Einiges über die durch die Gleichung $y = \frac{\lambda}{3\gamma^3}(\gamma^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \beta$ dargestellte Curve

und den

durch Umdrehung derselben um eine Achse entstandenen Rotationskörper.

I. Entstehung und Gestalt der Curve.

Es seien δ Massen gegeben, m_1, m_2, m_3, ... m_δ, welche sich zur Zeit $t = o$ an δ bestimmten Stellen in einer Vertikal-Ebene in Ruhe befinden und welche durch gewichtlose starre Gerade unter einander verbunden sind. Auf m_1 wirke im Sinne der positiven y eine beschleunigende Kraft, welche der Zeit t proportional ist und in dem Augenblicke $t = 1$ die Intensität p_1 hat; im Sinne der positiven x wirke eine solche, welche sich ändert proportional dem Umgekehrten der Quadratwurzel aus der dritten Potenz von $1 - t^2$, wo t wie oben die Zeit bedeutet. Zur Zeit $t = o$ sei die Intensität der Kraft $= q_1$. Auf m_2, m_3 .... m_δ sind ganz in derselben Weise wirkend zwei beschleunigende Kräfte thätig, nur dass bei ihnen anstatt der Constanten p_1 und q_1 resp. die Constanten p_2 und q_2, p_3 und q_3, ... p_δ und q_δ auftreten.

Ausser diesen genannten Kräften sind keine weiter thätig.

Setzt man

$$\frac{m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 + \ldots + m_\delta q_\delta}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_\delta} = \gamma \text{ und}$$

$$\frac{m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + \ldots + m_\delta p_\delta}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_\delta} = 2 . \lambda,$$

so erhält man, wenn ξ und η die Coordienten des Schwerpunktes sind,

1) $$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\gamma}{(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ und}$$

2) $$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = 2 . \lambda . t.$$

Aus der Gleichung No. 1 findet man durch Integration, wenn v_ξ die Componente der Geschwindigkeit des Schwerpunkts längs der Achse der x ist,

3) $v_\xi = \frac{\gamma t}{\sqrt{1-t^2}}$. Die Integrationsconstante ist gleich Null, da für $t = o$ auch $v_\xi = o$ ist. Aus No. 3 folgt durch Integration:

$\xi = -\gamma\sqrt{1-t^2} + C_1$, wo C_1 die Integrationsconstante ist. Diese bestimmt sich durch die Bemerkung, dass für $t = o$ die Abscisse des Schwerpunkts des Systems:

$$\xi_1 = \frac{a_1\, m_1 + a_2\, m_2 + \ldots a_\delta \, . \, m_\delta}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_\delta} \text{ ist,}$$

indem wir zur Zeit $t = o$ die Coordinaten der Masse bezüglich $a_1\, b_1,\ a_2\, b_2,\ \ldots\ a_\delta\, b_\delta$ nennen. Daraus folgt, dass die Integrationsconstante $C_1 = \frac{a_1\, m_1 + a_2\, m_2, \ldots + a_\delta\, m_\delta}{m_1 + m_2 + \ldots + m_\delta} + \gamma$ ist. Bezeichnet man diese Constante mit α, so ist

4) $$\xi = -\gamma\sqrt{1-t^2} + \alpha \text{ oder } (\xi - \alpha)^2 = \gamma^2 - \gamma^2 t^2$$

und wenn man die Achse der y nach der positiven Seite der x hin um das Stück α verschiebt, und die dadurch entstandenen neuen ξ mit ε bezeichnet

$$\varepsilon^2 = \gamma^2 - \gamma^2 t^2 \text{ oder } t^2 = \frac{\gamma^2 - \varepsilon^2}{\gamma^2}, \text{ woraus folgt}$$

5) $$t = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon^2}.$$

Aus der Gleichung No. 2 erhält man, wenn v_η die Componente der Geschwindigkeit des Schwerpunkts längs der Achse der y ist,

6) $$v_\eta = \lambda t^2.$$

Die Integrationsconstante ist gleich Null, da zur Zeit $t = o$ auch $v_\eta = o$ ist.

Aus No. 6 folgt durch Integration $\eta = \frac{\lambda}{3} t^3 + C_2$, wo C_2 die Integrationsconstante bezeichnet. Diese bestimmt sich dadurch, dass analog dem Obigen zur Zeit $t = o$ die Ordinate des Schwerpunkts des Systems

$$\eta_1 = \frac{b_1 \, . \, m_1 + b_2\, m_2 + \ldots . + b_\delta\, m_\delta}{m_1 + m_2 + \ldots . + m_\delta} = C_2 \text{ ist,}$$

und man hat

7) $$\eta = \frac{\lambda}{3} t^3 + \frac{b_1 \, . \, m_1 + b_2\, m_2 + \ \ldots\ + b_\delta \, . \, m_\delta}{m_1 + m_2 + \ \ldots . \ + m_\delta},$$

oder, wenn man $C_2 = \beta$ setzt,

8) $$\eta = \frac{\lambda}{3} t^3 + \beta, \text{ woraus folgt}$$

9) $$t = \left\{\frac{3}{\lambda}(\eta - \beta)\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Aus No. 5 und 9 findet man

$$\frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon^2} = \left\{\frac{3}{\lambda}(\eta - \beta)\right\}^{\frac{1}{3}} \text{ oder,}$$

indem man noch η auflöst und für η und ξ der grösseren Geläufigkeit wegen y und x schreibt,

10) $$y = \frac{\lambda}{3\gamma^3}(\gamma^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \beta$$

als Gleichung der Bahn des Schwerpunkts des Systems.

Wir geben zunächst dadurch der Gleichung der Curve eine einfachere Form, dass wir die Achse der x um das Stück β parallel mit sich selbst nach der positiven Richtung der Achse der y hin verlegen. Dadurch erhalten wir die Gleichung

$$y = \frac{\lambda}{3\gamma^3}(\gamma^2 - x^2)^{\frac{3}{2}},$$

indem wir der bequemeren Rechnung wegen die neuen y auch nur mit y bezeichnen, da eine Verwechselung der beiden y nicht stattfinden kann.

Aus der Gleichung sieht man zuerst, dass die Curve gegen die Achse der x eine andere Gestalt hat als gegen die Achse der y, denn man kann x und y nicht gegen einander vertauschen ohne dadurch der Gleichung eine andere Form zu geben.

Setzt man dagegen $-y$ anstatt $+y$ und $-x$ anstatt $+x$, so behält die Gleichung ihre Form; die Curve liegt also symmetrisch zu beiden Seiten der Achse der x und symmetrisch zu beiden Seiten der Achse der y.

Giebt man der Gleichung folgende Form $(\gamma^2 - x^2)^3 = \frac{9\gamma^6}{\lambda^2} \cdot y^2$, so erhält man für $(\gamma^2 - x^2)$ drei Werthe, nämlich:

$(\gamma^2 - x^2)_1 = \left(\gamma^2 \sqrt[3]{\frac{9}{\lambda_2} y^2}\right)$, wo die Klammer rechts die einfache reelle dritte Wurzel bedeutet,

$$(\gamma^2 - x^2)_2 = \frac{-\left(\gamma^2 \sqrt[3]{\frac{9}{\lambda^2} y^2}\right) + \left(\gamma^2 \sqrt[3]{\frac{9}{\lambda^2} y^2}\right) \cdot \sqrt{-3}}{2},$$

$$(\gamma^2 - x^2)_3 = \frac{-\left(\gamma^2 \sqrt[3]{\frac{9}{\lambda^2} y^2}\right) - \left(\gamma^2 \sqrt[3]{\frac{9}{\lambda^2} y^2}\right)\sqrt{-3}}{2}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Grösse $\gamma^2 - x^2$ nur einen reellen Werth $= \left(\gamma^2 \sqrt[3]{\frac{9}{\lambda^2} y^2}\right)$ hat, daraus ergeben sich für x nur zwei reelle Werthe, nämlich

$$x_1 = +\gamma\left(\sqrt{1 - \frac{3^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}}}\right) \text{ und}$$

$$x_2 = -\gamma\left(\sqrt{1 - \frac{3^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}}}\right),$$ wo die Klammer den positiven Werth der Wurzel andeuten soll. Setzt man in diesem Ausdrucke $\frac{3^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}} < 1$, so ist für diesen Werth x reell;

für $\frac{3^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}} = 1$, oder $y = \pm \frac{\lambda}{3}$ ist $x = 0$. Die Curve durchschneidet also in der Entfernung $\frac{\lambda}{3}$ vom Coordinatenanfang nach der positiven Seite der y sowohl als nach der negativen die Achse der y. Für $\frac{3^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}} > 1$ ist x imaginär. Es ist x also nur reell innerhalb der Grenzen $y = +\frac{\lambda}{3}$ und $y = -\frac{\lambda}{3}$ und zwar ergeben sich für jedes y innerhalb dieser Grenzen zwei zugehörige absolut gleiche aber entgegengesetzte reelle Werthe von x. Die Curve hat also zu beiden Seiten der Achse der y einen Zweig, und zwar sind diese Zweige congruent und jeder derselben ist innerhalb der Grenzen $y = +\frac{\lambda}{3}$ und $y = -\frac{\lambda}{3}$ continuirlich, da zwischen diesen Werthen von y x stetig ist.

Bringen wir die Gleichung der Curve wieder auf ihre erste Form $y = \frac{\lambda}{3\gamma^3}(\gamma^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\lambda}{3\gamma^3}\sqrt{(\gamma^2 - x^2)^3}$, und bezeichnet $(\sqrt{(\gamma^2 - x^2)^3})$ den positiven Werth der Wurzel, so haben wir für y zwei Werthe:
$y_1 = +\frac{\lambda}{3\gamma^3}(\sqrt{(\gamma^2 - x^2)^3})$ und $y_2 = -\frac{\lambda}{3\gamma^3}(\sqrt{(\gamma^2 - x^2)^3})$.

Für $x > \gamma$ wird y imaginär, ebenso für $x < -\gamma$; für $x = +\gamma$ und $x = -\gamma$ wird $y = 0$, für $x = 0$ wird $y_1 = +\frac{\lambda}{3}$ und $y_2 = -\frac{\lambda}{3}$.

Es bleibt also y zwischen den Grenzen $x = +\gamma$ und $x = -\gamma$ reell, und zwar ergeben sich für jedes x innerhalb der Grenzen zwei zugehörige absolut gleiche aber entgegengesetzte Werthe von y. Die Curve hat also zu beiden Seiten der Achse der x je einen Zweig und zwar sind diese Zweige einander congruent und jeder von ihnen zwischen den Grenzen $x = +\gamma$ und $x = -\gamma$ continuirlich, da y zwischen diesen Grenzen stetig ist.

Fassen wir diese letzten Resultate zusammen, so ergiebt sich folgendes:

Die Curve ist eine continuirliche in sich zurücklaufende Linie, hat zu beiden Seiten der Achse der y je einen Zweig, von denen jeder dem anderen congruent ist, desgleichen zu beiden Seiten der Achse der x. Eine gerade Linie parallel der Achse der x in einer Entfernung, welche kleiner ist als $+\frac{\lambda}{3}$ schneidet die Curve nur an zwei Stellen, da für jedes y sich nur zwei reelle Werthe von x ergeben, die anderen Schnittpunkte sind imaginär. Eine gerade Linie parallel der Achse der y in einer Entfernung, welche kleiner als $+\gamma$ ist, schneidet die Curve auch nur an zwei Stellen, da für jedes x überhaupt nur zwei Werthe von y existiren. Da die Curve eine in sich zurücklaufende Linie ist und für x und y sich nur je zwei reelle zugehörige Werthe ergeben, schneidet auch jede andere beliebige durch die Curve hindurchgelegte Gerade die Curve an zwei Stellen.

Man kann auch sagen: die Curve besteht aus 4 congruenten Zweigen, die an ihren Endpunkten in einander übergehen und von denen je zwei symmetrisch einmal zu der Achse der x, dann zu der Achse der y liegen. Jeder von diesen 4 Zweigen liegt in einem der 4 durch die Coordinatenachsen in der Ebene gebildeten Quadranten.

Differenziren wir jetzt die Gleichung von y nach x, so ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda}{\gamma^3}\, x\, (\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gleich Null gesetzt giebt die Werthe von x an, für welche die Curve ein Maximum oder Minimum erreicht. Diese Werthe sind $x = o$, $x = +\gamma$, $x = -\gamma$.

Nehmen wir jetzt den zweiten Differentialquotienten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda\,(2x^2 - \gamma^2)}{\gamma^3\,(\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

so nimmt dieser für $x = o$ den Werth $= \mp \frac{\lambda}{\gamma^2}$ an, d. h. es ist für $x = o$, $y = + \frac{\lambda}{3}$ ein Maximum und für $x = o$, $y = - \frac{\lambda}{3}$ ein Minimum vorhanden. Setzen wir in den Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten $x = + \gamma$, so wird derselbe $= \infty$, ebenso alle folgenden Differentialquotienten. Daraus folgt, dass für diesen Punkt eine besondere Untersuchung nöthig ist; wir werden weiter unten darauf zurückkommen. Lösen wir jetzt die Gleichung der Curve in Bezug auf x auf, so erhalten wir:

$$x = \gamma \sqrt{1 - \frac{3^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}}}$$

diese nach y differenzirt giebt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\gamma}{3^{\frac{1}{3}}\, \lambda^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \frac{3^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}}{\lambda^{\frac{2}{3}}}}}.$$

Setzt man die rechte Seite gleich Null, so ergiebt sich $y = o$, für welchen Werth x imaginär wird. Der Punkt ist also nicht in dem geschlossenen Zuge der Curve und überhaupt reell nicht vorhanden. Ausser $y = o$ ergiebt sich noch $y = \infty \sqrt{-1}$, d. h. ein unmöglicher Werth. Es findet demnach für keinen Werth von y in der Richtung der Achse der x ein Maximum oder Minimum statt. Für $y = o$ wird das Differentialverhältniss $= \infty$; es ist folglich in den Punkten $(y = o)$ die Tangente der Achse der x parallel.

Für die Punkte $y = o$, $x = + \gamma$; $y = o$, $x = - \gamma$ wurde, wie wir oben sahen, das Differentialverhältniss

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda}{\gamma^3}\, x\, (\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

gleich Null, alle übrigen Differentialverhältnisse aber wurden unendlich. Hieraus folgt, dass jeder der beiden Punkten ein besonderer Punkt ist. Betrachten wir zunächst den Punkt $y = o$, $x = + \gamma$ und suchen für denselben den Krümmungsradius und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts, so verfahren wir, wenn ρ den Krümmungsradius, α_1 die Abscisse und β_1 die Ordinaten des Krümmungsmittelpunkts bedeutet, nach den bekannten Formeln

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\alpha_1 = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\beta_1 = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Für den betreffenden Punkt ist demnach

$$\rho = \frac{1+\frac{\lambda^2}{\gamma^6}\gamma^2(\gamma^2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\lambda\,(2\gamma^2-\gamma^2)}{\gamma^3(\gamma^2-\gamma^2)}} \text{ oder}$$

$\rho = 0$, ebenso ist

$\alpha_1 = 0$,

$\beta_1 = 0$, da das Differentialverhältniss der zweiten Ordnung unendlich gross wird. Dasselbe findet statt für den Punkt $x = -\gamma$, $y = 0$. Hieraus ersehen wir, dass in dem Punkte die Tangente mit der Achse der x zusammenfällt.

Dies kann in vier Fällen geschehen:

1. Es kann in jedem der Punkte der Raum im Sinne der x durch einen Bogen begrenzt werden; — das ist aber nicht möglich, da der Krümmungsradius gleich Null ist.

2. Es kann die Abscisse unendlich gross sein und die Curve die Achse der x als Asymptote haben; — das ist aber auch nicht möglich, da für $x = \infty$ y imaginär wird.

3. Es kann ein Beugungspunkt stattfinden; — das ist aber auch nicht möglich, weil sonst das Differentialverhältniss der zweiten Ordnung gleich Null sein müsste.

4. Es bleibt nur übrig, dass in jedem der Punkte ein Rückkehrpunkt, eine Spitze, ist.

Suchen wir nun die Grössen ρ, α_1, β_1 für die Punkte $x = 0$, $y = +\frac{\lambda}{3}$ und $x = 0$, $y = -\frac{\lambda}{3}$ zu bestimmen, so erhalten wir für den Punkt $x = 0$, $y = +\frac{\lambda}{3}$

$$\rho = \frac{\left\{1+\frac{\lambda^2}{\gamma^6}x^2\,(\gamma^2-x^2)\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\lambda\,(2x^2-\gamma^2)}{\gamma^3\,(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}} \text{ oder}$$

$\rho = \frac{\gamma^2}{\lambda}$ als absolute Länge des Krümmungsradius. Ferner ist

$$\alpha_1 = 0 \text{ und}$$

$$\beta_1 = \frac{\lambda^2-3\gamma^2}{3\lambda}.$$

Für den Punkt $x = o$, $y = -\frac{\lambda}{3}$ erhält man

$$\rho = \frac{\gamma^2}{\lambda},$$

$$\alpha_1 = o,$$

$$\beta_1 = \frac{-\lambda^2 + 3\gamma^2}{3\lambda}.$$

Nehmen wir nun das Differentialverhältniss der zweiten Ordnung

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda(2x^2 - \gamma^2)}{\gamma^3(\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ und setzen dies gleich Null, so erhält man

$x = \frac{+\gamma}{\sqrt{2}}$ und $x = \frac{-\gamma}{\sqrt{2}}$; d. h. für jeden der vier Punkte:

$$x = +\frac{\gamma}{\sqrt{2}},\ y = +\frac{\lambda}{6\sqrt{2}} \qquad x = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}},\ y = +\frac{\lambda}{6\sqrt{2}}$$

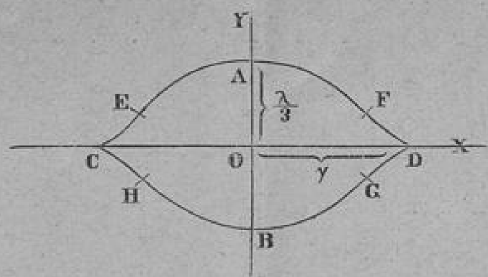
$$x = +\frac{\gamma}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{\lambda}{6\sqrt{2}} \qquad x = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{\lambda}{6\sqrt{2}}$$

findet in der Curve ein Wendepunkt statt, es muss also in den Punkten die Concavität in Convexität übergehen und umgekehrt.

Untersuchen wir nun die Curve in Betreff ihrer Concavität und Convexität.

Das Differentialverhältniss der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda\ (2x^2 - \gamma^2)}{\gamma^3\ (\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ bleibt für den oberen Zug der Curve, für welchen $\sqrt{\gamma^2 - x^2}$ positiv ist, negativ, so lange x zwischen den Grenzen $-\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ uud $+\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ bleibt. Zwischen diesen Grenzen wendet der obere Zug der Curve also seine concave Seite nach unten, nach der Achse der x, zu. Für den unteren Zug der Curve, für welchen $\sqrt{\gamma^2 - x^2}$ negativ ist, bleibt das Differentialverhältniss der zweiten Ordnung positiv zwischen den Grenzen $x = +\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ und $x = \frac{-\gamma}{\sqrt{2}}$. Zwischen diesen Grenzen wendet also der untere Zug der Curve seine concave Seite nach oben, nach der Achse der x, zu. Wird $x < -\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ oder $> +\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$, so findet das Umgekehrte statt. Der obere Zug der Curve wendet zwischen den Grenzen $x = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ und $x = -\gamma$ und zwischen den Grenzen $x = +\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ und $x = +\gamma$ seine convexe Seite nach unten, nach der Achse der x, zu. Der untere Zug der Curve wendet zwischen denselben Grenzen seine convexe Seite nach oben, nach der Achse der x, zu.

Aus allem diesen ergiebt sich die Gestalt der Curve in der Weise, wie sie in nachstehender Figur dargestellt ist.



In A $\left(x = o,\ y = \frac{\lambda}{3}\right)$ ist ein Maximum, in B $\left(x = o,\ y = -\frac{\lambda}{3}\right)$ ein Minimum, in C ($x = -\gamma$, $y = o$) und D ($x = +\gamma$, $y = o$) sind Rückkehrpunkte, die Curve geht in den Punkten also in Spitzen aus, und die Achse der x ist in ihnen Tangente.

$$\text{In E}\left(x = \frac{-\gamma}{\sqrt{2}},\ y = \frac{+\lambda}{6\sqrt{2}}\right),\ \text{F}\left(x = \frac{+\gamma}{\sqrt{2}},\ y = \frac{+\lambda}{6\sqrt{2}}\right),$$

$$\text{G}\left(x = \frac{+\gamma}{\sqrt{2}},\ y = \frac{-\lambda}{6\sqrt{2}}\right),\ \text{H}\left(x = \frac{-\gamma}{\sqrt{2}},\ y = \frac{-\lambda}{6\sqrt{2}}\right)$$

sind Wendepunkte. Das Curvenstück EAF wendet seine concave Seite nach unten, nach der Achse der x, zu, die Curvenstücke CE und DF wenden ihre convexe Seite nach unten, nach der Achse der x, zu. Das Curvenstück HBG wendet seine concave Seite nach oben, nach der Achse der x, zu, die Curvenstücke CH und DG wenden ihre convexe Seite nach oben, nach der Achse der x, zu.

Setzen wir noch die Werthe der Coordinaten der Wendepunkte in das Differentialverhältniss der ersten Ordnung ein, zuerst die des Punktes E $\left(x = \frac{-\gamma}{\sqrt{2}},\ y = \frac{+\lambda}{6\sqrt{2}}\right)$ so ergiebt sich:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda}{\gamma^3} x \left(\sqrt{\gamma^2 - x^2}\right)$, wo die Klammer den positiven Werth der Wurzel bezeichnen soll, und man erhält: $\frac{dy}{dx} = +\frac{\gamma . \lambda}{4}$, oder wenn τ den Winkel bezeichnet, den die geometrische Tangente in dem Punkte E mit der Achse der x einschliesst,

$$\text{tg } \tau = \frac{+\gamma . \lambda}{4} \text{ und dem entsprechend}$$

$$\text{für Punkt F tg } \tau_1 = \frac{-\gamma . \lambda}{4} \text{ und}$$

$$\text{für Punkt G tg } \tau_2 = \frac{+\gamma\lambda}{4} \text{ und}$$

$$\text{für Punkt H tg } \tau_3 = -\frac{\gamma . \lambda}{4}.$$

II. Rectification der Curve.

Zu Grunde legen wir die Form der Gleichung $y = \frac{\lambda}{3\gamma^3} (\gamma^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ und wollen den Curvenzweig von $x = o$, $y = + \frac{\lambda}{3}$ bis $x = + \gamma$, $y = o$ rectificiren. Nennen wir die gesuchte Länge L, so ist

$$L = \int_{s_0}^{s} ds = \int_{o}^{+\gamma} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{o}^{+\gamma} \sqrt{- \frac{\lambda^2}{\gamma^6} x^4 + \frac{\lambda^2}{\gamma^4} x^2 + 1}\, .\, dx$$

$$L = \frac{\lambda}{\gamma^3} \int_{o}^{+\gamma} \sqrt{- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}}\, .\, dx = \frac{\lambda}{\gamma^3} \int_{o}^{+\gamma} \frac{- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}}{\sqrt{- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}}}\, dx, \text{ oder}$$

$$L = - \frac{\lambda}{\gamma^3} \int_{o}^{+\gamma} \frac{x^4\, dx}{\sqrt{- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}}} + \frac{\lambda}{\gamma} \int_{o}^{\gamma} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}}} + \frac{\gamma^3}{\lambda} \int_{o}^{+\gamma} \frac{dx}{\sqrt{- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}}}.$$

Die drei Integrale auf der rechten Seite sind elliptisch und enthalten alle den Ausdruck $\sqrt{- x^4 + y^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}}$, auf dessen Umformung es bei allen dreien ankommt.

Nennen wir die drei Integrale der Reihe nach J_1, J_2 und J_3, so ist

$$L = - \frac{\lambda}{\gamma^3} J_1 + \frac{\lambda}{\gamma} J_2 + \frac{\gamma^3}{\lambda} J_3.$$

Setzt man nun $\sqrt{- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}} = \sqrt{(x^2 + r)\,(r_1 - x^2)}$, so erhält man $- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2}$ $= - x^4 + (r_1 - r)\, x^2 + r\, .\, r_1$, dann ist $r_1 - r = \gamma^2$ und $r\, .\, r_1 = \frac{\gamma^6}{\lambda^2}$, oder

$$r_1 = \frac{+ \gamma^2 \lambda + \gamma^2 \sqrt{\lambda^2 + 4 \gamma^2}}{2\, .\, \lambda} \text{ und}$$

$$r = \frac{- \gamma^2 \lambda + \gamma^2 \sqrt{\lambda^2 + 4 \gamma^2}}{2 \lambda}.$$

Setzt man hier $r = n^2$ und $r_1 = n_1^{\,2}$, so ist $- x^4 + \gamma^2 x^2 + \frac{\gamma^6}{\lambda^2} = (x^2 + n^2)\,(n_1^{\,2} - x^2)$, wo

$$n = \gamma \sqrt{\frac{- \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4 \gamma^2}}{2 \lambda}} \text{ und}$$

$$n_1 = \gamma \sqrt{\frac{+ \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4 \gamma^2}}{2 \lambda}} \text{ ist.}$$

Setzt man $\frac{n_1}{\sqrt{n^2 + n_1^{\,2}}} = k$ und $x = n_1 \sqrt{1 - z^2}$, wo z eine neue Variabele bedeutet, so sieht man, dass für $x = o$ $z = + 1$ oder $= - 1$ wird; für $x = + \gamma$ dagegen wird $z = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4 \gamma^2} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4 \gamma^2} + \lambda}}$.

Da nun nach Abschnitt I $\lambda = \frac{m_1 \, p_1 + m_2 \, p_2 + \ldots . + m_\delta \, p_\delta}{2\,(m_1 + m_2 + \ldots . + m_\delta)}$ ist, so folgt, dass λ nur positiv sein kann, weil m_1 m_2 etc. Massen von Körpern und p_1 p_2 etc. Kräfte-Intensitäten sind, die niemals negativ und ebenso wenig imaginär sein können. Dasselbe gilt von γ. Ebenso wenig kann λ oder γ gleich Null sein. Daraus folgt, dass $\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2}$ stets reell und der absolute Werth der Wurzel grösser ist als λ. Nehmen wir nun die Wurzel negativ, so kann z zwar nie imaginär werden, wird aber grösser als $+ 1$ oder kleiner als $- 1$, je nachdem $\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} + \lambda}}$ positiv oder negativ genommen wird. Wegen der eben entwickelten Eigenschaften von λ und γ wird $n_1 = \gamma \sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2}}{2\lambda}}$ imaginär, wenn $\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2}$ negativ ist. Es wird also für den negativen Werth von $\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2}$ z grösser als $+ 1$ oder kleiner als $- 1$; wir können von z aber nur solche Werthe gebrauchen, welche zwischen den Grenzen $- 1$ und $+ 1$ liegen, da wir später in der Entwickelung z gleich dem Sinus eines Winkels setzen werden: folglich können wir die Wurzel $\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2}$ nicht negativ nehmen. Nehmen wir sie nun positiv, so wird sowohl n_1 als auch n reell, $z = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} + \lambda}}$ stets grösser als $- 1$ oder kleiner als $+ 1$, je nachdem die Wurzel, welcher z gleich ist, negativ oder positiv genommen wird. Derselben Bedingung genügt auf alle Fälle z für $x = o$, also nehmen wir $\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2}$ positiv. Dann müssen wir, da $x = n_1 \sqrt{1 - z^2}$ zwischen den Grenzen o und $+ \gamma$ niemals negativ wird, die beiden Wurzeln $\sqrt{1 - z^2}$ und $n_1 = \gamma \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} + \lambda}{2\lambda}}$ stets mit gleichen Vorzeichen versehen. Da es für die Entwickelung gleichgültig ist, welches Vorzeichen wir ihnen geben, so wählen wir das positive. Dasselbe geschieht aus denselben Gründen mit den beiden Wurzeln $n = \gamma \sqrt{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2}}{2\lambda}}$ und $\sqrt{n^2 + n_1^2}$, welche beide, wie leicht zu sehen und schon oben von n gesagt wurde, niemals imaginär werden. Wir nehmen also alle genannten Wurzeln positiv.

Es war also $\frac{n_1}{\sqrt{n^2 + n_1^2}} = \varkappa$ und $x = n_1 \sqrt{1 - z^2}$, dann hat man, n durch n_1 und $\varkappa$ ausgedrückt, $(x^2 + n^2)(n_1^2 - x^2) = (n_1^2 - n_1^2 z^2 + \frac{n_1^2}{\varkappa^2} - n_1^2)(n_1^2 - n_1^2 + n_1^2 z^2) = \left(\frac{n_1^2}{\varkappa^2} - n_1^2 z^2\right) . n_1^2 z^2$.

Es ist nun $dx = - \frac{n_1 \, dz}{\sqrt{1 - z^2}}$. Daraus folgt

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 + n^2)(n_1^2 - x^2)}} = - \frac{n_1 \, z \, dz}{n_1 \, z \sqrt{\left(\frac{n_1^2}{\varkappa_2} - n_1^2 z^2\right)(1 - z^2)}} = - \frac{\varkappa \, dz}{n_1 \sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}$$

$$= - \frac{dz}{\sqrt{n^2 + n_1} \sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

also ist

$$\int_0^{\gamma}\frac{dx}{\sqrt{-x^4+\gamma^2x^2+\frac{\gamma^6}{\lambda^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{n^2+n_1^2}}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}}.$$

Setzt man hier $z = \sin\varphi$, was geschehen kann, da z nach unseren obigen Erläuterungen sich stets zwischen den Grenzen -1 und $+1$ hält, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\gamma}\frac{dx}{\sqrt{-x^4+\gamma^2x^2+\frac{\gamma^6}{\lambda^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{n^2+n_1^2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$ wo $\varkappa^2$, da $\varkappa=\frac{n_1}{\sqrt{n^2+n_1^2}}$ war, ein ächter Bruch ist.

Für $x = o$ ist $z = 1$, also $\varphi=\frac{\pi}{2}$, für $x=\gamma$ ist $z=\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n_1}$, also $\varphi=\arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n_1}\right)$.

Demnach ist

$$\int_0^{+\gamma}\frac{dx}{\sqrt{-x^4+\gamma^2x^2+\frac{\gamma^6}{\lambda^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{n^2+n_1^2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n_1}\right)}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$ setzt man $\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}=\varDelta\varphi$, so ist das

Integral $=-\frac{1}{\sqrt{n^2+n_1^2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n_1}\right)}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$, oder wenn man $\arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n_1}\right)$, welche Grösse stets einen möglichen Bogen giebt, da $n_1>\gamma$ ist, gleich $\tau.\pi$ setzt und $\frac{1}{\sqrt{n^2+n_1^2}}=\rho$, so erhält man

$$=-\rho\int_{\frac{\pi}{2}}^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}=-\rho\int_{\frac{\pi}{2}}^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}-\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}=-\rho\int_0^{\tau\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}+\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Es ergiebt sich nun aber für $z = 1$ nicht nur der Werth $\varphi=\frac{\pi}{2}$, sondern auch $\varphi=\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ etc. und ebenso für $z=\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n^1}$ nicht nur $\varphi=\tau.\pi$, sondern auch $\varphi=(\tau+2)\pi$, $(\tau+4)\pi$ etc.

Ferner ist für $x = o$ z auch noch $= -1$ und daher $\varphi=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{11}{2}\pi$ etc., und für $x=\gamma$ $z=-\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n_1}$ und daher φ nicht nur gleich $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{n_1^2-\gamma^2}}{n_1}\right)=\sigma.\pi$, sondern auch $=(\sigma+2)\pi$, $=(\sigma+4)\pi$, $(\sigma+6)\pi$ etc.

Die Erörterung dieser Fälle lassen wir zunächst bei Seite und führen die Entwickelung für die Werthe $\varphi=\frac{\pi}{2}$ und $=\tau.\pi$ weiter. Wir hatten also gefunden, dass

$\int_0^\gamma \frac{dx}{\sqrt{-x^4+\gamma^2 x^2+\frac{\gamma^6}{\lambda^2}}} = -\rho\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\Delta}+\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ war. Es war nun $z = \sin\varphi$, also $x = n_1 \cdot \cos\varphi$, demnach $x^4 = n_1{}^4 \cos^4\varphi = n_1{}^4 (1 - 2 \cdot \sin^2\varphi + \sin^4\varphi)$ und $x^2 = n_1{}^2 - n_1{}^2 \sin^2\varphi$ und folglich

$$J_1 = -\rho\int_0^{\tau.\pi}\frac{n_1{}^4 - 2n_1{}^4\sin^2\varphi + n_1{}^4\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi + \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{n_1{}^4 - 2n_1{}^4\sin^2\varphi + n_1{}^4\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi,$$

$$J_2 = -\rho\int_0^{\tau.\pi}\frac{n_1{}^2 - n_1{}^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi + \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{n_1{}^2 - n_1{}^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi \text{ und}$$

$$J_3 = -\rho\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \text{ und demnach}$$

$$L = +\frac{\lambda}{\gamma^3}\cdot\rho\int_0^{\tau.\pi}\frac{n_1{}^4 - 2n_1{}^4\sin^2\varphi + n_1{}^4\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \frac{\lambda}{\gamma^3}\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{n_1{}^4 - 2n_1{}^4\sin^2\varphi + n_1{}^4\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$$

$$-\frac{\lambda}{\gamma}\rho\int_0^{\tau.\pi}\frac{n_1{}^2 - n_1{}^2\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi + \frac{\lambda}{\gamma}\cdot\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{n_1{}^2 - n_1{}^2\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \frac{\gamma^3\rho}{\lambda}\int_0\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\gamma^3\rho}{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \text{ oder}$$

$$L = \left\{\frac{\lambda}{\gamma^3}\rho n_1{}^4 - \frac{\lambda}{\gamma}\rho\,.\,n_1{}^2 - \frac{\gamma^3}{\lambda}\rho\right\}\cdot\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \left\{\frac{2\,.\,\lambda\rho n_1{}^4}{\gamma^3} - \frac{\lambda\rho n_1{}^2}{\gamma}\right\}\cdot\int_0^{\tau.\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$$

$$+\frac{\lambda\rho n_1{}^4}{\gamma^3}\int_0^{\tau.\pi}\frac{\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \left\{\frac{\lambda}{\gamma^3}\rho n_1{}^4 - \frac{\lambda}{\gamma}\rho n_1{}^2 - \frac{\gamma^3}{\lambda}\rho\right\}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$+\left\{\frac{2\lambda\rho n_1{}^4}{\gamma^3} - \frac{\lambda\rho n_1{}^2}{\gamma}\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \frac{\lambda\rho n_1{}^4}{\gamma^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi, \text{ oder, wenn}$$

$\frac{\lambda}{\gamma^3}\rho n_1{}^4 - \frac{\lambda}{\gamma}\rho n_1{}^2 - \frac{\gamma^3}{\lambda}\rho = A_1$, $\frac{2\lambda\rho n_1{}^4}{\gamma^3} - \frac{\lambda\rho n_1{}^2}{\gamma} = A_2$ und $\frac{\lambda\rho n_1{}^4}{\gamma^3} = A_3$ gesetzt wird,

$$L = A_1\cdot\left\{\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right\} - A_2\left\{\int_0^{\tau.\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi\right\} + A_3\left\{\int_0^{\tau.\pi}\frac{\sin^4\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\varphi}{\Delta\rho}\,d\varphi\right\}.$$

Um das Integral $\int \frac{\sin^4 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi$ zu entwickeln, wenden wir folgende Reductionsformel an:

Bedeutet V_δ das Integral $\int\limits_0^\varphi \frac{(m + \sin^2 \varphi)^\delta}{\varDelta\varphi} d\varphi$ so ist $(m + \sin^2 \varphi)^\delta \sin \varphi . \cos \varphi \varDelta \varphi = - 2 . \delta A V_{\delta-1}$ $+ (2\delta + 1) . B . V_\delta - (2\delta + 2) . C V_{\delta+1} + (2\delta + 3) \varkappa^2 V_{\delta+1}$, wo $A = m (1 + m) (1 + \varkappa^2 m)$,

$B = 1 + 2m + 2\varkappa^2 m + 3 \varkappa^2 m^2$,

$C = 1 + \varkappa^2 + 3 \varkappa^2 m$ und $\varkappa$ der Modulus ist.

Setzt man $m = o$ und $\delta = o$, so ist $A = o$, $B = 1$, $C = 1 + \varkappa^2$ und $\sin \varphi . \cos \varphi \varDelta\varphi =$ $V_o - 2 (1 + \varkappa^2) V_1 + 3 \varkappa^2 V_2$, oder $\sin \varphi . \cos \varphi . \varDelta\varphi = \int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - 2 (1 + \varkappa^2) \int \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi + 3\varkappa^2 \int \frac{\sin^4 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi$, woraus folgt:

$$3 \varkappa^3 \int \frac{\sin^4 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi = \sin \varphi . \cos\varphi \varDelta . \varphi - \int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + 2 (1 + \varkappa^2) \int \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi$$

$$\text{und} \int \frac{\sin^4 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi = \frac{\sin \varphi . \cos \varphi \varDelta\varphi}{3 \varkappa^2} - \frac{1}{3\varkappa^2} \int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{2 (1 + \varkappa^2)}{3 \varkappa^2} \int \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi$$

$$\text{und} \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{\sin^4 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi = \frac{\sin 2 . \tau . \pi \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \tau . \pi}}{6 \varkappa^2} - \frac{1}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$+ \frac{2}{3\varkappa^2} \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi + \frac{2}{3} \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi$$

$$\text{und} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi = - \frac{1}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{2}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi + \frac{2}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi.$$

Daraus folgt, wenn man diesen Werth in die Gleichung für L einsetzt:

$$L = A_1 \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - A_1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - A_2 \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi + A_2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi$$

$$- \frac{A_3}{3\varkappa^2} \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{A_3}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{2 . A_3}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi - \frac{2 A_3}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi$$

$$+ \frac{2 A_3}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi - \frac{2 A_3}{3 \varkappa^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi + A_3 \frac{\sin 2 . \tau . \pi \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \tau . \pi}}{6 \varkappa^2}, \text{ oder}$$

wenn man

$$A_1 - \frac{A_3}{3\varkappa_2} = B_1 \qquad \frac{4 A_3}{3\varkappa^2} - A_2 = B_2$$

und $A_3.\frac{\sin 2.\tau.\pi.\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau\pi}}{6\varkappa^2} = B_3$ setzt,

$$L = B_1\left[\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}\right] + B_2\left[\int_0^{\tau.\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\varDelta\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\varDelta\varphi}\,d\varphi\right] + B_3.$$

Nun ist

$$\int\frac{\sin^2\varphi}{\varDelta\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\varkappa^2}\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{1}{\varkappa^2}\int\varDelta\varphi\,.\,d\varphi;$$ dann ist

$$L = B_1\left[\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}\right] + \frac{B_2}{\varkappa^2}\left[\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int_0^{\tau.\pi}\varDelta\varphi\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varDelta\varphi\,d\varphi\right] + B_3$$

$$= \left(B_1 + \frac{B_2}{\varkappa^2}\right)\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \left(B_1 + \frac{B_2}{\varkappa^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{B_2}{\varkappa^2}\int_0^{\tau.\pi}\varDelta\varphi\,d\varphi + \frac{B_2}{\varkappa^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varDelta\varphi\,d\varphi + B_3,$$ oder endlich

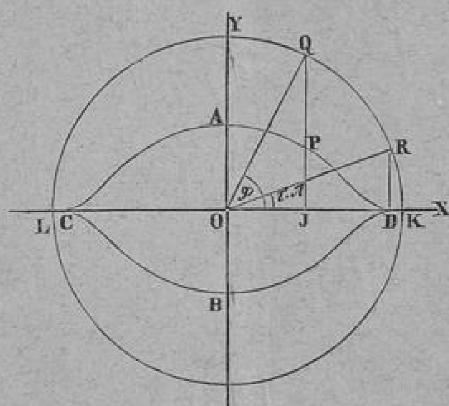
$$L = \left(B_1 + \frac{B_2}{\varkappa^2}\right)\left[\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}\right] - \frac{B_2}{\varkappa^2}\left[\int_0^{\tau.\pi}\varDelta\varphi\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varDelta\varphi\,d\varphi\right] + B_3.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite enthält nur elliptische Integrale erster und zweiter Art, welche vermöge der Landen'schen Substitutionen berechnet werden können.

Um die geometrische Bedeutung des Winkels φ zu finden, benutzt man die Gleichung

$$x = \gamma\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} + \lambda}{2\lambda}}.\sqrt{1-z^2}, \text{ oder } x = \gamma\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} + \lambda}{2\lambda}}.\cos\varphi,$$

aus welcher sich dieselbe unmittelbar ergiebt.



Denn wenn man um den Mittelpunkt des Coordinatensystems einen Kreis beschreibt, dessen Radius $= \gamma \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} + \lambda}{2\lambda}}$ ist, und verlängert die Ordinate eines beliebigen Punktes P der Curve, bis diese Verlängerung den Kreis in Q schneidet, so ist $\angle$ Q O K $= \varphi$. Der Radius des Kreises ist grösser als γ, denn $\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma^2} + \lambda}{2\lambda}}$ ist ein unächter Bruch.

Wir haben oben bemerkt, dass z für x = o ausser dem Werthe + 1 auch noch den Werth — 1 hat, und dazu gehörig für $x = +\gamma$ den Werth $z = -\frac{\sqrt{n_1^2 - \gamma^2}}{n_1}$. Betrachten wir jetzt noch kurz die Integrale, die zu diesen Werthen gehören.

Für z = — 1 ergiebt sich, da $z = \sin\varphi$ ist, $\sin\varphi = -1$, und demnach ein dazu gehöriger Werth von φ $\varphi = \frac{3}{2}\pi$. Dann haben wir es zu thun mit dem Integrale $\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$. Dieses ist gleich $\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int\limits_{\pi}^{\pi + \frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$. Für das erste Integral rechts finden wir $\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2 . \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, da $\Delta\varphi$ für die Grenzen o bis $\frac{1}{2}\pi$ denselben Werth hat wie für die Grenzen $\frac{1}{2}\pi$ bis π. Das zweite Integral rechts kommt durch Substitution von $\varphi = \pi + \psi$ auf die Normalform

$$\int\limits_{\pi}^{\pi + \frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}. \quad \text{Demnach ist} \quad \int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Für $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{n_1^2 - \gamma^2}}{n_1}$ ergiebt sich $\varphi = (\tau + 1)\pi$, wo τ ein ächter Bruch ist, wenn für $\sin\varphi = +\frac{\sqrt{n_1^2 - \gamma^2}}{n_1}$ $\varphi = \tau . \pi$ war. Dann haben wir das Integral

$$\int\limits_0^{\pi + \tau\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int\limits_{\pi}^{\pi + \tau . \pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Für das erste Integral rechts finden wir wieder $\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ und für das zweite Integral rechts, wenn wir $\varphi = \pi + \psi$ setzen, $\int\limits_{\pi}^{\pi + \tau . \pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int\limits_0^{\tau\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}$. Dann ergiebt sich

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int\limits_0^{(\tau + 1)\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int\limits_0^{\tau . \pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} \quad \text{oder}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_0^{(\tau+1)\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Nun ist $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\Delta\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.\left\{1-\frac{1}{2}\varkappa^2\left(1+\frac{1}{2}\varkappa_1+\frac{1}{4}\varkappa_1\varkappa_2+\frac{1}{8}\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3+\ldots\right)\right\}$

und $\int_0^{(\tau+1)\pi}\Delta\varphi\,d\varphi=\int_0^{(\tau+1)\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.\left\{1-\frac{1}{2}\varkappa^2\left(1+\frac{1}{2}\varkappa_1+\frac{1}{4}\varkappa_1\varkappa_2+\frac{1}{8}\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3+\ldots\right)\right\}$

$$+\varkappa\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{4}\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\sin\varphi_2+\frac{1}{8}\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3}\sin\varphi_3+\ldots\right\},$$

wo $\varphi_1\ldots$ nach den Formeln $\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi)=\sqrt{1-\varkappa_2}\operatorname{tg}\varphi$

$\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\sqrt{1-\varkappa_1{}^2}\operatorname{tg}\varphi_1$

. . . .

berechnet sind.

Aus diesem Grunde fällt auch in dem Ausdruck rechter Hand für das Integral $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\Delta\varphi\,d\varphi$ die Reihe $\varkappa\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{4}\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\sin\varphi_2+\ldots\right\}$ weg, da für $\varphi=\frac{3}{2}\pi$ gemäss den eben angegebenen Formeln $\varphi_1=2\pi$, $\varphi_2=4\pi$ etc. wird und demnach die sämmtlichen in der Klammer vorkommenden Sinus gleich Null sind.

Demzufolge ist vermöge des Vorhergehenden

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\Delta\varphi\,d\varphi-\int_0^{(\tau+1)\pi}\Delta\varphi\,d\varphi=\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}\right\}\left\{1-\frac{1}{2}\varkappa^2\left(1+\frac{1}{2}\varkappa_1+\frac{1}{4}\varkappa_1\varkappa_2+\ldots\right)\right\}$$
$$-\varkappa\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{4}\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\sin\varphi_2+\ldots\right\}.$$

Da nun die hier vorkommenden $\varphi_1, \varphi_2 \ldots.$ hervorgegangen sind aus den Formeln $\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi)=\sqrt{1-\varkappa_2}\operatorname{tg}\varphi$ u. s. w. und $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi+\pi)$ ist, so sind, da die hier vorkommenden φ um π grösser sind, als die in unserer ersten Entwicklung vorkommenden, die φ_1, φ_2 u. s. w. dieselben wie die in der ersten Entwicklung vorkommenden, so dass also auch diese Klammern, da $\varkappa$ dasselbe hier ist wie dort, denselben Werth haben.

Wenn wir nun aus unseren jetzt vorliegenden Integralen, den nunmehrigen Werth von L, der Länge des Curvenquadranten, bilden, so erhalten wir

$$L=\left(B_1+\frac{B_2}{\varkappa^2}\right)\left\{\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}\right\}-\frac{B_2}{\varkappa^2}\left[\left\{\int_0^{\tau.\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}\right\}\left\{1-\frac{1}{2}\varkappa^2\left(1+\frac{1}{2}\varkappa_1\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{4}\varkappa_1\varkappa_2+\frac{1}{8}\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3+\ldots\right)\right\}+\varkappa\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{4}\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\sin\varphi_2+\ldots\right\}\right]$$

$+ A_3 \frac{\sin 2(\tau+1)\pi(\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2(\tau+1)\varkappa}}{6\varkappa^2}$, wo die Constanten B_1, B_2, $\varkappa$ und A_3 dieselben sind wie vorher. Ebenso ist die Grösse $\frac{\sin 2(\tau+1)\pi . \sqrt{1-\varkappa^2 . \sin^2(\tau+1)\pi}}{6\varkappa^2}$ gleich der in der ersten Entwicklung correspondirenden Grösse $\frac{\sin 2\tau . \pi \sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 \tau\pi}}{6\varkappa^2}$, da $\sin 2(\tau+1)\pi = \sin 2\tau\pi$ und $\sin(\tau+1)\pi = -\sin\tau . \pi$, also $\sin^2(\tau+1)\pi = \sin^2\tau\pi$ ist.

Demnach sind alle Glieder dieses letzten L, nämlich

1. die Constanten A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 und $\varkappa$,

2. die Differenz $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{(\tau+1)\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - \int_0^{\tau\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}$,

3. die Differenz $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \Delta\varphi\, d\varphi - \int_0^{(\tau+1)\pi} \Delta\varphi\, d\varphi = \left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - \int_0^{\tau . \pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}\right\}\left\{1 - \frac{1}{2}\varkappa^2\left(1 + \frac{1}{2}\varkappa_1\right.\right.$

$$\left.\left. + \frac{1}{4}\varkappa_1\varkappa_2 + \ldots\right)\right\} - \varkappa\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1}\sin\varphi_1 + \frac{1}{4}\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\sin\varphi_2 + \ldots\right\},$$

4. die Grösse $A_3 . \frac{\sin 2(\tau+1)\pi . \sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2(\tau+1)\pi}}{6\varkappa^2}$ einzeln gleich den entspreshenden Gliedern des oben in der ersten Entwicklung dargestellten L. Die Länge des in Betracht kommenden Bogens ergiebt sich also in beiden Fällen als dieselbe.

Ebenso ist es mit den andern für $x = o$ und $x = +\gamma$ sich ergebenden Werthen von z.

Die weitere Entwicklung der Integrale ist demnach dieselbe wie die oben durchgeführte.

III. Der Rotationskörper,

der durch Umdrehung der Curve um eine Achse entstanden ist.

Wir nehmen wieder die Form der Gleichung der Curve $y = \frac{\lambda}{3\gamma^3}(\gamma^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Lassen wir nun die Curve um die Achse der x rotiren, so erhalten wir, wenn wir die dritte Achse im Anfangspunkte der Coordinaten auf der Ebene der Achsen der x und y senkrecht stehend, mit z bezeichnen, als Gleichung des Rotationskörpers:

$$y^2 + z^2 = \frac{\lambda^2}{9\gamma^6}(\gamma^2 - x^2)^3, \text{ oder } y^2 + z^2 - \frac{\lambda^2}{9\gamma^6}(\gamma^2 - x^2)^3 = o.$$

Um zunächst das Volumen des Rotationskörpers zu bestimmen, das wir mit V bezeichnen wollen, wenden wir die bekannte Formel an

$$V = \pi\int_{x_0}^{x} y^2\, dx = \frac{\pi\lambda^2}{9\gamma^6}\int_{x_0}^{x}(\gamma^2 - x^2)^3\, dx.$$

Nimmt man $x_0 = -\gamma$ und $x = +\gamma$ als Integrationsgrenzen an, so erhält man:

$$V = \frac{\pi\lambda^2}{9\gamma^6}\int_{-\gamma}^{+\gamma}(\gamma^2 - x^2)^3\, dx \text{ oder } V = \frac{32}{315}\,\gamma\,.\,\lambda^2.\pi.$$

Zur Bestimmung des Schwerpunkts, wenn wir den Körper als homogen annehmen, erhalten wir, wenn $x_1\ y_1\ z_1$ die Coordinaten des Schwerpunkts bedeuten,

$$V_{x_1} = \frac{\lambda^2\pi}{9\gamma^6}\int_{-\gamma}^{+\gamma} x\,(\gamma^6 - 3\gamma^4 x^2 + 3\gamma^2 x^4 - x^6)\, dx = 0, \text{ also auch } x_1 = 0 \text{ und}$$

$$V_{y_1} = V_{z_1} = \frac{\lambda^2\pi}{27\gamma^6}\int_{-\gamma}^{+\gamma} y^3\, dx = \frac{\lambda^2\pi}{27\gamma^6}\int_{-\gamma}^{+\gamma}(\gamma^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = 0, \text{ also } y_1 = z_1 = 0.$$

Es fällt also der Schwerpunkt des Körpers mit dem Anfangspunkt des Coordinatensystems zusammen. Ist die Dichtigkeit des Körpers gleich ε, so ergiebt sich die Masse desselben

$$M = \frac{32}{315}\,.\,\varepsilon\,.\,\gamma\,.\,\lambda^2.\,\pi.$$

a. Trägheitsmoment.

Wir suchen das Trägheitsmoment für die Rotationsachse des Körpers und eine zu dieser senkrechten Geraden, welche die Rotationsachse in einem Punkte O schneidet. Die Rotationsachse und alle durch O gehende zu ihr senkrechte Achsen sind Hauptachsen in Bezug auf den Punkt O, und das Trägheitsellipsoid ist ein Rotations-Ellipsoid um die Rotationsachse.

Wir haben die Achse der x als Rotationsachse angenommen. Legt man nun durch den Körper einen beliebigen Meridian und nennt ϑ den Winkel, den dieser mit der Ebene der xy einschliesst, und r den Abstand eines Punktes der Ebene des Meridians von der Achse der x, so erhält man, wenn ε die Dichtigkeit des Körpers bezeichnet, für das Massenelement dm den Ausdruck $dm = \varepsilon\,.\,r\,.\,dr\,dw\,dx$. Bezeichnen A, B und C die drei Hauptträgheitsmomente der Achsen, so ist bekanntlich

$$A = \Sigma\,(y^2 + z^2)\,dm = \Sigma\, r^2\, dm,$$
$$B = C = \Sigma\,(z^2 + x^2)\,dm = \Sigma\,(r^2 \sin^2 w + x^2)\,dm.$$

Setzt man hier den oben für dm gefundenen Werth ein, so ergiebt sich

$$A = \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{2\pi} r^3\, dw\, dr\, dx = 2\pi\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} r^3\, dr\, dx \text{ und}$$

$$B = C = \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 w\, dw\, dr\,.\,dx + \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{2\pi} r\, x^2\, dw\, dr\, dx$$

$$= \pi\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} r^3\, dr\, dx + 2\pi\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} r\, x^2\, dr\, dx.$$

Hieraus folgt:

$$A = \frac{\pi\,\varepsilon}{2}\int_{x_0}^{x_1} y^4\,dx \text{ und}$$

$$B = C = \tfrac{1}{4}\,\pi\,\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} y^4\,dx + \pi\,\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} x^2 dx, \text{ oder}$$

$$B = C = \tfrac{1}{2}\,A + \pi\,.\,\varepsilon\int_{x_0}^{x_1} x^2\,dx.$$

Nimmt man die Grenzen $x_0 = -\gamma$ und $x_1 = +\gamma$, so erhält man

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} y^4\,dx = \frac{\lambda^4}{81\,\gamma^{12}}\int_{-\gamma}^{+\gamma} (\gamma^2 - x^2)^6\,dx = \frac{\lambda^4}{81\,.\,\gamma^{12}}\,\gamma^{13}\,.\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10\,.\,12}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13}$$

und $\frac{\pi\,\varepsilon}{2}\int_{-\gamma}^{+\gamma} y^4\,dx = \pi\,\varepsilon\,\frac{\gamma\,.\,\lambda^4\,.\,2^4\,.\,4^3}{3^5\,.\,7\,.\,11\,.\,13} = A$ und $\int_{-\gamma}^{+\gamma} x^2\,dx = \frac{2}{3}\,\gamma^3$, also $\pi\,\varepsilon\int_{-\gamma}^{+\gamma} x^2\,dx = \frac{2}{3}\,\pi\,.\,\varepsilon\,\gamma^3$.

Demnach ist $B = C = \left[\frac{2^3\,.\,4^3\,.\,\gamma\,.\,\lambda^4}{3^5\,.\,7\,.\,11\,.\,13} + \frac{2\,.\,\gamma^3}{3}\right]\,.\,\pi\,.\,\varepsilon.$

Nennt man nun μ das Trägheitssystem einer beliebigen Achse h, welche mit den Achsen der x, y, z bezüglich die Winkel α, β, γ bildet, so ist

$$\mu = A\cos^2\alpha + B\,(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A\cos^2\alpha + B\,(1 - \cos^2\alpha) \text{ oder}$$

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,\pi\,\varepsilon\,(1 + \cos^2\alpha)\int_{-\gamma}^{+\gamma} y^4\,dx + \pi\,\sin^2\alpha\int_{-\gamma}^{+\gamma} x^2\,y^2\,dx, \text{ woraus folgt}$$

$$\mu = (1 + \cos^2\alpha)\,.\,\frac{\gamma\,.\,\lambda^4\,.\,2^4\,.\,4^3}{3^5\,.\,7\,.\,11\,.\,13}\,\pi\,.\,\varepsilon + \frac{2^5\,\gamma^3\,\lambda^2\,.\,\pi\,\sin^2\alpha}{3^4\,.\,5\,.\,7}.$$

b. Der Körper dreht sich vermöge gewisser Kräfte um eine Achse.

Der Körper werde durch einen Stoss in Rotation versetzt, der ihm zur Zeit $t = o$ die Anfangsgeschwindigkeit c giebt; die Achse, um welche er sich dreht, bilde mit der Achse der x den Winkel α. dann ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Achse nach dem vorigen Abschnitt gleich $(1 + \cos^2\alpha)\,\frac{\gamma\,.\,\lambda^4\,.\,2^4\,.\,4^3}{3^5\,.\,7\,.\,11\,.\,13}\,\pi\,.\,\varepsilon + \frac{2^5\,.\,\gamma^3\,.\,\lambda^2\,.\,\pi\,\sin^2\alpha}{3^4\,.\,5\,.\,7}$, ein Ausdruck, den wir mit μ bezeichnen wollen. Der Kraft des Stosses entgegen wirkt am Hebelarme a ein Widerstand, der gleich der Summe einer Constanten und einer variabeln Kraft ist. Die erstere sei gleich Q, die zweite umgekehrt proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit u und habe für $u = 1$ die Intensität P.

Nun ist bekanntlich $u = \frac{d\vartheta}{dt}$, wo ϑ der Drehungswinkel ist, $\varkappa = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{\mu}{a} \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, wo $\varkappa$ die Kraft ist, welche die Drehung bewirkt, oder auch $\varkappa = \frac{\mu}{a} . u \frac{du}{d\vartheta}$.

Dann erhalten wir, wenn wir den Widerstandskräften zum Unterschiede von den direct wirkenden das negative Zeichen geben, und beachten, dass die Anfangsgeschwindigkeit gleich c, gleich einer Constanten, die dieselbe verursachende Kraft also eine Momentankraft ist, und deshalb die beschleunigende Kraft den Werth Null hat,

$$\varkappa = -Q - \frac{P}{u^2} \text{ oder } -Q - \frac{P}{u^2} = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{du}{dt}, \text{ woraus folgt } -\frac{Qu^2 + P}{u^2} = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{du}{dt}, \text{ oder}$$

$$\frac{a}{\mu} dt = -\frac{u^2}{Qu^2 + P} \cdot du, \; \frac{a}{\mu} dt = -\frac{1}{Q} \cdot \frac{u^2}{u^2 + \frac{P}{Q}} du, \text{ und wenn man } \frac{P}{Q} = m \text{ setzt,}$$

$$\frac{Q.a}{\mu} dt = -\frac{u^2}{m + u^2} du, \text{ woraus folgt } dt = \frac{-\mu}{a.Q} du - \frac{-\mu.m}{a\,Q} \frac{du}{u^2 + m} \text{ und}$$

$$t = -\frac{\mu}{Q.a} \int du - \frac{\mu.m}{a.Q} \int \frac{du}{u^2 + m} + c_1, \text{ wo } c_1 \text{ die Integrationsconstante ist, oder}$$

$$\frac{a\,Q}{\mu} t = -u + \sqrt{m} \operatorname{arccot} \frac{u}{\sqrt{m}} + c_1.$$

Für $t = o$ ist $u = c$, also ist $\frac{a.Q}{\mu}. \; t = -u + \sqrt{m} . \operatorname{arccot} \frac{u}{\sqrt{m}} + c - \operatorname{arccot} \frac{c}{\sqrt{m}}$ und

1. $\frac{aQ.}{\mu} t = c - u + \sqrt{m} \left(\operatorname{arccot} \frac{u}{\sqrt{m}} - \operatorname{arccot} \frac{c}{\sqrt{m}} \right)$. Hieraus kann man die Zeit t_1 bestimmen, nach welcher der Körper in Ruhe kommt. Für diese Zeit ist die Winkelgeschwindigkeit $u = o$, also hat man

$$\frac{a.Q}{\mu} t_1 = c + \sqrt{m} \left(\operatorname{arccot} o - \operatorname{arccot} \frac{c}{\sqrt{m}} \right) = c + \sqrt{m} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} \frac{c}{\sqrt{m}} \right) = c + \sqrt{m} . \operatorname{arc\,tg}, \frac{c}{\sqrt{m}}, \text{ oder}$$

2. $$t_1 = \frac{\mu.c}{aQ} + \frac{\mu\sqrt{m}}{a\,Q} \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{\sqrt{m}}.$$

Ausserdem hatten wir $-Q - \frac{P}{u^2} = \frac{\mu}{a}. \; u \frac{du}{d\vartheta}$ oder $-d\vartheta = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{u^3}{P + Qu^2} du = \frac{\mu}{a.Q} \cdot \frac{u^3}{m + u^2} du$.

Hieraus folgt $-\vartheta = \frac{\mu}{a.Q} \int u \, du - \frac{m.\mu}{a\,Q} \int \frac{u\,du}{u^2 + m} + c_2$ oder

$$\vartheta = \frac{\mu.m}{2.a\,Q} l\,(u^2 + m) - \frac{\mu}{2\,a.Q} u^2 - c_2, \text{ wo } c_2 \text{ die Integrationsconstante ist.}$$

Für die Anfangsbewegung ist $u = c$ und der Drehungswinkel $\vartheta = o$, woraus folgt

$$-c_2 = \frac{\mu\,c^2}{2.a.Q} - \frac{\mu\,m}{2.a.Q} l \left(c^2 + \frac{P}{Q} \right) \text{ und demnach ist}$$

3. $$\vartheta = \frac{\mu.m}{2.a.Q} l \left(\frac{u^2 + m}{c^2 + m} \right) + \frac{\mu}{2.a.Q} (c^2 - u^2).$$

Für $u = o$, also für die Zeit t_1, nach welcher der Körper in Ruhe kommt, sei $\vartheta = \vartheta_1$, dann ist

4. $$\vartheta_1 = \frac{\mu.m}{2.a\,Q} . l \left(\frac{m}{c^2 + m} \right) + \frac{\mu.c^2}{2.a.Q}.$$