Zur Theorie der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen zweiten Grades.

---

§ 1.

Wenn die Gleichung einer Rotationsfläche von der Form: $z = f\,(x^2 + y^2)$ ist, so werden die kürzesten Linien auf derselben durch die Gleichung:

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}\,\frac{\sqrt{1 + (f'\rho)^2}}{\rho} \qquad \text{I.}$$

gegeben. Dieselbe stellt nämlich die Projection der gedachten Curven auf eine zur Rotations-Achse senkrechte Ebene (Aequator), und zwar in gewöhnlichen Polar-Coordinaten ψ und ρ dar. Der Bogen s der kürzesten Linie selbst wird durch die Gleichung:

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{\rho\sqrt{1 + (f'\rho)^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} \qquad \text{II.}$$

bestimmt. Die Grösse c ist eine willkürliche Constante und erhält eine geometrische Bedeutung, wenn man bemerkt, dass:

$$\rho \cdot \left(\rho \cdot \frac{d\psi}{ds}\right) = \rho \,.\, \cos U = c \qquad \text{III.}$$

Der Winkel U ist derjenige, unter welchem die kürzeste Linie den Parallelkreis auf der Fläche trifft, dessen Radius ρ ist. Wird nun für $\rho = \rho_o$ dieser Winkel $U = 0$, so hat man $c = \rho_o$. Die Constante c bestimmt demnach den Radius des Parallelkreises, welcher von der kürzesten Linie berührt wird.

Wendet man diese allgemeinen Formeln auf das Sphäroïd an, dessen Gleichung:

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{III}^{\text{a.}}$$

ist, und setzt man noch:

$$x = \rho \,.\, \cos\psi,\ y = \rho \sin\psi,\ \rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 \sin l^2;\quad \rho_o = a \,.\, \sin l_o \qquad \text{III}^{\text{b.}}$$

so erhält man für die geodaetische Linie aus I. und II. die Gleichungen:

$$\frac{d\psi}{dl} = \frac{\sin l_0 \sqrt{a^2 \cos l^2 + b^2 \sin l^2}}{a.\sin l \sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^{\,2}}} \qquad \text{IV.}$$

$$\frac{ds}{dl} = \frac{\sin l \sqrt{a^2 \cos l^2 + b^2 \sin l^2}}{\sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^{\,2}}} \qquad \text{V.}$$

$$\cos U = \frac{\sin l_0}{\sin l} \qquad \text{VI.}$$

Ist nun:

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1 x}{\theta x}; \ \cos \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2 x}{\theta x}; \ \Delta \operatorname{am} u = \sqrt{k'} \frac{\theta_3 x}{\theta x}; \ u = \frac{2K.x}{\pi},$$

ebenso:

$$\sin \operatorname{am} ia = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1 i\alpha}{\theta i\alpha} \text{ etc.} \quad a = \frac{2K}{\pi}.\alpha$$

und nimmt man die Substitutionen vor, welche Jacobi (Crelle's Journal Bd. 53 pag. 335—65) gegeben hat, so ergeben sich zur vollständigen Bestimmung einer geodätischen Linie folgende Gleichungen:

VII. $$\frac{a}{b} = \frac{\Delta \operatorname{am} i\alpha}{k'} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\theta_3 i\alpha}{\theta i\alpha}$$

VIII. $$\operatorname{tg} l_0 = -i. \sin \operatorname{am} ia = -\frac{i}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\theta_1 i\alpha}{\theta i\alpha}$$

IX. $$\psi = \left| \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} - i. \frac{\theta_3' i\alpha}{\theta_3 i\alpha} x \right|_{x_1}^{x}$$

X. $$\cos l = \frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} ia} = \frac{\theta_2 x}{\theta x} \cdot \frac{\theta i\alpha}{\theta_2 i\alpha}$$

In diesen vier Formeln ist für die unabhängige Variable l oder ρ, das Argument x, für die willkürlichen Parameter $\frac{a}{b}$ und ρ_0, die beiden Parameter α und der Modul k eingetreten. Die rechtwinkligen Coordinaten der Curven-Punkte erhält man aus den Gleichungen III^a und III^b.

Erinnert man sich, dass oben (Formel III^b) $a \sin l = \rho$ war, also $\cos l = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}$, so sieht man, dass:

X^a. $$\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} = \frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} ia} = \frac{\theta_2 x . \theta i\alpha}{\theta x . \theta_2 i\alpha}$$

in Verbindung mit Gleichung IX die Projection der geodätischen Linie auf den Aequator darstellt. Die Untersuchung dieser „Projections-Curve" wird uns für die Folge vorzugsweise beschäftigen und gewährt dadurch einiges Interesse, weil sie eine geometrische Darstellung der Integrale dritter Gattung mit imaginärem Parameter liefert.

§ 2.

1. Legt man an die geodätische Linie im Punkte (l, ψ) eine Tangente, dann ergiebt sich der W. λ, den dieselbe mit der z-Achse einschliesst, aus der Formel:

$$\cos \lambda = \frac{dz}{ds} = -\frac{b.\sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^2}}{\sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2}} = -\cos l_0 . k' . \frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}$$

oder, da nach VIII. § 1 $\cos l_0 = \frac{1}{\cos \operatorname{am} ia}$, und ferner: $k' \frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \cos \operatorname{am} (u + K)$

I^a. $$\cos \lambda = \frac{\cos \operatorname{am} (u + K)}{\cos \operatorname{am} ia} = \frac{\theta_2\left(\frac{\pi}{2} + x\right). \theta i\alpha}{\theta\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \theta_2 i\alpha}$$

Bemerkg. Vergleicht man diese Formel mit No. X § 1, so hat man eine geometrische Deutung für den Hülfswinkel l.

No. 2. Schliesst die Tangente an der Projections-Curve mit dem zugehörigen Radius-Vector ρ den W. μ ein, so ist:

$$\operatorname{tg}\mu = \rho \cdot \frac{d\psi}{d\rho} = \frac{\sin l_0 \sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2}}{a.\cos l \sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^2}} = \frac{\operatorname{tg} l_0 . \sqrt{e^2 \cos l_0^2 + b^2}}{\cos l_0} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u . \cos \operatorname{am} u}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\mu = -\, i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} ia \cos \operatorname{am} ia . \Delta \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} ia . \sin \operatorname{am} u . \cos \operatorname{am} u} \qquad \text{I.}$$

$$= -\, i \cdot \frac{\theta_1 i\alpha . \theta_2 i\alpha . \theta x . \theta_3 x}{\theta i\alpha . \theta_3 i\alpha . \theta_1 x . \theta_2 x}$$

Folglich wird:

$$\mu = \frac{i}{2} \log \frac{1 - i.\operatorname{tg}\mu}{1 + i.\operatorname{tg}\mu} = \frac{i}{2} \log \frac{\theta i\alpha\, \theta_3 i\alpha\, \theta_1 x\, \theta_2 x + \theta_1 i\alpha\, \theta_2 i\alpha\, \theta x\, \theta_3 x}{\theta i\alpha\, \theta_3 i\alpha\, \theta_1 x\, \theta_2 x - \theta_1 i\alpha\, \theta_2 i\alpha\, \theta x\, \theta_3 x}$$

Bekanntlich ist aber:

$$2\, \theta_1 x\, \theta_2 x\, \theta y\, \theta_3 y = \theta o . \theta_3 o\, [\theta_1(x+y)\, \theta_2(x-y) + \theta_1(x-y)\, \theta_2(x+y)]$$

$$2\, \theta_1 y\, \theta_2 y\, \theta x\, \theta_3 x = \theta o . \theta_3 o\, [\theta_1(x+y)\, \theta_2(x-y) - \theta_1(x-y)\, \theta_2(x+y)]$$

Schreibt man nun $i\alpha$ für y, so ergiebt sich:

$$\mu = \frac{i}{2} \log \frac{\theta_2(x+i\alpha)}{\theta_2(x-i\alpha)} - \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} \qquad \text{II.}$$

Da ferner:

$$\theta x . \theta_3 x = \theta o, q^2 . \theta 2x, q^2; \quad \theta_1 x . \theta_2 x = \theta o, q^2 . \theta_1 2x, q^2$$

so ist auch:

$$\operatorname{tg}\mu = -\, i \cdot \frac{\theta_1 2i\alpha, q^2 . \theta 2x, q^2}{\theta 2i\alpha, q^2 . \theta_1 2x, q^2} = -\, i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} 2ia, q^2}{\sin \operatorname{am} 2\,u, q^2} \qquad \text{III.}$$

No. 3. Der Winkel U, unter welchem die geodätische Linie den **Meridian** trifft, ergiebt sich nach § 1, VI aus der Formel:

$$\sin U = \frac{\sin l_0}{\sin l}$$

Daraus:

$$\operatorname{tg} U = \frac{\sin l_0}{\sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^2}} = \frac{\operatorname{tg} l_0}{\sin \operatorname{am} u} = -\, i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} ia}{\sin \operatorname{am} u} \qquad \text{IV.}$$

No. 4. Die Osculations-Ebene der geodätischen Linie habe die Form:

$$(\zeta - z) + n\,(\eta - y) + m\,(\xi - x) = 0 \qquad (1.)$$

wo x, y, z die Coordinaten des Curvenpunktes sein mögen, dann enthält diese Ebene die Normale des Sphäroids im Punkte x, y, z, nämlich:

$$\eta - y = \frac{y}{x}\,(\xi - x); \qquad \zeta - z = \frac{a^2 z}{b^2 . x}\,(\xi - x) \qquad (2.)$$

Sie enthält aber auch die Tangente der geodätischen Linie im Punkte x, y, z, deren Gleichungen sind:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}\,(\xi - x); \qquad \zeta - z = \frac{dz}{dx}\,(\xi - x) \qquad (3.)$$

Demnach müssen die Grössen m und n der Gleichung (1.) folgenden Bedingungs-Gleichungen genügen:

$$a^2 z + b^2 . y . n + b^2 . x . m = 0$$

$$dz + n . dy + m . dx = 0$$

Folglich ist:

$$m = \frac{b^2 . y . dz - a^2 . z . dy}{b^2 (x . dy - y . dx)}; \quad n = \frac{b^2 . x . dz - a^2 . z . dx}{b^2 (x . dy - y . dx)}$$

Nach § 1 ist aber:

$$z = b . \cos l; \quad y = a . \sin l . \sin \psi; \quad x = a . \sin l . \cos \psi$$

$$\frac{d\psi}{dl} = \frac{\sin l_0 . \sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2}}{a . \sin l . \sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^2}}$$

Daher findet sich nach leichten Reductionen:

$$m = -\frac{P}{a . b . \sin l^2 . \frac{d\psi}{dl}} \cdot \sin \psi - \frac{a . \cos l}{b . \sin l} \cdot \sin \psi$$

$$n = \frac{P}{a . b . \sin l^2 . \frac{d\psi}{dl}} \cdot \cos \psi - \frac{a . \cos l}{b . \sin l} \cdot \sin \psi$$

wenn: $P = e^2 \cos l^2 + b^2; \quad e^2 = a^2 - b^2$

Giebt man nun der Gleichung (1.) die Gestalt:

$$\zeta + m . \xi + n . \eta + p = 0,$$

dann ist:

$$p = -z - n . y - m . x = \frac{e^2 \cos l}{b}$$

Dividirt man beide Seiten der Gleichung mit $-p$, so erhält man endlich:

V. $$-\frac{b}{e^2 \cos l} \zeta + (A . \sin \psi - B . \cos \psi) \eta + (B . \sin \psi + A . \cos \psi) \xi - 1 = 0$$

wenn: $$A = \frac{a}{e^2 . \sin l}; \quad B = \frac{\sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^2} \; \sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2}}{e^2 . \sin l_0 . \sin l . \cos l}$$

Jetzt werde angenommen, dass der erste Meridian durch den betrachteten Punkt (ψ, l) gehe, dann wird $\psi = 0$, und die Gleichung der Spur der Osculations-Ebene in der Aequatorial-Ebene:

(4.) $$-B . \eta + A . \xi - 1 = 0$$

Die x Achse fällt aber in diesem Falle mit dem Radius-Vector zusammen, den man in der Projections-Curve nach dem Punkte $\rho \, (a . \sin l)$ gezogen hat. Nennt man daher den W., welchen die Spur einer Osculations-Ebene mit dem zugehörigen Radius-Vector der Projections-Curve bildet, τ, so folgt aus Gleichung (4.):

$$\text{cotg}\, \tau = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^2} \; \sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2}}{a . \sin l_0 . \cos l}$$

oder, wenn man in elliptische Functionen transformirt:

VI. $$\text{cotg}\, \tau = \frac{\sqrt{e^2 \cos l_0^2 + b^2}}{a . \sin l_0} \cdot \frac{\sin \text{am}\, u . \Delta \text{am}\, u}{\cos \text{am}\, u} = \frac{i . \cos \text{am}\, ia}{\sin \text{am}\, ia \, \Delta \text{am}\, ia} \cdot \frac{\sin \text{am}\, u . \Delta \text{am}\, u}{\cos \text{am}\, u}$$

$$\text{cotg}\, \tau = i \cdot \frac{\theta_1 x . \theta_3 x . \theta i\alpha . \theta_2 i\alpha}{\theta x . \theta_2 x . \theta_1 i\alpha . \theta_3 i\alpha}$$

Daher:

$$\tau = \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1 x \, \theta_3 x \, \theta i\alpha \, \theta_2 i\alpha - \theta x \, \theta_2 x \, \theta_1 i\alpha \, \theta_3 i\alpha}{\theta_1 x \, \theta_3 x \, \theta i\alpha \, \theta_2 i\alpha + \theta x \, \theta_2 x \, \theta_1 i\alpha \, \theta_3 i\alpha}$$

Nun ist aber:

$$2\,\theta_1 x\,\theta_3 x\,\theta y\,\theta_2 y = \theta o\,.\,\theta_2 o\,\left\{\theta_1(x+y)\,\theta_3(x-y) + \theta_1(x-y)\,\theta_3(x+y)\right\}$$

$$2\,\theta_1 y\,\theta_3 y\,\theta x\,\theta_2 x = \theta o\,.\,\theta_2 o\,\left\{\theta_1(x+y)\,\theta_3(x-y) - \theta_1(x-y)\,\theta_3(x+y)\right\}\ ^{*)}$$

Folglich ist:
$$\tau = \frac{i}{2}\log\frac{\theta_3(x+i\alpha)}{\theta_3(x-i\alpha)} - \frac{i}{2}\log\frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} \qquad \text{VII.}$$

Mit Hülfe dieses wichtigen Winkels kann die Gleichung der Osculations-Ebene auch unter folgender Form geschrieben werden:

$$-\frac{b}{e^2\,.\,\cos l\,\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\zeta - \cos(\psi+\tau)\,.\,\eta + \sin(\psi+\tau)\,.\,\xi - \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \qquad \text{VIII.}$$

No. 5. Der spitze W. σ, welchen die Tangente einer Ellipse: $x = a\,.\,\sin l$, $y = b\,.\,\cos l$, mit dem Radius-Vector aus einem Brennpunkt einschliesst, ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{b}{e\,.\,\cos l}$$

Ist diese Ellipse nun der Meridian unseres Sphäroids, und gehört der Punkt l der geodätischen Linie an, so erhält man durch die im § 1, VII, VIII, X gegebene Transformation:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{k'}{k\,.\,\cos\operatorname{am} u};\quad \cos\sigma = \frac{k\,.\,\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u};\quad \sin\sigma = \frac{k'}{\Delta\operatorname{am} u} \qquad \text{IX.}$$

Der Winkel σ bleibt also unverändert, wenn man bei demselben Argument u den Parameter a (cfs. § 1, VII—X) variiren lässt, d. h. wenn man eine Schaar verschiedener geodätischer Linien betrachtet, für welche nur der Modul k denselben Werth behält. Wenn $u = 0$ ist und $\sigma = \sigma_0$, dann ist nach IX h. §:

$$k = \cos\sigma_0$$

Für $u = 0$ ist aber nach X § 1 $l = l_0$; und $\psi = 0$, σ_0 ist also der W., welcher dem Anfangspunkt l_0 der geodätischen Linie entspricht. Damit hat man eine geometrische Deutung für den Modul k, während die Formeln IX die Bedeutung des Argumentes x veranschaulichen.

Anmerkung. Sämmtliche in diesem § entwickelte Formeln haben ihre Analoga für die kürzesten Linien auf dem Rotations-Hyperboloid mit einem und dem mit zwei Fächern. Der Verfasser hält es für seinen Zweck nicht nöthig dieselben hier anzuführen, obgleich er sie entwickelt hat.

§ 3.

Wir setzen in IV § 1 $a \sin l = \rho$, dann stellt:

$$\psi = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\sin l_0\,\sqrt{e^2\rho^2 - a^4}\;d\rho}{\rho\,\sqrt{\rho^2 - a^2}\;\sqrt{\rho^2 - a^2\sin l_0^2}}$$

die Projection der geodätischen Linie auf den Aequator dar, ausgedrückt in Polar-Coordinaten ρ und W. ψ.

*) Cfs. „Die Lehre von den elliptischen Integralen u. d. Theta-Functionen von K. H. Schellbach", pg. 43 No. 3' u. 4'.

Diese eine Gleichung lässt sich durch folgende:

$$\text{I.}\qquad \psi = \left| \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} - i \cdot \frac{\theta_1' i\alpha}{\theta_1 i\alpha}\, x \right|_{x_1}^{x} ; \sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}} = \frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} ia} = \frac{\theta_2 x}{\theta x} \cdot \frac{\theta i\alpha}{\theta_2 i\alpha}$$

$$\left(u = \frac{2Kx}{\pi};\quad a = \frac{2K \, . \, \alpha}{\pi} \right)$$

ersetzen, in welchen x die unabhängige, ψ und ρ die abhängigen Variablen sind. Der Modul k und die Grösse α sind constante Parameter. Ertheilt man dem Argument x alle möglichen reellen und complexen Werthe, so ergeben sich nur in zwei Fällen für ψ und ρ reelle, d. h. geometrisch darstellbare Werthe, nämlich wenn:

A. x reell ist,

B. x von der Form $x' + \frac{\pi}{2} + \frac{i \, . \, \pi K}{2 \, . \, K}$, oder u von der Form $u' + K + iK'$ ist, wo x' resp. u' eine reelle Grösse bedeutet.

A. x resp. u ist immer reell.

Dann sei $x_1 = 0$, alsdann werden die Gleichungen I:

$$\text{II.}\qquad \begin{cases} \psi = \dfrac{i}{2} \log \dfrac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} - i \cdot \dfrac{\theta_3' i\alpha}{\theta_3 i\alpha}\, x \pm \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \sqrt{1-\dfrac{\rho^2}{a^2}} = \dfrac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} ia} = \dfrac{\theta_2 x}{\theta x} \cdot \dfrac{\theta i\alpha}{\theta_2 i\alpha} \end{cases}$$

und da hier $\cos \operatorname{am} u$ immer < 1, $\cos \operatorname{am} ia > 1$, so bleibt ρ stets $< a$. Der grade Cylinder, dessen Basis die Curve II ist, hat also einen reellen Durchschnitt mit dem Sphäroid, die geodätische Linie.

B. x complex und von der Form $x + \frac{\pi}{2} + \frac{i \, . \, \pi \, . \, K'}{2K}$

hier sei $x_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{i \, . \, \pi K'}{2K}$, dann nehmen die Gleichungen I die Gestalt an:

$$\psi = \left| \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} - i \cdot \frac{\theta_3' i\alpha}{\theta_3 i\alpha}\, x \right|_{\frac{\pi}{2} + \frac{i\pi K'}{2K}}^{x + \frac{\pi}{2} + \frac{i\pi \, . \, K'}{2K}}$$

$$\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}} = \frac{\cos \operatorname{am}(u+K+iK')}{\cos \operatorname{am} ia}$$

Wenn man nun berücksichtigt, dass:

$$\theta_1\left(y + \frac{\pi}{2} + \frac{i \, . \, \pi K'}{2K}\right) = \sqrt[4]{q}\; e^{i \cdot y}\, \theta_3(y)$$

$$\cos \operatorname{am}(u + K + iK') = -\frac{i \, . \, k'}{k \, . \, \cos \operatorname{am} u}$$

so ergiebt sich:

$$\text{III.}\qquad \psi = \frac{i}{2} \log \frac{\theta_3(x+i\alpha)}{\theta_3(x-i\alpha)} - i \cdot \frac{\theta_3' i\alpha}{\theta_3 i\alpha}\, x; \quad \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 1} = \frac{k'}{k \, . \, \cos \operatorname{am} ia \, . \, \cos \operatorname{am} u}$$

Diese Formeln stellen die zweite in der Gleichung I enthaltene Linie dar. Allein da für diese ρ stets $> a$ bleibt, so trifft der grade Cylinder, zu welchem sie Basis ist, das Sphäroid nicht. Man kann daher auch die Curve III nicht Projection der reellen geodätischen Linie nennen, sondern vielleicht „Projection des imaginären Theils der geodätischen Linie". Sie spielt für die geodätische Linie eine analoge Rolle, wie die Cordale für zwei sich nicht schneidende Kreise.

§ 4.

Will man die Gestalt der Projections-Curve, und zwar zunächst diejenige des Theiles A, welcher das nächste geometrische Interesse hat, untersuchen, so bringt man die Gleichung IX § 1 nach Jacobi auf die Form:

$$\sin(\psi + n \,.\, x) = \frac{1}{2}\,\frac{\theta_1(x+i\alpha)+\theta_1(x-i\alpha)}{\sqrt{\theta_1(x+i\alpha)\,\theta_1(x-i\alpha)}}; \quad \text{wenn } n = i \cdot \frac{\theta_3' i\alpha}{\theta_3 i\alpha}$$

Ertheilt man hier und zugleich in der Formel:

$$\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}} = \frac{\theta_2 x}{\theta x}\cdot\frac{\theta i\alpha}{\theta_2 i\alpha}$$

dem Argument x alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ und beachtet man, dass bei vorausgesetzter Stetigkeit der Winkel fortwährend zunimmt, wenn sein Sinus periodisch die Werthe 0, $+1$, 0 -1, 0 durchläuft, so findet man zunächst folgende Tabelle:

$$\begin{array}{llll}
x = 0; & \psi = 0; & \rho = a \sin l_0; & \mu = \frac{\pi}{2}\ (\text{cfs. § 2, I.}) \\[1ex]
x = \frac{\pi}{2}; & \psi_1 = \frac{\pi}{2} - n \cdot \frac{\pi}{2}; & \rho_1 = a; & \mu_1 = \frac{\pi}{2} \\[1ex]
x = \pi; & \psi_2 = \pi - n\pi; & \rho_2 = a \,.\, \sin l_0; & \mu_2 = \frac{\pi}{2} \\[1ex]
x = \frac{3}{2}\pi; & \psi_3 = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}n\pi; & \rho_3 = a; & \mu_3 = \frac{\pi}{2} \\[1ex]
x = 2\pi; & \psi_4 = 2\pi - 2n \,.\, \pi; & \rho_4 = a \,.\, \sin l_0; & \mu_4 = \frac{\pi}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Dieselbe lehrt, dass die in dem Ringe der concentrischen Kreise a und $a \sin l_0$ enthaltene Projections-Curve abwechselnd den Kreis $a \sin l_0$ und den Aequator a berührt in Punkten, deren Längen eine arithmetische Reihe bilden. Nähere Betrachtung zeigt, da $\theta_1(x \pm \pi) = -\theta_1 x$ ist, dass die Theile der Projections-Curve, welche zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten liegen, einander congruent sind. Und zwar bedarf es bei zwei solchen Stücken, die einen Berührungspunkt gemein haben, einer Drehung, um sie zur Deckung zu bringen, bei zwei aufeinanderfolgenden, welche einen solchen nicht gemein haben, nur einer Verschiebung.

Um die Projections-Curve also zu construiren, hätte man nur die Längen ψ und die Radivectoren ρ von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ zu berechnen. Wir wollen jetzt zeigen, wie man durch Einführung des W. μ (cfs. § 2, No. 2) schon ausreicht, wenn man die Rechnung von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{4}$ durchführt. Setzt man nämlich in II, § 3 für x, $\frac{\pi}{2} - x$, so findet sich:

$$\psi' = \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1\left(\frac{\pi}{2} - x + i\alpha\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi}{2} - x - i\alpha\right)} - n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}$$

oder, weil $\theta_1\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \theta_2 y;\quad \theta_2(-y) = \theta_2 y$:

$$\text{I.} \qquad \psi' = -\frac{i}{2} \log \frac{\theta_2(x+i\alpha)}{\theta_2(x-i\alpha)} + n \,.\, x - n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

während, — dem Werth $\frac{\pi}{2} - x$, entspricht $K - u$ —,

$$\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} = \frac{\cos \operatorname{am}(K-u)}{\cos \operatorname{am} i\alpha}$$

Nimmt in diesen Formeln x die Werthe 0 bis $\frac{\pi}{4}$ an, so erhält man die Curvenpunkte, welche in Gleichung II, § 3 den Argument-Werthen $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{4}$ entsprechen. Addirt man diese Gleichung zu No. I, so ergiebt sich:

$$\psi + \psi' = \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} - \frac{i}{2} \log \frac{\theta_2(x+i\alpha)}{\theta_2(x-i\alpha)} - n \cdot \frac{\pi}{2} + \pi \left[x < \frac{\pi}{4}\right]$$

oder mit Benutzung der Formel II, § 2:

$$\text{II.} \qquad \psi + \psi' = \pi - \mu - n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Für $x = \frac{\pi}{4}$ ist $\psi = \psi'$; daher:

$$2\psi_1 = \pi - \mu_1 - n \cdot \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{tg} \mu_1 = -i \,.\, \sin \operatorname{am}(2i\alpha, q^2)$$

Die so aufeinander bezogenen Punkte x und $\frac{\pi}{2} - x$ entsprechen einander auch noch dadurch, dass ihre Tangenten mit den zugehörigen Radivectoren gleiche Winkel bilden. Denn:

$$\operatorname{tg} \mu = -i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} i\alpha \,.\, \cos \operatorname{am} i\alpha}{\Delta \operatorname{am} i\alpha} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u} \text{ (für Punkt } x)$$

$$\operatorname{tg} \mu_1 - i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} i\alpha \cos \operatorname{am} i\alpha \,.\, \Delta \operatorname{am}(K-u)}{\Delta \operatorname{am} i\alpha \sin \operatorname{am}(K-u) \,.\, \cos \operatorname{am}(K-u)} \text{ (für Punkt } \tfrac{\pi}{2} - x)$$

Nun ist:

$$\sin \operatorname{am}(K-u) = \frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}; \quad \cos \operatorname{am}(K-u) = k' \cdot \frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}; \quad \Delta \operatorname{am}(K-u) = \frac{k'}{\Delta \operatorname{am} u}$$

Demnach: $$\operatorname{tg} \mu' = -i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} i\alpha \,.\, \cos \operatorname{am} i\alpha}{\Delta \operatorname{am} i\alpha} \,.\, \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u}$$

also: $$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \mu'; \quad \mu = \mu' \,.\, Q.\,e.\,d$$

Im Punkte $x = \frac{\pi}{4}$ wird W. μ offenbar ein Minimum.

Um zu ψ' den zugehörigen Radius-Vector zu construiren, legt man an Punkt x die Tangente, fällt vom Anfangspunkt der Coordinaten ein Loth auf dieselbe und verlängert dasselbe, bis das Ganze mal dem Lothe $= a^2 \sin l_0$ wird. Dann ist das Ganze der verlangte zum Punkte $\frac{\pi}{2} - x$ gehörige Radius-Vector. Der Beweis dafür findet sich im Folgenden bei den Polar-Curven.

§ 5.

Polar-Curven.

Wenn zwei Curven in Bezug auf irgend einen Kreis reciprok sind, so besteht zwischen zwei entsprechenden Punkten a und b die Beziehung:

$$\psi_a - \psi_b = \frac{\pi}{2} - \mu_a \tag{1.}$$

wenn ψ_a der Winkel ist, welchen der Radius-Vector nach dem Punkte a mit dem festen Radius, μ_a der Winkel ist, welchen derselbe mit der zugehörigen Tangente einschliesst.

Ferner gilt für dieselben die Relation:

$$\mu_a = \pi - \mu_b \tag{2.}$$

Umgekehrt, bestehen diese beiden Beziehungen, dann sind die Curven reciprok. Das vorausgeschickt, sieht man, dass die beiden geodätischen Projections-Linien:

$$\left.\begin{aligned} \psi_a &= \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} - n \,.\, x + \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{1 - \frac{\rho_a^2}{a^2}} &= \frac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} i\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

und:

$$\left.\begin{aligned} \psi_b &= \left| \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} - n \,.\, x \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+x} \\ \sqrt{1 - \frac{\rho_b^2}{a^2}} &= \frac{\cos \operatorname{am}(u+K)}{\cos \operatorname{am} i\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

einander reciprok sind. Die erste der Gleichungen II lässt sich nämlich schreiben:

$$\psi_b = \frac{i}{2} \log \frac{\theta_2(x+i\alpha)}{\theta_2(x-i\alpha)} - n \,.\, x$$

(wenn man die Formel: $\theta_1\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \theta_2 x$ berücksichtigt). Demnach wird:

$$\psi_a - \psi_b = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{i}{2} \log \frac{\theta_2(x+i\alpha)}{\theta_2(x-i\alpha)} - \frac{i}{2} \log \frac{\theta_1(x+i\alpha)}{\theta_1(x-i\alpha)} \right)$$

oder, nach § 2, II: $\qquad \psi_a - \psi_b = \frac{\pi}{2} - \mu_a$

Damit ist der Relation (1) genügt. Bedenkt man jetzt, dass aus den Formeln des § 2, welche zunächst für die Projections-Curve I gelten, die entsprechenden für die Curve II dadurch gewonnen werden, dass man für x, $\frac{\pi}{2} + x$ setzt, oder für u, $K + u$, so findet man:

$$\operatorname{tg} \mu_b = - i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} ia \cdot \cos \operatorname{am} ia}{\Delta \operatorname{am} ia} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} (K + u)}{\sin \operatorname{am} (K + u) \cos \operatorname{am} (K + u)}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \mu_b = i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} ia \cdot \cos \operatorname{am} ia}{\Delta \operatorname{am} ia} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \cdot \cos \operatorname{am} u}$$

während:

$$\operatorname{tg} \mu_a = - i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} ia \cos \operatorname{am} ia \cdot \Delta \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} ia \cdot \sin \operatorname{am} u \cdot \cos \operatorname{am} u}$$

ist. Daraus aber folgt, dass:

$$\operatorname{tg} \mu_a = - \operatorname{tg} \mu_b, \text{ d. h. } \mu_a = \pi - \mu_b$$

Demnach ist auch der Bedingung (2) genügt, die Curven sind also reciprok, w. z. b. w.

Man sieht augenblicklich, dass auch die unter B, § 3 erwähnten hyperbolischen Projections-Curven:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} \psi_a' = \dfrac{i}{2} \log \dfrac{\theta_3(x + i\alpha)}{\theta_3(x - i\alpha)} - n \cdot x \\[2ex] \sqrt{\dfrac{\rho^2}{a^2} - 1} = \dfrac{k'}{k \cdot \cos \operatorname{am} ia \cdot \cos \operatorname{am} u} \end{cases}$$

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} \psi_b' = - \dfrac{\pi}{2} + \left| \dfrac{i}{2} \log \dfrac{\theta_3(x + i\alpha)}{\theta_3(x - i\alpha)} - n \cdot x \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + x} \\[2ex] \sqrt{\dfrac{\rho^2}{a^2} - 1} = \dfrac{k'}{k \cdot \cos \operatorname{am} ia \cdot \cos \operatorname{am} (u + K)} \end{cases}$$

zu einander reciprok sind, wenn man bedenkt, dass μ_a' aus μ § 2, II erhalten wird, indem man für x, $x + \frac{\pi}{2} + i \cdot \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K}$, setzt.

Wir haben demnach den merkwürdigen Satz:

> „Die Polar-Curve der geodätischen Projections-Linie in Bezug auf irgend einen dem Aequator concentrischen Kreis ist eine der gegebenen ähnliche, aber nicht ähnlich liegende Projections-Linie, deren Mittelpunkt ebenfalls der Mittelpunkt des Aequators ist."

Anmerkung. Will man den Radius r des Kreises erfahren, in Bezug auf welchen die Linien I und II, III und IV einander reciprok sind, so bilde man L_a die Länge des Lothes vom Mittelpunkt auf die Tangente des Punktes a, dasselbe ist:

$$L_a = \rho_a \cdot \sin \mu_a; \quad \rho_a = a \cdot \sin l; \quad \operatorname{tg} \mu_a = \frac{\sin l_0 \sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2}}{a \cdot \cos l \cdot \sqrt{\sin l^2 - \sin l_0^2}}$$

folglich:

$$(1.) \qquad L_a = \frac{a \cdot \sin l_0 \sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2}}{\sqrt{e^2 \cos l^2 + b^2 \sin l_0^2}}$$

Den Radius-Vector ρ_b findet man aus der Relation:

$$\sqrt{1-\frac{\rho_b^2}{a^2}}=\frac{\cos \operatorname{am}(u+K)}{\cos \operatorname{am} ia}=-\frac{b\,.\,\sqrt{\sin l^2-\sin l_0^2}}{\sqrt{e^2\cos l^2+b^2}}$$

(cfs. § 2, No. 1), daraus:

$$\rho_b=\frac{a\,.\,\sqrt{a^2\cos l^2+b^2\sin l_0^2}}{\sqrt{e^2\cos l^2+b^2}} \qquad (2.)$$

Nach der Haupt-Definition der reciproken Curven muss nun:

$$L_a\,.\,\rho_b=r^2$$

sein. Folglich, wenn man die Werthe (1) und (2) einsetzt:

$$a^2\sin l_0=r^2;\quad r=a\,.\,\sqrt{\sin l_0} \qquad \text{V.}$$

§ 6.

Setzt man in Gleichung VIII, § 2, $\zeta=0$, so ergiebt sich als Gleichung der Spur der Osculations-Ebene auf dem Aequator:

$$-\cos(\psi+\tau)\,.\,\eta+\sin(\psi+\tau)\,.\,\xi-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Betrachtet man diese Spur als Polare in Bezug auf einen dem Aequator concentrischen Kreis r, so ist sie von der Form:

$$\frac{u\,.\,\xi}{r^2}+\frac{v\,.\,\eta}{r^2}-1=0$$

Vergleicht man diese mit der ersten Form, dann erhält man als Coordinaten des Poles u, und v:

$$\frac{u}{r^2}=\sqrt{A^2+B^2}\,\sin(\psi+\tau);\quad \frac{v}{r^2}=-\sqrt{A^2+B^2}\,\cos(\psi+\tau)$$

Setzt man nun:

$$u=R\cos\theta,\; v=R\,.\,\sin\theta$$

so wird:

$$R=r^2\sqrt{A^2+B^2} \qquad \text{I.}$$

$$\theta=\psi+\tau-\frac{\pi}{2} \qquad \text{II.}$$

Nun ist in Folge der Werthe V, § 2:

$$A^2+B^2=\frac{1}{e^4\sin l_0^2\,.\,\cos l^2}\left\{e^2\cos l^2+b^2\cos l_0^2\right\}=\frac{R^2}{r^4}$$

daraus aber:

$$\frac{e^2\sin l_0^2\,R^2}{r^4}-1=\frac{b^2\cos l_0^2}{e^2\,.\cos l^2}=\frac{k'^2\,.\,\cos l_0^2}{k^2\,.\,\cos \operatorname{am} u^2}$$

demnach:

$$\sqrt{\frac{e^2\sin l_0^2\,R^2}{r^4}-1}=\frac{k'}{k\,.\,\cos \operatorname{am} ia\,.\,\cos \operatorname{am} u} \qquad \text{III.}$$

Setzt man in Gleichung II für ψ und τ die Werthe, welche § 3, II und § 2, VII gegeben sind, so findet man als Ort der Pole:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \theta = \dfrac{i}{2} \log \dfrac{\theta_3(x+i\alpha)}{\theta_3(x-i\alpha)} - n\,.\,x \\ \sqrt{\dfrac{e^2 \sin l_0^2\,.\,R^2}{r^4} - 1} = \dfrac{k'}{k\,.\,\cos \operatorname{am} u\,.\,\cos \operatorname{am} i\alpha} \end{cases}$$

Wenn nun der Radius des leitenden Kreises r den Werth $\sqrt{a\,.\,e\,.\,\sin l_0}$ erhält, so wird diese Polar-Curve

genau der hyperbolische Theil der Projectionscurve. (cfs. § 3, III)

Daher haben wir den Satz:

Der hyperbolische Theil, welcher in der Gleichung der Projection der geodätischen Linie inbegriffen ist, ohne zur reellen Projection zu gehören, ist der Ort der Pole aller Spuren der Osculations-Ebenen, wenn der leitende Kreis dem Aequator concentrisch ist und den Radius $\sqrt{a\,.\,e\,.\,\sin l_0}$ hat.

Die reciproke Curve zu (IV) ist diejenige, welche von den Spuren der Osculations-Ebene eingehüllt wird, also die Spur der Tangenten der geodätischen Linie auf dem Aequator. Nach Gleich. III und IV, § 5 hat diese reciproke Curve die Gestalt:

$$\psi = -\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \log \frac{\theta(x+i\alpha)}{\theta(x-i\alpha)} - n\,.\,x$$

$$\sqrt{\frac{\rho^2}{e^2} - 1} = \frac{k'}{k\,.\,\cos \operatorname{am} i\alpha\,.\,\cos \operatorname{am}(u+K)}$$

wenn man bedenkt, dass: $\theta_3\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \theta\, y$

Daher der Satz:

„Die Tangenten der geodätischen Linie stechen auf dem Aequator eine Curve aus, welche mit dem hyperbolischen Theile (§ 3, III) der Projections-Curve ähnlich, aber nicht ähnlich liegend ist. Denkt man sie aber mit irgend einem Radiusvector fest verbunden, dann wird sie auch ähnlich liegend, wenn man diesen um einen bestimmten Winkel dreht".

§ 7.

Lehrsätze und Aufgaben.

1. Beschreibt man um den Mittelpunkt des Sphäroïds eine Kugel mit dem Radius a und zieht zu den Tangenten der geodätischen Linie Parallelen durch den Mittelpunkt, so stechen dieselben auf der Kugel eine Curve aus, deren Projection auf den Aequator der Projection der geodätischen Linie congruent ist. Oder:

Verlängert man die z Ordinaten der geodätischen Linie bis zum Durchschnitt mit der Kugel, so hat die ausgeschnittene Curve die Eigenschaft, dass ihre Radivectoren der Reihe nach den Tangenten der geodätischen Linie parallel werden, sobald man die Kugel um den W. $\frac{\pi}{2} - n\,.\,\frac{\pi}{2}$ um die z Achse dreht.

Anmerkung. Der Beweis ruht auf der Eigenschaft reciproker Curven, dass irgend zwei Tangenten der einen, denselben W. einschliessen wie die entsprechenden Radivectoren der anderen Curve und auf Formel I^a, § 2.

2. Alle Tangenten der Projections-Curve zu finden, welche einen gegebenen Kegelschnitt berühren.

3. Eine Schaar Projections-Curven zu finden, die eine gegebene Gerade berührt. Oder: Alle geodätischen Linien zu zeichnen, welche eine zum Aequator senkrechte Ebene berühren.

4. An die geodätische Linie eine Tangente zu legen, welche einer gegebenen Ebene parallel ist.

5. Alle Osculations-Ebenen einer geodätischen Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt des Aequators gehen.

Die Aufgaben lassen sich constructionsweise lösen, sobald man nur die geodätische Projectionslinie selbst gezeichnet hat. Ihre Anzahl lässt sich leicht vermehren, sie beweisen die Fruchtbarkeit der in § 5 u. 6 entwickelten Lehrsätze und die Nothwendigkeit einer, wo möglich noch vollständigeren Tabelle, als die in § 2 gelieferte, welche für die Theorie der geodätischen Linie das Fundament ist.

Nachtrag.

Methode, die Projection der geodätischen Linie auf den Aequator mit Hülfe eines Kegelmantels zu construiren.

Man breite den Mantel eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis in der Ebene aus, dann bildet die Kreislinie, welche die Basis begrenzte eine neue Curve. Fiel die Spitze des Mantels in den Punkt S der Ebene, so ziehe man von S nach allen Punkten P der Curve Radivectoren und nehme auf diesen Punkte P' so an, dass:

$$SP' = a \sin \varphi; \ \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} = \frac{SP}{\mu}; \ \mu = \frac{a^2 \,.\, \sin l_0}{\sqrt{e^2 \cos l_0^2 + b^2}}$$

Dann bilden die Punkte P' die Projection einer geodätischen Linie, wenn man den Kegel so construirt hat, dass:

1. Der Radius der Grundfläche $= a$

2. Die Höhe $h = a \cdot \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}\, b \,.\, \sin l_0^2}{(a^2 - b^2) \cos l_0^2 + b^2}$

3. Die Entfernung des Fusspunktes der Höhe vom Mittelpunkt der Grundfläche $l = \dfrac{a^3 \,.\, \cos l_0}{(a^2 - b^2) \cos l_0^2 + b^2}$

Die so entstandene geodätische Linie liegt auf einem Sphäroid dessen Halbachsen a und b sind und berührt den Parallelkreis, dessen Radius $= a \sin l_0$ ist.

Beweis. Die Spitze des Kegels sei S, Mittelpunkt der Grundfläche O, ein fester Radius OE, ein beliebiger Radius OB, der variable W. $EOB = \varphi$, dann wird die Seite SB des Kegels durch die Gleichung bestimmt:

$$\text{I.} \qquad \overline{SB}^2 = l^2 + h^2 + a^2 - 2\,a\,.\,l \cos\varphi$$

Das Elementar-Dreieck dJ der Mantelfläche, dessen Basis der unendlich kleine Bogen $a\,.\,d\varphi$ ist, wird:

$$dJ = \frac{1}{2}\,a\,.\,d\varphi\,\sqrt{h^2 + (a - l\cos\varphi)^2}$$

Breitet man nun den Mantel in einer Ebene aus, und nimmt S als Anfangspunkt der Coordinaten, so findet man die Polar-Coordinaten R und θ irgend eines Punktes B der entstandenen Curve aus den Gleichungen:

$$\text{II.} \qquad R^2 = \overline{SB}^2 = l^2 + h^2 + a^2 - 2\,a\,.\,l\,.\cos\varphi$$

$$\frac{1}{2}\,R^2\,.\,d\theta = \frac{1}{2}\,a\,d\varphi\,\sqrt{h^2 + (a - l\cos\varphi)^2} = dJ$$

oder:

$$\text{III.} \qquad d\theta = \frac{a\,.\,\sqrt{h^2 + (a - l\cos\varphi)^2}\,.\,d\varphi}{l^2 + h^2 + a^2 - 2\,a\,.\,l\cos\varphi}$$

Setzt man hier:

$$a - l\cos\varphi = h \operatorname{tg}\psi; \quad a - l = h \operatorname{tg}\alpha,\ a + l = h \operatorname{tg}\beta$$

so erhält man:

$$\text{IV.} \qquad d\theta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)\sqrt{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}\;\frac{d\psi}{\cos\psi\,.\,\cos(\alpha+\beta-\psi)\sqrt{\sin(\psi-\alpha)\sin(\beta-\psi)}}$$

Jetzt substituiren wir (cfs. Schellbach, Ellipt. Integr. pg. 325):

$$\text{V.} \qquad \cos\left(\psi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \Delta \operatorname{am} u,\ \sin\left(\psi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = k \sin \operatorname{am} u$$

Daraus folgt:

$$\text{VI.} \qquad \sin(\psi-\alpha)\sin(\beta-\psi) = \sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2 \cos \operatorname{am} u^2$$

$$\text{VII.} \qquad d\psi = k \cos \operatorname{am} u\,.\,du$$

Ferner sei:

$$\text{VIII.} \qquad \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = k \sin \operatorname{am} z; \quad \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \Delta \operatorname{am} z$$

Dann wird:

$$\text{IX.} \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\psi = k\,(\sin \operatorname{am} z\,\Delta \operatorname{am} u - \Delta \operatorname{am} z \sin \operatorname{am} u) \\ \cos(\alpha+\beta-\psi) = k\,(\sin \operatorname{am} z\,\Delta \operatorname{am} u + \Delta \operatorname{am} z \sin \operatorname{am} u) \\ \sin(\alpha+\beta) = 2\,k\,.\sin \operatorname{am} z\,\Delta \operatorname{am} z \\ \sqrt{\cos\alpha\cos\beta} = i\,.\,k\,.\cos \operatorname{am} z; \quad i = \sqrt{-1} \end{array}\right.$$

Benutzt man die Werthe V—IX, so verwandelt sich Gleichung IV in:

$$d\theta = i \cdot \frac{\sin \operatorname{am} z \,.\, \cos \operatorname{am} z \,\Delta \operatorname{am} z \,.\, du}{\sin \operatorname{am} z^2 \,\Delta \operatorname{am} u^2 - \Delta \operatorname{am} z^2 \sin \operatorname{am} u^2}$$

Setzt man noch, da cos am z einen imaginären, sin und Δ am z reelle Werthe ergeben,

$$z = K - a\,i;$$

ferner:

$$u = \frac{\pi}{2} - u_1$$

so erhält man leicht:

$$d\theta = -\,i \,.\, k^2 \,\frac{\sin \operatorname{am} ai \,.\, \cos \operatorname{am} ai}{\Delta \operatorname{am} ai} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} u_1^2 \,.\, du_1}{(\Delta \operatorname{am} u_1^2 - \Delta \operatorname{am} ai^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = -\displaystyle\int_0^u \frac{i \,.\, k^2 \,.\, \sin \operatorname{am} ai \cos \operatorname{am} ai}{\Delta \operatorname{am} ai} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} u^2 \,.\, du}{\Delta \operatorname{am} u^2 - \Delta \operatorname{am} ai^2} \\ \text{Wendet man diese Substitutionen nach einander auf Gleichung II an, so erhält man:} \\ R^2 = \dfrac{2a \,.\, h}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \dfrac{\cos \operatorname{am} ai + \cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} ai - \cos \operatorname{am} u} \end{array}\right\} \text{XI.}$$

Die geodätische Projections-Linie wurde aber dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \psi = -\displaystyle\int_0^u i \,.\, k^2 \cdot \frac{\sin \operatorname{am} ai \,.\, \cos \operatorname{am} ai}{\Delta \operatorname{am} ai} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} u^2 \,.\, du}{(\Delta \operatorname{am} u^2 - \Delta \operatorname{am} ai^2)} \\ \sqrt{1 - \dfrac{\rho^2}{a^2}} = \cos \varphi = \dfrac{\cos \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} ai} \end{array}\right\} \text{XII.}$$

Die Vergleichung der Gleichungen XI und XII beweist aber den oben ausgesprochenen Satz.

E. Kretschmer.