somit $y_1 = - y_4 : 3$. Hier ist daher die Ordinate des Berührungspunktes der 3. Teil von der Ordinate des Schneidepunktes und im Charakter von ihr verschieden.

Oder alle 4 Werte für y sind einander gleich; dann ist $4y_1 = 0$, also $y_1 = 0$, und dazu gehört $x_1 = 0$ nach der Gleichung $y^2 = 2p \cdot x$. Es findet somit vierpunktige Berührung in O statt. Da $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ ist, so folgt, daß in diesem Falle in der die 4 Werte für y enthaltenden obigen Gleichung die Faktoren von y^2 und y, sowie das Absolutglied gleich 0 sind, und daß daher, weil nicht $p = 0$ sein kann, $c - p = 0$, $d = 0$ und $a^2 - c^2 - d^2 = 0$, also $c = p$ und $d = 0$, folglich $a^2 = c^2$ und somit $a = c = p$ sein muß. Da $c = p$ und $d = 0$ ist, so liegt das Centrum des Kreises auf der X-Achse um p von O entfernt; und a, der Radius des Kreises, muß gleich dem halben Parameter der Parabel gewählt werden.

---

b) Beweis des Satzes, dass unter allen reellen positiven ganzen Zahlen nur das Zahlenpaar 4 und 2 für a und b der Gleichung $a^b = b^a$ genügt.

Der Beweis, welcher hier gegeben werden soll, stützt sich auf folgende 2 Hülfssätze:

Hülfssatz 1. Versteht man unter r und n (unbenannte) endliche reelle positive ganze Zahlen und ist $r > 2$, also $\geqq 3$, so ist $r^n > \left(1 + \frac{n}{r}\right)^r$.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist für irgend eine Zahl r:

$$\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = 1 + 1 + \binom{r}{2} \cdot \frac{1}{r^2} + \binom{r}{3} \cdot \frac{1}{r^3} + \binom{r}{4} \cdot \frac{1}{r^4} + \ldots, \text{ also}$$

$$\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = 2 + S, \text{ wenn } S = \binom{r}{2} \cdot \frac{1}{r^2} + \binom{r}{3} \cdot \frac{1}{r^3} + \binom{r}{4} \cdot \frac{1}{r^4} + \ldots \text{ ist.}$$

Jeder Summand der mit S bezeichneten Summe hat die Form $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m}$, so daß dabei m eine reelle positive ganze Zahl größer als 1 bezeichnet und, wofern unter r nur reelle positive ganze Zahlen verstanden werden, $r \geqq m$ ist.

Zudem ist dann $\binom{r}{m} = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \ldots [\text{m Faktoren}] \cdot \frac{1}{m!}$,

$$\text{daher } \binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{r}\right) \ldots [(m-1) \text{ Faktoren}] \cdot \frac{1}{m!}.$$

Da nun jeder der Faktoren $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{r}\right)$ u. s. w. eine reelle positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet, so ist das Produkt aus ihnen positiv und kleiner als 1, somit $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m}$ eine positive Zahl und $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m} < \frac{1}{m!}$.

Ist aber $r = \infty$, so ist jeder der Faktoren $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{r}\right)$ u. s. w. gleich 1, also auch das Produkt aus ihnen gleich 1, und daher $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m}$ positiv und $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m} = \frac{1}{m!}$.

Versteht man nun unter S die Summe $\binom{r}{2} \cdot \frac{1}{2!} + \binom{r}{3} \cdot \frac{1}{3!} + \binom{r}{4} \cdot \frac{1}{4!} + \ldots$ für den Fall, wenn r eine endliche reelle positive ganze Zahl bezeichnet, und unter S' dieselbe Summe für den Fall, wenn $r = +\infty$ ist, so ist in beiden Summen jeder einzelne Summand eine positive Zahl, jeder Summand aus der Summe S kleiner als der gleichvielte aus der Summe S', und die Summe S' besteht aus mehr Summanden als die Summe S, da letztere nur eine begrenzte Anzahl Summanden hat. Somit ist $S < S'$.

Zu $r = +\infty$ ist $\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = \begin{cases} 2 + S'; \\ 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots; \\ 2{,}7182818284\ldots; \end{cases}$

folglich ist, wenn r irgend eine endliche reelle positive ganze Zahl bezeichnet:

$$\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r < 2{,}7182818284\ldots,$$

um so mehr also $\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r < 3$.

Zu $r > 3$ ist $r^1 > 3$, daher $r^1 > \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r$.

Bezeichnet nun z eine solche Zahl, daß

$$r^z > \left(1 + \frac{z}{r}\right)^r$$

richtig ist, so läßt sich daraus ableiten, daß dann auch richtig ist:

$$r^{z+1} > \left(1 + \frac{z+1}{r}\right)^r.$$

Es ist nämlich $1 + \frac{z+1}{r} = \left(1 + \frac{z}{r}\right) + \frac{1}{r}$.

also, wenn $1 + \frac{z}{r} = v$ gesetzt wird,

$$1 + \frac{z+1}{r} = v + \frac{1}{r}.$$

Es soll demnach unter der Voraussetzung, das $r^z > v^r$ ist, sein:

$$r^{z+1} > \begin{cases} \left(v + \frac{1}{r}\right)^r; \\ v^r \cdot \left(1 + \frac{1}{v \cdot r}\right)^r. \end{cases}$$

Setzt man noch $r^z = v^r \cdot w$, so ist also $w > 1$,

und da $r^{z+1} = r^z \cdot r$ ist,

$$r^{z+1} = v^r \cdot w \cdot r;$$

also soll sein $v^r \cdot w \cdot r > v^r \cdot \left(1 + \frac{1}{v \cdot r}\right)^r$,

und somit $w \cdot r > \left(1 + \frac{1}{v \cdot r}\right)^r$.

Nun ist aber, wie oben gezeigt wurde,

$$\left(1+\frac{1}{r}\right)^r < 3,$$

daher auch $\left(1+\frac{1}{v\,.\,r}\right)^{v\,.\,r} < 3,$

um so mehr also $\left(1+\frac{1}{v\,.\,r}\right)^r < 3,$

denn v bezeichnet, weil $v = 1 + \frac{z}{r}$ ist, eine positive Zahl größer als 1.

Weil ferner $w > 1$ und $r \geqq 3$ ist, so ist $w\,.\,r > 3$, folglich

$$w\,.\,r > \left(1+\frac{1}{v\,.\,r}\right)^r,$$

und daher, wenn $r^z > \left(1+\frac{z}{r}\right)^r$ ist, auch $r^{z+1} > \left(1+\frac{z+1}{r}\right)^r$.

Da nun $r^n > \left(1+\frac{n}{r}\right)^r$ ist, wenn $n = 1$ ist, so auch, wenn $n = 2$ ist, und daher wieder, wenn $n = 3$ ist u. s. w, also überhaupt, wenn r und n endliche reelle positive ganze Zahlen bedeuten und $r \geqq 3$ ist.

Hülfssatz 2. Bezeichnet n eine reelle positive ganze Zahl größer als 2, ist also $n \geqq 3$, so ist $2^n > \left(1+\frac{n}{2}\right)^2$.

Zu $n = 3$ nämlich ist $2^n = 8$ und $\left(1+\frac{n}{2}\right)^2 = 6\,\frac{1}{4}$, also $2^n > \left(1+\frac{n}{2}\right)^2$ und somit für $n = 3$ der Satz richtig. Er sei überhaupt für $n = z$ richtig, also:

$$2^z > \left(1+\frac{z}{2}\right)^2,$$

dann läßt sich hieraus ableiten, daß der Satz auch für $n = z + 1$ richtig und daher

$$2^{z+1} > \begin{cases} \left(1+\frac{z+1}{2}\right)^2 \\ \left[\left(1+\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^2 \text{ ist.} \end{cases}$$

Setzt man $1 + \frac{z}{2} = v$, so soll also unter der Voraussetzung, daß

$$2^z > v^2 \text{ ist,}$$

$$2^{z+1} > \begin{cases} \left(v+\frac{1}{2}\right)^2 \\ v^2\,.\,\left(1+\frac{1}{2\,v}\right)^2 \text{ sein.} \end{cases}$$

Es sei noch $2^z = v^2\,.\,w$, also $w > 1$, dann ist,

weil $2^{z+1} = 2^z\,.\,2$ ist,

$$2^{z+1} = v^2\,.\,w\,.\,2;$$

$$\text{daher müßte sein } v^2 . w . 2 > v^2 . \left(1 + \frac{1}{2\,v}\right)^2,$$

$$\text{somit} \qquad w . 2 > \left(1 + \frac{1}{2\,v}\right)^2.$$

Da nun $w > 1$, so ist $w . 2 > 2$, und vorausgesetzt, daß $z \geqq 3$ ist, ergibt sich $v \geqq 2\frac{1}{2}$, somit $2\,v \geqq 5$, daher $\frac{1}{2\,v} < \frac{1}{5}$ und $\left(1 + \frac{1}{2\,v}\right)^2 < 1\frac{11}{25}$.

Folglich ist der Satz, wenn er für $n = z$ richtig ist, auch für $n = z + 1$ richtig. Nun ist er aber richtig für $n = 3$, daher auch für $n = 4$, folglich auch für $n = 5$ u. s. w., also überhaupt, wenn n eine reelle positive ganze Zahl größer als 2 bezeichnet.

Um nun zu zeigen, daß unter allen reellen positiven ganzen Zahlen, ohne daß $a = b$ ist, in welchem Falle jede Zahl für a und b zugleich der Gleichung $a^b = b^a$ genügen würde, nur das Zahlenpaar 4 und 2 genügt, soll hier zunächst nachgewiesen werden, daß, wenn a und b Zahlen der vorhin angegebenen Art bezeichnen und beide größer als 2 sind, diejenige Potenz die größere ist, die den größern Exponent hat.

Versteht man unter r und n endliche reelle positive ganze Zahlen und ist $r \geqq 3$ so müßte

$$r^{r+n} > (r+n)^r,$$

$$\text{also} \quad r^r . r^n > r^r . \left(1 + \frac{n}{r}\right)^r$$

$$\text{somit} \quad r^n > \left(1 + \frac{n}{r}\right)^r \text{ sein,}$$

und dies ist nach dem ersten Hülfssatze der Fall.

Da die Vertauschung der Zahlen a und b unter einander die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Gleichung $a^b = b^a$ nicht ändert, so bleiben bloß noch die Fälle übrig, in denen $a < 3$ ist bei beliebiger Größe für b.

Zu $a = 1$ ist $a^b = 1$ und $b^a = b$, also müßte $b = 1$ und somit $a = b$ sein.

Zu $a = 2$ und $b = 1$ oder $b = 3$ liefern a^b und b^a von einander verschiedene Werte.

Zu $a = 2$ und $b = 4$ ist $a^b = 16$ und $b^a = 16$, also $a^b = b^a$.

Zu $a = 2$ und $b > 4$, etwa $b = 2 + n$, so daß n eine reelle positive ganze Zahl bezeichnet und $n > 3$ ist, findet sich:

$$a^b = \begin{cases} 2^{2+n} \\ 2^2 . 2^n \end{cases} \quad \text{und} \quad b^a = \begin{cases} (2+n)^2 ; \\ 2^2 . \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Nun ist nach dem zweiten Hülfssatze $2^n > \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2$; folglich ist zu $a = 2$ und $b > 4$ jedesmal $a^b > b^a$.

Somit bilden 4 und 2 unter den endlichen reellen positiven ganzen Zahlen das einzige Zahlenpaar, welches für a und b der Gleichung $a^b = b^a$ genügt.