gamma$$

$$\cot^2 \mu - \frac{p^2}{\sin^2 \mu} = \cos^2 \gamma \left(1 + \cot^2 \mu\right) - \frac{2p}{\sin \mu} \cos \gamma$$

$$= \cos^2 \gamma \frac{1}{\sin^2 \mu} - \frac{2p}{\sin \mu} \cos \gamma$$

$$\cos^2 \gamma - 2p \sin \mu \cos \gamma = \cos^2 \mu - p^2$$

$$\cos \gamma = p \sin \mu \pm \sqrt{\cos^2 \mu - p^2 + p^2 \sin^2 \mu}$$

$$= p \sin \mu \pm \sqrt{\cos^2 \mu - p^2 \cos^2 \mu} = p \sin \mu \pm \cos \mu \sqrt{1 - p^2}$$

und, da
$$1 - p^2 = \frac{b^2 (1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta) - s^2 \sin^2 \beta}{b^2 (1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta)},$$

$$\cos \gamma = \frac{s \sin \beta}{b \sqrt{1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta}} \sin \mu \pm \cos \mu \frac{\sqrt{b^2 (1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta) - s^2 \sin^2 \beta}}{b \sqrt{1 + \sin^2 \beta + \sin 2\beta}}$$

$$\cot\mu = 1 + \cot\beta;\ \cot^2\mu = \frac{\cos^2\mu}{\sin^2\mu} = \frac{1-\sin^2\mu}{\sin^2\mu} = \frac{(\sin\beta+\cos\beta)^2}{\sin^2\beta}$$

$$1 = \sin^2\mu\left(1+\frac{(\sin\beta+\cos\beta)^2}{\sin^2\beta}\right) = \sin^2\mu\,\frac{2\sin^2\beta+2\sin\beta\cos\beta+\cos^2\beta}{\sin^2\beta}$$

$$2\sin^2\beta+\cos^2\beta+2\sin\beta\cos\beta = 1+\sin^2\beta+\sin 2\beta$$

$$\sin^2\mu = \frac{\sin^2\beta}{1+\sin^2\beta+\sin 2\beta};\ \cos^2\mu = \frac{1+\sin 2\beta}{1+\sin^2\beta+\sin 2\beta}$$

$$\cos\gamma = \frac{s\sin^2\beta + \sqrt{1+\sin 2\beta}\,\sqrt{b^2(1+\sin^2\beta+\sin 2\beta)-s^2\sin^2\beta}}{b\,(1+\sin^2\beta+\sin 2\beta)}.$$

Vorstehende Formel ergibt sich direct also:

$$a + h_a = a + b\sin\gamma = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} + b\sin\gamma = b\,\frac{\sin\alpha+\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta} = s;$$

$$\frac{s\sin\beta}{b} = \sin\alpha+\sin\beta\sin\gamma = \sin(\beta+\gamma)+\sin\beta\sin\gamma = \sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\sin\gamma$$

$$= \sin\beta\cos\gamma + (\cos\beta+\sin\beta)\sin\gamma$$

$$\frac{s\sin\beta}{b} - \sin\beta\cos\gamma = (\cos\beta+\sin\beta)\sqrt{1-\cos^2\gamma}$$

$$\frac{s}{b} - \cos\gamma = \frac{\cos\beta+\sin\beta}{\sin\beta}\sqrt{1-\cos^2\gamma};$$

Es sei $\frac{\cos\beta+\sin\beta}{\sin\beta} = 1+\cot\beta = \cot\mu$ (Vgl. oben.);

$$\left(\frac{s}{b}-\cos\gamma\right)^2 = \frac{s^2}{b^2} - \frac{2s\cos\gamma}{b} + \cos^2\gamma = \cot^2\mu - \cot^2\mu\cos^2\gamma$$

$$\cos^2\gamma\,(1+\cot^2\mu) - \frac{2s}{b}\cos\gamma = \cot^2\mu - \frac{s^2}{b^2}$$

$$\cos^2\gamma - \frac{2s}{b\,(1+\cot^2\mu)}\cos\gamma = \frac{b^2\cot^2\mu - s^2}{b^2\,(1+\cot^2\mu)}$$

$$\cos\gamma = \frac{s}{b\,(1+\cot^2\mu)} \pm \frac{\sqrt{b^2\cot^2\mu - s^2 + b^2\cot^4\mu - s^2\cot^2\mu + s^2}}{b\,(1+\cot^2\mu)}$$

$$= \frac{s \pm \sqrt{\cot^2\mu\left(b^2(1+\cot^2\mu)-s^2\right)}}{b\,(1+\cot^2\mu)} = \frac{s \pm \cot\mu\sqrt{b^2(1+\cot^2\mu)-s^2}}{b\,(1+\cot^2\mu)}$$

$$\cot\mu = \frac{\cos\beta + \sin\beta}{\sin\beta};\ \cot^2\mu = \frac{\cos^2\beta + 2\cos\beta\sin\beta + \sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1+\sin 2\beta}{\sin^2\beta}$$

$$1 + \cot^2\mu = \frac{1 + \sin^2\beta + \sin 2\beta}{\sin^2\beta}$$

$$\cos\gamma = \frac{s \pm \frac{\cos\beta + \sin\beta}{\sin\beta}\,\frac{\sqrt{b^2(1 + \sin^2\beta + \sin 2\beta) - s^2\sin^2\beta}}{\sin\beta}}{b\,\frac{1 + \sin^2\beta + \sin 2\beta}{\sin^2\beta}}$$

$$= \frac{s\sin^2\beta \pm (\cos\beta + \sin\beta)\sqrt{b^2(1 + \sin^2\beta + \sin 2\beta) - s^2\sin^2\beta}}{b(1 + \sin^2\beta + \sin 2\beta)}.$$

Oben steht $\sqrt{1 + \sin 2\beta}$ statt $\cos\beta + \sin\beta$; es ist aber

$$\sqrt{(\cos\beta + \sin\beta)^2} = \sqrt{\cos^2\beta + 2\cos\beta\sin\beta + \sin^2\beta} = \sqrt{1 + \sin 2\beta}.$$

$$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta};\quad a = \frac{b\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}.$$

3. Aufgabe. Dat. a, h_a, $\gamma - \beta$.

a. **Analysis.** Durch a sind vom gesuchten Dreiecke die Eckpunkte B und C gegeben, durch h_a ein geometrischer Ort für den dritten Eckpunkt, für den Scheitel A. Legt man also (Fig. 22) eine Linie $BC = a$ als Grundlinie hin, errichtet in einem beliebigen Punkte der BC in R die RS $(= h_a) \perp BC$ und zieht durch S die $TU \perp SR$, so ist TU ein geometrischer Ort für den Scheitel A. Ferner ist gegeben ein Winkel gleich $\gamma - \beta$. Nun ist aber (vgl. 1. Anm.) $\measuredangle (r, h_a) = \gamma - \beta$, also ist auch der Winkel gleich $\gamma - \beta$, welchen r, gezogen zu A, bildet mit der aus O zu TU gefällten Senkrechten oder mit der im Mittelpunkte der BC zu BC errichteten Senkrechten, weil diese durch O geht und senkrecht zu TU ist. Errichtet man also im Mittelpunkte der BC in D eine Senkrechte zu BC, welche die TU schneide in L, so ist A weiterhin bestimmt durch DL, $\gamma - \beta$ und durch O in DL. Welcher Punkt der DL ist aber O? Legt man an DL in D einen Winkel $XDL = \gamma - \beta$ an, so muß $OA \parallel XD$ sein. Schneidet nun DX die TU in I, so ist allerdings $\triangle$ LDI und durch DI die Richtung der OA bestimmt, aber noch nicht O gefunden. Geometrischer Ort für O ist auch CO; welche Lage hat aber CO? Ist die Lage von DY bekannt, wenn man sich denkt, aus D sei die $DY \parallel CO$ gezogen? Die DY werde von der über C verlängerten LC in H geschnitten; ist nun H zu finden? Wenn $OC \parallel DH$ ist, so ist $LO : LD = OC\ (= r) : DH$; es ist aber auch, weil $OA \parallel DI$ sein muß, $LO : LD = OA\ (= r) : DI$; es muß also $r : DH = r : DI$, oder $DH = DI$ sein, es muß H in der über C verlängerten LC liegen und von D um DI entfernt sein; es läßt sich also H finden. Wird also LC gezogen und über C verlängert, wird an LD in D ein Winkel $XDL = \gamma - \beta$ gelegt, dessen Schenkel XD die TU schneide in I, wird aus D mit einem Radius gleich DI ein Bogen beschrieben, welcher die verlängerte LC schneide in H, wird dann HD, $CO \parallel HD$, endlich durch O eine Linie parallel zu DI gezogen, welche die TU schneide in A, so ist A der Scheitel des gesuchten Dreiecks. Zieht man noch AB, AC, so ist die Aufgabe gelöst.

b. **Synthesis.**

α. **Construction.** Lege eine Linie $BC = a$ hin, halbire BC in D, errichte $DL\ (= h_a) \perp BC$, ziehe durch L die $TU \perp LD$, lege an DL in D einen Winkel $XDL = \gamma - \beta$ an, dessen Schenkel DX die TU schneide in I; ziehe LC, verlängere LC über C, beschreibe aus D mit einem Radius gleich DI einen Bogen, welcher die verlängerte LC schneide in H, ziehe HD, ziehe $CO \parallel HD$, ziehe aus O eine Parallele zu DI, welche die TU schneide in A, ziehe AB, AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

β. **Beweis.** Fälle $AF \perp BC$.

1) $BC = a$ (Constr.) $\qquad AF \parallel LD;\ LA \parallel DF$ (Constr.)

$$\frac{}{AF = LD}$$

$$\frac{LD = h_a}{2)\ AF = h_a.}$$

$$\frac{OC \parallel DH \text{ (Constr.)}}{LO : LD = OC : DH} \qquad \frac{OA \parallel DI \text{ (Constr.)}}{LO : LD = OA : DI}$$

$$\frac{DH = DI \text{ (Constr.)}}{OC = OA}$$

$$\left.\begin{array}{r} OD \perp BC \\ BD = DC \end{array}\right\} \text{(Constr.)}$$

$$\frac{}{OC = OB = OA.}$$

Wird also aus O mit einem Radius gleich OA ein Kreis beschrieben, so geht dieser durch A, B, C; er schneide die TU in P; wird PB gezogen, so ist, da $OL \perp PA$ (Constr.),

$\sphericalangle$ LOA = PBA

$\sphericalangle$ LOA = LDI = $\gamma - \beta$ (Constr.)

$\sphericalangle$ PBA = $\gamma - \beta$

AP $\parallel$ BC (Constr.)

---

arc PAC = APB

$\sphericalangle$ PBA + ABC = ACB

$\sphericalangle$ PBA = ACB − ABC

$\sphericalangle$ ACB − ABC = $\gamma - \beta$.

Oder:

$\sphericalangle$ LOA = $\gamma - \beta$ (Constr.)

$\sphericalangle$LOA = OAF = $\sphericalangle(r, h_a)$ (Constr.)

$\sphericalangle(r, h_a) = \sphericalangle$ ACB − ABC

$\sphericalangle$ ACB − ABC = $\gamma - \beta$

Trigonom. a.

$$DI = \frac{h_a}{\cos(\gamma-\beta)}; \quad \frac{\sin LHD}{\sin HLD} = \frac{\sin\lambda}{\sin\eta} = \frac{DL}{DI} = \cos(\gamma-\beta);$$

$$\sin\lambda = \sin\eta\cos(\gamma-\beta),$$

$$\cot\eta = \frac{h_a}{\frac{1}{2}a} = \frac{2\,h_a}{a},$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r}; \; r = OC = LC\,\frac{\sin\eta}{\sin(\eta+\lambda)} = \frac{\sin\eta}{\sin(\eta+\lambda)}\sqrt{\left(h_a^2 + \frac{a^2}{4}\right)};$$

$$\sin\alpha = \frac{a\sin(\eta+\lambda)}{\sin\eta\sqrt{a^2+4\,h_a^2}} = \frac{a(\sin\eta\cos\lambda + \cos\eta\sin\lambda)}{\sin\eta\sqrt{a^2+4\,h_a^2}}$$

$$= \frac{a(\cos\lambda + \cot\eta\sin\lambda)}{\sqrt{a^2+4\,h_a^2}}.$$

$$\cot\eta = \frac{2\,h_a}{a}; \; \sin\eta = \frac{a}{\sqrt{a^2+4\,h_a^2}}; \; \cos\eta = \frac{2\,h_a}{\sqrt{a^2+4\,h_a^2}};$$

$$\sin\lambda = \sin\eta\cos(\gamma-\beta) = \frac{a\cos(\gamma-\beta)}{\sqrt{a^2+4\,h_a^2}};$$

$$\cos^2\lambda = \frac{a^2+4\,h_a^2 - a^2\cos^2(\gamma-\beta)}{a^2+4\,h_a^2} = \frac{a^2\sin^2(\gamma-\beta)+4\,h_a^2}{a^2+4\,h_a^2};$$

$$\cot\eta\sin\lambda = \frac{2\,h_a}{a}\cdot\frac{a\cos(\gamma-\beta)}{\sqrt{a^2+4\,h_a^2}} = \frac{2\,h_a\cos(\gamma-\beta)}{\sqrt{a^2+4\,h_a^2}};$$

$$\sin\alpha = \frac{a\left(\frac{\sqrt{a^2\sin^2(\gamma-\beta)+4h_a^2}}{\sqrt{a^2+4h_a^2}} + \frac{2h_a\cos(\gamma-\beta)}{\sqrt{a^2+4h_a^2}}\right)}{\sqrt{a^2+4h_a^2}}$$

$$= \frac{a\left(2h_a\cos(\gamma-\beta)+\sqrt{a^2\sin^2(\gamma-\beta)+4h_a^2}\right)}{a^2+4h_a^2}.$$

Oder: b. Nach 1. wie nach Fig. 22 ist:

$$OL = h_a - r\cos\alpha = r\cos(\gamma-\beta);\quad r = \frac{a}{2\sin\alpha};$$

$$h_a - \frac{a}{2\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{a}{2\sin\alpha}\cos(\gamma-\beta)$$

$$2h_a\sin\alpha - a\cos\alpha = a\cos(\gamma-\beta)$$

$$a\cos\alpha = 2h_a\sin\alpha - a\cos(\gamma-\beta);$$

$$a\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2h_a\sin\alpha - a\cos(\gamma-\beta)$$

$$a^2 - a^2\sin^2\alpha = 4h_a^2\sin^2\alpha - 4ah_a\sin\alpha\cos(\gamma-\beta) + a^2\cos^2(\gamma-\beta)$$

$$(a^2+4h_a^2)\sin^2\alpha - 4ah_a\sin\alpha\cos(\gamma-\beta) = a^2\left[1-\cos^2(\gamma-\beta)\right] = a^2\sin^2(\gamma-\beta)$$

$$\sin^2\alpha - \frac{4ah_a}{a^2+4h_a^2}\sin\alpha\cos(\gamma-\beta) = \frac{a^2\sin^2(\gamma-\beta)}{a^2+4h_a^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2ah_a}{a^2+4h_a^2}\cos(\gamma-\beta) \pm \frac{\sqrt{(a^4+4a^2h_a^2)\sin^2(\gamma-\beta)+4a^2h_a^2\cos^2(\gamma-\beta)}}{a^2+4h_a^2};$$

$$(a^4+4a^2h_a^2)\sin^2(\gamma-\beta)+4a^2h_a^2\cos^2(\gamma-\beta) = a^2\left(a^2\sin^2(\gamma-\beta)+4h_a^2\right)$$

$$\sin\alpha = \frac{2ah_a\cos(\gamma-\beta) \pm a\sqrt{a^2\sin^2(\gamma-\beta)+4h_a^2}}{a^2+4h_a^2}.$$

u. s. w.

4. Aufgabe. Dat. h_a, m_a, α.

Geom. (Fig. 23.) Wird durch einen beliebigen Punkt A' der AF ($= m_a$) gezogen $A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$, so entsteht $\sphericalangle B'A'C' = BAC = \alpha$; geometrischer Ort für A' ist demnach der über $B'C'$ ($B'F' = FC'$) beschriebene, des Winkels

α fähige Kreisabschnitt. Ein anderer Ort für A' ist FA, Schenkel des Winkels AFD $= \delta$; es ist aber δ Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks AFD, von dem AF $= m_a$ und AD $= h_a$ gegeben. Construire also das rechtwinkelige Dreieck AFD, verlängere FD über F und über D, trage ab ein beliebiges FB' $=$ FC', beschreibe über B'C' einen Kreisabschnitt, fähig α, welcher die FA schneide in A', ziehe A'B', A'C', ziehe aus A Parellelen zu A'B', A'C', welche die verlängerte DF schneiden in B und C, so ist ABC das gesuchte Dreieck. — Beweis leicht. —

Trigonom.

$$\sin\delta = \frac{h_a}{m_a};\ OA' = r' = \frac{B'C'}{2\sin\alpha} = \frac{FC'}{\sin\alpha};\ OF = r'\cos\alpha.$$

Durch OA', OF und δ ist bestimmt der Punkt A' oder die FA' und der Winkel OA'F $= \eta$.

$$FA' = OA'\frac{\sin(\varepsilon+\eta)}{\sin\varepsilon} = \frac{r'\sin(90^0-\delta+\eta)}{\cos\delta} = \frac{r'\cos(\delta-\eta)}{\cos\delta} = \frac{FC'\cos(\delta-\eta)}{\sin\alpha\cos\delta};$$

$$\sin\eta = \frac{OF}{OA'}\sin\varepsilon = \frac{r'\cos\alpha}{r'}\sin\varepsilon = \cos\alpha\sin\varepsilon = \cos\alpha\cos\delta;$$

$$FA' : FA = FC' : FC;\ FC = \frac{FA\,.\,FC'}{FA'} = \frac{m_a\sin\alpha\cos\delta}{\cos(\delta-\eta)};$$

$$FC = \frac{m_a\sin\alpha\cos\delta}{\cos\delta\cos\eta+\sin\delta\sin\eta} = \frac{m_a\sin\alpha}{\cos\eta+\tang\delta\sin\eta};$$

$$\cos^2\eta = 1-\sin^2\eta = 1-\cos^2\alpha\cos^2\delta = 1-\cos^2\alpha\frac{FD^2}{m_a^2} = \frac{m_a^2-FD^2\cos^2\alpha}{m_a^2}$$

$$= \frac{m_a^2-(m_a^2-h_a^2)\cos^2\alpha}{m_a^2} = \frac{m_a^2(1-\cos^2\alpha)+h_a^2\cos^2\alpha}{m_a^2}$$

$$= \frac{m_a^2\sin^2\alpha+h_a^2\cos^2\alpha}{m_a^2};$$

$$\tang\delta\sin\eta = \tang\delta\cos\delta\cos\alpha = \sin\delta\cos\alpha = \frac{h_a\cos\alpha}{m_a};$$

$$FC = \tfrac{1}{2}a = \frac{m_a^2\sin\alpha}{h_a\cos\alpha \pm \sqrt{m_a^2\sin^2\alpha+h_a^2\cos^2\alpha}} = \frac{-h_a\cos\alpha+\sqrt{m_a^2\sin^2\alpha+h_a^2\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

2. Auflösung. Das $\triangle$ AFD kann construirt werden; es gibt δ. B und C wären zu finden, wenn (Fig. 24) O bekannt wäre, weil OB = OC = OA sein muß. Ein geometrischer Ort für O ist die in F zu DF errichtete Senkrechte FV, ein anderer ist OA. OA aber ist Schenkel von OAF = η. Nun ist

$$\sin \eta = \frac{OF}{OA} \sin OFA = \frac{r \cos \alpha}{r} \cos \delta = \cos \alpha \cos \delta.$$

Lege also hin eine Gerade XY, errichte in einem beliebigen Punkte derselben die DA ($= h_a$) $\perp$ XY und beschreibe aus A mit einem Radius gleich m_a einen Bogen, welcher die XY schneide in F; lege an AF in F einen Winkel AFZ = α und fälle AI $\perp$ FZ, so ist

$$m_a \sin \eta = m_a \cos \alpha \cos \delta = FI \cos \delta.$$

Trage FH = FI auf FA ab und fälle HK $\perp$ FD:

$$m_a \sin \eta = FH \cos \delta = FK.$$

Halbire FA ($= m_a$), beschreibe über FA als Durchmesser einen Kreis, beschreibe aus F mit FK als Radius einen Bogen, welcher den Kreis schneide in L, ziehe AL, so ist $\sphericalangle$ FAL = η; also AL geometrischer Ort für O. Beschreibe aus dem Durchschnittspunkte O der FV und AL mit OA als Radius einen Kreis, welcher die XY schneide in B und C; ziehe AB, AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

3. Auflösung. Das Dreieck ADF gibt A und δ, die verlängerte DF einen geometrischen Ort für B und C. Wird (Fig. 25) AF um FG = AF verlängert und GC gezogen, so ist $\sphericalangle$ ACG = $\gamma + \beta = 180^0 - \alpha$, also bekannt; daher der andere geometrische Ort für C ein über AG ($= 2\, m_a$) beschriebener Kreisabschnitt, fähig $180^0 - \alpha$; u. s. w.

Trigonom. Es ist $\sphericalangle$ FOG = α; also

$$OG = OC = r' = \frac{m_a}{\sin \alpha}; \quad OF = r' \cos \alpha;$$

$$FC = \tfrac{1}{2} a = OC \frac{\sin FOC}{\sin OFC} = r' \frac{\sin FOC}{\sin (90^0 - \delta)} = r' \frac{\sin FOC}{\cos \delta};$$

$$\sin FCO = \frac{OF}{OC} \sin OFC = \frac{r' \cos \alpha}{r'} \cos \delta = \cos \alpha \cos \delta$$

$$\begin{aligned} \sin FOC &= \sin (FCO + OFC) = \sin [FCO + 180^0 - (90^0 - \delta)] \\ &= \sin (FCO + 90^0 + \delta) = \cos (FCO + \delta) \\ &= \cos \delta \cos FCO - \sin \delta \sin FCO \end{aligned}$$

$$= \cos\delta \sqrt{1 - \cos^2\alpha \cos^2\delta} - \cos\alpha \cos\delta \sin\delta;$$

$$\frac{\sin FOC}{\cos\delta} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha \cos^2\delta} - \cos\alpha \sin\delta;$$

$$\sin\delta = \frac{h_a}{m_a}; \cos^2\delta = \frac{m_a^2 - h_a^2}{m_a^2};$$

$$\frac{\sin FOC}{\cos\delta} = \frac{\sqrt{m_a^2 - m_a^2 \cos^2\alpha + h_a^2 \cos^2\alpha} - h_a \cos\alpha}{m_a}$$

$$= \frac{-h_a \cos\alpha + \sqrt{m_a^2 \sin^2\alpha + h_a^2 \cos^2\alpha}}{m_a};$$

$$FC = \tfrac{1}{2} a = r' \frac{\sin FOC}{\cos\delta} = \frac{m_a}{\sin\alpha} \cdot \frac{-h_a \cos\alpha + \sqrt{m_a^2 \sin^2\alpha + h_a^2 \cos^2\alpha}}{m_a}$$

$$= \frac{-h_a \cos\alpha + \sqrt{m_a^2 \sin^2\alpha + h_a^2 \cos^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

4. Es ist:

$$b^2 = h_a^2 + DC^2 = h_a^2 + \left(\tfrac{1}{2} a + DF\right)^2$$
$$c^2 = h_a^2 + DB^2 = h_a^2 + \left(\tfrac{1}{2} a - DF\right)^2$$

$$b^2 + c^2 = 2 h_a^2 + \tfrac{1}{2} a^2 + 2 FD^2 = 2 h_a^2 + \tfrac{1}{2} a^2 + 2\left(m_a^2 - h_a^2\right) = \tfrac{1}{2} a^2 + 2 m_a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2 bc \cos\alpha = a^2 + 2 \cos\alpha . \frac{a h_a}{\sin\alpha} = a^2 + 2 a h_a \cot\alpha$$

$$a^2 + 2 a h_a \cot\alpha = \tfrac{1}{2} a^2 + 2 m_a^2$$
$$a^2 + 4 a h_a \cot\alpha = 4 m_a^2$$

$$a = -2 h_a \cot\alpha \pm \sqrt{4 m_a^2 + 4 h_a^2 \cot^2\alpha} = \frac{-2 h_a \cos\alpha + 2\sqrt{m_a^2 \sin^2\alpha + h_a^2 \cos^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Die vorstehende Gleichung gibt folgende, allerdings nicht einfache, geometrische Auflösung:

Construire AFD, lege (Fig. 26) an AF in A an $\sphericalangle$ XAF $= \alpha$, trage auf AF ab AG $=$ AD ($= h_a$), fälle GK $\perp$ AX, FI $\perp$ AX, so ist:

$FI = m_a \sin\alpha;\quad AK = h_a \cos\alpha$

ziehe durch F die YZ $\parallel$ AX, ziehe KL $\parallel$ AF, ziehe LI, so ist:

$LI^2 = FI^2 + FL^2 = FI^2 + AK^2 = m_a^2 \sin^2 \alpha + h_a^2 \cos^2 \alpha;$

schneide von LY ein Stück LM = LI ab, so ist:

$FM = -LF + LM = -AK + LI = -h_a \cos \alpha + \sqrt{m_a^2 \sin^2 \alpha + h_a^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} a \sin \alpha$

errichte MN (= MF) $\perp$ MF, ziehe NQ $\parallel$ MF, so ist:

$FM = MN = QF \sin \alpha = \frac{1}{2} a \sin \alpha;$

demnach $QF = \frac{1}{2} a;$

verlängere FD über F und D hinaus, bis FB = FC = FQ, ziehe AB, AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Die Gleichung $\frac{1}{2} a = - h_a \cot \alpha + \sqrt{m_a^2 + h_a^2 \cot^2 \alpha}$

gibt eine einfachere geometrische Auflösung. Construire wieder $\triangle$ AFD, ziehe (Fig. 27) AX $\parallel$ FD, lege an AX in A $\sphericalangle$ XAH = α, fälle HI $\perp$ AX, so ist AI = $h_a \cot \alpha$; errichte AK (= AI) $\perp$ AF, ziehe KF, so ist:

$$KF^2 = m_a^2 + AK^2 = m_a^2 + h_a^2 \cot^2 \alpha;$$

demnach $\frac{1}{2} a = - AI + FK = - AK + FK;$

trage auf KF ab, KL = KA, so ist FL = $\frac{1}{2}$ a;

verlängere FD über F und D bis FB = FC = FL ist u. s. w.

5. Aufgabe. Dat. $a + h_a = s, \beta, \gamma$.

Geom. A. Construire ein dem gesuchten ähnliches Dreieck AB′C′ (Fig. 28); fälle AD′ $\perp$ B′C′. Es ist dann

$a : h_a = a' : h_a'; \; a + h_a : a = a' + h_a' : a'; \; s : s' = a : a' = b : b' = c : c'.$

Verlängere also AD′ um D′F = B′C′ = a′; trage auf AF ab AG = s = $a + h_a$, ziehe FC′, ziehe GC $\parallel$ FC′, ziehe BC $\parallel$ B′C′, so ist ABC das gesuchte Dreieck. Beweis leicht.

B. Es muß sein $a : h_a = a' : h_a'; \; a + h_a : a = a' + h_a' : a';$ verlängere also (Fig. 29) BC′ (= a′) um C′F = A′D′, lege an BF unter beliebigem Winkel BG (= s), ziehe FG, ziehe C′H $\parallel$ FG, so ist BH = a; u. s. w.

C. Ist im Dreiecke A′BC′ (Fig. 29) BC′ = a′ = s, so ist:

$BC : AD = BC' : A'D'$ oder $a : h_a = s : h_a'$, also auch $a : a + h_a = s : s + h_a'$ oder $a : s = s : s + h_a'$; demnach $a = \frac{s^2}{s + h_a'}$, d. h. u. s. w.

D. Ist im ähnlichen Dreiecke A′B C′ die A′D′ = s, so ergibt sich:

$$h_a : a + h_a = h'_a : a' + h'_a = h_a : s = s : a' + s;\ h_a = \frac{s^2}{a' + s}\text{, d. h. } \ldots$$

ferner: $a : h_a = a' : h'_a$ oder $a : \frac{s^2}{a' + s} = a' : s$, also $a = \frac{a'\ s}{a' + s}$, d. h. ...

Trigonom. A. Wird durch h_a die a in $m + n$ getheilt, so ist:

$$a + h_a = s = m + n + h_a = h_a + h_a \cot \beta + h_a \cot \gamma$$

$$h_a = \frac{s}{1 + \cot \beta + \cot \gamma};\quad a = s\ \frac{\cot \beta + \cot \gamma}{1 + \cot \beta + \cot \gamma}$$

$$a = s\ \frac{\cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma} = s\ \frac{\sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)}.$$

B. Wird (Fig. 28) in dem dem gesuchten ähnlichen Dreieck AB′C′ die B′C′ durch die h'_a in $m' + n'$ getheilt, so ist:

$$m' + n' = h'_a (\cot \beta + \cot \gamma) = a';\ \cot \beta + \cot \gamma = \frac{a'}{h'_a};$$

$$1 + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{a' + h'_a}{h'_a};$$

es war
$$a = s\ \frac{\cot \beta + \cot \gamma}{1 + \cot \beta + \cot \gamma};$$

also ist
$$a = s\ \frac{\frac{a'}{h'_a}}{\frac{a' + h'_a}{h'_a}} = \frac{s\ a'}{a' + h'_a}$$

und
$$a : a' = s : a' + h'_a \ldots$$ (Vgl. Geom. A. B.).

C. Es ist auch:

$$\sin \beta = \frac{h'_a}{c'};\quad \sin \gamma = \frac{h'_a}{b'};\quad \sin (\beta + \gamma) = \sin \alpha = \frac{h'_c}{b'};$$

es war:
$$a = \frac{s \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma + \sin (\beta + \gamma)};$$

also ist:

$$a = \frac{s\,\frac{h'_c}{b'}}{\frac{h_a'^2}{b'\,c'} + \frac{h'_c}{b'}} = \frac{s\,c'\,h'_c}{h_a'^2 + c'\,h'_c} = \frac{s\,a'\,h'_a}{h_a'^2 + a'\,h'_a} = \frac{s\,a'}{h'_a + a'}$$

$a : s = a' : a' + h'_a$ (vgl. Geom. A. B.).

D. Ist in dem dem gesuchten ähnlichen Dreiecke $a' = s$ und wird $a' = s$ durch die h'_a getheilt in $v + w$, so ist:

$$v + w = h'_a(\cot\beta + \cot\gamma) = s;\ 1 + \cot\beta + \cot\gamma = 1 + \frac{s}{h'_a} = \frac{h'_a + s}{h'_a};$$

also $a = s\,\dfrac{\cot\beta + \cot\gamma}{1 + \cot\beta + \cot\gamma} = s\,\dfrac{\frac{s}{h'_a}}{\frac{h'_a + s}{h'_a}} = \dfrac{s^2}{h'_a + s}$ (Vgl. Geom. C.).

E. Ist im ähnlichen Dreiecke $h'_a = s$ und wird a' durch h'_a getheilt in $v' + w'$, so ist:

$$v' + w' = s\cot\beta + s\cot\gamma = s(\cot\beta + \cot\gamma) = a';$$

also $a = \dfrac{s(\cot\beta + \cot\gamma)}{1 + \cot\beta + \cot\gamma} = \dfrac{a'}{1 + \frac{v'}{s} + \frac{w'}{s}} = \dfrac{a'\,s}{s + v' + w'} = \dfrac{a'\,s}{a' + s}$

(Vgl. Geom. D.).

F. Es ist:

$$s = a + h_a = a + c\sin\beta = a + \frac{a\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha} = a\,\frac{\sin\alpha + \sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$a = \frac{s\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\gamma\sin\beta} = \ldots.$$

G. Es sei (Fig. 29) ABC das gesuchte, A′BC′ das diesem ähnliche Dreieck, worin $BC' = a' = s = a + h_a$, also $CC' = AD = h_a$. Wird AC′ gezogen, so ist:

$$\cot AC'B = \cot\varepsilon = \frac{DC'}{AD} = \frac{DC + CC'}{AD} = \frac{h_a\cot\gamma + h_a}{h_a} = 1 + \cot\gamma.$$

Nun ist $h_a = AD = CC' = \dfrac{AC'\sin CAC'}{\sin ACC'} = \dfrac{AC'\sin(\gamma - \varepsilon)}{\sin\gamma};$

$$AC' = BC' \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\varepsilon)} = s\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\varepsilon)};$$

$$h_a = \frac{s\sin\beta\sin(\gamma-\varepsilon)}{\sin\gamma\sin(\beta+\varepsilon)} = \frac{s\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma\cos\varepsilon-\cos\gamma\sin\varepsilon}{\sin\beta\cos\varepsilon+\cos\beta\sin\varepsilon} = \frac{s\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma\cot\varepsilon-\cos\gamma}{\sin\beta\cot\varepsilon+\cos\beta}$$

$$h_a = \frac{s\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma+\cos\gamma-\cos\gamma}{\sin\beta+\sin\beta\cot\gamma+\cos\beta} = \frac{s\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{\frac{\sin\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma}{\sin\gamma}}$$

$$= s\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma+\sin(\beta+\gamma)}.$$

$$a = s - h_a = s\left(1-\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma+\sin(\beta+\gamma)}\right) = \frac{s\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma+\sin(\beta+\gamma)}.$$

H. Um aus $A'BC'$ mit $BC' = s$, β, γ zu finden ABC, muß an BC' in C' angelegt werden $\sphericalangle AC'B = \varepsilon$ und $AC \parallel A'C'$ gezogen werden; ε aber ist bestimmt durch

$$\cot\varepsilon = 1 + \cot\gamma;$$

Fälle $A'D' \perp BC'$:

$$\cot\gamma = \frac{D'C'}{A'D'} = \frac{n'}{h'_a};\quad \cot\varepsilon = 1 + \frac{n'}{h'_a} = \frac{h'_a + n'}{h'_a};$$

Verlängere $D'C'$ $(= n')$ um $C'F = A'D' = h'_a$, ziehe $A'F$, so ist

$$\cot A'FB = \frac{D'F}{A'D'} = \frac{D'C' + C'F}{A'D'} = \frac{n' + h'_a}{h'_a} = \cot\varepsilon;$$

also $\sphericalangle AF'B = \varepsilon$; ziehe $C'A \parallel FA'$, ziehe $AC \parallel A'C'$, so ist ABC das gesuchte Dreieck; denn

$$\sphericalangle ABC = \beta;\ ACB = A'C'B = \gamma\ (\text{Constr.}).$$

Da ferner $\triangle ABC \sim A'BC'$ (Constr.) so ist:

$$a : h_a = a' : h'_a$$

$$a + h_a : a = a' + h'_a : a' = BF : BC'$$

$$\frac{AC' \parallel A'F\ (\text{Constr.})}{BF : BC' = BA' : BA}$$

$$BA' : BA = BC' : BC$$

$$= a' : a$$

$$\frac{a + h_a : a = a' : a}{a + h_a = a' = s.}$$

6. Aufgabe. Dat. $h_b + h_c = s, \beta, \gamma$.

Geom. A. Construire ein Dreieck, dem gesuchten ähnlich; die Seiten seien a', b', c'; die Höhen h'_a, h'_b, h'_c. Es ist (Fig. 30):

$$h_b : h'_b = a : a'; \; h_b = \frac{a}{a'} h'_b; \; h_c : h'_c = a : a'; \; h_c = \frac{a}{a'} h'_c$$

$$h_b + h_c = \frac{a}{a'} (h'_b + h'_c); \; a : a' = h_b + h_c : h'_b + h'_c = s : s'; \text{ also } \ldots.$$

B. Es ist (Fig. 31):

$$\frac{c : b = h_b : h_c \; ; \quad c : b = c' : b'}{h_b : h_c = c' : b'}$$

Wird aber $\sphericalangle (c', b') = \alpha$ halbirt, so ist, wenn die t'_α die a' theilt in $v' + w'$, $c' : b' = v' : w'$, also auch $h_b : h_c = v' : w'$, $h_b + h_c : h_b = v' + w' : v'$ oder $s : h_b = a' : v'$; demnach ....

Ist $a' = v' + w'$ gleich $s = h_b + h_c$ gemacht, oder ist ein Dreieck mit $a' = s, \beta, \gamma$ construirt, so ist

$s : h_b = a' : v' = s : v' = s : h_b$; also $v' = h_b$; da aber $v' + w' = a' = s$, so theilt t'_α die a' in $h_b + h_c$.

Trigonom. ad A.

$$a : a' = s : h'_b + h'_c = s : a' \sin\gamma + a' \sin\beta$$

$$a = \frac{s}{\sin\gamma + \sin\beta} = \ldots.$$

Oder (Fig. 30): $$BC = a = \frac{BG \sin BGC}{\sin GCB} = \frac{s \cos GCA}{\sin(\gamma + GCA)} = \frac{s \cos\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

$$= \frac{s \cos\delta}{\sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta} = \frac{s}{\sin\gamma + \cos\gamma \operatorname{tang}\delta}$$

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{DG}{DC} = \frac{CF}{DC} = \frac{BC\sin\beta}{BC\cos\gamma} = \frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$$

$$a = \frac{s}{\sin\gamma + \cos\gamma\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}} = \frac{s}{\sin\gamma + \sin\beta} = \ldots.$$

ad B. $BC = a = \frac{h_b}{\sin\gamma}$

$$h_b = \frac{s\,v'}{a'};\; v' = \frac{c' \sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{a' \sin\gamma \sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}$$

$$h_b = \frac{s \sin\gamma \sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{s \sin\gamma}{2\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}.$$

$$a = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)} = \frac{s}{\sin\beta + \sin\gamma}.$$

Ist $a' = s$ gemacht, so ist:

$$h_b = v' = \frac{a' \sin\gamma \sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{s \sin\gamma}{2\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)};$$

$$a = \frac{s}{\sin\beta + \sin\gamma}.$$

C. Es ist auch unabhängig von der geometrischen Auflösung:

$$h_b + h_c = s = a \sin\beta + a \sin\gamma = a(\sin\beta + \sin\gamma);$$

$$a = \frac{s}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}.$$

Die erste Gleichung gibt aber, wenn an eine Linie $BC' = s$ angelegt werden β und γ und aus den Scheiteln der Winkel auf die Gegenseiten die Senkrechten f und g gefällt werden, da dann

$$\sin\beta = \frac{f}{s},\; \sin\gamma = \frac{g}{s},\; \sin\beta + \sin\gamma = \frac{f + g}{s}:$$

$$a = \frac{s^2}{f + g};\; a : s = s : f + g;\; \text{also} \ldots.$$

In Betreff der Gleichung $a = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}$ ist zu beachten, daß $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ dem $b - c$, also auch dem $b' - c'$ gegenüberliegt.

Wird also in einem Dreiecke mit a' $(= s)$ β, γ (Fig. 31) auf $A'C'$ ein Stück $A'H = A'B = c'$ abgetragen und BH gezogen, so ist $\sphericalangle HBC' = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Wird in C' zu BC' eine Senkrechte errichtet, welche von der über H verlängerten BH in R geschnitten werde, so ist:

$$\frac{BC'}{\cos RBC'} = \frac{s}{\cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)} = BR;$$

demnach
$$a = \frac{\frac{1}{2} BR}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} = \frac{\frac{1}{2} BR}{\cos \frac{1}{2} \alpha}$$

und wenn BR in S halbirt wird:

$$a = \frac{BS}{\cos \frac{1}{2} \alpha}.$$

Da $\sphericalangle$ $HBC' = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, so ist $HBA' = \beta - \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$; wird $BD' \perp A'C'$ gefällt, so ist $\sphericalangle ABD' = 90^0 - \alpha$, also $\sphericalangle D'BH = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) - 90^0 + \alpha = \frac{1}{2}\alpha$. Errichtet man nun in S zu BS eine Senkrechte, welche die BD' schneide in T, so ist

$$a = \frac{BS}{\cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{BS}{\cos TBS} = BT.$$

Daher die geometrische Auflösung: Lege eine Linie $BC' = s$ hin, lege an BC' in B einen Winkel gleich β, in C' einen Winkel gleich γ; die Schenkel beider Winkel schneiden sich in A'. Trage auf A'C' ab $A'H = A'B'$, ziehe BH, verlängere BH über H, errichte in C' eine Senkrechte zu BC', welche die verlängerte BH schneide in R, halbire BR in S, errichte in S zu BS eine Senkrechte SV, fälle aus B die h'_b, welche die SV schneide in T, trage auf BC' ab $BC = BT$, ziehe durch C die $CA \parallel C'A'$, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis.

$$\triangle ABC \sim A'BC' \text{ (Constr.)}$$

$$1.\ \sphericalangle ABC = \beta;\ 2.\ \sphericalangle ACB = \gamma;\ 3.\ h_b = \frac{a}{a'} h'_b;\ h_c = \frac{a}{a'} h'_c$$

$$h_b + h_c = \frac{a}{a'}(h'_b + h'_c)$$

halbire $\sphericalangle BA'C'$ durch AL; AL schneide BH in P;

$$BL : LC' = c' : b' = h'_b : h'_c$$

$$h'_b + h'_c : h'_b = BL + LC' : BL = a' : BL.$$

$$h'_b + h'_c = a' \frac{h'_b}{BL}$$

also

$$h_b + h_c = \frac{a}{a'} \cdot a' \frac{h'_b}{BL} = a \frac{h'_b}{BL}$$

$$\triangle\ BD'H \sim BST$$

$$BD' : BH = BS : BT$$

$$\left.\begin{array}{c} \sphericalangle\ BA'L = C'A'L \\ A'B = A'H \end{array}\right\} \text{Constr.)}$$

$$BH = 2\ BP$$

$$BD' : 2\ BP = \tfrac{1}{2}\ BR : BC$$

$$BD'.BC = BP.BR$$

$$\triangle\ BPL \sim BC'R$$

$$BP : BL = BC' : BR$$

$$BP.BR = BC'.BL = a'.BL$$

$$BD'.BC = a'.BL$$

$$h'_b \cdot a = a' \cdot BL;$$

$$\frac{h'_b}{BL} = \frac{a'}{a}$$

$$h_b + h_c = a \frac{h'_b}{BL} = a \frac{a'}{a} = a' = s.$$

7. Aufgabe. In der Dreiecks-Seite AC soll ein Punkt D bestimmt werden, so daß DF (∥ BC) = DG (⊥ BC) ist.

Geom. A: Es soll (Fig. 32) sein: DF : DG = 1 : 1. Wird CF gezogen und aus einem beliebigen Punkte I der AC die IH ∥ BC, so ist:

$$CD : CI = DF : IH;$$

also muß auch sein:

$$CD : CI = DG : IH.$$

Wird aber IL ⊥ BC gefällt, so ist:

$$CD : CI = DG : IL;$$

also muß IL (⊥ BC) = IH (∥ BC) sein; das kann gemacht werden, da I ein beliebiger Punkt der AC ist. Durch IH [∥ BC und gleich IL (⊥ BC)] wird H und so die CHF, also die FD (∥ BC) bestimmt.

Trigonom. Die CHF ist bestimmt durch $\sphericalangle$ FCB $= \eta$. Fälle HM $\perp$ BC; es ist

$$\cot\eta = \frac{MC}{MH} = \frac{ML + LC}{MH} = \frac{HI + LC}{LI} = \frac{LI + LC}{LI} = 1 + \cot\gamma;$$

$$CF = AC\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\eta)} = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\beta+\eta)};$$

$$CD = CF\,\frac{\sin\eta}{\sin\gamma} = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\beta+\eta)}\cdot\frac{\sin\eta}{\sin\gamma};$$

B. Es ist:

$$DG = CD\sin\gamma = DF = CD\,\frac{\sin(\gamma-\eta)}{\sin\eta};$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin(\gamma-\eta)}{\sin\eta} = \frac{\sin\gamma\cos\eta - \cos\gamma\sin\eta}{\sin\eta}$$

$$= \sin\gamma\cot\eta - \cos\gamma;$$

$$\cot\eta = \frac{\sin\gamma + \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Da nun D durch FD ($\parallel$ BC) bestimmt wird, F aber abhängig ist von η, so kann die Aufgabe gelös't werden, sobald η bestimmt ist.

$$\cot\eta = \frac{v\sin\gamma + v\cos\gamma}{v\sin\gamma}.$$

Wird von CA ein Stück CI $= v$ abgeschnitten und IL $\perp$ BC gefällt, so ist IL $= v\sin\gamma$; LC $= v\cos\gamma$, also

$$\cot\eta = \frac{IL + LC}{IL}.$$

Wird von LB ein Stück LM $=$ IL abgeschnitten, in M die MH ($=$ IL) $\perp$ BC errichtet und HC gezogen, so ist:

$$\cot\eta = \frac{IL + LC}{IL} = \frac{LM + LC}{MH} = \frac{MC}{MH} = \cot HCM;$$

also $\eta =$ HCM. Vorstehende trigonometrische Auflösung führt also auf obige geometrische Auflösung.

C. Es ist

$$DF = (AC - DC)\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = DG = DC\sin\gamma$$

$$AC\sin\alpha - DC\sin\alpha = DC\sin\gamma\sin\beta$$

$$DC(\sin\alpha + \sin\beta\sin\gamma) = AC\sin\alpha = b\sin\alpha$$

$$DC = \frac{b\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta\sin\gamma}.$$

Aus vorstehender Gleichung ergibt sich eine andere geometrische Auflösung.

$$DC = \frac{b \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta \sin\gamma} = \frac{b \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \sin\gamma} = \frac{b \cdot \dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b} + \dfrac{h_a}{b}} = \frac{b\ a}{a + h_a};$$

also $DC : b = a : a + h_a$; also . . . . .

Diese geometrische Auflösung der Aufgabe ergibt sich direkt also:

$$\triangle DFA \sim CBA$$

$$DF : h_a - DG = BC : h_a$$

$$DF = DG$$

$$DG : h_a - DG = a : h_a$$

$$DF : h_a = a : a + h_a$$

$$DG : h_a = DC : AC = DC : b$$

$$DC : b = a : a + h_a.$$

D. Der Punkt D ist ein Punkt der BD, Schenkels des Winkels $ABD = \delta$; es ist aber

$$FD = BD \frac{\sin\delta}{\sin BFD} = BD \frac{\sin\delta}{\sin\beta},$$

$$FD = DG = BD \sin(\beta - \delta);$$

folglich
$$\frac{\sin\delta}{\sin\beta} = \sin(\beta-\delta) = \sin\beta\cos\delta - \cos\beta\sin\delta$$

$$\sin\delta = \sin^2\beta\cos\delta - \sin\beta\cos\beta\sin\delta$$

$$\tang\delta = \sin^2\beta - \sin\beta\cos\beta\tang\delta$$

$$\tang\delta = \frac{\sin^2\beta}{1 + \sin\beta\cos\beta}.$$

Diese Gleichung führt zu einer geometrischen Auflösung, ähnlich der ersten.

Denn
$$\tang\delta = \frac{\sin^2\beta}{1 + \sin\beta\cos\beta} = \frac{c \sin^2\beta}{c + c\sin\beta\cos\beta};$$

$$c\sin\beta = h_a; \quad c\sin\beta\cos\beta = h_a\cos\beta;$$

Ziehe $AR\ (= h_a) \parallel BC$, fälle $RS \perp BA$, ziehe RB;

$$c\sin\beta\cos\beta = h_a\cos\beta = AS,$$

$$c + c\sin\beta\cos\beta = c + AS = BS,$$

$$c\sin^2\beta = c\sin\beta \cdot \sin\beta = h_a\sin\beta = AR\sin\beta = RS;$$

also $\quad \operatorname{tang} \delta = \frac{RS}{BS} = \operatorname{tang} RBA.$

Fälle demnach h_a, ziehe AR ($= h_a$) $\parallel$ BC, ziehe RB; der Durchschnittspunkt der RB und AC ist der gesuchte Punkt D.

8. Aufgabe. In der Dreiecks-Seite AC soll ein Punkt D gesucht werden, so daß DF ($\perp$ AB) gleich ist der Verbindungslinie von D mit dem Fußpunkte der h_a.

Geom. A. Es sei (Fig. 33) DF ($\perp$ BC) $=$ DG (AG $\perp$ BC); Wird CH $\perp$ AB gezogen, so ist:

$$AD : AC = DF : CH;$$

es muß also auch sein AD : AC $=$ DG : CH. Wird AG über G verlängert und aus C zu DG eine Parallele gezogen, welche die verlängerte AG schneide in I, so ist:

$$AD : AC = DG : CI,$$

es muß demnach CI $=$ CH sein; also . . . .

Trigonom. $\quad AG = b \sin \gamma;\ CH = b \sin \alpha = CI.$

Durch AC, die verlängerte AG und CI ($=$ CH) ist $\triangle$ ACI bestimmt.

$$AI = CI \frac{\sin(\gamma + \varepsilon)}{\sin \lambda} = \frac{b \sin \alpha \sin(\gamma + \eta)}{\cos \gamma};$$

$$\cos \eta = \sin \iota = \frac{AC}{CI} \sin \lambda = \frac{b}{b \sin \alpha} \cos \gamma = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha};$$

$$\sin(\gamma + \eta) = \sin \gamma \cos \eta + \cos \gamma \sin \eta$$

$$= \sin \gamma \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha} + \cos \gamma \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha} \left(\sin \gamma + \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}\right)$$

$$AI = b \left(\sin \gamma + \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}\right).$$

$$AD : AC = AG : AI;$$

$$AD = \frac{AC . AG}{AI} = \frac{b . b \sin \gamma}{b\left(\sin \gamma + \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}\right)} = \frac{b \sin \gamma}{\sin \gamma + \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}}.$$

B. **Geom.** Es sei wieder DF ($\perp$ AB) $=$ DG (AG $\perp$ BC). Wird in einem beliebigen Punkte der AB (Fig. 33), in K, die KM $\perp$ AB errichtet, aus M mit MK als Radius ein Bogen beschrieben, welcher die AG schneide in L, und ML gezogen, so ist KM $=$ ML; da DF $=$ DG sein soll, ist

$$KM : DF = ML : DG;$$

es ist aber

$$\frac{\begin{array}{l} KM : DF = AM : AD \text{ (Constr.)} \end{array}}{\frac{AM : AD = ML : DG}{GD \parallel LM;}}$$

also . . . .

Trigonom. $$\sin ALM = \sin \iota = \frac{AM}{LM} \sin \lambda = \frac{AM}{KM} \cos \gamma = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha};$$

$$AD = \frac{AG \sin \iota}{\sin ADG} = \frac{h_a \sin \iota}{\sin(\eta + \gamma)} = \frac{h_a \cos \gamma}{\sin \alpha \sin(\eta + \gamma)} = \frac{b \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \alpha \sin(\eta + \gamma)}$$

$$= \frac{b \sin \gamma}{\sin \gamma + \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}} \text{ (Vgl. A.)}$$

C. $$DF = AD \sin \alpha = DG = \frac{AD \sin \lambda}{\sin \iota} = \frac{DC \sin \gamma}{\sin \eta} = (b - AD) \frac{\sin \gamma}{\sin \eta};$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \lambda}{\sin \iota} = \frac{\cos \gamma}{\sin \iota}; \quad \sin \iota = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}.$$

$$AD \sin \alpha = (b - AD) \frac{\sin \gamma}{\sin \eta} = b \frac{\sin \gamma}{\sin \eta} - AD \frac{\sin \gamma}{\sin \eta}$$

$$AD (\sin \gamma + \sin \alpha \sin \eta) = b \sin \gamma$$

$$AD = \frac{b \sin \gamma}{\sin \gamma + \sin \alpha \sin \eta}$$

$$\sin^2 \eta = \cos^2 \iota = 1 - \sin^2 \iota = 1 - \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha \sin \eta = \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}$$

$$AD = \frac{b \sin \gamma}{\sin \gamma + \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma}}.$$

Nun ist:

$$\sin^2 \alpha = \frac{h_c^2}{b^2}; \; \cos^2 \gamma = \frac{GC^2}{b^2}; \; \sin^2 \alpha - \cos^2 \gamma = \frac{h_c^2 - GC^2}{b^2} = \frac{IC^2 - GC^2}{b^2} = \frac{IG^2}{b^2}$$

$$\sin\gamma + \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\gamma} = \frac{AG}{b} + \frac{IG}{b} = \frac{AG + IG}{b} = \frac{AI}{b}$$

$$AD = \frac{b \sin\gamma}{\sin\gamma + \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\gamma}} = \frac{AG}{\frac{AI}{b}} = \frac{b \,.\, AG}{AI}$$

$AD : b = AG : AI.$

Obige trigonometrische Auflösung führt demnach auf die erste geometrische Auflösung.

D. Wird statt η der Winkel $GDC = \mu$ benutzt, so ist:

$$DG = \frac{CG \sin\gamma}{\sin\mu} = \frac{b \cos\gamma \sin\gamma}{\sin\mu} = DF = AD \sin\alpha$$

$$AD = \frac{b \cos\gamma \sin\gamma}{\sin\alpha \sin\mu} = \frac{\frac{1}{2}\, b \sin 2\gamma}{\sin\alpha \sin\mu};$$

Vorher war $AD = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin\gamma + \sin\alpha \sin\eta}$;

es muß also $\sin\gamma + \sin\alpha \sin\eta = \dfrac{\sin\alpha \sin\mu}{\cos\gamma}$

sein. Es ist aber:

$$\sin\gamma = \frac{DG}{GC} \sin\mu = \frac{DG}{b\cos\gamma} \sin\mu; \quad \sin\eta = \frac{DC}{GC} \sin\mu = \frac{DC}{b\cos\gamma} \sin\mu;$$

$$\sin\gamma + \sin\alpha \sin\eta = \frac{\sin\mu}{b\cos\gamma} (DG + DC \sin\alpha);$$

$$DG + DC \sin\alpha = DF + DC \sin\alpha = AD \sin\alpha + DC \sin\alpha = b \sin\alpha$$

$$\sin\gamma + \sin\alpha \sin\eta = \frac{\sin\mu}{b\cos\gamma} \,.\, b \sin\alpha = \frac{\sin\alpha \sin\mu}{\cos\gamma}.$$

Oder: $\sin\mu = \sin(\eta + \gamma) = \sin\eta \cos\gamma + \cos\eta \sin\gamma;$

$$\cos\eta = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}; \quad \sin\eta = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\gamma}}{\sin\alpha};$$

$$\sin\mu = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\gamma} + \sin\gamma \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} \left(\sin\gamma + \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\gamma}\right)$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\mu}{\cos\gamma} = \sin\gamma + \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\gamma};$$

$$AD = \frac{b\cos\gamma\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\mu} = \frac{b\sin\gamma}{\sin\gamma + \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\gamma}}.$$

9. Aufgabe. Von den Dreiecks-Seiten BA und CA sollen BD und CF so abgeschnitten werden, daß BD : CF = m : n und DF = d ist.

Geom. Es sei die Aufgabe gelös't; es sei (Fig. 34) BD : CF = m : n und DF = d. Wird BD verlegt nach FH (ziehe BH ∥ DF, FH ∥ AB), so muß FH : FC = m : n und, wenn die Gerade CHG gezogen wird, AG : AC = m : n, $AG = \frac{m}{n} AC = \frac{m}{n} b$ sein; das kann gemacht werden. Ferner muß, da BH = DF ist, BH = d sein. Durch $AG = \frac{m}{n} b$ wird G, also CG, ein geometrischer Ort für H, durch BH = d ein anderer geometrischer Ort für H bestimmt. Ist aber H, also BH gefunden, so ist F (HF ∥ AB) und D (FD ∥ HB) sofort zu bestimmen. Schneide also von AB ein Stück $AG = \frac{m}{n} b$ ab, ziehe GC, beschreibe aus B mit einem Radius gleich d einen Bogen, der die CG schneide in H, ziehe BH, ziehe HF ∥ BA, ziehe FD ∥ HB.

Beweis leicht.

Trigonom. A. Aus △ AGC ergibt sich, wenn GK ⊥ AC gefällt wird:

$$\cot ACG = \cot\mu = \frac{KC}{KG} = \frac{b - AK}{KG} = \frac{b - AG\cos\alpha}{AG\sin\alpha} = \frac{b - \frac{m}{n} b\cos\alpha}{\frac{m}{n} b\sin\alpha} = \frac{n - m\cos\alpha}{m\sin\alpha}.$$

Das Dreieck BHC gibt:

$$CH = \frac{BH\sin HBC}{\sin HCB} = \frac{d\sin\eta}{\sin\tau} = \frac{d\sin\eta}{\sin(\gamma - \mu)}.$$

$$\eta = \varkappa - \tau = \varkappa - (\gamma - \mu).$$

Fälle BI ⊥ CG; $\sin\varkappa = \frac{BI}{BH} = \frac{BC\sin\tau}{d} = \frac{a\sin(\gamma - \mu)}{d}.$

Das Dreieck FHC endlich gibt FH (= BD) und FC:

$$FH = \frac{CH\sin\mu}{\sin\alpha} = \frac{d\sin\eta\sin\mu}{\sin\alpha\sin(\gamma - \mu)};$$

$$FC = \frac{CH \sin CHF}{\sin \alpha} = \frac{d \sin \eta \sin (\alpha + \mu)}{\sin \alpha \sin (\gamma - \mu)}.$$

Ist nun vom $\triangle$ ABC gegeben b, c, α, so ist $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha}$ zu setzen und γ etwa durch $\cot \gamma = \frac{b - c \cos \alpha}{c \sin \alpha}$ zu berechnen; es ergeben sich dann für die Rechnung folgende Gleichungen:

$$\cot \gamma = \frac{b - c \cos \alpha}{c \sin \alpha}; \quad \cot \mu = \frac{n - m \cos \alpha}{m \sin \alpha}; \quad \sin \varkappa = \frac{\sin (\gamma - \mu) \sqrt{b^2 + c^2 - 2b \cos \alpha}}{d};$$

$$\eta = \varkappa + \mu - \gamma; \quad BD = \frac{d \sin \eta \sin \mu}{\sin \alpha \sin (\gamma - \mu)}; \quad CF = \frac{d \sin \eta \sin (\alpha + \mu)}{\sin \alpha \sin (\gamma - \mu)}.$$

Trigonom. B.

$$BD = AB - AD = c - \frac{d \sin \gamma'}{\sin \alpha}; \quad CF = AC - AF = b - \frac{d \sin \beta'}{\sin \alpha};$$

$$BD : CF = m : n; \quad n \,.\, BD = m \,.\, CF;$$

$$nc \sin \alpha - nd \sin \gamma' = mb \sin \alpha - md \sin \beta'$$

$$(nc - mb) \sin \alpha = d\,(n \sin \gamma' - m \sin \beta') = d\left[n \sin \gamma' - m \sin (\alpha + \gamma')\right]$$

$$= d\,(n \sin \gamma' - m \sin \alpha \cos \gamma' - m \cos \alpha \sin \gamma')$$

$$\frac{(nc - mb) \sin \alpha}{d} = \sin \gamma' (n - m \cos \alpha) - m \sin \alpha \cos \gamma';$$

Es sei $\frac{n - m \cos \alpha}{m \sin \alpha} = \cot \mu$ (Vgl. oben.)

$$\frac{(nc - mb) \sin \alpha}{d} = \sin \gamma' \, m \sin \alpha \cot \mu - m \sin \alpha \cos \gamma'$$

$$= m \sin \alpha \, \frac{\sin \gamma' \cos \mu - \cos \gamma' \sin \mu}{\sin \mu}$$

$$= \frac{m \sin \alpha}{\sin \mu} \sin (\gamma' - \mu)$$

$$\sin (\gamma' - \mu) = \frac{(nc - mb) \sin \alpha \sin \mu}{md \sin \alpha} = \frac{(nc - mb) \sin \mu}{md}$$

Demnach: $\cot \mu = \frac{n - m \cos \alpha}{m \sin \alpha}; \quad \sin (\gamma' - \mu) = \frac{(nc - mb) \sin \mu}{md};$

$$BD = c - \frac{d \sin \gamma'}{\sin \alpha}; \quad CF = b - \frac{d \sin (\alpha + \gamma')}{\sin \alpha}.$$

Anmerkung. Oben ist benutzt der Hülfswinkel $\varkappa = \gamma + \eta - \mu = \gamma' - \mu$; es war

$$\sin \varkappa = \frac{a \sin(\gamma - \mu)}{d} = \frac{a \sin(\gamma - \mu) \cdot \sin(\alpha + \mu)}{d \sin(\alpha + \mu)}$$

$$= \frac{BG \sin(\alpha + \mu)}{d} = \frac{(AB - AG) \sin(\alpha + \mu)}{d}$$

$$= \frac{\left(c - \frac{m}{n}\, b\right) \sin(\alpha + \mu)}{d} = \frac{(nc - mb) \sin(\alpha + \mu)}{nd};$$

Da aber: $\dfrac{\sin(\alpha + \mu)}{\sin \mu} = \dfrac{b}{\frac{m}{n}\, b} = \dfrac{n}{m}$,

so ist $\sin \varkappa = \dfrac{(nc - mb) \sin \mu}{md} = \sin(\gamma' - \mu)$ (Vgl. oben.).

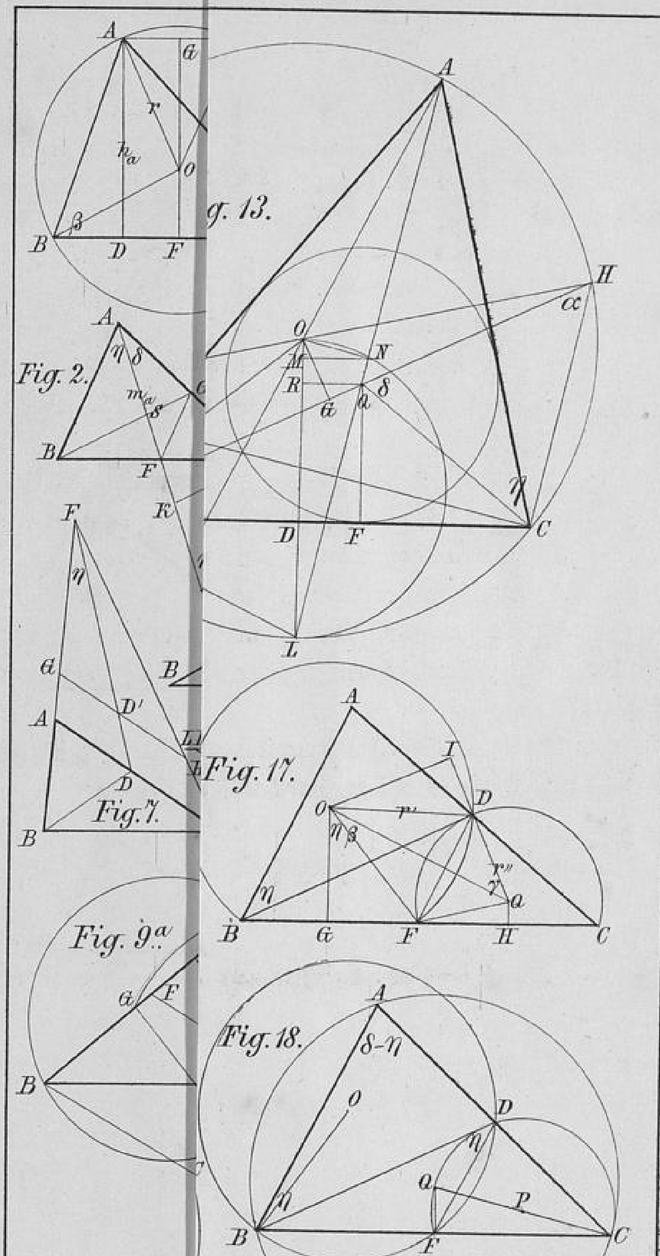
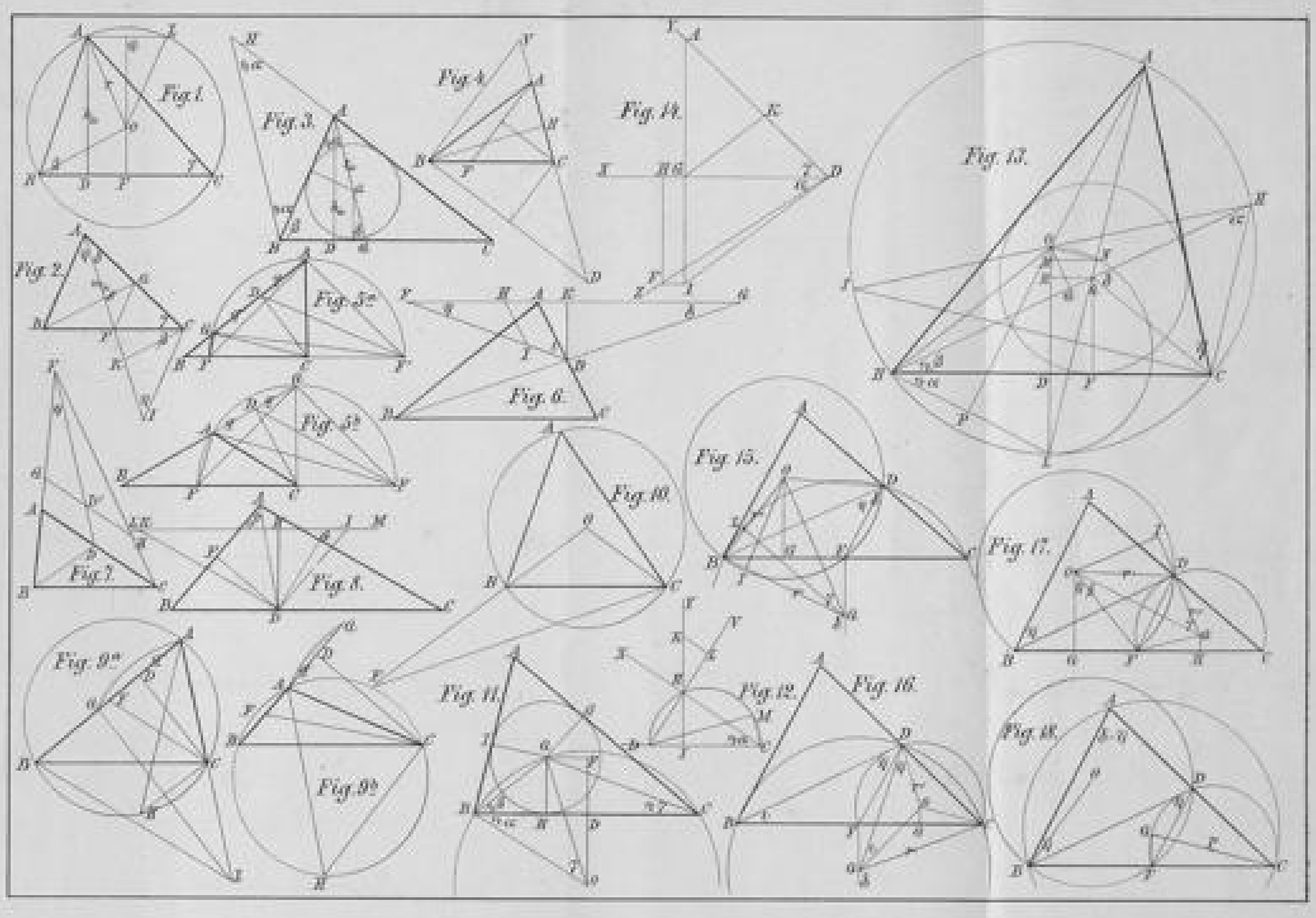


Fig. 2.
Fig. 7.
Fig. 9a
g. 13.
Fig. 17.
Fig. 18.

V.

Prüfungen. — Jahresschluß.

1. Die Schüler haben in den letzten Wochen schriftliche Arbeiten anzufertigen, welche die sieben wichtigsten Unterrichtsfächer zum Gegenstande haben. Sie gelten einerseits als Preisarbeiten, andererseits als schriftliche Schlußprüfung.
2. Mündliche Klassenprüfungen pro ascensu werden am 23., 24., 25. und 26. August abgehalten.
3. Am 28. begeht das Collegium mit der gewohnten kirchlichen Feier das Fest seines Patrons, des h. Augustinus. An demselben Tage wird von halb elf Uhr ab die öffentliche Prüfung Statt finden; Nachmittags, von 3 Uhr ab, die Schlußfeier und Entlassung der Abiturienten.
4. Die Ferien beginnen am 29. August, und dauern bis Mittwoch den 18. Oktober, an welchem Tage sich die Zöglinge vor 6 Uhr Abends in der Anstalt wieder einzufinden haben.
5. Die Prüfung für die zur Aufnahme gemeldeten Aspiranten wird am Donnerstag, dem 31. August, Morgens 8 Uhr, ihren Anfang nehmen.



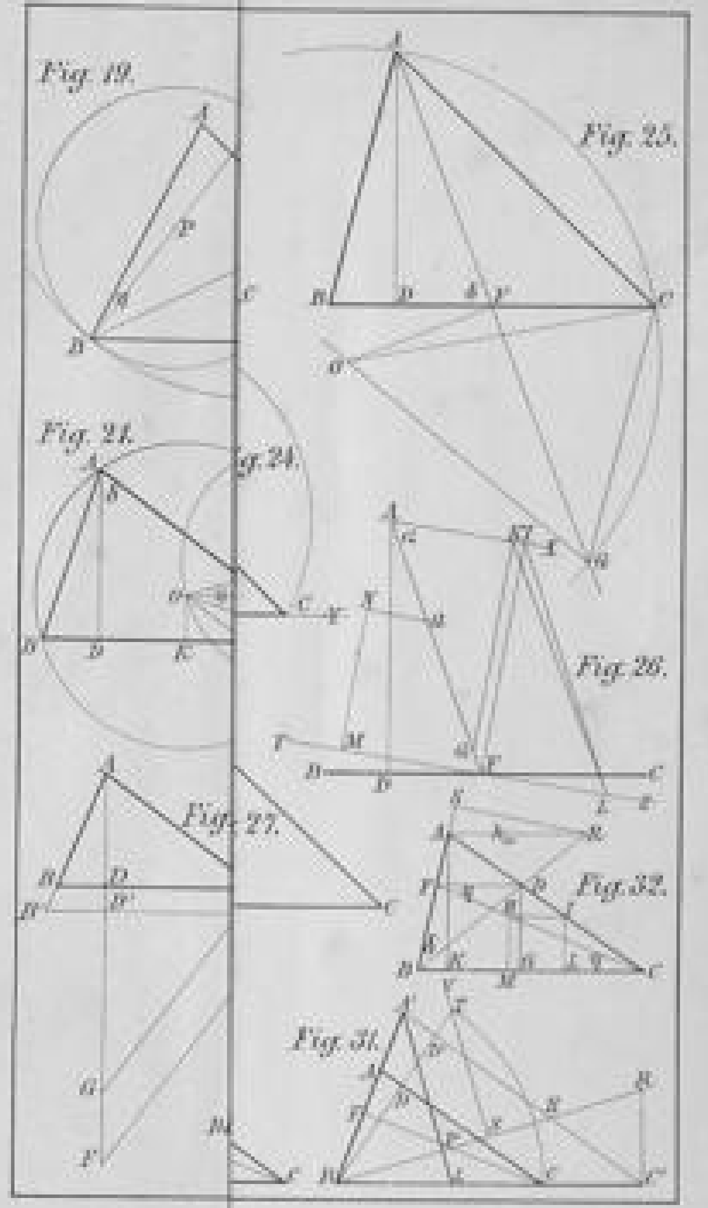


Fig. 19.
Fig. 21.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 32.
Fig. 31.

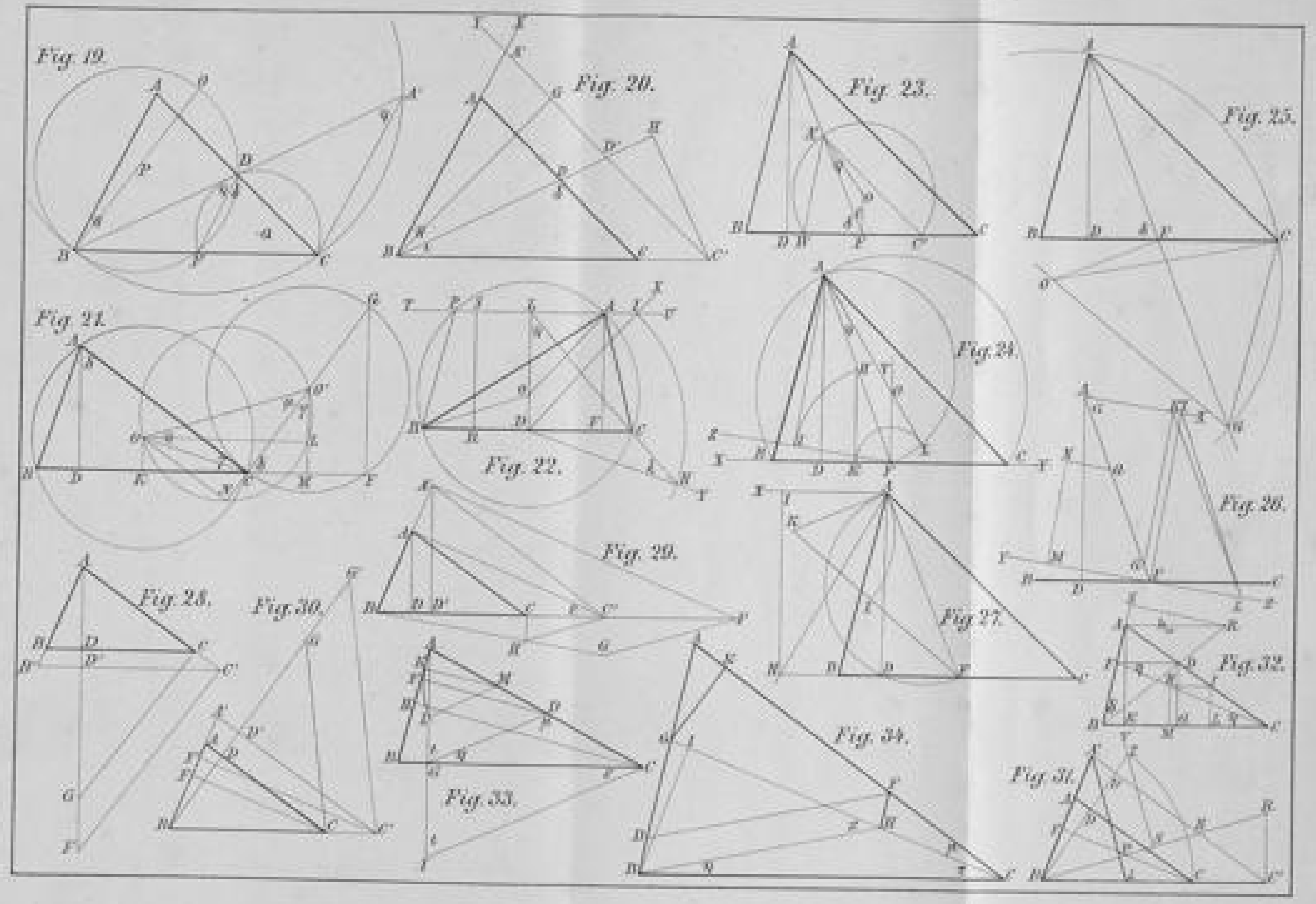


Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30. Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33. Fig. 34.