Sätze über Tetraëder,

welche

dem von Desargues über ebene Dreiecke analog sind.

§. 1.

Im ersten Bande von Crelle's Journal pag. 38 giebt Steiner folgenden Satz:

I. Wenn sich zwei Tetraëder in der Weise entsprechen, dass die Verbindungslinien der correspondirenden Eckpunkte durch denselben Punkt gehen, so liegen die Durchschnittslinien der entsprechenden Tetraëderflächen in einer Ebene.

Der analytische Beweis dieses Satzes ist etwa folgender: — Die Flächen des einen Tetraëders seien:

$$t = o,\ u = o,\ v = o,\ w = o,$$

und durch die Eckpunkte desselben die geraden Linien gegeben:

$$\frac{u}{a_2} = \frac{v}{a_3} = \frac{w}{a_4},$$
$$\frac{t}{a_1} = \frac{v}{a_3} = \frac{w}{a_4}$$
$$\frac{t}{a_1} = \frac{u}{a_2} = \frac{w}{a_4},$$
$$\frac{t}{a_1} = \frac{u}{a_2} = \frac{v}{a_3},$$

welche alle durch den Punkt

$$\frac{t}{a_1} = \frac{u}{a_2} = \frac{v}{a_3} = \frac{w}{a_4}$$

gehen: so lassen sich die Gleichungen der Flächen jedes zweiten Tetraëders, dessen Eckpunkte auf denselben Geraden liegen, darstellen unter der Form:

$$E - \frac{t}{a_1} = o,\ E - \frac{u}{a_2} = o,\ E - \frac{v}{a_3} = o,\ E - \frac{w}{a_4} = o,$$

wo

$$E = \alpha_1 t + \alpha_2 u + \alpha_3 v + \alpha_4 w;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

es liegen also die Durchschnittsgeraden der entsprechenden Tetraëderflächen in der Ebene:

$$E = o.$$

Hieran reiht Steiner den reciproken polaren Satz an:

II. Wenn die vier Geraden, in welchen sich die Seitenflächen zweier Tetraëder paarweise durchschneiden, in einer Ebene liegen, so treffen die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte in demselben Punkte zusammen.

Die Ebene sei

$$E = \alpha_1 t + \alpha_2 u + \alpha_3 v + \alpha_4 w = o$$

und das eine Tetraëder habe zu Seitenflächen

$$t = o,\ u = o,\ v = o,\ w = o:$$

so sind die Gleichungen der entsprechenden Flächen des zweiten Tetraëders von der Form

$$E - a_1 t = o,\ E - a_2 u = o,\ E - a_3 v = o,\ E - a_4 w = o,$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 beliebige Constanten sind; demnach ergeben sich als die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte die Geraden:

$$\begin{aligned} & a_2 u = a_3 v = a_4 w, \\ a_1 t & = a_3 v = a_4 w, \\ a_1 t & = a_2 u = a_4 w, \\ a_1 t & = a_2 u = a_3 v , \end{aligned}$$

welche sämmtlich gehen durch den Punkt

$$a_1 t = a_2 u = a_3 v = a_4 w.$$

§. 2.

Beide Sätze sind nur besondere Fälle folgender allgemeineren Sätze:

III. Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte zweier Tetraëder die Generatrices sind derselben Erzeugungsweise eines einfachen Hyperboloïds, so sind die Durchschnittsgeraden der entsprechenden Seitenebenen dieser beiden Tetraëder die Generatrices derselben Erzeugungsweise eines zweiten Hyperboloïds*).

Umgekehrt:

IV. Wenn die Durchschnittsgeraden der entsprechenden Seitenflächen zweier Tetraëder hyperboloïdisch liegen, so sind auch die Verbindungslinien der correspondirenden Ecken der beiden Tetraëder hyperboloïdische Geraden.

---

*) Zur Abkürzung mögen künftig vier Geraden, welche als Generatrices desselben Systems einem Hyperboloïd angehören, hyperboloïdische Geraden heissen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dem Beweise dieser Sätze mag vorangehen die Herleitung der Bedingungen, welche erforderlich sind, damit eine gegebene Gerade auf einem Hyperboloïd liegt. Diese Aufgabe lässt sich für unsern Zweck unter einem zweifachen Gesichtspunkte auffassen:

Erstens, wenn die drei Geraden

$$g_1 : \quad \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}},$$

$$g_2 : \frac{t}{a_{21}} \quad = \frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}},$$

$$g_3 : \frac{t}{a_{31}} = \frac{u}{a_{32}} \quad = \frac{w}{a_{34}}$$

gegeben sind, die Bedingungen zu finden, welche zwischen den Coëfficienten a stattfinden müssen, damit eine vierte Gerade

$$g_4 : \frac{t}{a_{41}} = \frac{u}{a_{42}} = \frac{v}{a_{43}}$$

mit den ersteren auf demselben Hyperboloïd liege, sei es als Generatrix derselben oder der zweiten Erzeugungsart, d. h. damit auch der vierte Eckpunkt (t,u,v) des Tetraëders

$$t = o, \; u = o, \; v = o, \; w = o$$

auf dem durch die drei durch (u,v,w), (v,t,w) und (t,u,w) gezogenen Geraden g_1, g_2, und g_3 bestimmten Hyperboloïd liege, und die durch diesen Eckpunkt gezogene vierte Gerade g_4 demselben Hyperboloïd angehöre.

Zweitens, die Beziehungen zu finden zwischen den Coëfficienten α in den Gleichungen der geraden Linien:

$$\gamma_1 : t = o, \quad \frac{u}{\alpha_{12}} + \frac{v}{\alpha_{13}} + \frac{w}{\alpha_{14}} = o,$$

$$\gamma_2 : u = o, \quad \frac{t}{\alpha_{21}} \quad + \frac{v}{\alpha_{23}} + \frac{w}{\alpha_{24}} = o,$$

$$\gamma_3 ; v = o, \quad \frac{t}{\alpha_{31}} + \frac{u}{\alpha_{32}} \quad + \frac{w}{\alpha_{34}} = o,$$

damit eine vierte Gerade:

$$\gamma_4 : w = o, \quad \frac{t}{\alpha_{41}} + \frac{u}{\alpha_{42}} + \frac{v}{\alpha_{43}} \quad = o,$$

auf dem durch die drei ersten Geraden γ_1, γ_2, γ_3 bestimmten Hyperboloïd liege, d. h. damit auch die vierte Seitenfläche w = o des Tetraëders

$$t = o, \; u = o, \; v = o, \; w = o$$

das Hyperboloïd in geraden Linien durchschneide, also Tangentialebene desselben sei.

§. 3.

Herleitung der Bedingungen, damit

1) vier durch die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraëders gelegte Geraden hyperboloïdisch liegen.	2) vier in den Seitenflächen A, B, Γ, Δ eines Tetraëders gegebene Geraden hyperboloïdisch liegen.

Die vier Geraden seien:

$$\mathrm{Aa}:\ \frac{u}{12}=\frac{v}{13}=\frac{w}{14},$$

$$\mathrm{Bb}:\ \frac{t}{21}=\frac{v}{23}=\frac{w}{24},$$

$$\mathrm{Cc}:\ \frac{t}{31}=\frac{u}{32}=\frac{w}{34},$$

$$\mathrm{Dd};\ \frac{t}{14}=\frac{u}{24}=\frac{v}{34}\ :\text{**)}$$

damit eine Gerade auf einem gegebenen Hyperboloïd als Generatrix eines bestimmten Systems liegt, muss eine Ebene durch sie und irgend einen Punkt des Hyperboloïds gelegt, dasselbe durchschneiden in der Generatrix des zweiten Systems, welche durch diesen Punkt geht: legt man also durch drei Generatrices desselben Systems und einen Punkt der Fläche Ebenen, so müssen sich diese in einer und derselben Geraden durchschneiden.

Solche Ebenen sind:

$$(\mathrm{Bb},A):\ \frac{v}{23}=\frac{w}{24},$$

$$(\mathrm{Cc},A):\ \frac{u}{32}=\frac{w}{34},$$

$$(\mathrm{Dd},A):\ \frac{u}{24}=\frac{v}{34},$$

oder

$$24\,.\,v=23\,.\,w$$

$$34\,.\,u=32\,.\,w$$

$$34\,.\,u=24\,.\,v\ ;$$

und diese drei Ebenen durchschneiden sich in derselben Geraden, wenn

$$23=32$$

ist; die Durchschnittsgerade ist:

$$34\,.\,u=24\,.\,v=23\,.\,w.$$

Die vier Geraden seien:

$$A\alpha:\ t=0,\quad \frac{u}{12}+\frac{v}{13}+\frac{w}{14}=0,\ \text{*)}$$

$$B\beta:\ u=0,\quad \frac{t}{21}+\frac{v}{23}+\frac{w}{24}=0,$$

$$\Gamma\gamma:\ v=0,\quad \frac{t}{31}+\frac{u}{32}+\frac{w}{34}=0,$$

$$\Delta\delta:\ w=0,\quad \frac{t}{14}+\frac{u}{24}+\frac{v}{34}=0:$$

damit eine Gerade auf einem gegebenen Hyperboloïd als Generatrix eines bestimmten Systems liegt, muss ihr Durchschnittspunkt mit irgend einer Tangentialebene des Hyperboloïds liegen in der Generatrix des zweiten Systems, welche in dieser Ebene enthalten ist: die Durchschnittspunkte also von drei Generatrices desselben Systems mit einer Tangentialebene der Fläche, müssen in einer und derselben Geraden liegen.

Solche Punkte sind:

$$(B\beta,A):\ t=0,\ u=0,\quad \frac{v}{23}+\frac{w}{24}=0,$$

$$(\Gamma\gamma,A):\ t=0,\ v=0,\quad \frac{u}{32}+\frac{w}{34}=0,$$

$$(\Delta\delta,A):\ t=0,\ w=0,\quad \frac{u}{24}+\frac{v}{34}=0,$$

oder

$$t=0,\ u=0,\quad 24\,.\,v+23\,.\,w=0,$$

$$t=0,\ v=0,\quad 34\,.\,u+32\,.\,w=0,$$

$$t=0,\ w=0,\quad 34\,.\,u+24\,.\,v=0;$$

und diese drei Punkte liegen in derselben Geraden, wenn

$$23=32$$

ist; die Verbindungsgerade ist;

$$t=0,\ 34\,.\,u+24\,.\,v+23\,.\,w=0.$$

*) Es ist wohl zu bemerken, dass die Coëfficienten ik der rechten und linken Seite, obschon sie der Form nach übereinstimmen, nicht im geringsten Zusammenhange mit einander stehen, und dass also auch die Entwickelungen ganz unabhängig von einander sind.

**) Die Constanten sind durch ihre Indices ersetzt, und diese der leichteren Uebersicht wegen weder durch Kommata getrennt, noch durch Klammern verbunden; die andern Zahlen werden sich leicht von diesen Constanten unterscheiden lassen. Die Constanten 14, 24, 34 in den Gleichungen der ersten drei Geraden sind willkührlich, und darum auch die vierte Gerade ihrer Lage nach keiner Beschränkung unterworfen.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso durchschneiden sich die Ebenen (Cc,B), (Aa,B), (Dd,B) in der Geraden

$$34 . t = 14 . v = 31 . w.$$

wenn

$$31 = 13$$

ist, und endlich die Ebenen (Aa,C), (Bb,C), (Dd,C) in der Geraden

$$24 . t = 14 . u = 12 . w,$$

wenn

$$12 = 21;$$

und es ist leicht zu sehen, dass alsdann auch die Ebenen (Aa,D), (Bb,D), (Cc,D) sich durchschneiden in der Geraden:

$$23 . t = 31 . u = 12 . v.$$

Damit also vier durch die Eckpunkte des Coordinatentetraëders gezogene Geraden hyperboloïdisch liegen, müssen die Coëfficienten ihrer Gleichungen der Bedingung genügen

$$ik = ki;$$

und zu den vier hyperboloïdischen Geraden:

$$Aa: \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14},$$

$$Bb: \quad \frac{t}{12} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$

$$Cc: \quad \frac{t}{13} = \frac{u}{23} = \frac{w}{34},$$

$$Dd: \quad \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34},$$

gehören als die Generatrices des zweiten Systems durch die Eckpunkte des Coordinatentetraëders:

$$34 . u = 24 . v = 23 . w,$$

$$34 . t = 14 . v = 13 . w,$$

$$24 . t = 14 . u = 12 . w,$$

$$23 . t = 13 . u = 12 . v.$$

Ebenso liegen die drei Punkte $(\Gamma\gamma, B)$, $(A\alpha, B)$, $(\Delta\delta, B)$ in der Geraden

$$u = 0, \quad 34 . t + 14 . v + 31 . w = 0,$$

wenn

$$31 = 13$$

ist, und endlich die Punkte $(A\alpha, \Gamma)$, $(B\beta, \Gamma)$ $(\Delta\delta, \Gamma)$ in der Geraden

$$v = 0, \quad 24 . t + 14 . u + 12 . w = 0,$$

wenn

$$12 = 21;$$

und es ist leicht zu sehen, dass alsdann die Punkte $(A\alpha, \Delta)$, $(B\beta, \Delta)$, $(\Gamma\gamma, \Delta)$ liegen in der Geraden:

$$w = 0, \quad 23 . t + 31 . u + 12 . v = 0.$$

Damit also vier in den Seitenflächen des Coordinatentetraëders gezogene Geraden hyperboloïdisch liegen, müssen die Coëfficienten ihrer Gleichungen der Bedingung genügen

$$ik = ki;$$

und zu den vier hyperboloïdischen Geraden:

$$A\alpha: t = 0, \quad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0,$$

$$B\beta: t = 0, \quad \frac{t}{12} + \frac{v}{23} + \frac{w}{24} = 0,$$

$$\Gamma\gamma: v = 0, \quad \frac{t}{13} + \frac{u}{23} + \frac{w}{34} = 0,$$

$$\Delta\delta: w = 0, \quad \frac{t}{14} + \frac{u}{24} + \frac{v}{34} = 0,$$

gehören als die Generatrices des zweiten Systems in den Seitenflächen des Coordinatentetraëders:

$$t = 0, \quad 34 . u + 24 . v + 32 . w = 0,$$

$$u = 0, \quad 34 . t + 14 . v + 13 . w = 0,$$

$$v = 0, \quad 24 . t + 14 . u + 12 . w = 0,$$

$$w = 0, \quad 23 . t + 13 . u + 12 . v = 0,$$

§. 4.

Wenn die ersten drei Geraden zu dem einen und die vierte Gerade zu dem zweiten System von Generatrices eines Hyperboloïds gehören, so hat man nur die Bedingungen aufzustellen, dass die letztere jede der ersteren durchschneidet, d. h., dass:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) Die Gerade

$$\frac{t}{41} = \frac{u}{42} = \frac{v}{43}$$

mit jeder der drei Geraden:

$$\frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14},$$
$$\frac{t}{21} \qquad = \frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$
$$\frac{t}{31} = \frac{u}{32} \qquad = \frac{w}{34},$$

in einer Ebene liegt; dies ist der Fall, wenn die Bedingungen:

$$\frac{42}{43} = \frac{12}{13}, \frac{43}{42} = \frac{23}{21}, \frac{41}{42} = \frac{31}{32}$$

erfüllt werden, d. h., nachdem man etwa

$$23 = 32,\ 31 = 13.\ 12 = 21$$

gesetzt hat, wenn die Proportion

$$41 : 42 : 43 = \frac{1}{23} : \frac{1}{31} : \frac{1}{12}$$

stattfindet.

2) die Gerade

$$w = 0, \frac{t}{41} + \frac{u}{42} + \frac{v}{43} \qquad = 0$$

jede der drei Geraden:

$$t = 0, \qquad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0,$$
$$u = 0, \frac{t}{21} \qquad + \frac{v}{23} + \frac{w}{24} = 0,$$
$$v = 0, \frac{t}{31} + \frac{u}{32} \qquad + \frac{w}{34} = 0,$$

in einem Punkte durchschneidet; dies ist der Fall, wenn die Bedingungen:

$$\frac{42}{43} = \frac{12}{13}, \frac{43}{42} = \frac{23}{21}, \frac{41}{42} = \frac{31}{32}$$

erfüllt werden, d. h., nachdem man etwa

$$23 = 32,\ 31 = 13,\ 12 = 21$$

gesetzt hat, wenn die Proportion

$$41 : 42 : 43 = \frac{1}{23} : \frac{1}{31} : \frac{1}{12}$$

stattfindet.

§. 5.

Es ist nunmehr leicht, die Sätze III. und IV. (§. 2.) zu beweisen:

1) Es seien die vier Punkte gegeben:

$$(1.)\quad \begin{aligned} \frac{t}{11} &= \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14}, \\ \frac{t}{21} &= \frac{u}{22} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24}, \\ \frac{t}{31} &= \frac{u}{32} = \frac{v}{33} = \frac{w}{34}, \\ \frac{t}{41} &= \frac{u}{42} = \frac{v}{43} = \frac{w}{44}, \end{aligned}$$

2) Es seien die vier Ebenen gegeben:

$$(1)^*\quad \begin{aligned} \frac{t}{11} + \frac{u}{12} + \frac{v}{13} + \frac{w}{14} &= 0, \\ \frac{t}{21} + \frac{u}{22} + \frac{v}{23} + \frac{w}{24} &= 0, \\ \frac{t}{31} + \frac{u}{32} + \frac{v}{33} + \frac{w}{34} &= 0, \\ \frac{t}{41} + \frac{u}{42} + \frac{v}{43} + \frac{w}{44} &= 0, \end{aligned}$$

und man bezeichne die Determinante

$$(2.)\quad \left\{ \begin{matrix} 11, & 12, & 13, & 14 \\ 21, & 22, & 23, & 24 \\ 31, & 32, & 33, & 34 \\ 41, & 42, & 43, & 44 \end{matrix} \right\} = R.$$

und ferner die Differentialquotienten dieser Determinante nach ihren verschiedenen Elementen durch die entsprechenden Indices in runde Klammern eingeschlossen, nämlich allgemein:

$$(3.)\quad \frac{dR}{d_{ik}} = (ik),$$

so sind die Gleichungen der Ebenen durch je drei dieser Punkte, d. h. der Seitenflächen des Tetraëders, welches die vier Punkte zu Eckpunkten hat:

so sind die Gleichungen der Punkte, in denen je drei dieser Ebenen zusammentreffen, d. h. der Eckpunkte des Tetraëders, welches die vier Ebenen zu Seitenflächen hat:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$(4)\quad\begin{aligned} t_1 &= (11)\,t + (12)\,u + (13)\,v + (14)\,w = 0 \\ u_1 &= (21)\,t + (22)\,u + (23)\,v + (24)\,w = 0 \\ v_1 &= (31)\,t + (32)\,u + (33)\,v + (34)\,w = 0 \\ w_1 &= (41)\,t + (42)\,u + (43)\,v + (44)\,w = 0 \end{aligned}$$

denn man hat nach der bekannten Differentialgleichung*), welcher die Determinante genügt, allgemein:

$$i1\,.\,(k1) + i2\,.\,(k2) + i3\,.\,(k3) + i4\,.\,(k4) = 0,$$

so dass jede der letzteren Gleichungen durch Werthe aus drei der zuerst gegebenen erfüllt wird, d. h. die durch sie dargestellten Ebenen je drei der gegebenen Punkte enthalten.

Die Gleichungen (1) stellen für verschiedene Werthe von 11, 22, 33, 44, ganz allgemein vier Punkte dar, welche auf den geraden Linien

$$(5)\quad\begin{aligned} g_1 &: \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14}, \\ g_2 &: \frac{t}{21} \quad = \frac{v}{23} = \frac{w}{24}, \\ g_3 &: \frac{t}{31} = \frac{u}{32} \quad = \frac{w}{34}, \\ g_4 &: \frac{t}{41} = \frac{u}{42} = \frac{v}{43} \quad , \end{aligned}$$

liegen; wenn nunmehr

$$(6)\qquad ik = ki$$

ist, d. h. die Geraden (5) hyperboloïdisch liegen (§. 3.), so sind auch die Partialdeterminanten

$$(7)\qquad (ik) = (ki),$$

d. h. die vier Geraden:

$$(8)\quad\begin{aligned} t &= t_1 = 0, \\ u &= u_1 = 0, \\ v &= v_1 = 0, \\ w &= w_1 = 0, \end{aligned}$$

sind ebenfalls hyperboloïdisch. — Daraus folgt die Richtigkeit von Satz III (§. 2.): Wenn zwei Tetr. gegeben sind:

$$t = u = v = w = 0$$

und $\quad t_1 = u_1 = v_1 = w_1 = 0,$

$$(4)^*\quad\begin{aligned} (11)\;t &= (12)\;u = (13)\;v = (14)\;w, \\ (21)\;t &= (22)\;u = (23)\;v = (24)\;w, \\ (31)\;t &= (32)\;u = (33)\;v = (34)\;w, \\ (41)\;t &= (42)\;u = (43)\;v = (44)\;w, \end{aligned}$$

die bekannten Gleichungen, welche sich aus der Auflösung der gegebenen lineären Gleichungen ergeben.

Die Gleichungen (1)* stellen für verschiedene Werthe von 11, 22, 33, 44, ganz allgemein Ebenen dar, welche durch die geraden Linien:

$$(5)^*\quad\begin{aligned} t = 0,\; t_1 &= \quad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0 \\ u = 0,\; u_1 &= \frac{t}{21} \quad + \frac{v}{23} + \frac{w}{24} = 0 \\ v = 0,\; v_1 &= \frac{t}{31} + \frac{u}{32} \quad + \frac{w}{34} = 0 \\ w = 0,\; w_1 &= \frac{t}{41} + \frac{u}{42} + \frac{w}{43} \quad = 0 \end{aligned}$$

gehen; wenn nunmehr

$$(6)^*\qquad ik = ki$$

ist, d. h. die Geraden (5) hyperboloïdisch liegen (§. 3.), so sind auch die Partialdeterminanten

$$(7)^*\qquad (ik) = (ki),$$

d. h. die vier Geraden:

$$(8)^*\quad\begin{aligned} (\gamma_1) &: \quad (12)\,u = (13)\,v = (14)\,w \\ (\gamma_2) &: (21)\,t \quad = (23)\,v = (24)\,w \\ (\gamma_3) &: (31)\,t = (32)\,u \quad = (34)\,w \\ (\gamma_4) &: (41)\,t = (42)\,u = (43)\,v \end{aligned}$$

sind ebenfalls hyperboloïdisch. — Daraus folgt die Richtigkeit von Satz IV (§. 2.): Wenn sich zwei Tetraëder:

$$t = u = v = w = 0$$

und $\quad t_1 = u_1 = v_1 = w_1 = 0$

*) Jacobi, de formatione et proprietatibus Determinantium, §. 5. Gl. 9. Crelle's Journ. XXII.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deren Eckpunkte resp. auf vier hyperboloïdischen Geraden liegen (6), so sind die Durchschnittslinien der entsprechenden Tetraëderflächen (8) hyperboloïdische Geraden.

in der Weise entsprechen, dass die resp. Durchschnittslinien ihrer Seitenflächen hyperboloïdisch sind (6)*, so sind die Verbindungslinien der correspondirenden Eckpunkte (8)* ebenfalls hyperboloïdisch.

§. 6.

Wenn zwischen den Coëfficienten in den Gleichungen (1) und (1)* (§. 5) eine Relation stattfindet von der Form

$$\frac{ik}{il} = \frac{mk}{ml} \text{ oder } \begin{Bmatrix} ik, il \\ mk, ml \end{Bmatrix} = 0,$$

wo i, k, l, m irgend welche vier verschiedene von den Indices 1, 2, 3, 4 bedeuten, d. h. (§. 4.), wenn von den Geraden (5) oder (5)* zwei in einer Ebene liegen; — so findet zwischen den Partialdeterminanten (ik), (il), (mk), (ml) eine ähnliche Beziehungsgleichung statt, d, h., liegen auch von den Geraden (8) oder (8)* zwei bestimmte in einer Ebene. Es ist nämlich:

$$R \cdot \frac{dR}{da_{k,i} \cdot da_{l,m}} = \frac{dR}{da_{k,i}} \cdot \frac{dR}{da_{l,m}} - \frac{dR}{da_{k,m}} \cdot \frac{dR}{da_{l,i}}\ ^{*)}$$

d. h. für unsere Bezeichnung:

$$R \cdot (ik \cdot ml - mk \cdot il) = (ki) \cdot (lm) - (km) \cdot (li);$$

wenn also

$$ik \cdot ml - mk \cdot il = 0,$$

so ist auch:

$$(ki) \cdot (lm) - (km) \cdot (li) = 0,$$

oder was dasselbe ist, wenn:

$$\begin{Bmatrix} ik, il \\ mk, ml \end{Bmatrix} = 0, \text{ so auch } \begin{Bmatrix} (ki), (li) \\ (km), (lm) \end{Bmatrix} = 0.$$

Im Ganzen ergeben sich folgende Beziehungen:

$$1) \text{ wenn } \begin{Bmatrix} 12, 13 \\ 42, 43 \end{Bmatrix} = 0, \text{ so ist auch } \begin{Bmatrix} (21), (31) \\ (24), (34) \end{Bmatrix} = 0,$$

$$2) \quad „ \quad \begin{Bmatrix} 23, 21 \\ 43, 41 \end{Bmatrix} = 0, \quad „ \quad \begin{Bmatrix} (32), (12) \\ (34), (14) \end{Bmatrix} = 0,$$

$$3) \quad „ \quad \begin{Bmatrix} 31, 32 \\ 41, 42 \end{Bmatrix} = 0, \quad „ \quad \begin{Bmatrix} (13), (23) \\ (14), (24) \end{Bmatrix} = 0,$$

$$4) \quad „ \quad \begin{Bmatrix} 21, 31 \\ 24, 34 \end{Bmatrix} = 0, \quad „ \quad \begin{Bmatrix} (12), (13) \\ (42), (43) \end{Bmatrix} = 0,$$

$$5) \quad „ \quad \begin{Bmatrix} 32, 12 \\ 34, 14 \end{Bmatrix} = 0, \quad „ \quad \begin{Bmatrix} (23), (21) \\ (43), (41) \end{Bmatrix} = 0,$$

$$6) \quad „ \quad \begin{Bmatrix} 13, 23 \\ 14, 24 \end{Bmatrix} = 0, \quad „ \quad \begin{Bmatrix} (31), (32) \\ (41), (42) \end{Bmatrix} = 0.$$

---

*) Jacobi, de formatione et proprietatibus Determinantium, §. 10., Gl. 5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die geometrische Bedeutung dieser Sätze ist, je nachdem man die linke oder rechte Seite von §. 5. berücksichtigt:

wenn sich:

1) (g_1) und (g_4) (5), durchschneiden, so auch (u,u_1) und (v,v_1) (8),
2) (g_2) und (g_4) ″ (v,v_1) und (t,t_1)
3) (g_3) und (g_4) ″ (t,t_1) und (u,u_1)
4) (g_2) und (g_3) ″ (t,t_1) und (w,w_1)
5) (g_3) und (g_1) ″ (u,u_1) und (w,w_1)
6) (g_1) und (g_2) ″ (v,v_1) und (w,w_1)

wenn sich

1) (t,t_1) und (w,w_1), (5)* durchschn., so auch (γ_2) und (γ_3), (8)
2) (u,u_1) und (w,w_1) ″ (γ_3) und (γ_1),
3) (v,v_1) und (w,w_1) ″ (γ_1) und (γ_2),
4) (u,u_1) und (v,v_1) ″ (γ_1) und (γ_4),
5) (v,v_1) und (t,t_1) ″ (γ_2) und (γ_4),
6) (t,t_1) und (u,u_1) ″ (γ_3) und (γ_4).

Es finden also im Allgemeinen folgende zwei Sätze statt:

V. Wenn von den Verbindungslinien der Eckpunkte zweier Tetraëder zwei in einer Ebene liegen, so liegen auch die Durchschnittsgeraden derjenigen zwei Flächenpaare der Tetraëder, welche die durch jene Eckpunkte gehende Kante gemein haben, in einer Ebene.

VI. Wenn von den Durchschnittsgeraden der Flächenpaare zweier Tetraëder zwei in einer Ebene liegen, so liegen auch die Verbindungslinien derjenigen zwei Tetraëderecken, welche auf den durch jene Flächen gebildeten Kanten liegen, in einer Ebene.

§. 7.

Es ist leicht, aus diesen beiden Sätzen eine Reihe von anderen Sätzen herzuleiten, unter denen sich auch die beiden Steinerschen Sätze I. und II. (§. 1.) befinden:

Wenn zunächst (g_1), (g_2) und (g_3) je mit (g_4) in einer Ebene liegen, so liegen auch (t,t_1), (u,u_1) und (v,v_1) in einer Ebene, d. h.

VII. Wenn sich zwei Tetraëder in der Weise entsprechen, dass die Verbindungslinien ihrer Eckpunkte auf einem Hyperboloïd liegen, so jedoch, dass nur drei von ihnen zu demselben System von Generatrices dieser Fläche gehören: so liegen von den Durchschnittsgeraden der correspondirenden Tetraëderflächen drei in in einer Ebene; —

Wenn zunächst von den Geraden (t,t_1), (u,u_1) und (v,v_1) jede mit (w,w_1) in einer Ebene liegt, so gehen die drei Geraden (γ_1), (γ_2) und (γ_3) durch denselben Punkt, d. h.

VII. Wenn sich zwei Tetraëder in der Weise entsprechen, dass die Durchschnittsgeraden ihrer Seitenflächen auf einem Hyperboloïd liegen, so jedoch, dass nur drei von ihnen zu demselben System von Generatrices dieser Fläche gehören: so gehen von den Verbindungslinien der correspondirenden Tetraëderecken drei durch einen Punkt; —

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und zwar durchschneiden sich in Geraden derselben Ebene die Flächenpaare, welche den Tetraëderecken angehören, deren Verbindungslinie als Generatrix des zweiten Systems die drei anderen Verbindungslinien durchschneidet.

Wenn ferner der Reihe nach (g_1) und (g_2), (g_2) und (g_3), (g_3) und (g_4), (g_4) und (g_1) in einer Ebene liegen, so liegen auch die Durchschnittsgeraden (v,v_1) und (w,w_1), (w,w_1) und (t,t_1), (t,t_1) und (u,u_1), (u,u_1) und (v,v_1) in einer Ebene, d. h.

IX. Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte zweier Tetraëder die Seiten sind eines windschiefen Vierecks, so sind die Durchschnittslinien der correspondirenden Tetraëderflächen ebenfalls die Seiten eines solchen windschiefen Vierecks. —

Wenn drittens (g_1) und (g_2), (g_2) und (g_3), (g_3) und (g_1) in einer Ebene liegen, so liegen auch die Durchschnittsgeraden (t,t_1), (u,u_1), (v,v_1) je mit (w,w_1) in einer Ebene, d. h.

XI. Wenn von den Verbindungslinien je zweier Eckpunkte zweier Tetraëder drei durch einen und denselben Punkt gehen, so durchschneidet von den Durchschnittsgeraden der entsprechenden Tetraëderflächen eine die drei anderen; — der Umkehrungssatz von VIII.

Nimmt man endlich an, dass die Verbindungslinien der Eckpunkte zweier Tetraëder alle durch einen und denselben Punkt gehen, so liegen die Durchschnittsgeraden der entsprechenden Tetraëderflächen sämmtlich in derselben Ebene, — der erste Steinersche Satz.

und zwar gehen durch denselben Punkt die Verbindungslinien der Eckenpaare, welche den Tetraëderflächen zugehören, deren Durchschnittslinie als Generatrix des zweiten Systems die drei anderen Durchschnittsgeraden durchschneidet.

Wenn ferner der Reihe nach (t,t_1) und (u,u_1), (u,u_1) und (v,v_1), (v,v_1) und (w,w_1) (w,w_1) und (t,t_1) in einer Ebene liegen, so liegen auch die Verbindungsgeraden (g_2) und (g_3), (g_3) und (g_4), (g_4) und (g_1), (g_1) und (g_2) in einer Ebene, d. h.

X. Wenn die Durchschnittslinien der entsprechenden Seitenflächen zweier Tetraëder die Seiten sind eines windschiefen Vierecks, so sind die Verbindungslinien der correspondirenden Tetraëderecken ebenfalls die Seiten eines solchen windschiefen Vierecks. —

Wenn drittens (t,t_1) und (u,u_1), (u,u_1) und (v,v_1), (v,v_1) und (t,t_1) in einer Ebene liegen, so liegen auch die Verbindungsgeraden (g_1), (g_2) und (g_3), je mit (g_4) in einer Ebene, d. h.

XII. Wenn von den Durchschnittslinien je zweier Seitenflächen zweier Tetraëder drei in einer und derselben Ebene liegen, so durchschneidet von den Verbindungsgeraden der entsprechenden Tetraëderecken eine die drei anderen; — der Umkehrungssatz von VII.

Nimmt man endlich an, dass die Durchschnittslinien der Seitenflächen zweier Tetraëder alle in einer und derselben Ebene liegen, so gehen die Verbindungsgeraden der entsprechenden Tetraëderecken sämmtlich durch denselben Punkt, — der zweite Steinersche Satz.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Reihe dieser Sätze lässt sich leicht erweitern, indem jeder besonderen Lage der Verbindungslinien der Ecken zweier Tetraëder eine besondere Lage der Durchschnittsgeraden der correspondirenden Tetraëderflächen entspricht, und umgekehrt.

§. 8.

Zur Vervollständigung der in (§. 3.) behandelten Aufgabe mag sich hier die Doppelaufgabe anschliessen:

1) durch zwei gegebene Punkte eines Hyperboloïds diejenigen beiden Geraden zu construiren, welche zu zwei anderen auf dem Hyperboloïd gezogenen Geraden als Generatrices desselben Systems gehören,

oder kürzer:

durch zwei gegebene Punkte zu zwei windschiefen Geraden hyperboloïdische Geraden zu ziehen.

Die beiden gegebenen Geraden seien:

$$Aa: \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14},$$

$$Bb: \quad \frac{t}{12} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$

und die beiden Punkte die Eckpunkte C und D des Coordinatentetraëders ABCD: so sind die Ebenen

$(Aa,C): \frac{u}{12} = \frac{w}{14}$ oder $14 \, . \, u = 12 \, . \, w$,

$(Bb,C): \frac{t}{12} = \frac{w}{24}$ oder $24 \, . \, t = 12 \, . \, w$;

beide Ebenen enthalten die Generatrix des zweiten Systems durch den Punkt C, dieselbe ist also:

$Cc': 24 \, . \, t = 14 \, . \, u = 12 \, . \, w$,

ebenso ergiebt sich:

$Dd': 23 \, . \, t = 31 \, . \, u = 12 \, . \, v$:

die Geraden Aa, Bb, Cc′, Dd′ bilden ein windschiefes Vierseit, d. h.:

Alle Hyperboloïde, welche durch zwei windschiefe Geraden und ausserdem zwei Punkte gehen,

2) in zwei gegebenen Tangentialebenen eines Hyperboloïds diejenigen beiden Geraden zu construiren, welche zu zwei anderen auf dem Hyperboloïd gezogenen Geraden als Generatrices desselben Systems gehören,

oder kürzer:

in zwei gegebenen Ebenen zu zwei windschiefen Geraden hyperboloïdische Geraden zu ziehen.

Die beiden gegebenen Geraden seien:

$$A\alpha: t = 0, \quad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0,$$

$$B\beta: u = 0, \quad \frac{t}{12} + \frac{v}{23} + \frac{w}{24} = 0,$$

und die beiden Ebenen die Seitenflächen Γ nnd $\varDelta$ des Coordinatentetraëders $AB\Gamma\varDelta$: so sind die Ebenen:

$(A\alpha,\Gamma): t = v = 0, \; 14 \, . \, u + 12 \, . \, w = 0$,

$(B\beta,\Gamma): u = v = 0, \; 24 \, . \, t + 12 \, . \, w = 0$;

durch beide Punkte geht die Generatrix des zweiten Systems in der Ebene Γ, dieselbe ist also:

$\Gamma\gamma': v = 0, \; 24 \, . \, t + 14 \, . \, u + 12 \, . \, w = 0$,

ebenso ergiebt sich:

$\varDelta\delta': w = 0, \; 23 \, . \, t + 31 \, . \, u + 12 \, . \, v = 0$:

die Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma'$, $\varDelta\delta'$ bilden ein windschiefes Vierseit, d. h.

Alle Hyperboloïde, welche durch zwei windschiefe Geraden gehen, und ausserdem von zwei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

haben zugleich ein windschiefes Vierseit gemeinschaftlich.

Mehr noch:

die Ebene durch Dd′ und C enthält die Generatrix des ersten Systems Cc, und ebenso die Ebene (Cc′,D) die Generatrix Dd: diese Ebenen sind:

(Dd′C : $23 \cdot t = 31 \cdot u$, oder $\frac{t}{31} = \frac{u}{23}$, und

(Cc′D) : $24 \cdot t = 14 \cdot u$, oder $\frac{t}{14} = \frac{u}{24}$;

ebenso liegen die Generatrices des zweiten Systems Aa′ und Bb′ in den Ebenen:

(Bb,A) : $\frac{v}{23} = \frac{w}{24}$, oder $24 \cdot v = 23 \cdot w$, und

(Aa,B) : $\frac{v}{13} = \frac{w}{14}$, oder $14 \cdot v = 13 \cdot w$:

Diese vier Ebenen bilden ein Tetraëder, welches dem Coordinatentetraëder umschrieben ist, und zwar in der Weise, dass die Seitenflächen desselben durch die beiden Gegenkanten (t,u) und (v,w) des Kerntetraëders gehen: — ein Hyperboloïd aber heisst einem Tetraëder eingeschrieben, wenn vier Generatrices desselben in den Seitenflächen des Tetraëders enthalten sind: man hat also folgenden Satz:

Alle Hyperboloïde, welche einem Tetraëder umschrieben sind und durch ein und dasselbe windschiefe Vierseit gehen, sind zugleich einem zweiten, dem ersten Tetraëder umschriebenen Tetraëder eingeschrieben.

Die Punkte a, b, c, d, in denen die Generatrices des ersten Systems Aa, Bb, Cc, Dd, resp. die Gegenflächen des Kerntetraëders durchschneiden, liegen auf den Geraden:

Ebenen berührt werden, haben zugleich ein windschiefes Vierseit gemeinschaftlich.

Mehr noch:

der Durchschnittspunkt von $\Delta\delta'$ und Γ ist ein Punkt der Generatrix des ersten Systems, $\Gamma\gamma$, und ebenso der Punkt $(\Gamma\gamma',\Delta)$ ein Punkt der Generatrix $\Delta\delta$: diese Punkte sind:

$(\Delta\delta',\Gamma)$: $v = w = 0$, $\frac{t}{31} + \frac{u}{23} = 0$, und

$(\Gamma\gamma',\Delta)$: $u = v = 0$, $\frac{t}{14} + \frac{u}{24} = 0$;

ebenso gehen die Generatrices des zweiten Systems $\Delta\alpha'$ und $B\beta'$ durch die Punkte:

$(B\beta,\Delta)$: $t = u = 0$, $24 \cdot v + 23 \cdot w = 0$, und

$(A\alpha,B)$: $u = t = 0$, $14 \cdot v + 13 \cdot w = 0$,

Diese vier Punkte bestimmen ein Tetraëder, welches dem Coordinatentetraëder eingeschrieben ist, und zwar in der Weise, dass die Eckpunkte desselben in den beiden Gegenkanten (t,u) und (v,w) des Kerntetraëders liegen. Man hat also folgenden Satz:

Alle Hyperboloïde, welche einem Tetraëder eingeschrieben sind und durch ein und dasselbe windschiefe Vierseit gehen, sind zugleich einem zweiten, dem ersten Tetraëder eingeschriebenen Tetraëder umschrieben.

Die Ebenen α, β, γ, δ, welche durch die Generatrices des ersten Systems $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$, $\Delta\delta$ und resp. die Gegenecken des Kerntetraëders gelegt sind, enthalten die vier Geraden:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$Ba : t = 0, \qquad \frac{v}{31} - \frac{w}{14} = 0,$$

$$Ab : u = 0, \qquad -\frac{v}{23} + \frac{w}{24} = 0,$$

$$Dc : v = 0, \frac{t}{31} - \frac{u}{23} \qquad = 0,$$

$$Cd : w = 0, \frac{-t}{14} + \frac{u}{24} \qquad = 0,$$

vier Geraden, deren Coëfficienten der Relation

$$ik = ki$$

genügen: diese Geraden liegen also (§. 3.) hyperboloïdisch, d. h.

Wenn man einem Tetraëder ABCD ein zweites abcd einzeichnet, so dass die Verbindungsgeraden der correspondirenden Eckpunkte Aa, Bb, Cc, Dd hyperboloïdisch liegen, so sind die zwölf Verbindungsgeraden der Eckpunkte des eingeschriebenen Tetraëders mit denjenigen des Kerntetraëders, mit welchen sie in derselben Ebene liegen, zu vier die Generatrices dreier neuen dem Kerntetraëder eingeschriebenen Hyperboloïde. --

Bei der Construction des umschriebenen Hyperboloïds hatte sich ergeben, dass die Generatrices Cc und Dd liegen resp. in den Ebenen:

$$\frac{t}{13} = \frac{u}{23} \text{ und } \frac{t}{14} = \frac{u}{24}:$$

nimmt man nunmehr irgend eine Gerade in der ersten Ebene als die Generatrix Cc an, etwa:

$$Cc : \frac{t}{13} = \frac{u}{23} \qquad = \frac{w}{34},$$

so ergeben sich zunächst die Generatrices des zweiten Systems Aa′ und Bb′ resp. dnrch die Durchschneidung der Ebenen: $(Cc,A) : 34 . u = 23 . w$, und $(Bb,A) : 24 . v = 23 . w$

$$B\alpha : u = 0, \qquad \frac{v}{31} = -\frac{w}{24},$$

$$\Delta\beta : t = 0, \qquad -\frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$

$$\Delta\gamma : \frac{t}{31} = -\frac{u}{23}, \ w = 0,$$

$$\Gamma\delta : \frac{-t}{14} = \frac{u}{24}, \ v = 0,$$

vier Geraden, deren Coëfficienten der Relation

$$ik = ki$$

genügen: diese Geraden liegen also (§. 3.) hyperboloïdisch, d. h.

Wenn man einem Tetraëder $AB\Gamma\Delta$ ein zweites $\alpha\beta\gamma\delta$ umzeichnet, so dass die Durchschnittsgeraden der correspondirenden Seitenflächen $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$, $\Delta\delta$ hyperboloïdisch liegen, so sind die zwölf Durchschnittsgeraden der Seitenflächen des umschriebenen Tetraëders mit denjenigen des Kerntetraëders, mit welchen sie durch denselben Eckpunkt gehen, zu vier die Generatrices dreier neuen dem Kerntetraëder umschriebenen Hyperboloïde. —

Bei der Construction des eingeschriebenen Hyperboloïds hatte sich ergeben, dass die Generatrices $\Gamma\gamma$ und $\Delta\delta$ gehen resp. durch die Punkte:

$$v = w = 0, \frac{t}{13} + \frac{u}{23} = 0 \text{ u. } w = v = 0, \frac{t}{14} + \frac{u}{24} = 0:$$

nimmt man nunmehr irgend eine Gerade durch den ersten Punkt als die Generatrix $\Gamma\gamma$ an, etwa:

$$\Gamma\gamma : v = 0, \frac{t}{13} + \frac{u}{23} + \frac{w}{34} = 0,$$

so ergeben sich zunächst die Generatrices des zweiten Systems $A\alpha'$ und $B\beta'$ resp. durch die Verbindung der Punkte: $(\Gamma\gamma, \Delta)$; $t = v = 0$, $34 . u + 23 . w = 0$, und $(B\beta, \Delta) : t = u = 0, 24 . v + 23 . w = 0$

und

(Cc,B): $34 . t = 13 . w$, und (Aa,b): $14 . v = 13 . w$

d. h. diese Generatrices sind:

$$Aa' : \quad 34 . u = 24 . v = 23 . w,$$
$$Bb' : \quad 34 . t = 14 . v = 13 . w;$$

und endlich ergiebt sich die letzte Generatrix Dd durch die Durchschneidung der drei Ebenen:

$$(Aa',D) : \quad \frac{u}{24} = \frac{v}{34},$$
$$(Bb',D) : \quad \frac{t}{14} = \frac{v}{34},$$
$$(Cc',D) : \quad \frac{t}{14} = \frac{u}{24},$$

welche drei Ebenen sich in der That durchschneiden in der Geraden:

$$Dd : \quad \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34}.$$

und

$(\Gamma\gamma,B)$: $u = v = 0,\ 34 . t + 13 . w = 0$, und

$(A\alpha,B)$: $u = t = 0,\ 14 . v + 13 . w = 0$

d. h. diese Generatrices sind:

$$A\alpha' : t = 0, \quad 34 . u + 24 . v + 23 . w = 0,$$
$$B\beta' : u = 0, \quad 34 . t + 14 . v + 13 . w = 0;$$

und endlich ergiebt sich die letzte Generatrix $\Delta\delta$ durch die Verbindung der drei Punkte:

$$(A\alpha',\Delta) : w = t = 0, \quad \frac{u}{24} + \frac{v}{34} = 0,$$
$$(B\beta',\Delta) : w = u = 0, \quad \frac{t}{14} + \frac{v}{34} = 0,$$
$$(\Gamma\gamma',\Delta) : w = v = 0, \quad \frac{t}{14} + \frac{u}{24} = 0,$$

welche drei Punkte in der That liegen in der Geraden:

$$\Delta\delta : w = 0, \quad \frac{t}{14} + \frac{u}{24} + \frac{v}{34} = 0.$$

§. 9.

Die Geraden Aa, Bb, Cc, Dd und $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$, $\Delta\delta$ u. s. w., welche bisher ganz unabhängig von einander aufgetreten sind, stehen in einem innigen Zusammenhange, sobald man die Coëfficienten ik der rechten Seite dasselbe bedeuten lässt, als die entsprechenden Coëfficienten der linken Seite*), und dieser Zusammenhang wird vermittelt durch einen Satz aus der Geometrie des Raumes, welcher folgendem Satze aus der Geometrie der Ebene entspricht:

Wenn man die Eckpunkte eines Dreiecks ABC mit einem Punkte P in der Ebene desselben verbindet, und zu diesen Verbindungsgeraden und den zugehörigen Dreiecksseiten die conjugirten harmonischen Strahlen zieht, so schneiden diese die Gegenseiten des Dreiecks in drei Punkten, welche auf derselben Geraden liegen.

Man nennt diese Gerade die Polare des Punktes P in Beziehung auf das Dreieck ABC.

Gegeben sei wieder das Tetraëder ABCD als Coordinatentetraëder und durch die Eckpunkte desselben die vier hyperboloïdischen Geraden:

$$Aa : \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14},$$
$$Bb : \quad \frac{t}{12} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$
$$Cc : \quad \frac{t}{13} = \frac{u}{23} = \frac{w}{34},$$
$$Dd : \quad \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34},$$

*) Vergl. §. 3., Anm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welche resp. die Tetraëderflächen A, B, Γ, Δ durchschneiden in den Punkten a, b, c, d: construirt man zu jedem dieser Punkte die Polare in Beziehung auf das zugehörige Tetraëderdreieck, so sind die vier Polaren ebenfalls hyperboloïdisch. Man kann diese Geraden füglich die Polaren nennen der Generatrices Aa, Bb, Cc, Dd, in Beziehung auf das Tetraëder ABCD, und dann lässt sich der zu beweisende Satz, wie folgt, aussprechen:

Zu den Generatrices desselben Systems eines einem Tetraëder umschriebenen Hyperboloïds, welche durch die Eckpunkte dieses Tetraëders gehen, gehören als Polaren in Beziehung auf das Tetraëder die Generatrices desselben Systems eines neuen Hyperboloïds, das dem Kerntetraëder eingeschrieben ist.

Zum Beweise des Satzes nehme man etwa die Generatrix

$$\text{Aa}: \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14};$$

so sind die Ebenen durch sie und die in A zusammenstossende Tetraëderkanten:

$$(\text{Aa, AB}): \quad \frac{v}{13} = \frac{w}{14},$$

$$(\text{Aa, AC}): \quad \frac{u}{12} = \frac{w}{14},$$

$$(\text{Aa, AD}): \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13},$$

und deren Durchschnitte mit der Gegenfläche Δ des Tetraëders, d. h. die Verbindungsgeraden der Eckpunkte B, C, D mit a:

$$\text{Ba}: t = 0, \quad \frac{v}{13} - \frac{w}{14} = 0,$$

$$\text{Ca}: t = 0, \quad \frac{u}{12} - \frac{w}{14} = 0,$$

$$\text{Da}: t = 0, \quad \frac{u}{12} - \frac{v}{13} = 0,$$

und zu diesen und den Dreiecksseiten BC, BD; CD, CB; DB, DC gehören als die conjugirten harmonischen Geraden:

$$\text{B}\alpha: t = 0, \quad \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0,$$

$$\text{C}\alpha: t = 0, \quad \frac{u}{12} + \frac{w}{14} = 0,$$

$$\text{D}\alpha: t = 0, \quad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} = 0,$$

und deren Durchschnittspunkte mit den Gegenseiten CD, DB und BC sind:

$$t = u = 0, \quad \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0,$$

$$t = v = 0, \quad \frac{u}{21} + \frac{w}{14} = 0,$$

$$t = w = 0, \quad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} = 0,$$

welche drei Punkte liegen auf der Geraden:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$A\alpha : t = o, \quad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = o:$$

nach der obigen Erklärung, der Polaren der Generatrix Aa in Beziehung auf das Kerntetraëder; ebenso ergeben sich als die Polaren der drei übrigen Generatrices Bb, Cc, Dd:

$$B\beta : u = o, \frac{t}{12} \quad + \frac{v}{23} + \frac{w}{24} = o,$$

$$\Gamma\gamma : v = o, \frac{t}{13} + \frac{u}{23} \quad + \frac{w}{34} = o,$$

$$\Delta\delta : w = o, \frac{t}{14} + \frac{u}{24} + \frac{v}{34} \quad = o,$$

und diese vier Geraden liegen nach den früheren Bestimmungen auf einem dem Kerntetraëder eingeschriebenen Hyperboloïd. —

Zu den Generatrices des zweiten Systems:

$$\begin{array}{llll}
Aa' : & & 34 \,.\, u = 24 \,.\, v = 23 \,.\, w, \\
Bb' : & 34 \,.\, t & \quad = 14 \,.\, v = 31 \,.\, w, \\
Cc' : & 24 \,.\, t = 14 \,.\, u & \quad = 12 \,.\, w, \\
Dd' : & 23 \,.\, t = 31 \,.\, u = 12 \,.\, v &
\end{array}$$

ergeben sich ebenso als Polaren in Beziehung auf das Kerntetraëder die vier Geraden:

$$\begin{array}{ll}
A\alpha' : t = o, & 34 \,.\, u + 24 \,.\, v + 23 \,.\, w = o, \\
B\beta' : u = o, 34 \,.\, t & \quad + 14 \,.\, v + 13 \,.\, w = o, \\
\Gamma\gamma' : v = o, 24 \,.\, t + 14 \,.\, u & \quad + 12 \,.\, w = o, \\
\Delta\delta' : w = o, 23 \,.\, t + 13 \,.\, u + 12 \,.\, v & \quad = o,
\end{array}$$

ebenfalls vier hyperboloïdische Geraden und zwar gerade die Generatrices des zweiten Systems zu $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$, $\Delta\delta$: der eben bewiesene Satz lässt sich also dahin vervollständigen:

Zu den Generatrices beider Systeme eines einem Tetraëder umschriebenen Hyperboloïds, welche durch die Eckpunkte des Tetraëders gehen, gehören als Polaren in Beziehung auf dieses Tetraëder die Generatrices beider Systeme eines dem Kerntetraëder eingeschriebenen Hyperboloïds, welche in den Seitenflächen dieses Tetraëders liegen.

§. 10.

Man kann die Anzahl dieser Sätze über Hyperboloïde, welche einem Tetraëder eingeschrieben oder umschrieben sind, noch bedeutend vermehren, wenn man ausser den Punkten a, b, c, d, in denen vier durch die Eckpunkte des Kerntetraëders gelegte hyperboloïdische Geraden die Gegenflächen des Tetraëders durchschneiden, und ausser den Ebenen α, β, γ, δ, welche durch die Eckpunkte des Kerntetraëders und vier in den Seitenflächen desselben liegende hyperboloïdische Geraden gehen, resp. noch zwölf andere Punkte in den Seitenflächen und zwölf andere Ebenen durch die Eckpunkte des Kerntetraëders in Betracht zieht: man erhält diese neuen Punkte und Ebenen durch folgende Construction:

1) Man verbinde jeden der Punkte a, b, c, d mit den Eckpunkten des Kerntetraëders, welche mit ihnen resp. in derselben Seitenfläche liegen und construire zu diesen Verbindungsgeraden und den mit ihnen in demselben Eckpunkte zusammenstossenden Kanten die conjugirten harmonischen Strahlen, so durchschneiden sich diese zu zwei in viermal drei neuen Punkten.

Oder auch:

Dem Kerntetraëder ABCD sei ein anderes abcd eingezeichnet, von der Beschaffenheit, dass die Verbindungsgeraden der correspondirenden Eckpunkte Aa, Bb, Cc, Dd hyperboloïdisch liegen: legt man dann durch jede dieser Geraden und die mit ihr in derselben Ecke zusammenstossenden Kanten des Kerntetraëders Ebenen und die conjugirten harmonischen zu ihnen und den in derselben Kante zusammenstossenden Tetraëderflächen, so ergeben deren Durchschnittsgeraden auf den Gegenflächen von ABCD je drei neue Punkte a, b, c, d.

Gegeben seien die vier Geraden:

$$Aa_t: \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14},$$

$$Bb_u: \quad \frac{t}{12} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$

$$Cc_v: \quad \frac{t}{13} = \frac{u}{23} = \frac{w}{34},$$

$$Dd_w: \quad \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34}:$$

die Ebenen durch Aa_t und die Kanten AB, AC, AD sind:

$$\frac{v}{13} = \frac{w}{14}; \quad \frac{w}{14} = \frac{u}{12}; \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13},$$

und die conjugirten harmonischen Ebenen zu ihnen und den zugehörigen Seitenflächen des Tetraëders:

2) Man zeichne die Durchschnittsgeraden jeder der Ebenen α, β, γ, δ mit den Seitenflächen des Kerntetraëders, welche mit ihnen resp. in derselbeu Ecke zusammenstossen und constuire zu diesen Durchschnittsgeraden und den mit ihnen in derselben Seitenfläche liegenden Kanten die conjugirten harmonischen Strahlen, so liegen diese zu zwei in viermal drei neuen Ebenen.

Oder auch:

Dem Kerntetraëder $AB\Gamma\Delta$ sei ein anderes $\alpha\beta\gamma\delta$ umschrieben, von der Beschaffenheit, dass die Durchschnittsgeraden der correspondirenden Seitenflächen $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$, $\Delta\delta$ hyperboloïdisch liegen: construirt man dann zu den Durchschnittspunkten jeder dieser Geraden mit den in derselben Seitenfläche liegenden Kanten des Kerntetraëders die conjugirten harmonischen, so liegen diese Punkte zu drei auf drei neuen Geraden und die Ebenen durch sie und die Gegenecken von $AB\Gamma\Delta$ sind je drei neue Ebenen α, β, γ, δ.

Gegeben seien die vier Geraden:

$$A\alpha_t: \quad t = 0, \quad \frac{u}{12} + \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0,$$

$$B\beta_u: \quad u = 0, \quad \frac{t}{12} + \frac{v}{23} + \frac{w}{24} = 0,$$

$$\Gamma\gamma_v: \quad v = 0, \quad \frac{t}{13} + \frac{u}{23} + \frac{w}{34} = 0,$$

$$\Delta\delta_w: \quad w = 0, \quad \frac{t}{14} + \frac{u}{24} + \frac{v}{34} = 0:$$

die Durchschnittspunkte von $A\alpha_t$ mit den Kanten AB, $A\Gamma$, $A\Delta$ sind:

$$t = u = 0, \ \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = 0; \quad t = v = 0, \ \frac{w}{14} + \frac{u}{12} = 0,$$

$$t = w = 0, \ \frac{u}{12} + \frac{v}{13} = 0,$$

und die conjugirten harmonischen Punkte zu ihnen und den zugehörigen Eckpunkten des Tetraëders:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{v}{13}+\frac{w}{14}=0,\ \frac{w}{14}+\frac{u}{12}=0;$$
$$\frac{u}{12}+\frac{v}{13}=0$$

und deren Durchschnittsgeraden:

$$Aa_u:\ -\frac{u}{12}=\frac{v}{13}=\frac{w}{14},$$
$$Aa_v:\ \frac{u}{22}=-\frac{v}{23}=\frac{w}{24},$$
$$Aa_w:\ \frac{u}{32}=\frac{v}{33}=-\frac{w}{34},$$

auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen Geraden:

$$Bb_t:-\frac{t}{12}=\frac{v}{23}=\frac{w}{24},$$
$$Bb_v:\ \frac{t}{12}=-\frac{v}{23}=\frac{w}{24},$$
$$Bb_w:\ \frac{t}{12}=\frac{v}{23}=-\frac{w}{24};$$
$$Cc_t:-\frac{t}{13}=\frac{u}{23}=\frac{w}{34},$$
$$Cc_u:\ \frac{t}{13}=-\frac{u}{23}=\frac{w}{34},$$
$$Cc_w:\ \frac{t}{13}=\frac{u}{23}=-\frac{w}{34},$$
$$Dd_t:-\frac{t}{14}=\frac{u}{24}=\frac{v}{34},$$
$$Dd_u:\ \frac{t}{14}=-\frac{u}{24}=\frac{v}{34},$$
$$Dd_v:\ \frac{t}{14}=\frac{u}{24}=-\frac{v}{34};$$

$$t=u=0,\ \frac{v}{13}-\frac{w}{14}=0;\ t=v=0,\ \frac{w}{14}-\frac{u}{12}=0;$$
$$t=w=0,\ \frac{u}{12}-\frac{v}{13}=0,$$

und deren Verbindungsgeraden:

$$\mathit{\Delta}\alpha_u:\ t=0,\ -\frac{u}{12}+\frac{v}{13}+\frac{w}{14}=0,$$
$$\mathit{\Delta}\alpha_v:\ t=0,\ \frac{u}{12}-\frac{v}{13}+\frac{w}{14}=0,$$
$$\mathit{\Delta}\alpha_w:\ t=0,\ \frac{u}{12}+\frac{v}{13}-\frac{w}{14}=0,$$

auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen Geraden:

$$B\beta_t:\ u=0,\ -\frac{t}{12}+\frac{v}{23}+\frac{w}{24}=0,$$
$$B\beta_v:\ u=0,\ \frac{t}{12}-\frac{v}{23}+\frac{w}{24}=0,$$
$$B\beta_w:\ u=0,\ \frac{t}{12}+\frac{v}{23}-\frac{w}{24}=0,$$
$$\Gamma\gamma_t:\ v=0,\ -\frac{t}{13}+\frac{u}{23}+\frac{w}{34}=0,$$
$$\Gamma\gamma_u:\ v=0,\ \frac{t}{13}-\frac{u}{23}+\frac{w}{34}=0,$$
$$\Gamma\gamma_w:\ v=0,\ \frac{t}{13}+\frac{u}{23}-\frac{w}{34}=0,$$
$$\mathit{\Delta}\delta_t:\ w=0,\ -\frac{t}{14}+\frac{u}{24}+\frac{v}{34}=0,$$
$$\mathit{\Delta}\delta_u:\ w=0,\ \frac{t}{14}-\frac{u}{24}+\frac{v}{34}=0,$$
$$\mathit{\Delta}\delta_v:\ w=0,\ \frac{t}{14}+\frac{u}{24}-\frac{v}{34}=0.$$

Die 16 Geraden Aa, Bb, Cc, Dd*) liegen zu vier auf 32 verschiedenen Hyperboloïden: —

Damit nämlich vier dieser Geraden hyperboloïdisch liegen, muss die Bedingung $ik = ki$ erfüllt werden, und weil sich also durch die gleichzeitige Veränderung der Vorzeichen der mit demselben Coëfficienten 23, 31, 12, 14, 24, 34 behafteten Glieder neue Hyperboloïde ergeben; so ist die Gesammtanzahl dieser Hyperboloïde:

$$\frac{2^6}{2}=32.$$

Dasselbe ergiebt sich auch daraus, dass jede von den Geraden Aa, Bb, Cc, Dd acht verschiedenen Hyperboloïden als Generatrix dienen kann.

In der That, geht man z. B. von der Generatrix Aa_t aus, und vereinigt mit ihr irgend eine der vier Generatrices durch den Punkt B, z. B. Bb_u, so liegen nach

*) Der Kürze wegen sind nur diese allein in Betracht gezogen: es ist leicht, diesen und die folgenden Sätze auch auf die Geraden $\mathit{\Delta}\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$, $\mathit{\Delta}\delta$ auszudehnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 8., 1, die durch die Eckpunkte C und D des Kerntetraëders gehenden Generatrices desselben Systems resp. in zwei bestimmten Ebenen, nämlich in

$$\frac{t}{31} = \frac{u}{23} \text{ und } \frac{t}{14} = \frac{u}{24},$$

jede dieser Ebenen aber enthält zwei und nur zwei der fraglichen Geraden: nimmt man eine derselben als Generatrix, z. B.

$$Cc_v : \frac{t}{31} = \frac{u}{23} \qquad = \frac{w}{34},$$

so ist die Generatrix durch den Punkt D vollständig bestimmt, nämlich:

$$Dd_w : \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34};$$

hätte man als dritte Generatrix die andere Gerade durch den Punkt C genommen, nämlich:

$$Cc_w : \frac{t}{31} = \frac{u}{23} \qquad = -\frac{w}{34},$$

so wäre die Generatrix durch den Punkt D gewesen:

$$Dd_v : \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = -\frac{v}{34}.$$

Wenn man also Aa_t mit Bb_u vereinigt, so erhält man die beiden Systeme hyperboloïdischer Geraden:

$$Aa_t,\ Bb_u,\ Cc_v,\ Dd_w,$$
$$Aa_t,\ Bb_u,\ Cc_w,\ Dd_v$$

und nur diese beiden: statt Bb_u hätte man aber als zweite Generatrix auch Bb_t, Bb_v, Bb_w wählen können: also kann Aa_t, und so jede der fraglichen Geraden, nur acht verschiedenen Hyperboloïden als Generatrix angehören.

Nun ist die Gesammtzahl aller Geraden Aa, Bb, Cc, Dd 16: also die Anzahl aller möglichen Hyperboloïde 8 . 16 = 128, welche Zahl noch durch 4 dividirt werden muss, weil jedes Hyperboloïd vier von den 16 Geraden enthält; die Anzahl aller Hyperboloïde ist darum 32.

§. 11.

Die 16 Punkte a, b, c, d (§. 10) liegen, ausser zu vier in den Seitenflächen des Kerntetraëders, noch zu sechs in Ebenen, welche zugleich einen Eckpunkt dieses Tetraëders enthalten: — in der That liegen z. B. die sechs Punkte

$$\left.\begin{array}{ll}
a_u : t = o, & -\frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14}, \\
a_v : t = o, & \frac{u}{12} = -\frac{v}{13} = \frac{w}{14}, \\
b_t : u = o, & -\frac{t}{12} \qquad = \frac{v}{23} = \frac{w}{24}, \\
b_v : u = o, & \frac{t}{12} \qquad = -\frac{v}{23} = \frac{w}{24}, \\
c_t : v = o, & -\frac{t}{13} = \frac{u}{23} \qquad = \frac{w}{34}, \\
c : v = o, & \frac{t}{13} = -\frac{u}{23} \qquad = \frac{w}{34},
\end{array}\right\} \text{in der Ebene } 23 \,.\, t + 13 \,.\, u + \overline{12} \,.\, v = o,$$

d. h. wenn man, wie in §. 9., die Annahme macht, dass die Coëfficienten ik in den Gleichungen Aa, *Aα* u. s. w. übereinstimmen, so liegen die 6 Punkte

$$a_u,\ a_v,\ b_v,\ b_t,\ c_t,\ c_u \text{ in der Ebene } \delta'_w$$

ebenso liegen:

$$\begin{array}{lcl} b_v,\ b_w,\ c_w,\ c_u,\ d_u,\ d_v & \text{„} & \alpha'_t \\ c_t,\ c_w,\ a_w,\ a_v,\ d_v,\ d_t & \text{„} & \beta'_u \\ h_u,\ a_w,\ b_w,\ b_t,\ d_t,\ d_u & \text{„} & \gamma'_v \end{array}$$

die zwölf Punkte also a_u, a_v, a_w, b_v, b_t, b_w, c_t, c_u, c_w, d_t, d_u, d_v liegen zu sechs auf den Seitenflächen, und zu zwei auf den Kanten des Tetraëders:

$$\begin{array}{llllll} \alpha'_t : & & 12 \cdot u & + 13 \cdot v & + 14 \cdot w & = o, \\ \beta'_u : & 12 \cdot t & & + 23 \cdot v & + 24 \cdot w & = o, \\ \gamma'_v : & 13 \cdot t & + 23 \cdot u & & + 34 \cdot w & = o, \\ \delta'_w : & 14 \cdot t & + 24 \cdot u & + 34 \cdot v & & = o, \end{array}$$

dieses Tetraëder ist dem Kerntetraëder umschrieben und ausserdem von der Beschaffenheit, dass die Durchschnittsgeraden seiner Seitenflächen mit denen des Kerntetraëders] hyperboloïdisch liegen. Zieht man ferner in Betracht, dass die zwölf Punkte a_u, a_v, ... d_v gerade diejenigen sind, welche man durch die Construction des §. 10. erhält, wenn man von den Generatrices Aa_t, Bb_u, Cc_v, Dd_w als den gegebenen ausgeht, und nennt man der Kürze wegen diejenigen drei Punkte, welche sich ergeben als die Durchschnittspunkte der zu den Verbindungslinien eines Punktes P mit den Eckpunkten eines Dreiecks ABC (vergl. §. 9.) und den Dreiecksseiten conjugirten harmonischen Strahlen, die Polarpunkte von P in Beziehung auf das Dreieck ABC: so lässt sich die eben gefundene Eigenschaft folgendermassen aussprechen:

Wenn man einem Tetraëder ein zweites einzeichnet, so dass die Verbindungsgeraden der entsprechenden Eckpunkte hyperboloïdisch liegen, und zu den Eckpunkten des letzteren in Beziehung auf die Tetraëderdreiecke, in denen sie liegen, die Polarpunkte construirt, so liegen diese zwölf Polarpunkte zu zwei auf den Kanten eines dem ersten Tetraëder umschriebenen Tetraëders, dessen Seitenflächen die des ersteren in hyperboloïdischen Geraden durchschneiden.

Im Ganzen bestimmen die sechszehn Punkte a, b, c, d (nach §. 10.) zu zwölf 32 umschriebene Tetraëder, deren Seitenflächen die des gegebenen in hyperboloïdischen Geraden durchschneiden.

§. 12.

Man kann die zwölf Punkte a, b, c, d jedes der 32 Systeme ansehen als hervorgegangen aus der Durchschneidung der Seitenflächen des gegebenen Tetraëders mit denen eines bestimmten umschriebenen, und daraus erhält man neue Beziehungen in der Lage dieser Punkte: aus dem Chaslesschen Satze*) nämlich:

*) Chasles, Geschichte der Geometrie, übers. von Sohncke, Halle 1839, pag. 436.

„Wenn die sechs Kanten eines irgendwie im Raum gelegenen Tetraëders „eine Oberfläche des zweiten Grades in zwölf Punkten treffen, so liegen diese zwölf „Punkte zu je drei in vier Ebenen, von denen jede drei Punkte enthält, die solchen „drei Kanten angehören, welche von einerlei Ecke des Tetraëders ausgehen; diese „vier Ebenen treffen resp. die diesen Ecken gegenüberliegenden Seitenflächen in „vier Geraden, welche die vier Generatrices einer und derselben Erzeugungsart „eines Hyperboloïds mit Einem Fache sind,“ —
ergiebt sich umgekehrt, dass, wenn sich die Seitenflächen zweier Tetraëder in hyperboloïdischen Geraden durchschneiden, die Seitenflächen des einen auf den Kanten des anderen zwölf Durchschnittspunkte ergeben, welche auf einer Fläche zweiten Grades liegen; dies ist hier der Fall, und zwar liegen z. B. die zwölf Durchschnittspunkte:

$$a_u,\ a_v,\ a_w;\ b_v,\ b_t,\ b_w;\ c_t,\ c_u,\ c_w;\ d_t,\ d_u,\ d_v$$

der Flächen des Tetraëders ABCD mit denen des umschriebenen Tetraëders $\alpha'_t \beta'_u \gamma'_v \delta'_w$ auf der Fläche zweiten Grades:

$$\frac{23.24.34.t^2+31.34.14.u^2+12.14.24.v^2+23.31.12.w^2}{23.14+31.24+12.34}+14.uv+24.vt+34.tu+23.tw+31.uw+12.vw=o,$$

denn diese Gleichung lässt sich etwa bringen auf jede der vier Formen:

$$12.34\left(\frac{u}{12}+\frac{v}{31}\right)\left(\frac{u}{12}+\frac{w}{14}\right)+31.24\left(\frac{v}{31}+\frac{w}{14}\right)\left(\frac{v}{31}+\frac{u}{12}\right)+23.14\left(\frac{w}{14}+\frac{u}{12}\right)\left(\frac{w}{14}+\frac{v}{31}\right)+t(\ldots)=o,$$

$$23.14\left(\frac{v}{23}+\frac{t}{12}\right)\left(\frac{v}{23}+\frac{w}{24}\right)+12.34\left(\frac{t}{12}+\frac{w}{24}\right)\left(\frac{t}{12}+\frac{v}{23}\right)+31.24\left(\frac{w}{24}+\frac{v}{23}\right)\left(\frac{w}{24}+\frac{t}{12}\right)+u(\ldots)=o,$$

$$31.24\left(\frac{t}{31}+\frac{u}{23}\right)\left(\frac{t}{31}+\frac{w}{34}\right)+23.14\left(\frac{u}{23}+\frac{w}{34}\right)\left(\frac{u}{23}+\frac{t}{31}\right)+12.34\left(\frac{w}{34}+\frac{t}{31}\right)\left(\frac{w}{34}+\frac{u}{23}\right)+v(\ldots)=o,$$

$$14.23\left(\frac{t}{14}+\frac{u}{24}\right)\left(\frac{t}{14}+\frac{v}{34}\right)+24.31\left(\frac{u}{24}+\frac{v}{34}\right)\left(\frac{u}{24}+\frac{t}{14}\right)+34.12\left(\frac{v}{34}+\frac{t}{14}\right)\left(\frac{v}{34}+\frac{u}{24}\right)+w(\ldots)=o,$$

d. h. die Fläche zweiten Grades ist umschrieben jedem der vier Dreiecke $a_u a_v a_w$, $b_v b_t b_w$, $c_t c_u c_w$, $d_t d_u d_v$, deren Seiten der Reihe nach sind:

$$\begin{array}{ll} a_v a_w : & \\ a_w a_u : & t=o, \\ a_u a_v : & \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{v}{31}+\frac{w}{14}=o, \\ \frac{w}{14}+\frac{u}{12}=o, \\ \frac{u}{12}+\frac{v}{31}=o, \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \begin{array}{ll} b_t b_w : & \\ b_w b_v : & u=o, \\ b_v b_t : & \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{t}{12}+\frac{w}{24}=o, \\ \frac{w}{24}+\frac{v}{23}=o, \\ \frac{v}{23}+\frac{t}{12}=o, \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll} c_u c_w : & \\ c_w c_t : & v=o, \\ c_t c_u : & \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{u}{23}+\frac{w}{34}=o, \\ \frac{w}{34}+\frac{t}{31}=o, \\ \frac{t}{31}+\frac{u}{23}=o, \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \begin{array}{ll} d_u d_v : & \\ d_v d_t : & w=o, \\ d_t d_u : & \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{u}{24}+\frac{v}{34}=o, \\ \frac{v}{34}+\frac{t}{14}=o, \\ \frac{t}{14}+\frac{u}{24}=o: \end{array}\right.$$

die Fläche enthält also alle zwölf Punkte: — Durch gleichzeitige Veränderung der Vorzeichen der Coëfficienten ik erhält man die anderen Systeme von Punkten und darum auch die zugehörigen Flächen: im Ganzen also liegen:

die sechszehn Punkte a, b, c, d zu zwölf auf 32 Flächen zweiten Grades.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 13.

Im innigsten Zusammenhange mit den bisherigen Untersuchungen stehen die über Tetraëder, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind, Untersuchungen, welche zuerst von Moebius*) angeregt und später von Steiner**) erweitert worden sind.

Es sei das Tetraëder gegeben:

$$t = o,\ u = o,\ v = o,\ w = o,$$

und durch die Eckpunkte A, B, C, D, desselben die vier Geraden gelegt:

$$\text{Aa***)}: \quad \frac{u}{12} = \frac{v}{13} = \frac{w}{14},$$

$$\text{Bb}: \quad \frac{t}{21} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$

$$\text{Cc}: \quad \frac{t}{31} = \frac{u}{32} = \frac{w}{34},$$

$$\text{Dd}: \quad \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34},$$

wo a, b, c, d die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den correspondirenden Gegenflächen der Kerntetraëders ABCD sein mögen: damit nunmehr das eingeschriebene Tetraëder abcd dem Kerntetraëder zugleich umschrieben sei, müssen die Seitenflächen des ersteren durch die Eckpunkte des letzteren gehen, d. h. muss es zunächst eine Ebene geben durch den Punkt A, welche zugleich die Punkte b, c, d enthält, d. h. in der Gleichung einer solchen Ebene

$$mu + nv + pw = o$$

müssen sich die Coëfficienten m, n, p so bestimmen lassen, dass die Eckpunkte

$$b: u = o,\ \frac{t}{21} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24},$$

$$c: v = o,\ \frac{t}{31} = \frac{u}{31} = \frac{w}{34},$$

$$d: w = o,\ \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34},$$

in ihr liegen, die Ebene aber geht:

1) durch den Punkt b, wenn $\frac{n}{p} = -\frac{24}{23}$,

2) durch den Punkt c, wenn $\frac{m}{p} = -\frac{34}{32}$,

3) durch den Punkt d, wenn $\frac{m}{n} = -\frac{34}{24}$,

es muss also sein

$$-\frac{24}{23} : -\frac{34}{32} = -\frac{24}{34} \text{ d. h. } 23 = -32;$$

dieses die analytische Bedingung, damit die Ebene bcd durch den Punkt A geht: ebenso sind die Bedingungen, dass die Ebenen cad und abd resp. durch die Punkte B und C gehen:

*) Möbius, Crelle's Journ. Bd. III, pag. 273 — 276.

**) Steiner, System. Entw. etc. Art. 58, pag. 247 — 250.

***) Vergl. §. 10., Anm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$31 = -13 \text{ und } 12 = -21,$$

und es ist leicht zu sehen, dass alsdann auch die Ebene abc durch den Punkt D geht: — überhaupt also sind die Bedingungen, dass die vier Geraden Aa, Bb, Cc, Dd die Flächen des Tetraëders ABCD in Punkten durchschneiden, welche als Eckpunkte einem Tetraëder angehören, das dem Kerntetraëder zugleich in- und umschrieben ist, enthalten in der Bedingung

$$ik = -ki.$$

Es sind also z. B. vier der Aufgabe entsprechende Geraden:

$$\begin{array}{ll} Aa_v: & \frac{u}{12} = -\frac{v}{13} = \frac{w}{14}, \\ Bb_t: -\frac{t}{12} & = \frac{v}{23} = \frac{w}{24}, \\ Cc_u: \frac{t}{13} = -\frac{u}{23} & = \frac{w}{34}, \\ Dd_w: \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34} & ; \end{array}$$

und die Gleichungen der Seitenflächen des durch sie bestimmten, dem Kerntetraëder zugleich in- und umschriebenen Tetraëders sind:

$$\begin{array}{ll} A\alpha'_v: & 34 \,.\, u - 24 \,.\, v + 23 \,.\, w = o, \\ B\beta'_t: & -12 \,.\, t + 14 \,.\, u + 31 \,.\, w = o, \\ \Gamma\gamma'_u: & 24 \,.\, t - 14 \,.\, u + 12 \,.\, w = o, \\ \Delta\delta'_w: & 23 \,.\, t + 31 \,.\, u + 12 \,.\, v = o. \end{array}$$

§. 14.

Construction eines Tetraëders, welches einem gegebenen Tetraëder zugleich in- und umschrieben ist:

Es seien gegeben das Kerntetraëder ABCD und als Eckpunkte des gesuchten Tetraëders:

$$\begin{array}{ll} a: t = o, & \frac{u}{12} = -\frac{v}{13} = \frac{w}{14},^{*)} \\ b: u = o, & -\frac{t}{12} = \frac{v}{23} = \frac{w}{24}: \end{array}$$

zu finden seien die Eckpunkte c und d, so dass das Tetraëder abcd dem Kerntetraëder zugleich in- und umschrieben ist: weil

1) das Tetraëder abcd dem Kerntetraëder eingeschrieben sein soll, muss Punkt c liegen in dem Durchschnitt der Ebene abD mit $v = o$, d. h. in

$$cD: v = o,\ 23 \,.\, t + 13 \,.\, u = o,$$

und der Punkt d in dem Durchschnitt der Ebene abC mit $w = o$, d. h. in

$$dC: w = o,\ 24 \,.\, t - 24 \,.\, u = o.$$

Weil 2) das Tetraëder abcd dem Kerntetraëder ABCD umschrieben ist, muss die Ebene bcd gehen durch

*) Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, dass durch die Einführung der beiden Minuszeichen die Punkte a und b in ihrer Lage nicht im Entferntesten beschränkt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$bA : u = o, \qquad \frac{v}{23} - \frac{w}{24} = o,$$

und die Ebene acd gehen durch

$$aB : t = o, \qquad \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = o:$$

im Ganzen also muss die Gerade cd durchschneiden die vier Geraden:

$$aB : t = o, \qquad \frac{v}{13} + \frac{w}{14} = o:$$

$$bA : u = o, \qquad \frac{v}{23} - \frac{w}{24} = o,$$

$$cD : v = o, \quad \frac{t}{13} + \frac{u}{23} \qquad = o,$$

$$dC : w = o, \quad \frac{t}{14} - \frac{u}{24} \qquad = o,$$

welche vier Geraden, da in ihren Gleichungen $ik = ki$, nach §. 3. als Generatrices desselben Systems auf einem Hyperboloïd liegen; — diese vier Geraden werden auch durchschnitten von den Geraden AB, CD, ab und cd d. h. die vier Geraden

ab, cd, AB, CD

liegen hyperboloïdisch, der Steinersche Satz.*)

In dem ersten Theile dieser Entwickelung ergeben sich als geometrische Orte sowohl für den Eckpunkt c, als für den Eckpunkt d bestimmte Geraden: nimmt man nunmehr auf einer dieser Geraden einen beliebigen Punkt als dritten Eckpunkt des gesuchten Tetraëders an, z. B.

$$c : v = o, \frac{t}{13} = -\frac{u}{23} \qquad = \frac{w}{34},$$

so ergiebt sich der vierte Eckpunkt d etwa als der Durchschnittspunkt der Ebene:

$$(acB) : \qquad -34 \,.\, t + 14 \,.\, v + 13 \,.\, w = o,$$

mit

$$dC : w = o, \quad \frac{t}{14} - \frac{u}{24} \qquad = o,$$

d. h.

$$d : w = o, \quad \frac{t}{14} = \frac{u}{24} = \frac{v}{34}.$$

Anm. Wie ab, cd, AB, CD, so liegen auch die Gegenkantenpaare ac, bd, AB, CD und ad, bc, AD, BC je auf einem bestimmten Hyperboloïd als Generatrices desselben Systems. Diese von Steiner gefundene Eigenschaft der Gegenkanten zweier Tetraëder, von denen das eine dem anderen zugleich in- und umschrieben ist, lässt sich noch unter einem anderen Gesichtspunkte auffassen, wenn man daran denkt, dass jede Ebene durch eine Generatrix eines Hyperboloïds dasselbe berührt, nämlich, wie folgt:

Die Seitenflächen zweier Tetraëder, von denen das eine dem anderen zugleich in- und umschrieben ist, sind zugleich Tangentialebenen von drei verschiedenen Hyperboloïden.

*) Steiner, System. Entw. etc. pag. 250. Anm.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Oder auch: Jede zwei Tetraëder, von denen das eine dem anderen zugleich in- und umschrieben ist, sind zugleich drei verschiedenen Hyperboloïden zugleich in- und umschrieben. —

§. 15.

Zum Schluss noch die Sätze, welche für zugleich in- und umschriebene Tetraëder den in §§. 9. und 10. entwickelten entsprechen, und deren Herleitung nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeit macht:

Wenn man zu einem gegebenen Tetraëder ein zweites construirt, welches dem ersteren zugleich in- und umschrieben ist, und die correspondirenden Eckpunkte mit einander verbindet, so sind die Polaren dieser Verbindungsgeraden in Bezug auf das erstere Tetraëder solche, dass Ebenen durch sie und die Gegenecken desselben gelegt,. ein drittes Tetraëder ergeben, welches ebenfalls dem Kerntetraëder zugleich in- und umschrieben ist.

Die sechszehn Punkte a, b, c, d (§. 10.) bestimmen zu vier als Eckpunkte 32 verschiedene Tetraëder, welche dem Kerntetraëder zugleich in- und umschrieben sind.

Die Gesammtanzahl der Steinerschen Hyperboloïde (§. 15.), wenn man alle sechszehn Punkte a, b, c, d in Betracht zieht, ist 24: — ebenso ist:

die Gesammtanzahl der Hyperboloïde, welche durch die Verbindungsgeraden der Punkte a, b, c, d mit den in derselben Ebene liegenden Eckpunkten des Kerntetraëders (§. 8.) bestimmt werden, 24. —

Oswald Hermes.

Schulnachrichten.

I. Lehrplan des Real-Gymasiums.

Die Vertheilung des Unterrichts und die Abgränzung der einzelnen Pensa in den wissenschaftlichen und sprachlichen Lehrobjecten war im abgelaufenen Schuljahre folgende:

1. Sexta.

Ordinarius: ord. Lehrer Dr. Kuhlmey.

Religion (wöchentlich 2 St.). Biblische Geschichte des A. T. bis zu Moses Tod nach dem Auszuge von Kurtz. Die zehn Gebote und sechs Kirchenlieder. (Prediger Eysenhardt.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf