Der Unterricht in der beschreibenden Geometrie auf Realschulen.

Die Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der Realschulen vom 6. October 1859 verlangt von den Abiturienten sichere, geordnete und wissenschaftlich begründete Kenntnisse in den Elementen der beschreibenden Geometrie. Dadurch ist in die Realschule ein Unterrichtsgegenstand eingeführt worden, welcher bisher nur auf technischen Lehranstalten gelehrt zu werden pflegte. Aber nicht in der technischen Bedeutung, in der Unterstützung des Zeichenunterrichts, in der Aneignung der Fähigkeit, geometrische Zeichnungen zu entwerfen und zu verstehen, liegt der Hauptwerth dieses Unterrichts; vielmehr bildet derselbe in hohem Masse eine Gymnastik des Geistes, welche die Denkkraft weckt und übt. — Ohne umfassende mathematische Kenntnisse vorauszusetzen, nimmt die beschreibende Geometrie vor Allem die Anschauung in Anspruch. Sie erfordert und erzielt klare Auffassung der räumlichen Verhältnisse und bildet dadurch ein Gegengewicht und eine Ergänzung zu den übrigen Disciplinen, welche das mathematische Pensum der Prima ausmachen, indem diese eine rechnende Betrachtung räumlicher Verhältnisse begünstigen und dadurch, rein geometrischer Betrachtung gegenüber, eine gewisse Einseitigkeit befördern. Die Constructionen der beschreibenden Geometrie können vom Schüler nicht gedächtnissmässig und gedankenlos ausgeführt werden, sondern erfordern ein wirkliches Verständniss, da ihn sonst eine jede Aenderung in der Lage der Figur in Verwirrung setzen würde. Darum kostet es zunächst einige Mühe, ehe der Schüler sich in die neue Betrachtungsweise hineingearbeitet hat. Ist dieses aber einmal geschehen, so hat er eine Handhabe gewonnen, durch welche ihm die Anschauung räumlicher Verhältnisse leicht und die Lösung vieler Aufgaben möglich gemacht ist. Zugleich wird er befähigt, „die gemeinsame Wurzel aufzufinden und den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen der Raumwelt miteinander verknüpft sind,“ indem die beschreibende Geometrie ihn in die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften einführt und ihm so den Weg zu den fruchtbaren Principien und Anschauungsweisen der neueren Geometrie eröffnet.

Die vorliegende Abhandlung setzt sich die Aufgabe, zusammenzustellen, was nach der Ansicht des Verfassers in den mathematischen Unterricht über die beschreibende Geometrie auf Realschulen gehört, damit derselbe mit dem übrigen Unterricht zu einem organischen Ganzen sich vereinige. Nach der Unterrichts-Ordnung ist die praktische Einübung der Projectionslehre dem Zeichenunterricht in Prima zugewiesen. Deshalb sind die Fundamente der Theorie ausführlicher behandelt, die Lösung der Hauptaufgaben der Projectionslehre nur in ihren Grundzügen angedeutet. Durch die Einführung der geometrischen Verwandtschaften wird eine Anschauung gewonnen, welche auch für das praktische Zeichnen, namentlich für die Anschaulichkeit des Zeichenunterrichts von grosser Bedeutung ist und mehr Beachtung verdient, als ihr gewöhnlich geschenkt wird. Ein Hauptgewicht ist auf die Lehre von den Kegelschnitten gelegt worden, deren wichtigste Eigenschaften, namentlich die gemeinschaftlichen, aus dem Kreise hergeleitet sind.

I. Parallel-Projection. — Affinität.

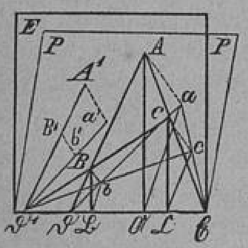
§. 1. Die Projectionen.

Die beschreibende Geometrie hat den Zweck, räumliche Figuren durch Zeichnung in einer Ebene darzustellen, so dass alle Verhältnisse derselben in der ebenen Zeichnung erkannt und alle Constructionen an denselben in der Ebene ausgeführt werden können. Dieser Zweck wird durch Projectionen erreicht. Man legt durch jeden Punkt der darzustellenden Figur eine Linie (Projectionsstrahl, projicirende Linie), welche in der Ebene der Zeichnung die Projection des Punktes bestimmt. Sind die projicirenden Strahlen parallel, so ergiebt sich die Parallel-Projection; diese Art der Darstellung wird gewöhnlich unter dem Namen Projection verstanden. Schneiden sich alle projicirenden Strahlen in einem festen Punkte, so ergiebt sich die Central-Projection oder Perspective. Mit der ersteren Art der Projection wollen wir uns zunächst beschäftigen.

1) Zu jedem Punkte A gehört ein projicirender Strahl Aa, welcher die Projectionsebene, die mit P bezeichnet werden möge, in a trifft.

2) Zu jeder Geraden AB gehört eine projicirende Ebene d. i. der Inbegriff der Projectionsstrahlen, welche von den einzelnen Punkten der Geraden ausgehen; diese Ebene schneidet die Projectionsebene in einer Geraden ab, welche die Projection von AB ist. — Die Projectionen von Punkten, welche in einer Geraden liegen, liegen ebenfalls in einer Geraden. Schneidet AB die Projectionsebene in $\mathfrak{D}$, so geht die Projection ebenfalls durch $\mathfrak{D}$, da jeder Punkt der Projectionsebene seine eigene Projection ist. — Zwei Seiten eines Dreiecks werden durch Linien, welche der dritten parallel sind, in proportionale Theile getheilt; daher sind die Theile derselben Linie und ihre Projectionen proportionirt.

Fig. 1.



3) Zu einem Strahlenbüschel A d. h. zu den von A ausgehenden Strahlen gehört als Projection ein Strahlenbüschel a. — Zu parallelen Linien AB, A'B' gehören parallele und proportionale Projectionen ab, a'b'; denn die projicirenden Ebenen sind parallel und die Dreiecke $\mathfrak{D}$Aa und $\mathfrak{D}'$A'a' sind ähnlich, wenn $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ die Durchschnitte von AB und A'B' mit der Projectionsebene P bezeichnen.

4) Alle Geraden, welche in einer Ebene E liegen, treffen P in einer Geraden, und zwar in der Durchschnittslinie von P und E, oder sind mit derselben parallel.

5) Flächenräume, welche in derselben Ebene liegen, sind ihren Projectionen proportionirt. — Beweis: Zieht man von den Ecken der ebenen Figur die Neigungslinien d. i. Lothe auf die Durchschnittslinie von **P** und **E**, so kann der Flächenraum als die Summe und Differenz von Trapezen betrachtet werden. Auf dieselbe Weise wird die Projection aus entsprechenden Trapezen zusammengesetzt. Zwei entsprechende Trapeze stehen aber in constantem Verhältniss; denn $A\mathfrak{A}\mathfrak{B}B = \frac{1}{2}(A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B})\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $a\mathfrak{A}\mathfrak{B}b = \frac{1}{2}(a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B})\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,.\,\sin \mathfrak{B}\mathfrak{A}a$. Da $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$, Aa und Bb, sowie $a\mathfrak{A}$ und $b\mathfrak{B}$ als Durchschnitte zweier parallelen Ebenen mit einer dritten parallel sind, so ist $\triangle\, Aa\mathfrak{A} \sim \triangle\, Bb\mathfrak{B}$; das Verhältniss der Neigungslinien $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$ und ihrer Projectionen $a\mathfrak{A}$, $b\mathfrak{B}$ ist also constant; ebenso der Winkel $\mathfrak{B}\mathfrak{A}a$.

6) Ueber die Richtung der Projectionsstrahlen ist bisher noch keine Bestimmung gemacht worden. Gewöhnlich wird dieselbe senkrecht zur Projectionsebene angenommen; man nennt diese Art der Projection rechtwinklige oder senkrechte. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass die Projectionen der Neigungslinien einer Ebene ebenfalls senkrecht auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie sind, dass das Verhältniss von Neigungslinien und ihren Projectionen durch den Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen angegeben wird, und dass die Projection eines rechten Winkels ein rechter Winkel ist, wenn wenigstens ein Schenkel mit der Projectionsebene parallel ist. Letzteres folgt daraus, dass der parallele Schenkel, also auch seine parallele Projection senkrecht auf der projicirenden Ebene des anderen Schenkels ist. — Umgekehrt muss, wenn die Projection eines rechten Winkels BAC wiederum ein rechter bac ist, ein Schenkel der Projectionsebene parallel sein. Denn alle in A auf AB senkrecht stehenden Linien liegen in einer Ebene. Diese schneidet, wenn nicht AB || ab ist, AacC nur in einer Geraden; es kann also nur eine Linie der Ebene AacC senkrecht auf AB sein, und diese muss, da ac senkrecht auf BAba ist, mit der Geraden zusammenfallen, welche durch A parallel mit ac gezogen ist.

§. 2. Geometrische Verwandtschaften. — Affinität.

1) Dreht man **E** um die gemeinschaftliche Linie $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$ beider Ebenen, bis **E** mit **P** zusammenfällt, so beschreibt A einen auf $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$ senkrechten Kreis mit dem Halbmesser $A\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}BA$ den Mantel eines geraden Kegels. Bei der senkrechten Projection fällt dann jede Neigungslinie $\mathfrak{A}A$ mit der Richtung ihrer Projection zusammen (Fig. 2). Bei der schiefen bleiben zwar die Neigungslinien $\mathfrak{A}A$, $\mathfrak{B}B$ senkrecht auf der gemeinschaftlichen Linie (Fig. 3), ihre Projectionen $\mathfrak{A}a$, $\mathfrak{B}b$ jedoch sind gegen dieselbe unter schiefem Winkel geneigt; sie bleiben nach §. 1, 3 parallel und proportionirt; daher sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte Aa, Bb parallel.

Fig. 2.

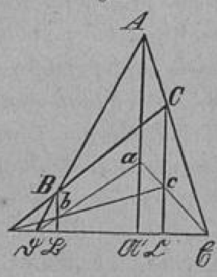
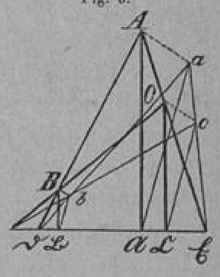


Fig. 3.



Jedem Punkt A der herabgeschlagenen Ebene **E** entspricht ein Punkt a der Ebene **P**, jeder Geraden AB der ersteren eine Gerade ab der zweiten. Eine solche gegenseitige Abhängigkeit von Figuren nennt man eine geometrische Verwandtschaft. Die vorliegende

Verwandtschaft, deren Wesen dadurch charakterisirt ist, dass 1) entsprechende Punkte auf Parallelen liegen und 2) entsprechende Linien sich auf derselben Geraden schneiden, heisst Affinität. Die Durchschnittslinie der entsprechenden Geraden d. i. die Linie, deren Punkte mit den entsprechenden zusammenfallen, heisst die Affinitätsaxe.

2) In der elementaren Geometrie werden zwei Arten von Verwandtschaft betrachtet: die Congruenz und die Aehnlichkeit. — Congruente Figuren können immer in eine solche Lage gebracht werden, dass entsprechende Punkte auf Parallelen liegen und dass entsprechende Linien parallel sind. Diese Lage könnte man die congruente nennen. Soll zu einer ebenen Figur die congruente und zugleich congruent liegende gezeichnet werden, so ist dieselbe durch ein Paar entsprechender Punkte vollständig bestimmt. Je zwei entsprechende Linien und Winkel sind gleich.

Aehnliche Figuren können immer in eine solche Lage gebracht werden, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt, den Aehnlichkeitspunkt, gehen und dass entsprechende Linien parallel sind. Diese Lage heisst die ähnliche. Soll zu einer Figur die ähnliche und zugleich ähnlich liegende gezeichnet werden, so ist dieselbe durch ein Paar entsprechender Punkte und den Aehnlichkeitspunkt vollständig bestimmt. Je zwei entsprechende Linien sind proportionirt und je zwei entsprechende Winkel gleich.

3) Soll zu einer ebenen Figur die affine gezeichnet werden, so ist dieselbe durch ein Paar entsprechender Punkte A und a und die Affinitätsaxe vollständig bestimmt. Den zu einem zweiten Punkte B gehörigen b findet man, indem man zu Aa eine Parallele durch B zieht und a mit dem Punkte $\mathfrak{D}$, in welchem AB die Affinitätsaxe trifft, verbindet. Den zu einem anderen Punkte C gehörigen c kann man nun mittels der Fundamentalaufgabe alles geometrischen Zeichnens, „eine Gerade durch zwei gegebene Punkte zu ziehen", finden: man verbindet a und b mit den Punkten, in welchen AC und BC die Axe schneiden, und erhält c als den Durchschnitt dieser beiden Linien. — Die Gerade Cc ist parallel Aa und Bb. Denn denkt man sich ABC in die Lage der Fig. 1 zurückgeschlagen, so ist, da $\mathfrak{D}B : \mathfrak{D}A = \mathfrak{D}b : \mathfrak{D}a$ ist, $Bb \parallel Aa$. Es liegt Cc mit Aa und ebenfalls mit Bb in einer Ebene und muss, da die Durchschnittslinien dreier Ebenen entweder in einen Punkt convergiren oder parallel sind, den Linien Aa und Bb parallel sein; daher ist $\mathfrak{E}A : \mathfrak{E}C = \mathfrak{E}a : \mathfrak{E}c$ und also in Fig. 3 $Cc \parallel Aa$. — Schneiden sich also die 3 Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden und liegen 2 Paar Ecken auf parallelen Linien, so liegt auch das dritte Paar Ecken auf einer, derselben Richtung parallelen Linie.

4) Umgekehrt: Liegen die Ecken zweier Dreiecke ABC und abc auf Parallelen, so schneiden sich die Seiten auf einer Geraden oder sind parallel. — Beweis: Dreht man ABC um die Gerade, auf welcher der Durchschnitt von AB und ab und der von AC und ac liegt, so bleiben Bb und Cc, da sie die Seiten der Dreiecke $\mathfrak{D}$Aa und $\mathfrak{E}$Aa proportional theilen, parallel mit Aa: sie liegen also in einer Ebene. BC, bc, $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ convergiren, als die 3 Durchschnittslinien dreier Ebenen, in einen Punkt oder sind parallel; der Durchschnittspunkt bleibt, wenn ABC wieder in die Ebene abc zurückgeschlagen wird.

5) Sind zwei Figuren affin und affin liegend und wird die eine um die Affinitätsaxe gedreht, so bleiben die Verbindungslinien entsprechender Punkte, wie aus Nr. 3) hervorgeht, parallel. Die eine kann daher als die Projection der anderen angesehen werden.

Während congruente Figuren so gelegt werden können, dass sie parallele Durchschnitte eines Cylinders, ähnliche so, dass sie parallele Durchschnitte eines Kegels werden, kann man affine Figuren so legen, dass sie Schnitte desselben Cylinders sind. Die Durchschnittspunkte entsprechender Linien und die Punkte, welche entsprechende Linien proportional theilen, sind entsprechende Punkte. — Ein specieller Fall des letzteren Satzes ist: Die Schwerpunkte affiner Figuren sind entsprechende Punkte. Denn, um den Schwerpunkt eines Polygons zu finden, braucht man nur Gerade zu halbiren und Punkte zu verbinden.

§. 3. Projectionszeichnen.

1) Für das praktische Zeichnen sind die Fundamental-Aufgaben: a) die Projection einer ebenen Figur, und b) die Figur aus ihrer Projection zu bestimmen. Ersteres geschieht durch das Zurück-, letzteres durch das Herabschlagen. Im ersten Falle denkt man die Figur zuerst in der Projectionsebene und dreht dann ihre Ebene um eine Linie derselben; im zweiten denkt man die Figur um die Linie, welche ihre Ebene mit der Projectionsebene gemein hat, in diese Ebene hineingelegt. In beiden Fällen sind Figur und Projection affin. — Um die Zeichnung auszuführen, genügt nach §. 2, 3 die Kenntniss der Linie, um welche die Drehung erfolgt ist, und der Lage von einem Paare entsprechender Punkte, welche durch den Drehungswinkel und die Richtung der Projectionsstrahlen zu bestimmen ist. — Bei der senkrechten Projection — welche in diesem Paragraphen stets angenommen wird — giebt der Cosinus des Neigungswinkels beider Ebenen das Verhältniss, in welchem die Abstände zweier entsprechenden Punkte von der Drehungsaxe stehen.

2) Durch eine Projection ist eine Figur nicht vollständig bestimmt. Man nimmt eine zweite, auf der ersten senkrechte Projectionsebene an, welche um die gemeinschaftliche Linie, die Projectionsaxe, in die erste herabgeschlagen wird. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, den in §. 1 aufgestellten Zweck der beschreibenden Geometrie zu erfüllen. Die Lage eines Punktes ist durch seine beiden Projectionen bestimmt. Die Lage einer Geraden ist durch die Projectionen von zwei in ihr liegenden Punkten bestimmt, namentlich durch ihre Spuren oder Durchgänge d. i. die Punkte, in welchen sie die Projectionsebenen trifft. Die Lage einer Ebene ist durch die Projectionen von zwei in ihr liegenden Linien bestimmt, namentlich durch ihre Spuren d. i. die Durchschnitte mit den Projectionsebenen. Die Verbindungslinie der beiden Projectionen eines Punktes steht senkrecht auf der Projectionsaxe. Die beiden Spuren einer Ebene schneiden sich auf der Projectionsaxe. — Die beiden Projectionen einer ebenen Figur sind affin und nach §. 2, 4 affin liegend. Die Affinitätsaxe fällt mit der Projectionsaxe zusammen, wenn die Ebene der Figur die Projectionsaxe enthält. Im anderen Falle ist sie die Projection der Linie, in welcher die Ebene der Figur eine den Winkel der Projectionsebenen halbirende Ebene schneidet; denn die Projectionen aller Punkte einer solchen Ebene fallen, wenn die beiden Projectionsebenen in eine Ebene gelegt werden, zusammen. — Sind daher von 3 Punkten A, B, C einer Ebene beide Projectionen bekannt, so kann man aus der einen Projection eines vierten Punktes D die andere durch blosses Ziehen gerader Linien finden, z. B. indem man den Durchschnitt von AD und BC benutzt.

3) Sind die beiden Projectionen einer geraden Linie gegeben, so findet man ihre

Länge und ihre Neigung zu den Projectionsebenen durch das Herabschlagen der projicirenden Ebenen. — Sind die Projectionen einer ebenen Figur gegeben, so sind die Durchgänge der einzelnen Geraden, da die zweiten Projectionen der Durchgänge in der Projectionsaxe liegen, und somit die Spuren ihrer Ebene zu bestimmen. Die Projection einer Neigungslinie steht nach §. 1, 6 senkrecht auf der Spur; die Länge derselben ist durch Herabschlagen der projicirenden Ebene zu finden. Die Construction der ganzen Figur ist dann nach 1) auszuführen. — Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist derselbe, wie der Winkel zweier auf denselben senkrechten Linien, deren Projectionen nach §. 1, 6 auf den Spuren der Ebenen senkrecht stehen. — Die gemeinschaftliche Linie zweier Ebenen schneidet die Projectionsebenen in den Punkten, in welchen die Spuren der Ebenen sich schneiden. — Den Durchschnitt einer Geraden und einer Ebene findet man, indem man die Gerade zu Hülfe nimmt, in welcher sich die gegebene und eine die Linie projicirende Ebene schneiden. — Aus den beiden Projectionen einer räumlichen Figur kann man daher die Gestalt und Lage sämmtlicher Begrenzungsflächen herleiten.

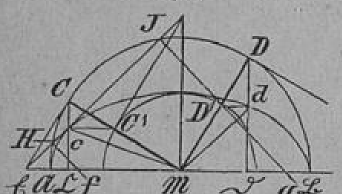
4) Um die Projection eines Körpers zu bestimmen, denkt man sich denselben gewöhnlich zuerst in der einfachsten Lage zu den beiden Projectionsebenen gegeben und gezeichnet. Dann wird entweder der Körper um eine Linie, welche mit einer Projectionsebene parallel ist, oder es wird die eine Projectionsebene gedreht; die Projectionen des Körpers in der neuen Lage oder auf die neue Projectionsebene können aus den bekannten Projectionen der einzelnen Punkte leicht gefunden werden.

Ein anderes Verfahren beruht darauf, dass man den Körper auf drei feste Axen bezieht; dieses bildet den Gegenstand von §. 5.

§. 4. Kreis und Ellipse.

I. Senkrechte Projection. 1) Der Kreis werde senkrecht auf eine Ebene projicirt, welche mit der Kreisebene den Neigungswinkel ε bildet. Man kann die Projectionsebene durch den Mittelpunkt 𝔐 gelegt denken; denn es bleiben bei paralleler Verschiebung der Projectionsebene die Projectionen, als parallele Schnitte desselben Cylinders, congruent. Sieht man die Durchschnittslinie 𝔄𝔅 als Abscissenaxe an und bezeichnet die Ordinaten Cℭ des Kreises mit y, die der Projection cℭ mit η, so ist $\eta = y \cos \varepsilon$. Für den Kreis ist $y^2 + x^2 = r^2$; für die Projection ist also $\frac{\eta^2}{\cos^2 \varepsilon} + x^2 = r^2$. Die Projection ist eine Ellipse mit den Halbaxen $\alpha = r$ und $\beta = r \cos \varepsilon$. — Die Ordinaten der Ellipse verhalten sich zu denen des Kreises wie die kleine Axe zur grossen.

Fig. 4.



2) Alle Durchmesser des Kreises werden in 𝔐 halbirt, die Projectionen derselben werden also auch in 𝔐 halbirt, d. i. 𝔐 ist Mittelpunkt der Ellipse. — Die Kreis-Durchmesser haben verschiedene Neigung zu der Projectionsebene; die Ellipsen-Durchmesser haben verschiedene Grösse. — Parallelen Sehnen des Kreises entsprechen parallele Sehnen der Ellipse. Im Kreise liegen die Mitten der Sehnen, welche dem Durchmesser 𝔐C parallel sind, auf dem senkrechten Durchmesser 𝔐D. In der Ellipse liegen daher die Mitten der

Sehnen, welche dem Durchmesser $\mathfrak{M}c$ parallel sind, auf dem Durchmesser $\mathfrak{M}d$, welcher die Projection von $\mathfrak{M}D$ ist. — Zwei senkrechten Durchmessern des Kreises entsprechen zwei zugeordnete Durchmesser der Ellipse d. i. Durchmesser von solcher Lage, dass jeder die Sehnen halbirt, welche dem anderen parallel sind. — Rückt im Kreise die Sehne parallel mit $\mathfrak{M}D$ fort, bis sie Tangente in C wird, so wird die Projection Tangente in c; eine Tangente der Ellipse ist also parallel dem Durchmesser, welcher dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Durchmesser zugeordnet ist. — Da entsprechende Linien sich auf der gemeinschaftlichen Linie schneiden, so gehen die Tangenten in den entsprechenden Punkten C und c durch denselben Punkt $\mathfrak{E}$ der Axe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, d. i. die Subtangenten entsprechender Punkte sind gleich.

3) Bezeichnet man die Grössen der zugeordneten Durchmesser mit α_1 und β_1, den eingeschlossenen Winkel mit ϑ, so ist nach §. 1, 5 $\triangle c\mathfrak{M}d = C\mathfrak{M}D \,.\, \cos\varepsilon$, also $\alpha_1\,\beta_1 \sin\vartheta = r^2\cos\varepsilon = \alpha\beta$; d. i. die Parallelogramme, gebildet von den Tangenten in den Endpunkten zugeordneter Durchmesser, haben einen constanten Inhalt. — Da die Winkel $\mathfrak{M}C\mathfrak{E}$ und $D\mathfrak{M}\mathfrak{D}$ gleich sind, so ist $\triangle\,\mathfrak{M}C\mathfrak{E} \cong \triangle\,D\mathfrak{M}\mathfrak{D}$, also $\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{E}c^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{D}d^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{E}^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \,.\, \mathfrak{E}C^2 + C\mathfrak{E}^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{E}^2 = \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) r^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Die Summe der Quadrate zweier zugeordneten Durchmesser ist constant. — Ferner ist $\operatorname{tg} \mathfrak{A}\mathfrak{M}c = \frac{\beta}{\alpha} \,.\, \frac{\mathfrak{E}C}{\mathfrak{M}\mathfrak{E}}$, $\operatorname{tg} \mathfrak{A}\mathfrak{M}d = -\frac{\beta}{\alpha} \,.\, \frac{\mathfrak{D}D}{\mathfrak{M}\mathfrak{D}}$, folglich $\operatorname{tg} \mathfrak{A}\mathfrak{M}c \,.\, \operatorname{tg} \mathfrak{A}\mathfrak{M}d = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$. Das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete Richtungen mit der Axe bilden, ist constant.

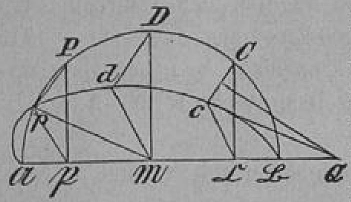
4) Schneidet die in c berührende Linie den um die grosse Axe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ beschriebenen Kreis in H und J und errichtet man in H und J Senkrechte, welche $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in f und g treffen, so ist $\mathfrak{F}\mathfrak{E} : \mathfrak{E}C = \mathfrak{F}C : C\mathfrak{M}$, also, da $C\mathfrak{M} = \alpha$ und $\mathfrak{E}c = \frac{\beta}{\alpha} \,.\, C\mathfrak{E}$ ist, $\mathfrak{F}\mathfrak{E} : \mathfrak{E}c = \mathfrak{F}C : \beta$; ferner ist $\mathfrak{F}\mathfrak{E} : \mathfrak{E}c = \mathfrak{F}H : Hf = \mathfrak{F}J : Jg$. Folglich ist $\mathfrak{F}H \,.\, \mathfrak{F}J : Hf \,.\, Jg = \mathfrak{F}C^2 : \beta^2$ und, da $\mathfrak{F}H \,.\, \mathfrak{F}J = \mathfrak{F}C^2$ ist, $Hf \,.\, Jg = \beta^2$. Die Kreisordinate in f ist $= \beta$, da $Hf + Jg$ gleich der Sehne durch f ist, und $\mathfrak{M}f^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Es sind daher f und g feste Punkte, und zwar die Brennpunkte. Die Fusspunkte der Lothe, welche von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällt werden, liegen auf dem um die grosse Axe beschriebenen Kreise. — Das Rechteck aus den Lothen, welche von den beiden Brennpunkten auf eine Tangente gefällt sind, ist dem Quadrate der kleinen Halbaxe gleich. — Der halbe Parameter d. i. die Ordinate der Ellipse im Brennpunkte ist $\frac{\beta}{\alpha} \,.\, \beta$.

5) Der Kreis sei die senkrechte Projection einer Figur, deren Ebene unter dem Winkel ε' geneigt ist; die Durchschnittslinie beider Ebenen gehe durch den Mittelpunkt und werde als die Y-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems angenommen. Für den Kreis ist $y^2 + x^2 = \rho^2$, für die Figur, von welcher der Kreis die Projection ist, $y^2 + \xi^2 \cos^2\varepsilon' = \rho^2$. Der Kreis ist also die senkrechte Projection einer Ellipse, deren Halbaxen $\beta = \rho$ und $\alpha = \rho : \cos\varepsilon'$ sind. — Eine Ellipse ist daher affin und affin liegend mit den beiden concentrischen Kreisen, deren Halbmesser die beiden Halbaxen der Ellipse sind. — Zieht man um die beiden Axen einer Ellipse Kreise und durch den Mittelpunkt eine Linie, welche den einen in C, den anderen in C′ schneidet, so ist der Durchschnitt c der Linien,

welche durch C und C′ parallel den Axen gezogen sind, ein Punkt der Ellipse. — Verbindet man die Punkte, welche die Kreistangenten in C und C′ auf den Axen bestimmen, so erhält man die Tangente, welche die Ellipse in c berührt.

II. Schiefe Projection.

Fig. 5.



6) Der Kreis sei um die gemeinschaftliche Linie $\mathfrak{AMB}$ in die Projectionsebene herabgeschlagen. Dann kann jeder beliebige Punkt c als die Projection eines Kreispunktes C angesehen werden; durch die Annahme des Punktes c ist aber die Projection des Kreises vollständig bestimmt. — Bezieht man die Projection auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem, dessen X-Axe $\mathfrak{AB}$ und dessen Y-Axe die dem senkrechten Kreishalbmesser entsprechende Linie $\mathfrak{M}$d ist, so ist die Gleichung der Projection, da sich die Ordinaten beider Figuren wie $\mathfrak{M}D = \alpha$ zu $\mathfrak{M}d = \beta$ verhalten, $y^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + x^2 = \alpha^2$ d. i. die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf zugeordnete Durchmesser. — Man erhält daher den Satz: Dreht man sämmtliche auf dem Durchmesser eines Kreises errichteten Senkrechten um denselben Winkel und verkürzt oder verlängert sie in demselben Verhältnisse, so erhält man eine Ellipse. — Dieselbe Ellipse erhielte man, wenn man auf c$\mathfrak{C}$ an der anderen Seite von $\mathfrak{AB}$ in gleichem Abstande einen Punkt c′ statt c als entsprechenden Punkt zu C annähme. Die Entwicklungen von Nr. 2) dieses Paragraphen gelten auch in diesem Falle. — Der Kreis und die Ellipse schneiden sich in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und ausserdem in zwei anderen Punkten. Wenn man in der Mitte von Cc ein Loth errichtet, welches $\mathfrak{AB}$ in Q schneidet, und den parallelen Halbmesser zu cQ zieht, welcher den Kreis in p trifft, so ist p auch ein Punkt der Ellipse. Denn es ist, wenn die Kreissehne pP || cC und P$\mathfrak{P}$ senkrecht auf $\mathfrak{AB}$ ist, leicht zu zeigen, dass $\triangle$ P$\mathfrak{P}$p $\sim$ $\triangle$ C$\mathfrak{C}$c ist; also entspricht dem Kreispunkt P der Ellipsenpunkt p. Da die Ellipsensehnen $\mathfrak{A}$p und $\mathfrak{B}$p zugleich Kreissehnen sind, und daher durch die senkrechten Halbmesser halbirt werden, so sind die mit $\mathfrak{A}$p und $\mathfrak{B}$p parallelen Ellipsendurchmesser die senkrechten Axen. — Die gemeinschaftlichen Tangenten von Kreis und Ellipse sind parallel den Richtungen Cc und Cc′.

7) Schlägt man um einen beliebigen Ellipsendurchmesser $\mathfrak{AB}$ einen Kreis, so sind Kreis und Ellipse affine Figuren; die Affinitätsaxe ist der gemeinschaftliche Durchmesser, und die Richtung der Linien, auf welchen die entsprechenden Punkte liegen, ist durch die Linie bestimmt, welche einen Endpunkt d des zugeordneten Ellipsendurchmessers mit einem Endpunkt D des senkrechten Kreisdurchmessers verbindet. — Eine Ellipse ist also durch zwei, der Grösse und Lage nach gegebene zugeordnete Durchmesser vollständig bestimmt.

§. 5. Axonometrie.

1) Um die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, nimmt man 3 feste, auf einander senkrechte Ebenen, die Coordinaten-Ebenen XOY, YOZ, ZOX, an; diese schneiden sich in 3 auf einander senkrechten Linien, den Coordinaten-Axen OX, OY, OZ; die Abstände eines Punktes von den 3 Ebenen sind die Coordinaten des Punktes. — Axonometrie bezeichnet das Verfahren, die Projection einer räumlichen Figur mit Hülfe der

Coordinaten zu bestimmen. — Zu diesem Zwecke müssen zunächst die Projectionen der Axen ihrer Lage und Grösse nach bestimmt werden.

Die Ebene der Zeichnung bilde mit XOY den Neigungswinkel ε und schneide dieselbe in der Linie MON, welche mit OX den Winkel δ bilde. Denkt man XOY erst in der Ebene der Zeichnung und dann um MN zurückgeschlagen, so erhält man nach §. 3, 1 die Projectionen Ox und Oy. Die Projection des rechten Winkels ZON ist ebenfalls ein Rechter, also die Projection Oz senkrecht auf MN, und, da OZ mit der Ebene der Zeichnung den Winkel $90^0 - \varepsilon$ bildet, so ist $Oz = OZ \,.\, \sin \varepsilon$.

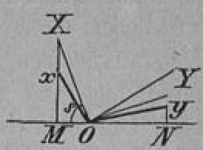


Fig. 6.

Bei der senkrechten Projection ist, wenn OX und OY gleich der Längeneinheit sind, $MO = \cos \delta$, $MX = \sin \delta$, $Mx = \sin \delta \,.\, \cos \varepsilon$, $\operatorname{tg} xOM = \operatorname{tg} \delta \,.\, \cos \varepsilon$; $Ox = \sqrt{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta \,.\, \cos^2 \varepsilon}$. Ebenso findet man $\operatorname{tg} yON = \cos \delta \,.\, \cos \varepsilon$ und $Oy = \sqrt{\sin^2 \delta + \cos^2 \delta \,.\, \cos^2 \varepsilon}$. — Wird auch OZ gleich der Längeneinheit genommen, so ist bei senkrechter Projection $Ox^2 + Oy^2 + Oz^2 = 2$. — Die Durchschnitte der Ebenen YOZ und XOZ mit der Ebene der Zeichnung bilden nach §. 1, 6 mit Ox und Oy rechte Winkel.

2) Legt man durch einen Punkt im Raume Ebenen, welche den Coordinatenebenen parallel sind, so bestimmen diese ein Parallelepipedon und schneiden auf den Axen die Längen der Coordinaten ab. Man findet daher die axonometrische Zeichnung des Punktes, wenn man auf Ox, Oy und Oz die Projectionen der Coordinaten abträgt und durch Ziehen von Parallelen die Projection der Ecke, welche O gegenüberliegt, bestimmt. —

Von einem Punkte A, welcher in der Ebene XOY liegt, kann die Projection a auch dadurch bestimmt werden, dass die durch A gezogenen, zu OX und OY parallelen Linien und die durch a gezogenen, zu Ox und Oy parallelen Linien auf MN zusammentreffen. Wenn daher die Projection der zu zeichnenden Raumfigur auf die Ebene XOY d. i. der Grundriss bekannt ist, so findet man die Projection dieses Grundrisses d. i. den sogenannten axonometrischen Grundriss als eine affine Figur nach §. 3; die Affinitätsaxe ist MN; die Richtung der Geraden, auf welchen entsprechende Punkte liegen, giebt Aa an. Durch die Punkte des axonometrischen Grundrisses sind dann parallel mit Oz Linien, welche sich zu der mit OZ parallelen Ordinate wie $Oz : OZ$ verhalten, zu ziehen.

§. 6. **Krystallographie.**

In dem Gebiete des wissenschaftlichen Unterrichts auf der Realschule findet die Projectionslehre Anwendung bei der Krystallographie. In der üblichen Bezeichnungsweise werden die Begrenzungsflächen durch ihre Durchschnitte mit den Axen bestimmt. Sind die Projectionen der Axen bekannt, so kann man die Projectionen der Durchschnitte von Krystallflächen und Axenebenen, daraus die der Durchschnittslinien zweier Krystallflächen und aus diesen die der Ecken des Krystalls finden. Es ist also eine Projections-Zeichnung des Krystalls leicht zu entwerfen und durch Herabschlagen in die Axenebenen die wirkliche Gestalt, sowie die Neigung der Flächen geometrisch zu construiren. — Zum Charakter jedes Krystalls gehört der Parallelismus gewisser Linien und die Congruenz gewisser Flächen. Bei der graphischen Darstellung der Krystalle durch Parallel-Projection behalten parallele Linien parallele Lage und congruente parallele Flächen bleiben congruent.

Senkrechte Projection ist zur Darstellung der Krystalle wenig geeignet; es würde wenigstens bei rechtwinkligen Axen nach dem Satze über die Projection des rechten Winkels in §. 1, 6 kein Axenwinkel ein Rechter bleiben, oder es müssten die Projectionen zweier Axen zusammenfallen. Man wählt daher schiefe Projection. — Um möglichst viel von den wirklichen Grössenverhältnissen in der Zeichnung beizubehalten, legt man bei 3axigen Krystallsystemen die Ebene der Zeichnung durch zwei Axen, OC und OB; diese behalten ihre Länge und gegenseitige Richtung. Die dritte Axe OA kann dann in der Zeichnung nach Lage und Grösse beliebig gewählt werden, da die Richtung der projicirenden Strahlen erst durch die getroffene Wahl bestimmt wird.

Wie die Zeichnung in speciellen Fällen auszuführen ist, möge an dem Beispiele des Leucitoëders $(a : a : \frac{1}{2}a)$ erläutert werden. In dem Oktanten OABC sind durch das gegebene Symbol die drei Flächen ABF, AEC, DBC bezeichnet, wenn D, E, F die Mitten der Axen sind. Diese 3 Flächen begrenzen von dem Oktanten ein Körperstück, welches die Axenebenen in DGE, EHF und FJD schneidet. AH ist der Durchschnitt von ABF und AEC, BJ der Durchschnitt von ABF und DBC; der Durchschnitt K von AH und BJ gehört allen 3 Flächen an und liegt daher auch auf der Durchschnittslinie CG. Der Oktant ist also begrenzt durch 3 viereckige Figuren. — Ebenso erhält man in jedem anderen Oktanten 3 Vierecke. Der Krystall ist von 24 Vierecken begrenzt. — Um die wahre Gestalt dieser congruenten Vierecke zu erhalten, zeichnet man (Fig. 8) die Axen AO und BO in ihrer wirklichen Grösse und Lage, ebenso AE und BD, und schlägt in ihre Ebene das Dreieck AEC, von dem die Seiten EC und AC = CB aus Fig. 7 bekannt sind, herab. Die Lage von H auf EC ist aus Fig. 7 bekannt; also, wenn man GC und HA zieht, das Viereck EGKH. — Um den Neigungswinkel einer Fläche AEC gegen eine Axenebene zu erhalten, denkt man von O auf AE das Loth OL gefällt; die Verlängerung desselben geht in Fig. 8 durch C. Man kann nun das rechtwinklige Dreieck OLC um OL in AOB herabschlagen. Aus der Länge der Abschnitte $AO = a$, $EO = b$, $CO = c$ findet man $2 \,.\, \triangle AOE = a \,.\, b = OL\sqrt{a^2 + b^2}$, also $\operatorname{tg} OLC = CO : OL = (c \,.\, \sqrt{a^2 + b^2}) : a.b$, beim Leucitoëder $\operatorname{tg} OLC = \sqrt{5}$. Der Neigungswinkel zweier in einer Axenebene zusammenstossenden Flächen ist die Summe der Winkel, welche beide Flächen mit derselben Ebene bilden. In der betrachteten Figur ist die Tangente desselben daher $= -\frac{1}{2}\sqrt{5}$. — Um den Neigungswinkel zweier, nicht in einer Axenebene zusammenstossenden Flächen zu construiren, denke man sich durch einen Punkt der Durchschnittslinie die Neigungsebene gelegt. Sie schneidet die Flächen in zwei auf der Kante senkrechten Linien, deren Längen in den herabgeschlagenen Flächen, und die Axenebene in einer Geraden, von welcher zwei Punkte ebenfalls in den herabgeschlagenen Flächen gefunden werden. Das aus diesen 3 Linien construirte Dreieck giebt den Neigungswinkel. In dem vorliegenden Falle ist z. B. der Neigungswinkel in der Kante GK der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, von welchem DE die Grundlinie und das von E auf GC gefällte Loth ein Schenkel ist. — Treten am Krystall Combinationsflächen auf,

Fig. 7.

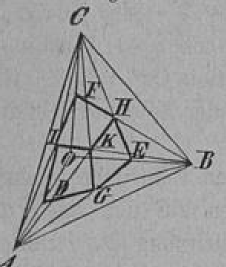
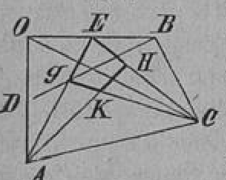


Fig. 8.



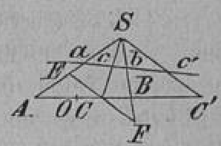
so erkennt man in ihren Durchschnitten mit den Axenebenen, welche Flächen und in welchen Linien dieselben geschnitten werden.

II. Harmonische Theilung. — Reciprocität.

§. 7. Harmonische Theilung.

1) Wenn die Abstände eines Punktes C von zwei anderen, auf derselben Geraden liegenden Punkten A und B sich ebenso verhalten, wie die Abstände des Punktes C′ von denselben Punkten, wenn also $CA : CB = C'A : C'B$ ist, so heissen die 4 Punkte harmonische, C und C′, sowie A und B heissen zugeordnete. — Die Abstände des Punktes A von C und C′ verhalten sich dann ebenfalls wie die Abstände des Punktes B von C und C′; es ist auch $AC : AC' = BC : BC'$. — Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise, sowie zweier Kugeln sind harmonisch zu den Mittelpunkten. — Liegt ein Punkt C zwischen A und B, so liegt der zugeordnete ausserhalb AB. — Ist O die Mitte von AB, so ergiebt sich $OC . OC' = AO^2$. — Rechnet man die Grössen der Abstände von dem ausserhalb CC′ liegenden Punkte A, so ist $AB . AC' + AC . AB = 2\,AC . AC'$ oder $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AC'} = \frac{2}{AB} = \frac{1}{AO}$. — Rechnet man die Grössen der Abstände von dem zwischen C und C′ liegenden Punkte B aus und ist C der zwischen A und B liegende Punkt, so erhält man $BA . BC' - BA . BC = 2\,BC . BC'$ oder $\frac{1}{BC} - \frac{1}{BC'} = \frac{2}{BA} = \frac{1}{AO}$.

Fig. 9.



Zu jedem Punkt C gehört, wenn man A und B festhält, ein einziger Punkt C′. — Liegt C in der Mitte von AB, so liegt C′ in unendlicher Ferne. Rückt C näher an B, so kommt C′ dem Punkte C entgegen, bis beide in B zusammenfallen. Geht C über B hinaus, so tritt C′ in die Strecke BA, bis C in unendliche Ferne und C′ in die Mitte gelangt. Soll nun der Punkt C′ stetig fortschreiten, so muss C an die andere Seite von BA übergehen; zu O gehört also der unendlich entfernte Punkt an beiden Seiten der Linie.

2) Verbindet man die vier harmonischen Punkte A, C, B, C′ mit einem beliebigen Punkte S und zieht durch C eine Parallele mit SC′, so ist $EC = CF$. — Umgekehrt: Halbirt SC eine zwischen SA und SB liegende Linie EF und zieht man durch S den mit EF parallelen Strahl SC′, so bestimmen die 4 Strahlen SA, SB, SC und SC′ auf jeder durch C gelegten Geraden vier harmonische Punkte. — Gerade, welche von einem Punkte ausgehen, schneiden auf Parallelen proportionale Stücke ab; folglich theilen die Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte nach vier harmonischen Punkten gezogen sind, jede Gerade harmonisch. Solche Strahlen heissen harmonische Strahlen. — Liegen auf jeder von zwei sich schneidenden Geraden 3 Punkte mit dem Durchschnitte harmonisch, so geht die Gerade, welche die dem Durchschnitte zugeordneten Punkte verbindet, durch den Punkt, in welchem sich die Verbindungslinien der anderen Punkte schneiden. Denn es müssten sonst zu 3 festen Punkten 2 vierte harmonische Punkte gehören. — Steht SC senkrecht auf der zwischen SA und SB liegenden, in C halbirten Linie EF, also auch

auf SC', so bildet SC mit SA und SB gleiche Winkel. Zwei Gerade und die Halbirungslinien der von ihnen gebildeten Winkel sind daher harmonische Strahlen.

3) Bestimmt man in einem Dreiecke durch die Halbirungslinien der inneren und äusseren Winkel die Mittelpunkte der 4 Berührungskreise, so erhält man in jeder Ecke 4 harmonische Strahlen und auf jeder Seite 4 harmonische Punkte. — Legt man durch die Ecke eines Parallelogramms eine Parallele zu der einen Diagonale, so erhält man 4 harmonische Strahlen. — Für einen Kreis ergeben sich als unmittelbare Folgerungen: Ein Durchmesser, eine darauf errichtete Senkrechte und die von dem gemeinschaftlichen Punkte nach den Endpunkten einer senkrechten Sehne gezogenen Linien sind harmonische Strahlen. — Zwei Tangenten eines Kreises bilden mit dem Durchmesser, welcher durch den Durchschnitt geht, und der Berührungssehne harmonische Richtungen d. h. 4 durch denselben Punkt gelegte, diesen Richtungen parallele Linien sind harmonische Strahlen. — Eine Tangente, die von dem Berührungspunkte nach den beiden Endpunkten eines beliebigen Durchmessers gezogenen Linien und die auf den Durchmesser gefällte Senkrechte sind harmonische Strahlen.

4) Construction von Punktepaaren, welche mit den festen Punkten A, B harmonisch sind: α) Man beschreibt über AB als Durchmesser einen Kreis, nimmt auf der Peripherie an beiden Seiten des Durchmessers zwei symmetrisch liegende Punkte S und S' an und verbindet diese mit irgend einem Punkte P der Peripherie. Die Verbindungslinien bestimmen auf AB zwei harmonische Punkte; denn der eine Schenkel des rechten Winkels APB bildet mit PS und PS' gleiche Peripheriewinkel. — β) Man construirt (Fig. 10 des folgenden Paragraphen), etwa mit Hülfe eines Parallelogramms, die harmonischen Strahlen AB, AS, Ac, AS'', legt durch B eine beliebige Linie, wodurch die Punkte S und S'' auf AS und AS'' bestimmt werden, und verbindet S und S'' mit irgend einem Punkte c der Linie Ac; man erhält dann auf AB zwei zugeordnete harmonische Punkte. Denn auf BS sind durch die von A ausgehenden Strahlen 4 harmonische Punkte bestimmt; die von c ausgehenden Strahlen sind also auch harmonisch.

§. 8. Lage der Bilder bei sphärischen Spiegeln und Linsen.

I. Spiegel. — A sei die Mitte des Spiegels, B der Mittelpunkt der Kugel, von welcher der Spiegel eine Calotte ist.

1) Concav-Spiegel: Auf der Axe sei ein leuchtender Punkt C. Den Punkt, in welchem ein reflektirter Strahl die Axe AB trifft, findet man mit Hülfe des Satzes, dass die Halbirungslinie eines inneren oder äusseren Dreieckwinkels die gegenüberstehende Seite im Verhältnisse der beiden anderen theilt. Lässt man die Punkte, in welchen die von C ausgehenden Strahlen den Spiegel treffen, mit A zusammenfallen, so erhält man die Lage des Bildes C'. Es ist dann $AC : AC' = BC : BC'$. Folglich liegen Objekt und Bild harmonisch zu A und B. Gewöhnlich benutzt man die nach §. 7, 1 sich ergebende Formel: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AC'} = \frac{1}{AO}$. Diese Formel ist so lange gültig, wie A ausserhalb CC' liegt. Liegt C zwischen A und der Mitte von AB, so liegt A zwischen C und C', und die Formel für die Grösse der Abstände wird $\frac{1}{AC} - \frac{1}{AC'} = \frac{1}{AO}$. Als allgemein gültige Formel erhält man, wenn man AC mit

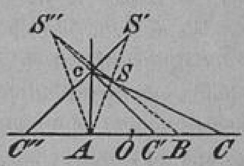
$+$ a, AC′, je nachdem es von A aus nach derselben oder nach entgegengesetzter Richtung liegt, mit $+\alpha$ oder $-\alpha$ und die Grösse der Hauptbrennweite AO mit f bezeichnet: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{f}$.

2) Convex-Spiegel. — Ist C wieder der leuchtende Punkt auf der Axe, C′ sein Bild, so erhält man ebenso wie in 1) für die Grössen der Abstände AC : AC′ = BC : BC′. Objekt und Bild liegen also harmonisch in Beziehung auf A und B. — Der Punkt C liegt immer ausserhalb AB, C′ zwischen A und B. Es ist also nach §. 7 $\frac{1}{AC'}-\frac{1}{AC}=\frac{1}{AO}$, und mit Berücksichtigung der Lage, wenn die Bezeichnung in 1) beibehalten wird, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}=-\frac{1}{f}$.

II. Linsen. — Die Physik entwickelt für Linsen dieselben Formeln, wie für Spiegel, und zwar für Convex-Linsen dieselbe wie für Concav-Spiegel und für Concav-Linsen dieselbe wie für Convex-Spiegel, nämlich $\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\pm\frac{1}{f}$. Es bezeichnet f die Grösse der Hauptbrennweite, welche bei Convexlinsen positiv, bei Concavlinsen negativ zu nehmen ist, a den Abstand des Objects von der Linse, α den des Bildes; die Bedeutung des Vorzeichens von α ist aber der bei den Spiegeln entgegengesetzt. Wenn man das Bild, welches in einem Spiegel von einem auf der Axe befindlichen Punkte entsteht, nach der anderen Seite der Axe überträgt, so erhält man die Lage des Bildes bei einer Linse mit derselben Brennweite.

Aus §. 7, 4 ergiebt sich folgende Construction für die Lage der Bilder bei Spiegeln und Linsen: Ist AO die Axe, O der Hauptbrennpunkt, AB = 2 AO, so errichte man in A eine Senkrechte Ac, lege durch A zwei, unter gleichen Winkeln gegen Ac geneigte Linien, auf welchen eine beliebig durch B gelegte Gerade die Punkte S und S″ bestimmt, mache auf AS die Strecke AS′ = AS″. Verbindet man nun S mit einem Punkte C der Axe, und den Punkt c, in welchem SC die Senkrechte schneidet, mit S″ und S′, so erhält man auf der Axe in C′ und C″ die Punkte, welche bei dem Spiegel und der Linse die Bilder von C sind. Denn A, C′, B, C sind harmonisch und AC″ = AC′.

Fig. 10.



§. 9. Pol und Polare beim Kreise. — Reciprocität.

1) Sind (Fig. 20 u. 22) O und E zugeordnete harmonische Punkte in Beziehung auf die Endpunkte eines Kreisdurchmessers AB und errichtet man in E die Senkrechte EJ, so heisst O der Pol von EJ und EJ die Polare von O. — Zu jedem Punkte in der Ebene eines Kreises gehört eine Polare, zu jeder Geraden ein Pol. — Der Radius r ist nach §. 7, 1 die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Mittelpunktes von Pol und Polare; und umgekehrt. — Die Polare des Mittelpunktes liegt in unendlicher Entfernung. Rückt der Pol vom Mittelpunkt nach der Peripherie, so nähert sich die Polare dem Kreise. Die Polare eines Kreispunktes ist die Tangente in diesem Punkte. Ist der Pol ausserhalb des Kreises, so schneidet die Polare den Kreis, und zwar in den Berührungspunkten der von dem Pole gezogenen Tangenten. Entfernt sich der Pol vom Kreise, so rückt die Polare dem Mittelpunkte näher. Geht die Polare von einer Seite des Mittelpunktes nach

der andern über, so springt der Pol von der einen Seite des verlängerten senkrechten Durchmessers in unendlicher Ferne nach der andern über.

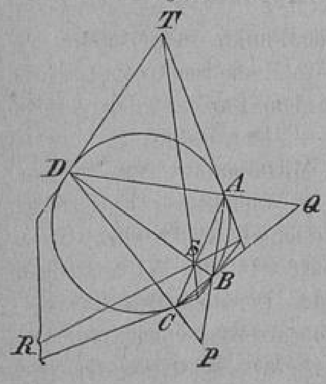
2) Jede durch den Pol gelegte Gerade wird durch Kreis und Polare harmonisch getheilt. Denn (Fig. 20 u. 22) die von H ausgehenden, nach A, O, B, E gezogenen Strahlen sind harmonisch; da AHB ein rechter Winkel ist, so sind OH und EH gegen HB gleich geneigt und schneiden auf dem Kreise gleiche Bogen ab. EF und EH sind also gegen EO gleich geneigt und daher harmonisch mit dem Durchmesser und der darauf in E errichteten Senkrechten.

3) α) Der Pol einer jeden durch O gelegten Linie liegt auf der Polaren EJ von O. β) Die Polare eines jeden auf einer Geraden EJ liegenden Punktes geht durch den Pol O von EJ. — Beweis: α) Denkt man vom Mittelpunkt M auf die durch O gelegte Gerade FH eine Senkrechte gefällt, welche FH in L und die Polare EJ in J schneiden möge, so liegen, da OEJ und OLJ rechte Winkel sind, E und L auf dem um OJ als Durchmesser beschriebenen Kreise. Es ist also $ME . MO = MJ . ML$, und, da nach §. 7 $ME . MO = r^2$, auch J der Pol von FH. β) Ist J ein beliebiger Punkt auf EJ und denkt man von dem Pole O eine Senkrechte OL auf MJ gefällt, so kann wie vorhin gezeigt werden, dass $ML . MJ = r^2$ ist; also ist OL die Polare von J. — Dreht sich also eine Secante um einen festen Punkt O, so bewegt sich der Durchschnitt der Geraden, welche in den Durchschnittspunkten den Kreis berühren, auf einer Geraden, der Polaren von O. Bewegt sich ein Punkt auf einer festen Geraden EJ und zieht man von demselben die Tangenten an einen Kreis, so geht die Berührungssehne durch einen festen Punkt, den Pol von EJ.

4) Jedem Punkt in der Ebene des Kreises entspricht eine Gerade als Polare, der Verbindungslinie zweier Punkte der Durchschnittspunkt ihrer Polaren, den Punkten einer Geraden ein Strahlenbüschel d. i. der Inbegriff von Geraden, welche durch den Pol der Geraden gehen, dem Durchschnitte zweier Geraden die Linie, welche die Pole der beiden Geraden verbindet, einem Strahlenbüschel die Punkte auf der Polaren des gemeinschaftlichen Punktes, einem Kreispunkte die Tangente und einer Tangente der Berührungspunkt. Diese Art von Verwandtschaft geometrischer Figuren heisst Reciprocität.

5) Zieht man von einem Punkte P zwei Gerade, welche den Kreis in A, B und in C, D schneiden, so treffen sich sowohl AC und BD, wie auch AD und BC auf der Polaren von P. Denn die Durchschnitte der Tangenten in A, B und in C, D sind die Pole von AB und CD; die Verbindungslinie dieser Durchschnitte ist die Polare von P und bestimmt auf beiden Sekanten PA und PD den vierten harmonischen, dem P zugeordneten Punkt; die Behauptung ist dann eine Folge von §. 7, 2. — Durch Ziehen von geraden Linien ist daher die Polare eines Punktes P zu finden; diese bestimmt die Berührungspunkte der von P ausgehenden Tangenten.

Fig. 11.



Allgemeiner lautet der Satz: Liegen 4 Punkte A, B, C, D auf einem Kreise, so werden durch dieselbe 6 Gerade und durch diese 3 Durchschnittspunkte bestimmt; jeder derselben ist der Pol der Geraden, welche durch die beiden andern geht.

6) Mit Hülfe der Reciprocität erhält man aus 5): Legt man in 4 Punkten A, B, C, D eines Kreises die Tangenten, so werden durch dieselben 6 Punkte und durch diese 3 Gerade bestimmt; jede derselben ist die Polare des Durchschnitts der beiden anderen.

7) Die Diagonalen des Sehnenvierecks ABCD schneiden sich auf der Polaren des Durchschnitts von 2 Gegenseiten; diese ist aber die Diagonale des durch dieselben Kreispunkte bestimmten Tangentenvierecks. Die Diagonalen eines durch dieselben Kreispunkte bestimmten Sehnen- und Tangentenvierecks schneiden sich daher in demselben Punkte.

III. Perspective. — Collineation.

§. 10. Perspective.

1) Zieht man von einem festen Punkte, dem Auge oder Gesichtspunkte O, nach sämmtlichen Punkten eines Raumgebildes gerade Linien, so bestimmen die Durchschnitte derselben mit einer festen Ebene, der Bildfläche oder Tafel **T**, das perspectivische Bild des Raumgebildes. — Ist das Auge in unendlicher Ferne von der Tafel, so geht dieses Verfahren, welches auch Central-Projection genannt wird, in die Parallel-Projection über. — Die Lage des Auges O zur Tafel ist durch seine Projection O' und den Abstand OO' bestimmt.

Durch jeden Punkt B des Raumes wird ein Projectionsstrahl und ein Punkt 𝔅 der Tafel als Bild des Punktes, durch jede Gerade eine Projectionsebene d. i. der Inbegriff der Projectionsstrahlen, welche nach den einzelnen Punkten der Geraden gehen, und auf **T** eine Gerade als Bild bestimmt. — Die Bilder von Punkten in einer Geraden liegen ebenfalls in einer Geraden; die Bilder von harmonischen Punkten sind harmonische Punkte. Liegt ein Punkt E in der durch O gelegten, zu **T** parallelen Ebene, so liegt das Bild in unendlicher Ferne; und die Bilder aller von E ausgehenden Geraden sind Linien, welche mit OE, also auch untereinander parallel sind. — Liegt ein Punkt nicht in der durch O gelegten, der Tafel parallelen Ebene, so bestimmen die von demselben ausgehenden Strahlen auf **T** ein Strahlenbüschel. Die Bilder harmonischer Strahlen sind harmonische Strahlen. —

Fig. 12.

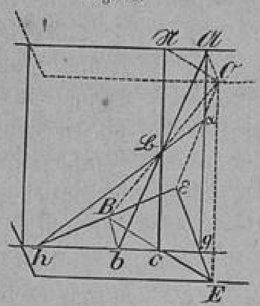
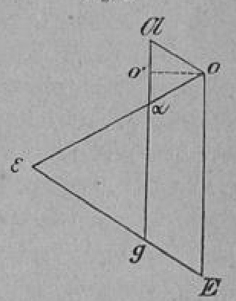


Fig. 13.

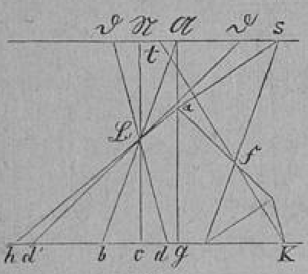


Die Projectionsebenen paralleler Geraden schneiden sich in einer durch O gehenden, derselben Richtung parallelen Linie; diese bestimmt auf **T** einen Punkt, welcher gewöhnlich Verschwindungspunkt genannt wird, da er das Bild des unendlich entfernten Punktes auf einer jeden der parallelen Geraden ist. Zu jeder Richtung gehört auf **T** ein Punkt; und umgekehrt. Nach diesem Punkte sind die perspectivischen Bilder aller parallelen, derselben Richtung angehörigen Geraden gerichtet. Er soll daher der Richtungspunkt genannt werden. — Für parallele Linien, welche zugleich der Tafel parallel sind, liegt der Richtungspunkt in unendlicher Ferne; die Bilder der Linien sind ebenfalls parallel.

2) Perspective einer Ebene. Eine Ebene **E** ist durch ihren Durchschnitt gb und durch ihre Neigung gegen **T** bestimmt. Legt man durch O eine Ebene senkrecht

auf gb, so wird **T** in einer Geraden 𝔄g, welche senkrecht auf gb ist und die senkrechte Projection O′ von O enthält, und **E** in einer Geraden gE, welche ebenfalls senkrecht auf gb ist, geschnitten. Das entstehende Parallelogramm O𝔄gE ist durch die senkrechte Projection O′, den Abstand OO′ des Auges, den Abstand O′g und den Neigungswinkel O′gE vollständig bestimmt. Man erhält daher durch Fig. 13 den Punkt 𝔄, nach welchem die Bilder von den Neigungslinien der Ebene **E** gerichtet sind, und die Gerade 𝔑𝔄, in welcher eine durch O gelegte, zu **E** parallele Ebene die Tafel schneidet. In 𝔑𝔄 sind die Richtungspunkte aller in **E** liegenden Geraden; sie ist die Richtungslinie der Ebene **E**. Ist **E** horizontal, so heisst 𝔑𝔄 der Horizont; es fällt dann 𝔄 mit O′ zusammen und heisst der Augen- oder Hauptpunkt. — Schlägt man O um 𝔑𝔄 in **T** herab, so fällt O in den Punkt α auf 𝔄g, so dass 𝔄α = 𝔄O ist. Die Richtung, welche dem Richtungspunkte 𝔑 zugehört, bildet in **E** mit der Schnittlinie gb den Winkel Ecg = α𝔑𝔄. Mit Hülfe des Punktes α sind also in **T** die den Richtungen in **E** zugehörigen Richtungspunkte und umgekehrt, sowie die Winkel, welche die Linien in **E** mit einander bilden, zu finden. Macht man (Fig. 14) auf der Richtungslinie 𝔄𝔇 und 𝔄𝔇′ gleich 𝔄α, so erhält man die Richtungspunkte der Geraden, welche in **E** (Fig. 15) einen Winkel von 45° mit der Schnittlinie bilden. Bei horizontaler Lage von **E** heissen 𝔇 und 𝔇′ Distanzpunkte, da dann 𝔄𝔇 und 𝔄𝔇′ gleich der Distanz des Auges von der Tafel sind. — Der Richtungspunkt von Linien, welche mit gb parallel sind, fällt in unendliche Ferne; die Bilder solcher Linien sind ebenfalls parallel. Die Lage der Bilder kann durch die Durchschnitte mit einer durch O gelegten, auf der Richtung senkrechten Ebene, also durch Fig. 13 bestimmt werden.

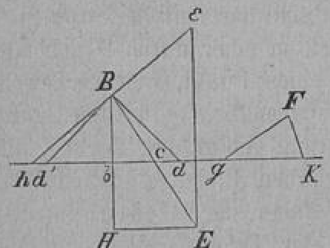
Fig. 14.



3) Das perspectivische Bild einer Geraden ist bekannt, wenn man ihren Durchschnitt mit der den Ebenen **E** und **T** gemeinschaftlichen Linien und ihren Richtungspunkt kennt. So entsprechen den von B ausgehenden Strahlen in Fig. 15, welche die Ebene **E** darstellt, die von 𝔅 ausgehenden Strahlen in Fig. 14, welche die Ebene **T** darstellt.

Das Bild eines Punktes B wird gefunden, wenn man durch B irgend 2 Linien legt und den Durchschnitt des Bildes dieser Linien bestimmt. — Liegt der Punkt H auf der Geraden, welche der Schnittlinie von **E** und **T** parallel ist und zugleich E enthält, so werden die Bilder aller Geraden, welche durch H gehen, parallel; das Bild von H liegt unendlich fern. Die Richtung der Geraden, welche in **T** den durch H gelegten Strahlen entsprechen, ist bekannt, wenn man die Perspective von einem derselben kennt; am einfachsten findet man das Bild b𝔄 von dem auf der Grundlinie senkrechten Strahl Hb.

Fig. 15.



4) Die Grösse einer Linie findet man aus ihrem perspectivischen Bilde mittels des Theilungspunktes. Ist 𝔉s das perspectivische Bild einer Geraden, s ihr Richtungspunkt und trägt man von s aus auf der Richtungslinie einer Ebene **E**, welche die Gerade ent-

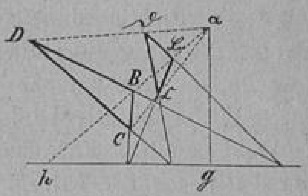
hält, st = sα ab, so schneiden die Strahlen, welche von t ausgehen, auf der gemeinschaftlichen Linie der Ebenen **E** und **T** die wirklichen Längen der Stücke ab, deren perspectivische Bilder die auf $\mathfrak{F}$s abgeschnittenen Stücke sind. Denn die in **E** befindlichen Geraden, deren Richtungspunkte t und s sind, schliessen einen Winkel sαt ein; den gleichen Winkel αts bilden die Geraden, deren Bilder durch t gehen, mit der gemeinschaftlichen Linie der Ebenen **E** und **T**. Es heisst t der Theilungspunkt, weil mittels desselben auf eine perspectivische Linie Stücke abgetragen werden können, welche gleichen Theilen der wirklichen Linien entsprechen. — Wie §. 11 zeigen wird, bestimmen auch die von α ausgehenden Strahlen die wahre Länge einer Geraden, deren Richtungspunkt s ist, auf einer Linie, welche parallel zu αs durch den Durchschnitt der Geraden und der Ebene **T** geht.

Die Distanzpunkte sind die Theilungspunkte für die Linien, welche durch den Hauptpunkt α gehen, also für die Neigungslinien der Ebene **E**. — Jeder Punkt der Richtungslinie ist der Theilungspunkt aller Geraden, welche parallel der Richtungslinie sind. Denn zwei von einem solchen Punkte ausgehende Gerade bestimmen in **E** ein Parallelogramm.

§. 11. Collineation.

1) Schlägt man die Ebene **E** in **T** herab, so behalten alle Punkte der gemeinschaftlichen Linie ihre Lage bei; jede Linie von **E** schneidet also die ihr entsprechende Linie von **T** in einer festen Geraden. Ausserdem fällt noch der Punkt ε (Fig. 13) mit seinem Bilde α zusammen; jeder Punkt B von **E** liegt also auf dem Strahle, welcher α mit seinem Bilde $\mathfrak{B}$ verbindet. — Die Figuren der Ebenen **E** und **T** stehen also in der Beziehung, dass 1) entsprechende Punkte auf Strahlen liegen, welche durch einen festen Punkt gehen, und 2) entsprechende Gerade sich auf einer festen Geraden schneiden.

Fig. 16.



Diese Art der Verwandtschaft heisst Collineation, der feste Punkt das Centrum, die feste Gerade die Axe der Collineation. — Eine ebene Figur und ihr perspectivisches Bild können immer in collineare Lage gebracht werden. Der Durchschnitt der Ebene und der Bildfläche wird die Axe, und der Punkt, in welchen das Auge fällt, wenn eine durch das Auge den Neigungslinien der Ebene parallel gelegte Gerade in die Bildfläche herabgeschlagen wird, das Centrum der Collineation.

2) Wird die eine von zwei collinear liegenden Figuren um die Collineationsaxe gedreht, so ist die eine das perspectivische Bild der anderen. — Denn wird BCD um die Axe gedreht, so bleiben zwei entsprechende Gerade, da ihr Durchschnittspunkt dieselbe Lage behält, in einer Ebene. Die Geraden B$\mathfrak{B}$, C$\mathfrak{C}$, D$\mathfrak{D}$ treffen sich, als die Durchschnittslinien dreier Ebenen, in einem Punkt oder sind parallel. Letzteres ist nicht möglich, da sonst B$\mathfrak{B}$ und C$\mathfrak{C}$, wie in §. 2, auch in der ursprünglichen Lage parallel sein müssten.

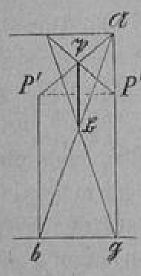
3) Die Eigenschaften zweier perspectivischen ebenen Figuren gelten also auch für collineare. — Es entsprechen sich daher gegenseitig Punkte auf einer Geraden, harmonische Punkte, die Durchschnitte entsprechender Geraden, das Centrum, die Punkte auf der Axe, Strahlenbüschel, harmonische Strahlenbüschel. — Parallelen Geraden der einen Figur ent-

sprechen in der collinearen Figur Gerade, welche sich auf einer mit der Axe parallelen Linie schneiden; diese Linie heisst die Gegenaxe und enthält die Punkte, welche den unendlich entfernten Punkten in der collinearen Figur entsprechen. — Zu jeder Richtung der einen Figur gehört ein Punkt in der Gegenaxe der andern, und umgekehrt. — Darauf beruht der Beweis des in §. 10, 4) angegebenen Verfahrens, die wirkliche Länge einer perspectivischen Linie zu finden. — Der Abstand des Centrums von der einen Gegenaxe ist gleich dem Abstande zwischen der Axe und der anderen Gegenaxe. Der Beweis ergiebt sich aus Fig. 13. — Das Produkt der Abstände zweier entsprechender Punkte von den ihrer Figur angehörigen Gegenaxen ist constant, und zwar gleich dem Produkte der Abstände des Centrums von den beiden Gegenaxen. Denn in Fig. 15 verhalten sich BH zu εE wie hb zu hc, und in Fig. 14 verhalten sich $\alpha\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ ebenfalls wie hb zu hc.

§. 12. Perspectivisches Zeichnen.

Die gewöhnliche Aufgabe des praktischen Zeichnens ist: aus dem Grund- und Aufriss einer räumlichen Figur d. i. aus den senkrechten Projectionen in eine horizontale und in eine verticale Ebene das perspectivische Bild auf eine verticale Bildfläche zu entwerfen. Die Lage der Bildfläche ist durch ihren Durchschnitt mit dem Grundrisse, die Grundlinie, die Lage des Auges ist durch ihre senkrechten Projectionen auf Bildfläche und Grundriss d. i. durch den Hauptpunkt $\mathfrak{A}$ und den Fusspunkt E gegeben. Damit sind zugleich gegeben: die Richtungslinie aller horizontalen Linien oder der Horizont, die Distanzpunkte $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$, sowie die Hülfspunkte α und ε; es ist nämlich $\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{D}' = \mathfrak{A}\alpha = gE$ und $g\varepsilon = g\alpha$. — Um nun das Bild eines Punktes B des Grundrisses zu finden, zieht man durch B Gerade; der Punkt $\mathfrak{B}$, in welchem die Bilder dieser Geraden sich schneiden, ist das Bild von B. Für eine leichte Ausführung der Zeichnung empfehlen sich als solche Geraden (Fig. 14 u. 15): 1) die Linie BE nach dem Fusspunkte; ihr Bild ist die Senkrechte $\mathfrak{N}c$; 2) die Senkrechte Bb; ihr Bild ist $b\mathfrak{A}$; 3) die Gerade εh; ihr Bild ist αh; 4) die Geraden Bd und Bd′, welche auf der Grundlinie Stücke gleich Bb abschneiden; ihre Bilder sind $\mathfrak{D}d$ und $\mathfrak{D}'d'$. — Ist das perspectivische Bild $\mathfrak{B}$ eines Punktes B bekannt, so findet man das Bild eines jeden andern Punktes C durch das Ziehen von zwei Geraden, nämlich von αC und von der Geraden, welche $\mathfrak{B}$ mit dem Durchschnitte von BC und der Grundlinie verbindet. — Ist die Bildfläche nicht senkrecht auf dem Grundrisse angenommen, so findet man durch das in Fig. 13 angedeutete Verfahren die Punkte $\mathfrak{A}$, α, ε, E, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$. Im Uebrigen bleibt die Ausführung der perspectivischen Zeichnung des Grundrisses dieselbe.

Fig. 17.



Um das Bild eines Punktes P, dessen horizontale Projection B ist, zu finden, denkt man sich durch P eine auf der Grundlinie senkrechte Ebene gelegt. Diese schneidet die Bildfläche in einer Linie bP′, welche senkrecht auf der Grundlinie ist. Macht man auf derselben bP′ gleich der in dem Aufrisse gegebenen Höhe BP, so ist BPbP′ ein Rechteck und $\mathfrak{A}$ der Richtungspunkt von Bb und PP′. Der Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem sich $P'\mathfrak{A}$ und die durch $\mathfrak{B}$ mit bP′ parallel gezogene Linie treffen, ist daher das Bild von P. — Hat man mehrere Höhen einzutragen, so vereinfacht sich das Verfahren, wenn man die Höhen gP″ auf $\mathfrak{A}g$ abträgt und von P″ nach dem Punkte, in welchem g𝔅 den Horizont schneidet, eine Gerade zieht. — Ein allgemeineres Verfahren, perspectivische Zeichnungen zu entwerfen, bildet den Inhalt von §. 18.

§. 13. Einige Sätze vom Drei- und Viereck, welche mittels der Perspective hergeleitet werden.

1) Schneiden sich die entsprechenden Seiten zweier Dreiecke auf einer Geraden, so gehen die Verbindungslinien der Ecken durch einen Punkt oder sind parallel.

2) Liegen die Ecken zweier Dreiecke auf drei Strahlen, welche durch einen Punkt gehen oder parallel sind, so schneiden sich die Seiten auf einer Geraden oder sind parallel.

Beweis: 1) Aus §. 2 und §. 11 geht hervor, dass das eine Dreieck, wenn es um die Gerade gedreht wird, die Perspective oder Parallel-Projection des anderen wird. Beim Zurückschlagen in dieselbe Ebene gelangen daher beide Dreiecke in collineare oder affine Lage. Satz 2) folgt indirect aus 1).

3) Schneidet man die 3 Seiten eines Dreiecks durch eine Gerade und bestimmt auf jeder Seite zu dem Durchschnittspunkte den vierten harmonischen Punkt, so schneiden sich die 3 Geraden, welche diese mit den Ecken verbinden, in einem Punkte.

Beweis: Man setze das Auge in einen beliebigen Punkt O ausserhalb der Ebene des Dreiecks und entwerfe auf eine Ebene, welche parallel der durch die Gerade und durch O gelegten Ebene ist, das perspectivische Bild des Dreiecks. Von den nach den 4 harmonischen Punkten einer Seite gezogenen Strahlen treffen nur 3 die Bildfläche, während der vierte ihr parallel ist. Da diese Strahlen harmonisch sind, so wird das Bild ein Dreieck, in welchem die Seiten halbirt sind. Den 3 Linien von den Ecken entsprechen im Bilde Linien, welche von den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogen sind; diese treffen im Schwerpunkte des Dreiecks zusammen. Folglich schneiden sich auch die Linien, deren Bild sie sind, in einem Punkte. — Aus 3) folgt indirect:

4) Zieht man von den 3 Ecken eines Dreiecks Gerade, welche sich in einem Punkte schneiden, und bestimmt auf jeder Seite den vierten harmonischen Punkt, so liegen diese 3 Punkte auf einer Geraden.

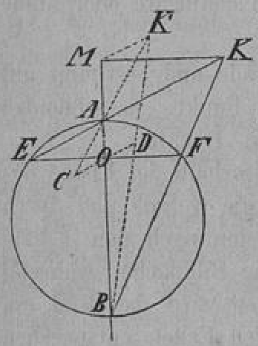
5) Ein vollständiges Vierseit hat 4 Seiten, welche sich in 6 Punkten treffen; diese bestimmen 3 Diagonalen. Im vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch die beiden anderen harmonisch getheilt.

Beweis: Denkt man durch eine Diagonale und durch einen beliebigen, ausserhalb der Ebene des Vierseits angenommenen Punkt O eine Ebene und entwirft auf eine parallele Ebene von O aus das perspectivische Bild, so erhält man ein Parallelogramm. In diesem halbiren sich die Diagonalen. Folglich sind die Linien, welche von O nach 2 Ecken des Parallelogramms und nach dem Mittelpunkt der Diagonalen gehen, und die Linie, welche von O parallel der Diagonale gezogen wird, harmonische Strahlen und bestimmen auf einer Diagonale des ursprünglichen Vierseits 4 harmonische Punkte.

§. 14. Kreis als perspectivisches Bild eines Kreises. Sehnen- und Tangenten-Sechseck.

1) Die Projectionsstrahlen, welche einen Kreis perspectivisch abbilden, sind die Seiten eines Kreiskegels. Ausser den Ebenen, welche dem Grundkreise parallel sind, giebt es im schiefen Kreiskegel noch eine zweite Lage von Ebenen, welche den Kegel in Kreisen schneiden. Diese Ebenen stehen senkrecht auf dem normalen Axendreieck und schneiden dasselbe in einer Linie, welche gegen die eine Seite ebenso geneigt ist, wie der Durchschnitt des Grundkreises gegen die andere. — Mit Hülfe dieser Wechselschnitte kann man zu jedem Kreise einen perspectivischen Kreis finden, wenn zugleich noch verlangt wird, dass eine ausserhalb des Kreises gegebene Linie MK Richtungslinie werden soll. Man ziehe den Durchmesser AB, welcher auf MK senkrecht steht, bestimme den Pol O zu MK und ziehe die senkrechte Sehne EOF; EA treffe MK in K. Errichtet man nun in M auf der Ebene des Kreises eine Senkrechte MK' = MK, so ist K' die Spitze, der Kreis AEBF der Grundkreis eines Kegels, welcher von der durch EF gelegten, auf AB senkrechten Ebene in einem Kreise geschnitten wird. Denn man kann K dadurch in die Lage von K' bringen, dass man KM um die Linie MAB dreht; EO kommt in die Lage CO, FO in DO, KAE in K'AC; nach §. 7, 2 liegt F auf KB und D auf K'B. Da CO = EO = OD und $EO^2 = AO \cdot OB$, so lässt sich durch C, A, D, B ein Kreis legen; also ist der Durchschnitt CD des einen Kreises gegen die eine Seite des normalen Axendreiecks ebenso geneigt, wie der Durchschnitt des andern Kreises gegen die andere.

Fig. 18.



2) Sind in einem Kreise 2 Sehnen AB und ab parallel, so ist, wenn die Bogen in gleichem Sinne gerechnet werden, Aa = bB und Ab = aB, aber nicht Aa = Bb; und umgekehrt. — Sind die Sehnen AB und ab, sowie BC und bc parallel, so ist Bogen Ab = aB und bC = Bc, also auch AC = ac, und daher Ac || Ca; d. h. sind in dem Sechseck ABCabc 2 Paar Seiten parallel, so sind auch die dritten parallel. — Sind die Sehnen AB und ab, BC und bc, CD und cd parallel, so zeigt man ebenso, dass Bogen Ad = aD, also AD parallel ad ist; d. h. sind 3 Paar Seiten zweier Sehnenvierecke parallel, so ist auch das vierte Paar Seiten parallel.

Allgemein: Sind 2n Paar Seiten eines $(4n + 2)$ecks im Kreise parallel, so ist auch das $(2n + 1)$te Paar parallel. Sind von zwei $(2n)$ecken $(2n - 1)$ Paar Seiten parallel, so ist auch das letzte Paar parallel.

3) Da jedem Paar paralleler Seiten in dem perspectivischen Kreise ein Paar Seiten, welche sich auf der Richtungslinie schneiden, entsprechen, so gelten diese Sätze auch, wenn man für zwei parallele Gerade zwei Gerade, welche sich auf derselben ausserhalb des Kreises liegenden Geraden schneiden, setzt. — Für das Sechseck heisst der Satz: Schneiden sich 2 Paar Gegenseiten eines Sehnensechsecks auf einer ausserhalb des Kreises liegenden Geraden, so schneidet sich auch das dritte Paar auf derselben Geraden. — Bekanntlich gilt der Satz auch, wenn die Gerade den Kreis schneidet; der gegebene Beweis gilt aber

nur für den angegebenen Fall. — Lässt man 2 Punkte des Sechsecks zusammenfallen, so geht die Richtung der Sehne in die Tangente über, und es ergeben sich aus dem Satze für das Sechseck Sätze für das Fünf-, Vier- und Dreieck.

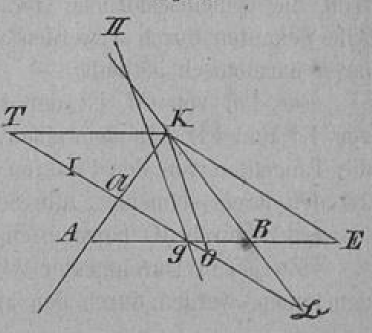
4) Gehen von 2 Punkten der Geraden MK in Nr. 1) Tangentenpaare aus, so bestimmen diese in dem perspectivischen Bilde einen umschriebenen Rhombus. Die Diagonalen des Rhombus gehen durch den Mittelpunkt; die Berührungspunkte bestimmen 4 Paar Gerade, von denen 2 den Diagonalen des Rhombus parallel sind und 2 durch den Mittelpunkt gehen. Dem Mittelpunkt des zweiten Kreises entspricht in dem ersten Kreise der Pol O der Geraden MK. Man erhält daher den Satz (cf. §. 9): Gehen von zwei Punkten einer ausserhalb eines Kreises liegenden Geraden 2 Tangentenpaare I, II und III, IV aus, welche den Kreis in den Punkten 1, 2, 3, 4 berühren, so gehen die Diagonalen, sowie die Geraden 1 2 und 3 4 durch den Pol der Geraden; die Geraden 1 3 und 2 4, sowie 1 4 und 2 3 treffen mit der durch die Durchschnitte der entsprechenden Tangenten bestimmten Diagonale auf der ursprünglichen Geraden zusammen. — Nachdem dieser Satz für den speciellen Fall bewiesen ist, lässt sich leicht zeigen, dass er auch gilt, wenn die ursprüngliche Gerade den Kreis schneidet.

5) Wenn Verbindungslinien von 2 Paaren gegenüberstehender Ecken eines Tangentensechsecks am Kreise durch den Mittelpunkt gehen, so geht auch die Verbindungslinie des dritten Paars durch denselben. Zu einem Kreise lässt sich nach Nr. 1) ein perspectivischer Kreis finden, so dass ein gegebener innerer Punkt des einen dem Mittelpunkte des anderen entspricht. Man erhält daher den Satz: Schneiden sich die Verbindungslinien von 2 Paaren gegenüberstehender Ecken eines Tangentensechsecks in einem innerhalb des Kreises liegenden Punkte, so geht auch die Verbindungslinie des dritten Paars durch denselben Punkt. — Bekanntlich gilt der Satz allgemein; die gegebene Herleitung passt aber nur für den speciellen Fall. — Dieser Satz ergiebt sich auch mittels Reciprocität aus dem entsprechenden Satze vom Sehnensechseck. — Lässt man 2 Tangenten in eine Richtung zusammenfallen, so fallen zwei Ecken in einen Berührungspunkt zusammen, und es ergeben sich Sätze für das Fünf-, Vier- und Dreieck.

§. 15. **Schnitte des Kreiskegels.**

Die perspectivischen Bilder eines Kreises erhält man in den Figuren, in welchen ein Kreiskegel durch Ebenen geschnitten wird. — Zunächst sollen die Figuren betrachtet werden, deren Ebenen senkrecht auf dem normalen Axendreieck sind. — In parallelen Ebenen entstehen ähnliche Figuren; denn alle Gerade, welche von der Spitze ausgehen, werden durch zwei parallele Ebenen in proportionale Stücke getheilt; die Geraden, welche sich in beiden Ebenen entsprechen, stehen in demselben Verhältnisse und sind parallel. — Die Lage einer Ebene **T** ist bestimmt durch die Linie 𝔄𝔅, in welcher sie das Axendreieck KAB schneidet. Die Durchschnittslinie von **T** und vom Grundkreise, dessen Durchmesser AB ist,

Fig. 19.



steht in g senkrecht auf AB und $\mathfrak{AB}$; sie enthält alle die Punkte, welche dem Kreise und seinem Bilde gemeinschaftlich sind. Die mit $\mathfrak{AB}$ parallel durch K gelegte Linie bestimmt in dem Grundkreise, dessen Ebene mit **E** bezeichnet werden möge, den Punkt E. Eine durch E auf AB senkrecht gelegte Gerade EJ ist die Richtungslinie der Ebene **T** in **E**. — In Beziehung auf die Gestalt des perspectivischen Bildes sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fig. 20.

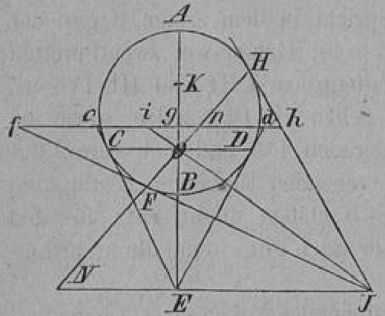
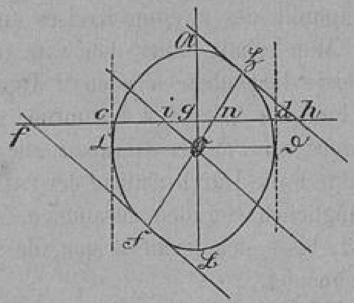


Fig. 21.



1) $\mathfrak{AB}$ schneidet beide Seiten KA und KB des Axendreiecks. Das Bild des Kreises ist eine Ellipse. — Fig. 20 stellt die Ebene des Grundkreises, Fig. 21 die des Bildes vor. — Man bestimme auf AB den Pol O der Richtungslinie EJ. Da A, O, B, E harmonische Punkte und $\mathfrak{AB} \parallel$ KE ist, so entspricht dem Punkte O die Mitte O von $\mathfrak{AB}$. Es ergiebt sich nun als entsprechend:

Fig. 20: Jede Sekante durch O wird durch die Kreispunkte und EJ harmonisch getheilt. — Die Berührungssehne CD ist senkrecht auf AB. — Sekanten durch E werden in CD harmonisch getheilt. — Die Tangenten in C und D schneiden sich in E. Sehnen, welche parallel CD sind, werden durch AB halbirt. — Die Tangenten in A und B sind parallel CD. —

Eine durch O gelegte Sehne FH schneidet die gemeinschaftliche Gerade beider Figuren in n. — Die Tangenten in F und H schneiden sich auf JE in J; die Gerade JO trifft die gemeinschaftliche Gerade in i. — Alle Sekanten durch J werden von der Polaren harmonisch getheilt. —

Der Pol von OJ ist der Durchschnitt von EJ und FH. In demselben treffen sich die Tangenten von den Punkten, in welchen JO den Kreis schneidet; alle Sekanten von N werden durch JO harmonisch getheilt. —

Fig. 21: Jede Sehne durch O ist in O halbirt; O ist also Mittelpunkt. — Der Durchmesser $\mathfrak{CD}$ ist senkrecht auf $\mathfrak{AB}$. — Sehnen, welche parallel $\mathfrak{AB}$ sind, werden durch $\mathfrak{CD}$ halbirt. — Die Tangenten in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind parallel $\mathfrak{AB}$. — Sehnen, welche parallel $\mathfrak{CD}$ sind, werden durch $\mathfrak{AB}$ halbirt. — Die Tangenten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind parallel $\mathfrak{CD}$. —

Der entsprechende Durchmesser schneidet die gemeinschaftliche Gerade in demselben Punkte n. — Die Tangenten in $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$ sind parallel; ihre Richtung ist durch iO gegeben. — Alle Sehnen, parallel iO, werden durch $\mathfrak{FH}$ halbirt. —

Die Tangenten in den Endpunkten des durch iO bestimmten Durchmessers sind parallel $\mathfrak{FH}$; alle Sehnen parallel $\mathfrak{FH}$ werden durch den Durchmesser iO halbirt. —

Zu jedem Durchmesser $\mathfrak{FH}$ gehört also ein zugeordneter, d. h. die Sehnen, parallel dem einen, werden durch den anderen halbirt, und die Tangenten in den Endpunkten des einen sind dem anderen parallel. — Die Lage und Länge des Durchmessers 𝔉ℌ wird mit Hülfe der Punkte i, n, f, h, in welchen die gemeinschaftliche Linie von OJ, FH, JF, JH geschnitten wird, gefunden.

2) 𝔄𝔅 schneidet die eine Seite KB des Axendreiecks in der Verlängerung, wie die Gerade II in Fig. 19. Das Bild des Kreises ist eine Hyperbel. — Die Richtungslinie EJ schneidet den Kreis, Fig. 22; der Pol O derselben liegt ausserhalb des Kreises. Der entsprechende Punkt O, Fig. 23, liegt, wie in Nr. 1), in der Mitte von 𝔄𝔅 und ist Mittelpunkt des perspectivischen Bildes. Aber nicht alle durch diese Punkte gezogenen Geraden treffen den Kreis und sein Bild.

Fig. 22.

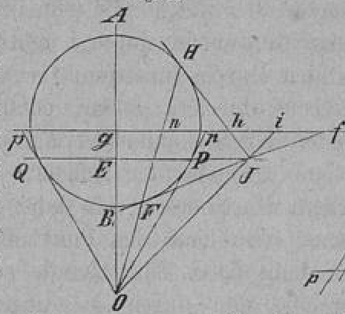


Fig. 23.

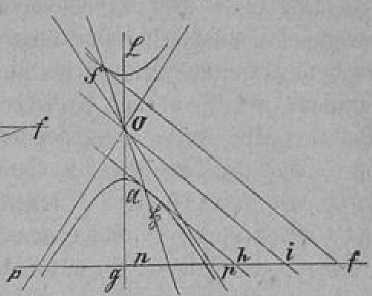


Fig. 22: Der Kreis liegt zwischen den von O gezogenen Tangenten OQ und OP; diese berühren in den Durchschnittspunkten von EJ und treffen die gemeinschaftliche Durchschnittslinie in den beiden Punkten p.

Fig. 23: Die Curven liegen zwischen zwei von O ausgehenden Geraden, welche durch die beiden Punkte p bestimmt sind; diese berühren in unendlich entfernten Punkten. Es sind die Asymptoten.

Ebenso, wie in 1) findet man: Die Tangenten in 𝔄 und 𝔅 stehen senkrecht auf 𝔄𝔅; die Sehnen, senkrecht auf 𝔄𝔅, werden durch 𝔄𝔅, die Sehnen, parallel mit 𝔄𝔅, werden durch eine Linie, welche durch O senkrecht auf 𝔄𝔅 gezogen ist, halbirt. Die Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers 𝔉ℌ sind parallel Oi, die Sehnen, parallel mit Oi, werden durch 𝔉ℌ und die Sehnen, parallel mit 𝔉ℌ, werden durch Oi halbirt. Zu jedem Durchmesser giebt es also eine zugeordnete Richtung. — Die Länge eines Durchmessers wird wie in Nr. 1 gefunden. — Je zwei zugeordnete Durchmesser bilden mit den Asymptoten harmonische Strahlen; denn, da J der Pol von FH ist, so wird EJ, also auch gi durch OQ, OH, OP, OJ in 4 harmonischen Punkten geschnitten. — Daraus folgt weiter: Das Stück einer Tangente zwischen den Asymptoten wird im Berührungspunkte halbirt; denn die Tangente ist parallel dem einen der 4 harmonischen Strahlen. — Sind die Asymptoten senkrecht auf einander, so bilden die zugeordneten Richtungen gleiche Winkel mit jeder der Asymptoten, und der Durchmesser ist gleich der halben, von den Asymptoten begrenzten Tangente.

3) 𝔄𝔅 wird der einen Seite des Kegels parallel, Fig. 24. Das Bild des Kreises ist eine Parabel. — Die Richtungslinie fällt mit der Tangente JB des Kreises zusammen; der Pol O derselben ist B, während der entsprechende Punkt 𝔇 in un-

Fig. 24.

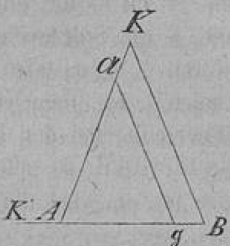
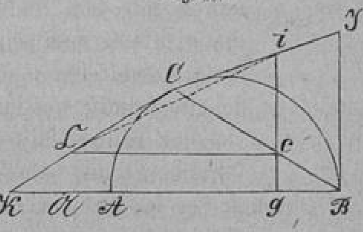


Fig. 25.



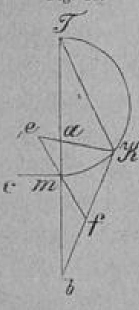
endlicher Ferne liegt. Die Curve hat keinen Mittelpunkt. — Allen Geraden, welche durch B gehen, entsprechen Linien, welche parallel der Axe 𝔄g der Curve sind; diese werden Durchmesser genannt, da der vorliegende Fall aus 1) und 2) hervorgeht, wenn der Mittelpunkt in unendliche Ferne rückt. Den auf AB senkrechten Kreissehnen entsprechen Sehnen der Curve, welche auf der Axe senkrecht sind. Diese Sehnen werden also von der Axe halbirt. — Der Kreistangente JC, welche die gemeinschaftliche Durchschnittslinie in i schneidet, entspricht eine Tangente, welche durch i geht; der Berührungspunkt 𝔈 liegt auf dem Durchmesser, welcher den Durchschnittspunkt c von BC und gi enthält. — Den Geraden, welche in der Kreisebene durch J gehen, entsprechen in der Curve parallele Linien. Alle von J ausgehenden Kreissekanten werden durch CB harmonisch getheilt; also werden alle Sehnen der Curve, welche der Tangente in 𝔈 parallel sind, durch den Durchmesser 𝔈c halbirt. Jedem Durchmesser ist daher eine Richtung zugeordnet. — Den Curven-Punkt 𝔈 findet man, wenn man den Punkt K in Fig. 24 in die Ebene des Kreises herabschlägt; es muss dann KC𝔈 eine Gerade sein und KJ die Richtung der parallelen Linien angeben, welche den durch J gezogenen Linien entsprechen, also KJ || 𝔈i sein.

Ist die Durchschnittsebene nicht senkrecht auf dem normalen Axendreieck, so ist ihre Lage durch die Gerade, welche sie mit dem Grundkreise gemein hat, und durch die Gerade, in welcher eine durch die Kegelspitze gelegte parallele Ebene den Grundkreis schneidet, gegeben, also durch g und E in Fig. 19 und durch die Richtung von EJ in Fig. 20. Dem Pole O von EJ entspricht wieder der Mittelpunkt 𝔒 der perspectivischen Figur, da alle Sekanten des Kreises durch O und die Verschwindungslinie harmonisch getheilt werden.

§. 16. Kreis als perspectivisches Bild der Kegelschnitte.

1) Ein Kegelschnitt ist vollständig bestimmt, wenn eine Axe ab und ein Punkt c gegeben ist. Mittels dieser Bestimmungsstücke lassen sich zu jedem Kegelschnitte perspectivische Kreise finden. Schneidet die Senkrechte von c die Axe in m, so suche man auf der Axe den vierten, m zugeordneten harmonischen Punkt T, lege durch T in einer auf der Ebene abc senkrechten Ebene eine Gerade TK = (cm . aT) : am. Dann ist K die

Fig. 26.



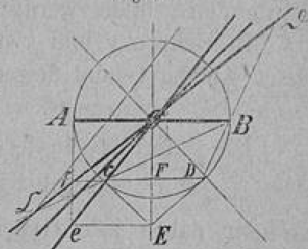
Spitze, die Curve abc die Grundfläche eines Kegels, welcher in der durch cm gelegten, zu TK parallelen Ebene in einem Kreise geschnitten wird. — Beweis: Schneiden Ka und Kb diese Ebene in e und f, so ist me = mf und emf || KT; me : TK = am : aT, also ist me = mc. Es lässt sich daher um m mit dem Radius me = mf = mc ein Kreis legen. Betrachtet man diesen als Grundfläche und K als Spitze eines Kegels, so ist Kef das normale Axendreieck; der durch a, b, c, also senkrecht auf das Axendreieck gelegte Schnitt bestimmt nach §. 15 einen Kegelschnitt, dessen Axe ab ist. — Bei der Ellipse fällt m innerhalb, bei der Hyperbel ausserhalb *ab*, bei der Parabel ist am = aT. — Wird TK so gelegt, dass es Sehne in dem um Tm als Durchmesser beschriebenen Kreise ist, so wird der Kreiskegel ein gerader, da nun auch Kme ein Rechter ist.

2) Jeder Kegelschnitt darf nun als das perspectivische Bild eines Kreises angesehen werden. Es sind daher alle Sätze, welche sich auf die Durchschnitte von Geraden und die harmonische Lage von Punkten und Geraden beziehen, unmittelbar auf jeden Kegelschnitt zu übertragen. Die Sätze in §. 9 und §. 14 gelten für alle Kegelschnitte.

§. 17. Construction und Eigenschaften der Hyperbel und Parabel.

1) Eine ähnliche Rolle wie der Kreis unter den Ellipsen spielt die gleichseitige Hyperbel unter den Hyperbeln; alle Hyperbeln können als affine Figuren der gleichseitigen angesehen werden. — Die gleichseitige Hyperbel d. i. diejenige, deren Asymptoten senkrecht auf einander stehen, wird am leichtesten hergeleitet aus dem geraden Kegel, dessen Axenschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ist. In Fig. 27 stehe senkrecht über der Mitte des Kreises die Spitze eines solchen Kegels; in A sei senkrecht auf dem Durchmesser AB eine Ebene durch den Kegel gelegt und um A in die Ebene des Kreises herabgeschlagen. Die Tangente in A ist dann die Axe, B das Centrum der Collineation; in dem auf AB senkrechten Durchmesser OE fallen die beiden Gegenaxen, in O fallen die Mittelpunkte von Kreis und Hyperbel zusammen.

Fig. 27.



Es entsprechen sich:

Im Kreise: Gerade parallel AB. — Gerade durch den Hauptpunkt O. — Die Sehne CD parallel AB. — Strahlen von einem Punkte E der Gegenaxe. — Die Tangenten in C und D schneiden sich in E. — Die Sekanten von E werden durch CD harmonisch getheilt. — Gerade ausserhalb des Kreises parallel mit AB. — Gerade durch F werden in der Polaren Ee harmonisch getheilt. — Tangenten in den Durchschnittspunkten von OE und Kreis.

In der Hyperbel: Gerade durch den Hauptpunkt O. — Gerade parallel AB. — Der Durchmesser $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. — Parallele, deren Richtung Oe ist. — Die Tangenten in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind parallel Oe. — Die Sehnen parallel Oe werden von $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ halbirt. — Durchmesser, welche die Hyperbel nicht treffen. — Sehnen parallel Of werden vom Durchmesser Oe halbirt. — Die Asymptoten, welche senkrecht auf einander sind.

Man findet den Hyperbelpunkt $\mathfrak{C}$, welcher dem Kreispunkte C entspricht, indem man von C die Senkrechte Cf auf die Tangente in A fällt und den Durchschnitt $\mathfrak{C}$ von Of und BC sucht. Man findet die Tangente in $\mathfrak{C}$, indem man vom Punkte E, in welchem OE die Tangente in C trifft, eine Senkrechte Ee und durch $\mathfrak{C}$ mit Oe eine Parallele legt. — O$\mathfrak{C}$ und Oe sind zugeordnete Richtungen. — In F und E ist der Kreisdurchmesser harmonisch getheilt, also sind auch, da Ae ∥ OE ist, die Asymptoten und die zugeordneten Richtungen Oe und Of harmonische Strahlen. Die Asymptoten bilden einen rechten Winkel, also bilden zugeordnete Richtungen mit denselben gleiche Winkel, und die Tangente zwischen den Asymptoten ist gleich dem Durchmesser nach dem Berührungspunkte. Entfernt sich C auf dem Kreise von A nach OE, so rückt der Hyperbelpunkt $\mathfrak{C}$ von A in's Unendliche und die Richtung der Tangente nähert sich der Richtung der Asymptoten. Wird OE von C überschritten, so geht der entsprechende Hyperbelpunkt in den entgegengesetzten Raum zwischen den Asymptoten über. Man kann daher die Hyperbel ansehen als eine im Unendlichen zusammenhängende Curve.

Bezeichnet man die Grösse von OA mit r, von $O\mathfrak{C}$ mit α und den Winkel $\mathfrak{C}OA$ mit ϑ, so ist $O\mathfrak{C} : \mathfrak{C}f = OB : fC$, also $O\mathfrak{C} : Of = OB : CF$; es ist $Of = r : \cos\vartheta$, $CF = \sqrt{r^2 - Af^2} = r\sqrt{1 - tg^2\vartheta}$. Mithin ist $\alpha = r : \sqrt{\cos 2\vartheta}$.

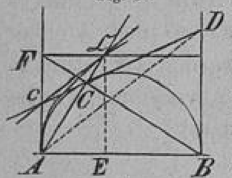
Zieht man die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers und verbindet die Punkte, in welchen dieselben die Asymptoten schneiden, so entsteht ein Rhombus. Der Inhalt desselben ist, da der Winkel zwischen den Seiten $90^0 - 2\vartheta$ ist, $4\alpha^2 . \cos 2\vartheta$, also constant $= 4r^2$. — Drückt man den Inhalt mit Hülfe der Abschnitte auf den Asymptoten aus, so findet man: Das Produkt der Abschnitte, welche von einer Tangente auf den Asymptoten gebildet werden, ist constant $= 2r^2$.

Bezeichnen y und x die Coordinaten von $\mathfrak{C}$ für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang O und dessen Abscissenaxe AB ist, so ist $y = \alpha . \sin\vartheta$ und $x = \alpha . \cos\vartheta$, also $x^2 - y^2 = \alpha^2 . \cos 2\vartheta = r^2$; also ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = r^2$.

Die senkrechte Projection auf eine Ebene, die um ε gegen ihre Ebene geneigt ist, ist $x^2 - \frac{y^2}{\cos^2\varepsilon} = r^2$; sie selbst ist die orthogonale Projection der Hyperbel $x^2 - y^2 . \cos^2\varepsilon = r^2$. Es kann daher jede Hyperbel als die Projection einer gleichseitigen angesehen werden, und es ergeben sich, ganz ähnlich wie in §. 4 Eigenschaften aller Hyperbeln aus der gleichseitigen. In Beziehung auf Grösse und Lage der zugeordneten Durchmesser findet man dieselben Gleichungen, wie für die Ellipse in §. 4, 3), wenn $-\beta^2$ an die Stelle von $+\beta^2$ gesetzt wird.

2) Parabel. — Es sei AB der Durchmesser des Grundkreises; senkrecht über AB liege die Spitze K eines Kegels so, dass AKB ein gleichseitiges Dreieck ist. Die Ebene

Fig. 28.



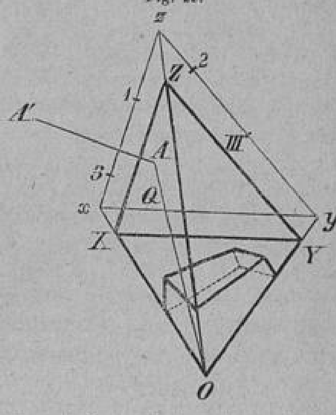
einer Parabel, deren Scheitel A ist, werde in die Ebene des Kreises gelegt. Die gemeinschaftliche Tangente Ac in A ist die Axe, A das Centrum der Collineation, die Kreistangente BD in B die eine Gegenaxe. Entsprechende Punkte liegen auf den Strahlen durch A, entsprechende Linien schneiden sich auf Ac, Geraden der Kreisebene, welche sich in D auf BD schneiden, entsprechen Parallele, deren Richtung durch AD bestimmt ist, Geraden durch B Parallele mit AB. — Für die Parabel ergiebt sich folgende Construction: Man zieht von B durch den Kreispunkt C eine Gerade und durch den Punkt, in welchem Ac durch BC geschnitten wird, mit AB eine Parallele; auf dieser bestimmt AC den Parabelpunkt $\mathfrak{C}$. Die Tangenten in C und $\mathfrak{C}$ schneiden sich in einem Punkte c der Scheiteltangente. — Rückt C von A nach B, so rückt $\mathfrak{C}$ von A in's Unendliche und die Richtung der Tangente nähert sich der Richtung AB. Geht C durch B nach der andern Seite von AB über, so springt $\mathfrak{C}$ in unendlicher Ferne ebenfalls an die andere Seite von AB über. Die Parabel hat demnach einen unendlich entfernten Punkt. Fällt man von $\mathfrak{C}$ auf AB die Senkrechte $\mathfrak{C}E$ und bezeichnet den Durchschnitt von Ac und BC mit F, so ist Winkel $A\mathfrak{C}E = ABF$, also $\triangle A\mathfrak{C}E \sim \triangle FBA$ und $\mathfrak{C}E : AE = BA : FA$ oder $\mathfrak{C}E^2 = AE . BA$. Die Gleichung der Parabel ist demnach $y^2 = 2rx$. — Ferner ist leicht zu zeigen, dass $cA = cC = cF$ ist. Die Parabel-Tangente schneidet daher die Axe AB so, dass die Projection der Tangente in A halbirt ist. Zieht man in $\mathfrak{C}$ die Normale, so ist, da $\mathfrak{C}$E mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse ist, die Projection der Normalen auf die Axe so gross wie r.

§. 18. Axonometrisches Zeichnen der Perspective.

Die Lage der Punkte im Raum sei durch rechtwinklige Coordinaten bestimmt.

1) Die Axen schneiden die Bildfläche **T** in den 3 Punkten X, Y, Z. — Der Anfangspunkt o liegt senkrecht über dem Durchschnittspunkt Q der Höhen des Dreiecks XYZ; denn oX und das Loth von o auf **T** bestimmen eine Ebene, welche auf oZY und zugleich auf **T** senkrecht steht, mithin auch auf dem Durchschnitt ZY. — Den Abstand oQ von o und **T** findet man mit Hülfe des bei o rechtwinkligen, um ZY in **T** herabgeschlagenen Dreiecks ZoY.

Fig. 29.

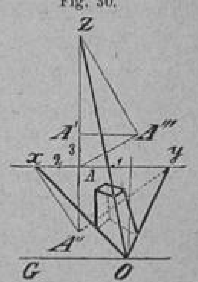


Die Lage des Auges sei dadurch bestimmt, dass es sich senkrecht über A in dem Abstande d befindet. — Der Strahl vom Auge durch o ist Seite eines Trapezes, deren andere Seiten AQ, Qo, d sind; sein Durchschnitt O mit **T** ist durch Herabschlagen zu finden. — Eine durch das Auge, parallel mit oZ gelegte Linie bestimmt in **T** den Richtungspunkt z; dieser muss auf OZ liegen, und zwar so, dass OZ : Oz = OQ : OA ist. Man findet daher die Richtungspunkte x, y, z und die Richtungslinien xy, yz, zx, wenn man zu XYZ ein ähnliches Dreick construirt, so dass O der Aehnlichkeitspunkt und Q und A entsprechende Punkte sind. — Schlägt man um eine der Richtungslinien, z. B. xz, das Auge in **T** nach A′ herab, so erhält man nach §. 10, 4) in den Punkten 1 und 3 die Theilungspunkte von OX und OZ, und die Theilung erfolgt auf XZ.

Um nun mittels gegebener Coordinaten das perspectivische Bild eines Punktes zu finden, bestimmt man mit Hülfe der Theilungspunkte 1 und 3 aus den auf XZ abgetragenen wahren Grössen der Coordinaten x und z Abschnitte auf OX und OZ und mit Hülfe von 2 und III aus der auf ZY abgetragenen wahren Grösse von y und z den Abschnitt auf OY und vollendet das Bild des Parallelepipedons, dessen Kanten, anstatt parallel zu sein, durch x, y, z gehen.

2) Der Anfangspunkt O liegt in **T**. — Die Ebene XOY schneide **T** in OG, die senkrechte Projection des Auges sei A′, der Abstand desselben A′A‴. Man findet nach §. 10 durch die Neigung der Ebene XOY gegen **T** den Hauptpunkt und die Richtungslinie xy. Der Winkel, welchen OX mit OG bildet, bestimmt den Richtungspunkt x, und der rechte Winkel xA″y, wenn A″ das in **T** herabgeschlagene Auge ist, den Richtungspunkt y für die Axen OX und OY. Legt man durch die Z-Axe und die Neigungslinie der Ebene XOY eine Ebene, so ist diese senkrecht auf OG und schneidet **T** in einer Geraden, welche in O senkrecht auf OG steht. Die parallele, durch das Auge gelegte Ebene schneidet **T** in der Senkrechten A′z, und

Fig. 30.



der rechte Winkel $AA'''z$ giebt den Verschwindungspunkt z für OZ. Durch Abtragen von xA'' und yA'' auf xy und zA''' auf zA' erhält man die Theilungspunkte 1, 2, 3 für ox, oy und oz.

Um nun mittels gegebener Coordinaten das perspectivische Bild eines Punktes zu erhalten, trägt man die Coordinaten x und y auf OG, und z auf der in O auf OG errichteten Senkrechten ab, überträgt dieselben mit Hülfe der Punkte 1, 2, 3 auf ox, oy, oz und vollendet das Bild des Parallelepipedons, dessen Kanten, anstatt parallel zu sein, durch x, y, z gehen.

Dr. **August Flohr.**