a) Eine Auswahl
aus
der analytischen Geometrie der Ebene.

Die analytische Geometrie der Ebene leitet die geometrischen Lehrsätze aus solchen unbestimmten algebraischen Gleichungen mit 2 Unbekannten (x und y) ab, deren Wertepaare in Linien darstellbare Zahlengrößen sind.

Einer solchen Gleichung genügen unzählig viele Wertepaare für x und y, denn zu jeder für eine der beiden Unbekannten beliebig gewählten Liniengröße liefert die Gleichung (in der Regel) wenigstens 1 reellen Wert für die andere Unbekannte.

Aus einer Gleichung (dieser Art) läßt sich ein bestimmtes, nur grade ihr zugehöriges geometrisches Bild in folgender Weise herleiten:

Man wählt eine gerade Linie, gewöhnlich wagerecht von links nach rechts, und eine zweite gerade Linie senkrecht zur ersten und bezeichnet je ein Wertepaar $x = a$, $y = b$, der geometrisch darzustellenden Gleichung durch einen Punkt in der durch die Zusammenstellung (das System) der beiden gewählten Linien bestimmten Ebene, den man so wählt, dass er von der ersten Linie (X-Achse) den Abstand b und von der zweiten Linie (Y-Achse) den Abstand a hat.

Das durch die beiden Achsen gebildete System nennt man das Coordinatensystem, ihren Treffpunkt (O) den Anfangspunkt des Systems, und die 4 Winkelräume des Systems die 4 Quadranten, und unterscheidet diese letztern in der Reihenfolge oben rechts, oben links, unten links, unten rechts als 1. bis 4. Quadranten. Der dem Wertepaar $x = a$, $y = b$ zugehörige Punkt wird auch kurz Punkt (a, b) genannt, a die Abscisse des betreffenden Punktes, b seine Ordinate, und a und b zusammen die Coordinaten des Punktes.

Je nachdem a und b in einem Wertepaare $x = a$, $y = b$, einzeln eine positive oder eine negative Zahl bezeichnen, liegt der zugehörige Punkt in dem einen oder dem andern der 4 Quadranten. Da man, wofern unter $(+ a)$ und $(+ b)$ positive Zahlen verstanden werden, den Punkt $(+ a, + b)$ im 1. Quadranten einzeichnet, so fällt der Punkt $(- a, + b)$ in den 2., der Punkt $(- a, - b)$ in den 3. und der Punkt $(+ a, - b)$ in den 4. Quadranten.

Die beiden Angaben eines Wertepaares der Gleichung liefern einen in Bezug auf seine Lage in der Ebene des Systems ganz bestimmten Punkt; daher ist die Lage eines einem zweiten Wertepaare zugehörigen Punktes von der Lage des erstern verschieden: jedes Wertepaar liefert somit einen besondern Punkt.

Die Gesamtheit aller nach den Wertepaaren einer Gleichung hergeleiteten Punkte bildet in der Regel eine ununterbrochene Reihenfolge derselben, weil, wenn der Gleichung die Wertepaare $x = a$, $y = b$ und $x = c$, $y = d$ genügen, selbst wenn a und c oder b und d um eine noch so kleine Größe von einander verschieden sind, der Gleichung in der Regel auch ein Wertepaar $x = e$, $x = f$ genügt, so daß im erstern Falle e zwischen a und c oder im zweiten Falle f zwischen b und d liegt. Alle jene Punkte zusammen liefern daher eine (gerade oder krumme) Linie, Curve genannt; dieselbe kann aber auch aus 2 oder mehr von einander getrennt liegenden Teilen (Linien) bestehen.

Eine zweite, von einer ersten verschiedene Gleichung liefert in demselben System eine andere Curve als die erste, weil sie nicht in allen Wertepaaren mit der ersten Gleichung übereinstimmt.

Somit entspricht in demselben Coordinatensystem jeder besondern Gleichung eine besondere Curve, so dass also die Curve die geometrische Darstellung der betreffenden Gleichung und die Gleichung die algebraische Darstellung der betreffenden Curve ist.

In der analytischen Geometrie pflegt man die Unbekannten (x und y) der Gleichung einer Curve Variabele (veränderliche Größen) zu nennen, weil es hier auf die Veränderungen ankommt, welche die Werte von x und y in den verschiedenen Wertepaaren der Gleichung erleiden; die andern Größen (a, b, c u. s. w.) der Gleichung heißen dann die Constanten, weil jede von ihnen den ihr einmal zukommenden oder beigelegten Wert in allen Ableitungen aus dieser Gleichung beibehält.

Eine Gleichung mit bloß 1 Unbekannten, z. B. $x = a$ oder $y = b$, ist eine bestimmte Gleichung; sie läßt sich aber als ein unvollständiges, und zugleich das einzige, Wertepaar, das ihr genügt, auffassen. Da z. B. die Gleichung $x = a$ nichts über den zugehörigen Wert von y bestimmt, so duldet sie zu $x = a$ jeden beliebigen Wert für y; sie liefert also alle Punkte, welche von der Y-Achse den Abstand a haben.

Hiernach ergeben sich leicht folgende Sätze als richtig. Es bezeichnet:

I. $x = o$ die Y-Achse.

II. $y = o$ die X-Achse.

III. $x = a$ eine Parallele zur Y-Achse im Abstande a von derselben, und zwar rechts oder links von der Y-Achse, je nachdem a eine positive oder eine negative Größe bezeichnet.

IV. $y = a$ eine Parallele zur X-Achse im Abstande a von derselben, über oder unter der X-Achse, je nachdem a eine positive oder eine negative Größe bezeichnet.

V. $y = + x$ eine gerade Linie, die durch O geht und die Coordinatenwinkel im 1. und 3. Quadranten halbiert. — Der Gleichung genügt nämlich $x = + a$, $y = + a$ und $x = - a$, $y = - a$ bei jeder Größe von a.

VI. $y = -x$ eine gerade Linie, die durch O geht und die Coordinatenwinkel im 2. und 4. Quadranten halbiert. — Ihr genügt $x = +a$, $y = -a$ und $x = -a$, $y = +a$ bei jeder Größe von a.

VII. $y = \operatorname{tng} \alpha \, . \, x$ eine gerade Linie, die durch O geht und mit dem von ihrem Treffpunkt mit der X-Achse aus nach rechts hin liegenden Teile dieser Achse den Winkel α bildet. — Denn, wenn für irgend einen Punkt dieser Linie $x = a$, $y = b$ ist, so ist $b : a = \operatorname{tng} \alpha$, daher $b = \operatorname{tng} \alpha \, . \, a$, so daß also $x = a$, $y = b$ auch der Gleichung genügt.

VIII. $y = m \, . \, x$ eine gerade Linie, die durch O geht und mit dem von ihrem Treffpunkte mit der X-Achse aus nach rechts hin liegenden Teile dieser Achse einen solchen Winkel (α) bildet, daß $\operatorname{tng} \alpha = m$ ist.

IX. $y = m \, . \, x + c$ eine gerade Linie, die der Linie $y = m \, . \, x$ parallel läuft und auf der Y-Achse von O aus auf ihrem nach oben oder nach unten hin liegenden Teile die Größe von c abschneidet, je nachdem c eine positive oder negative Zahl bezeichnet. — Ist nämlich für irgend einen Punkt dieser Linie $x = a$, $y = b$, so ist $(y - c) : x = \operatorname{tng} \alpha$, wofern $\operatorname{tng} \alpha = m$ ist, und daher $y - c = m \, . \, x$, somit $y = m \, . \, x + c$, so daß also $x = a$, $y = b$ auch der Gleichung genügt.

Der Faktor von x in einer Gleichung von der Form $y = m \, . \, x + c$ bestimmt die Richtung der Linie und wird deshalb Richtungskoeffizient genannt.

X. $x : a + y : b = 1$ eine gerade Linie, welche von O aus gerechnet auf der X-Achse a und auf der Y-Achse b abschneidet. — Ist nämlich für irgend einen Punkt dieser Linie $x = c$, $y = d$, so verhält sich $b : d = a : (a - c)$, daher ist $d : b = 1 - c : a$, somit $c : a + d : b = 1$, so daß also $x = c$, $y = d$ auch der Gleichung genügt. — Diese Linie läuft parallel der Linie $y = -(b : a) \, . \, x$, denn ihre Gleichung kann übergehen in die Form $y = -(b : a) \, . \, x + b$.

XI. $y - b = m \, . \, (x - a)$ eine gerade Linie, welche durch den Punkt (a, b) geht, denn der Gleichung genügt das Wertepaar $x = a$, $y = b$, und die mit der Linie $y = m \, . \, x$ parallel läuft, weil die Gleichung die Form annehmen kann $y = m \, . \, x + (b - m \, . \, a)$; sie schneidet also auf der Y-Achse $(b - m \, . \, a)$ ab.

XII. $(y - b) : (y - d) = (x - a) : (x - c)$ eine gerade Linie, welche durch die Punkte (a, b) und (c, d) geht, denn der Gleichung genügen die Wertepaare $x = a$, $y = b$ und $x = c$, $y = d$.

$yx - xb - yc + bc =$
$yx - xd - ay + ad$
$y = mx + c$

XIII. $(y - b) : (b - d) = (x - a) : (a - c)$ dieselbe Linie als die Gleichung $(y - b) : (y - d) = (x - a) : (x - c)$, denn jede von diesen Gleichungen läßt sich aus der andern ableiten. Beide heißen, auf die Form $y = m \, . \, x + c$ gebracht, $y = (b - d) : (a - c) \, . \, x + (b - (b - d) : (a - c) \, . \, a)$.

XIV. $(x : a)^2 + (y : a)^2 = 1$ und daher auch $x^2 + y^2 = a^2$ eine Kreislinie, deren Centrum in O liegt und deren Radius gleich a ist. — Für irgend einen Punkt nämlich auf dieser Kreislinie sei $x = c$, $y = d$, so ist $c^2 + d^2 = a^2$, und somit genügt das Wertepaar $x = c$, $y = d$ der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ und daher auch der Gleichung $(x : a)^2 + (y : a)^2 = 1$.

XV. $(x - c)^2 + (y - d)^2 = a^2$ eine Kreislinie, deren Centrum der Punkt (c, d) ist und die den Radius a hat. — Ist nämlich für irgend einen Punkt auf dieser Kreislinie $x = e$, $y = f$, so ist $(e - c)^2 + (f - d)^2 = a^2$.

XVI. $(x : a)^2 + (y : b)^2 = 1$ eine Curve, welche auf der Y-Achse, von O aus gerechnet, $(+ b)$ und $(- b)$ abschneidet, denn der Gleichung genügen die Wertepaare $x = o$, $y = \pm b$, und welche auf der X-Achse, von O an gerechnet, $(+ a)$ und $(- a)$ abschneidet, weil der Gleichung die Wertepaare $x = \pm a$, $y = o$ genügen. — Die Gleichung hat kein Wertepaar und daher die Curve keinen Punkt, so dass $x > \pm a$ oder $y > \pm b$ wäre, weil dann bezüglich der zugehörige Wert für y oder für x imaginär wird. Dagegen liefert die Gleichung zu jedem Wert für x zwischen o und $(\pm a)$ zwei gleichgroße reelle Werte für y, sowie zu jedem Wert für y zwischen o und $(\pm b)$ zwei gleichgroße reelle Werte für x. — Die Curve ist eine geschlossene; man nennt sie eine Ellipse, wählt gewöhnlich $a > b$ und nennt dann a die halbe große Achse der Ellipse und b ihre halbe kleine Achse. Zu $a = b$ geht die Ellipse in den Kreis (XIV.) über.

XVII. $(x : a)^2 - (y : b)^2 = 1$ eine Curve, welche die X-Achse in den Punkten $(\pm a, o)$ trifft, weil der Gleichung die Wertepaare $x = \pm a$, $y = o$ genügen. Zu $x < \pm a$ liefert die Gleichung nur imaginäre Werte für y, so daß also die Curve keinen Punkt enthält, dessen Abstand von der Y-Achse kleiner als a wäre. Dagegen erhält man zu $x > \pm a$ aus der Gleichung jedesmal 2 gleichgroße reelle Werte für y und diese fallen um so größer aus, je größer der Wert für x gewählt ist. — Die Curve besteht daher aus 2 von einander getrennt liegenden, nicht geschlossenen Teilen und wird Hyperbel genannt.

XVIII. $(x : a)^2 - (y : a)^2 = 1$ und daher auch $x^2 - y^2 = a^2$ eine Curve, in welche die Hyperbel (XVII.) übergeht, wenn $a = b$ ist: die gleichseitige Hyperbel.

XIX. $y^2 = 2p \cdot x$ eine Curve, die durch O geht, weil der Gleichung das Wertepaar $x = o$, $y = o$ genügt. Diese Curve hat, (vorausgesetzt, daß unter p eine positive Größe gemeint ist), keinen Punkt im 2. und 3. Quadranten, denn zu irgend einem negativen Wert für x liefert die Gleichung für y imaginäre Werte. Dagegen ergeben sich aus der Gleichung zu jedem positiven Wert für x 2 gleichgrosse reelle Werte für y, und zwar sind diese um so größer, je größer der für x gewählte Wert ist. — Diese Curve ist eine zusammenhängende, nicht geschlossene Linie und wird Parabel genannt; 2p nennt man den Parameter derselben.

Beliebig viele Punkte einer Ellipse $(x : a)^2 + (y : b)^2 = 1$ lassen sich in der Weise finden, daß man zu einem in den Grenzen o bis $(\pm a)$ beliebig gewählten Wert für x den zugehörigen Wert für y konstruiert, entweder nach der aus der Gleichung der Ellipse abgeleiteten Proportion

$$a : b = \pm \sqrt{a^2 - x^2} : y,$$

nach welcher derselbe die 4. Proportionale zu den 3 bekannten Größen a, b und $\sqrt{a^2 - x^2}$ ist, oder nach der aus der Gleichung der Ellipse abgeleiteten Gleichung

$$y^2 = b^2 - (b \cdot x : a)^2,$$

gemäß welcher y gleich der zweiten Kathete desjenigen rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Hypotenuse gleich b und dessen erste Kathete gleich $b \cdot x : a$ ist.

Diesem entspricht die Auffindung beliebig vieler Punkte einer Hyperbel $(x : a)^2 - (y : b)^2 = 1$. Zu einem beliebig gewählten Wert grösser als $(\pm a)$ für x konstruiert man den zugehörigen Wert für y entweder nach der aus der Gleichung der Hyperbel abgeleiteten Proportion:

$$a : b = \pm \sqrt{x^2 - a^2} : y$$

oder nach der aus ihr abgeleiteten Gleichung:

$$y^2 = (b \cdot x : a)^2 - b^2.$$

Für eine Parabel $y^2 = 2p \cdot x$ ergeben sich beliebig viele Punkte, wenn man zu irgend einem positiven Wert für x den zugehörigen Wert für y nach der aus der Gleichung der Parabel abgeleiteten Proportion:

$$2p : y = y : x$$

konstruiert, nach welcher der Wert für y die mittlere Proportionale zu 2p und dem gewählten Wert für x ist.

Soviele übereinstimmende Wertepaare die Gleichungen zweier auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen Curven haben, ebensoviele gemeinsame Punkte haben diese Curven. Diese Wertepaare finden sich, wenn man aus dem System der beiden Gleichungen ihre gemeinsamen Wertepaare bestimmt.

Irgend eine gerade Linie läßt sich durch die Gleichung $y = m \cdot x + c$ darstellen, so lange noch keine bestimmten Größen für m und c gewählt sind. Da nun die Gleichungen eines Kreises (XIV und XV.), einer Ellipse (XVI.), einer Hyperbel (XVII.) und einer Parabel (XIX.) solche vom 2. Grade sind und ein System aus einer Gleichung vom 2. Grade und einer Gleichung vom 1. Grade nur 2 Wertepaare liefert, so hat jede dieser Curven mit einer geraden Linie höchstens 2 gemeinsame Punkte (Durchschnittspunkte); dagegen können beliebig 2 von diesen Curven mit einander 4 Durchschnittspunkte haben, weil ein System aus 2 Gleichungen, wenn sie beide dem 2. Grade angehören, 4 reelle Wertepaare liefern kann.

Bestimmt man die Coordinaten für die Durchschnittspunkte einer durch O gehenden geraden Linie $y = m \cdot x$ (VIII.) mit der Hyperbel $(x : a)^2 - (y : b)^2 = 1$ (XVII), so ergibt sich:

$$x'_{''} = \pm a \cdot b : \sqrt{b^2 - a^2 \cdot m^2};$$
$$y'_{''} = m \cdot x'_{''}.$$

Diese beiden Werte für x und zugleich die zugehörigen für y gehen in $(\pm \infty)$ über, wenn $b^2 - a^2 \cdot m^2 = o$, also $m = \pm b : a$ ist; somit liegen, wenn der Richtungskoeffizient der geraden Linie gleich $(\pm b : a)$ ist, ihre Durchschnittspunkte mit der Hyperbel in unendlicher Entfernung von jeder der beiden Coordinatenachsen. Die 2

Linien der Gleichungen $y = + (b : a) . x$ und $y = - (b : a). x$ nennt man die Asymptoten der Hyperbel.

Berührungspunkt zweier Curven heißt ein solcher gemeinsamer Punkt derselben, in den 2 oder mehr Durchschnittspunkte dieser Curven durch Veränderung der Lage wenigstens einer der beiden Curven übergehen. Ein solcher Uebergang findet statt, wenn 2 oder mehr von einander verschiedene reelle Wertepaare des Systems aus den Gleichungen der beiden Curven in ein einziges reelles Wertepaar übergehen.

Das System aus den Gleichungen

einer geraden Linie $y = m . x + c$ (IX.)

und eines Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ (XIV.)

liefert die Wertepaare:

$$\begin{cases} x'_{''} = (- m . c \pm \sqrt{a^2 . (1 + m^2) - c^2}) : (1 + m^2); \\ y'_{''} = m . x'_{''} + c; \end{cases}$$

und diese gehen in ein einziges Wertepaar und somit die beiden zugehörigen Durschnittspunkte der Curven in einen Berührungspunkt über, wenn $a^2 . (1 + m^2) - c^2 = o$ ist. Die Coordinaten des Berührungspunktes heißen daher

$$\begin{cases} x = - m . c : (1 + m^2); \\ y = m . x + c; \end{cases}$$

oder auch $\begin{cases} x = - a^2 . m : c; \\ y = a^2 : c. \end{cases}$

Mit Hülfe dieses läßt sich zeigen, daß der zum Berührungspunkte eines Kreises und einer Tangente desselben führende Radius auf der Tangente senkrecht steht. Da ein solcher Radius durch das Centrum O $x = o$, $y = o$, und durch den Berührungspunkt $x = - a^2 . m : c$, $y = a^2 : c$ geht, so heißt seine Gleichung (nach XII):

$$(y - a^2 : c) : y = (x + a^2 . m : c) : x,$$

also $y = - (1 : m) . x$, während die Gleichung der Tangente $y = m . x$ heißt.

Bildet nun die Tangente mit der X-Achse den Winkel α und der Radius den Winkel ω, so ist $\text{tng}\ \alpha = m$ und $\text{tng}\ \omega = - (1 : m)$, daher $\text{tng}\ \alpha . \text{tng}\ \omega = - 1$. Also ist entweder $\alpha - \omega = 90^0$ oder $\omega - \alpha = 90^0$, je nachdem $\alpha \gtrless \omega$ ist. Auch ist der Winkel, den der Radius mit der Tangente bildet, gleich der Differenz $(\alpha - \omega)$ oder $(\omega - \alpha)$, je nachdem $\alpha \gtrless \omega$ ist. Folglich steht dieser Radius auf der Tangente senkrecht.

Für das System der Gleichungen

einer geraden Linie $y = m . x + c$ (IX.)

und einer Ellipse $(x : a)^2 + (y : b)^2 = 1$ (XVI.)

gehen die beiden Wertepaare desselben:

$$\begin{cases} x'_{''} = (- a^2 . c . m \pm a . b . \sqrt{a^2 . m^2 + b^2 - c^2}) : (a^2 . m^2 + b^2); \\ y'_{''} = m . x'_{''} + c; \end{cases}$$

in ein einziges Wertepaar und daher die beiden Durchschnittspunkte dieser

Curven in einen Berührungspunkt über, wenn $a^2 . m^2 + b^2 - c^2 = o$ ist. Für die Coordinaten des Berührungspunktes ergibt sich hiernach:

$$\begin{cases} x_, = - a^2 . m : c; \\ y_, = b^2 : c. \end{cases}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt $m = - (b^2 : a^2) . (x_, : y_,)$. Daher heißt die Gleichung der Tangente, weil m ihr Richtungskoeffizient ist und sie durch den Punkt $(x_, , y_,)$ geht, (nach XI.):

$$y - y_, = - (b^2 : a^2) . (x_, : y_,) . (x - x_,).$$

Eine gerade Linie, welche auch durch den Puukt $(x_, , y_,)$ geht und auf der Tangente senkrecht steht (Normale genannt), deren Richtungskoeffizient also $(- 1 : m)$ ist, hat die Gleichung:

$$y - y_, = + (a^2 : b^2) . (y_, : x_,) \ (x - x_,).$$

Bestimmt man für die Tangente und die Normale einzeln den zu $y = o$ gehörigen Wert von x, so erhält man ihre Durchschnittspunkte mit der X-Achse, und es läßt sich dann zeigen, daß die Punkte der X-Achse, $(x = - \sqrt{a^2 - b^2}, y = o)$ und $(x = + \sqrt{a^2 - b^2}, y = o)$, mit jenen Durchschnittspunkten zusammen 4 harmonisch gelegene Punkte sind, und daß daher, weil von den 4 von ihnen zum Berührungspunkte hin führenden Strahlen die Tangente und die Normale auf einander senkrecht stehen, der von den beiden andern Strahlen gebildete Winkel durch die Normale halbiert wird und somit diese beiden andern Strahlen auch gleiche Winkel mit der Tangente bilden.

Auf dieser Eigenschaft der Punkte der X-Achse $(x = - \sqrt{a^2 - b^2}, y = o)$ und $(x = + \sqrt{a^2 - b^2}, y = o)$ beruht es, daß dieselben die Brennpunkte der Ellipse genannt werden; jeder Lichtstrahl nämlich, der von einem dieser beiden Punkte ausgeht und von der Ellipse reflektiert wird, geht durch den andern Punkt.

Die beiden Brennpunkte einer Hyperbel liegen, da die Gleichung der Ellipse in die der Hyperbel übergeht, wenn $(- b^2)$ statt b^2 gesetzt wird, auf der X-Achse um $(- \sqrt{a^2 + b^2})$ und $(+ \sqrt{a^2 + b^2})$ von O entfernt.

Das System aus den Gleichungen

einer geraden Linie $y = m . x + c$ (IX.)

und einer Parabel $y^2 = 2p. x$ (XIX.)

liefert die 2 Wertepaare:

$$\begin{cases} x'_{,,} = [p - c . m \pm \sqrt{p . (p - 2c . m)}] : m^2; \\ y'_{,,} = m . x'_{,,} + c. \end{cases}$$

Dieselben gehen in ein einziges Wertepaar über, wenn $p - 2c . m = o$, also $p = 2c . m$ ist. Alsdann ist $x = c : m$ und $y = 2c$. Eine gerade Linie, welche durch den Berührungspunkt $(x = c : m, y = 2c)$ der Parabel und der geraden Linie geht und mit der Tangente denselben Winkel (α) als die Tangente mit der X-Achse bildet und nicht parallel der X-Achse läuft, trifft diese Achse unter einem Winkel $\omega = 2\alpha$. Da nun $\operatorname{tng} \omega = \operatorname{tng} 2\alpha = 2 . \operatorname{tng} \alpha : (1 - \operatorname{tng}^2 \alpha)$ ist, so $\operatorname{tng} \omega = 2m : (1 - m^2)$. Daher heißt die Gleichuug dieser Linie (nach XI.):

$$y - 2c = [2m : (1 - m^2)] . (x - c . m).$$

Dieselbe enthält das Wertepaar $y = o$, $x = c \cdot m$, also $y = o$, $x = p : 2$, welches denjenigen Punkt auf der X-Achse anzeigt, der um $p : 2$ von O entfernt liegt.

Eine Parallele mit der X-Achse, gezogen durch den Berührungspunkt der Tangente, bildet mit der Tangente ebenfalls den Winkel α. Daher muß jeder Lichtstrahl, welcher von dem Punkte $(x = p : 2,\ y = o)$ ausgeht und von der Parabel reflektiert wird, parallel der X-Achse laufen, und umgekehrt, jeder Lichtstrahl, welcher parallel der X-Achse auf die Parabel fällt und von ihr reflektiert wird, geht durch den Punkt $(x = p : 2,\ y = o)$. Deshalb wird dieser Punkt Brennpunkt der Parabel genannt. In der Parabel liegt der zweite Brennpunkt auf der X-Achse unendlich weit; es ist der Punkt $(x = \infty,\ y = o)$, so daß die von ihm ausgehenden Strahlen unter sich und mit der X-Achse parallel auf die Parabel fallen.

Eine Parabel und ein Kreis können sich zweipunktig, dreipunktig und vierpunktig berühren. Die Gleichungen seien:

für die Parabel $y^2 = 2p \cdot x$ (XIX.)

und für den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ (XIV.)

Die Lösung dieses Systems führt, wenn der Wert von x aus der ersten in die zweite Gleichung eingesetzt wird, zu der Gleichung:

$$y^4 - 4p \cdot (c - p) \cdot y^2 - 8d \cdot p^2 \cdot y + (-a^2 + c^2 + d^2) \cdot 4p^2 = o,$$

und die 4 Werte derselben für y nebst den 4 zugehörigen Werten für x nach der Gleichung $y^2 = 2p \cdot x$ sind die Coordinaten für die Durchschnittspunkte der beiden Curven, deren also 4 sein können.

Die 4 Werte für y seien y_1, y_2, y_3 und y_4, dann ist, weil y^3 in der Gleichung fehlt:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = o.$$

In dem Falle, wenn alle 4 Werte für y reell und nicht alle von einander verschieden sind, kann einer von folgenden 4 Fällen stattfinden: Entweder sind 2 von ihnen einander gleich, die beiden andern aber von ihnen und unter sich verschieden; dann findet an einer Stelle zweipunktige Berührung statt und in 2 andern Punkten schneiden sich die beiden Curven. Es sei $y_1 = y_2$, dann ist $2y_1 + y_3 + y_4 = o$, also $y_1 = -(y_3 + y_4) : 2$; somit ist die Ordinate des Berührungspunktes gleich der halben Summe der Ordinaten der beiden Schneidepunkte, unterscheidet sich aber von derselben im Charakter.

Oder 2 von den 4 Werten für y sind einander gleich und die beiden andern von ihnen verschieden aber unter sich gleich; dann findet an 2 Stellen zweipunktige Berührung statt. Es sei $y_1 = y_2$ und $y_3 = y_4$, dann ist $2y_1 + 2y_3 = o$, also $y_1 = -y_3$. Die beiden Berührungspunkte haben gleichgroße, aber im Charakter von einander verschiedene Ordinaten.

Oder 3 von den 4 Werten für y sind einander gleich und vom 4. verschieden; dann findet an einer Stelle dreipunktige Berührung statt und an einer andern Stelle schneiden sich die beiden Curven. Es sei $y_1 = y_2 = y_3$, dann ist $3y_1 + y_4 = o$,