Die Theorie der Variationsrechnung.

Die Begränzung der Variationsrechnung gegen andere mathematische Disciplinen und ihr Zusammenhang mit denselben ist bestimmt durch ihren Gegenstand und ihre Methode. Diese Rechnungsart behandelt Probleme über gröſste und kleinste Werthe aus der Geometrie und aus der Mechanik, aber nur wenn dieselben schon auf einen analytischen Ausdruck reducirt sind. Löst die Differenzialrechnung ähnliche Probleme, so vermag sie das ihr eigenthümliche expedite Verfahren doch nur in den Fällen anzuwenden, wo es sich um das Maximum oder Minimum unmittelbar gegebener Functionen handelt; soll aber das Integral einer nicht völlig bekannten Function einen gröſsten oder kleinsten Werth erhalten, so giebt die Variationsrechnung am leichtesten das Resultat. Da beide Rechnungsarten den Begriff des Unendlichkleinen gemeinsam haben, so ist zu erwarten, daſs es der Differenzialrechnung nicht unmöglich sei, solche Aufgaben zu behandeln. In der That ist dieselbe das einzige Hülfsmittel gewesen, womit Probleme der Art in den Arbeiten der Bernoulli's, in der *Methodus inveniendi etc.* von Euler und zuletzt in der Abhandlung des Prof. Schellbach (Crelle XLI) gelöst worden sind; wie aber die Grundsätze der Differenzialrechnung anzuwenden sind, hierüber bedarf man für jedes einzelne Problem einer besondern Regel. Daher scheint ein solches Verfahren nicht diejenige Einfachheit und Allgemeinheit zu besitzen, welche der Variationsrechnung eigenthümlich ist.

Die besondere Art mathematischer Aufgaben, welche der Variationsrechnung anheimfallen, machen sie, wie Jacobi sagt, zu „einem der schönsten Theile der Mathematik"; der Methode aber ist oft der Vorwurf gemacht, es fehle ihr die Evidenz, die Durchsichtigkeit andrer Zweige der Analysis. Dazu kommt, daſs sie von ihrem Begründer, Lagrange, gegen diesen Vorwurf nicht hinreichend vertheidigt wurde; vielmehr hat seine Bereitwilligkeit, dem Vorurtheil seiner Zeit gegen das Unendlichkleine nachzugeben, den Schein des Unsichern und Schwankenden auf sie geworfen. — Sie gegen jenen Vorwurf sicher zu stellen, durch Abschätzung der verschiedenen Begründungsarten ein sicheres und evidentes Verfahren zu gewinnen, ist die Aufgabe der folgenden Abhandlung.

I. Gegenstand der Variationsrechnung.

Lagrange hat in allen den Werken([1]), welche die Variationsrechnung mehr oder weniger als Hauptsache behandeln, ihren Gegenstand in einem und demselben Sinne bestimmt. Er war sich bewufst, wo sie als Hülfsmittel angewandt war und werden konnte, und betrachtete sie als solches nur für gewisse Aufgaben über Maxima und Minima.

Eine Function von einer oder von zwei Variabeln läfst sich als Ordinate einer Linie oder einer Fläche darstellen; erhält sie einen gröfsten oder kleinsten Werth, so ist die Tangente der Linie oder die Tangentialebene der Fläche parallel den durch die unabhängigen Variabeln dargestellten Coordinaten. Daraus ergiebt sich, dafs die Differenzialquotienten der Function nach den einzelnen Variabeln verschwinden müssen; die hierdurch gewonnenen Werthe der unabhängigen Variabeln bestimmen den gröfsten oder kleinsten Werth der gegebenen Function. Das Erkennungszeichen dafür, ob ein Maximum oder ein Minimum gefunden ist, besteht in dem Vorzeichen der Werthe, welche die zweiten Differenzialquotienten der Function für die gefundenen Werthe der Variabeln erhalten. — Soll dagegen die Linie oder Fläche eine Eigenschaft besitzen, welche durch ein Integral ausgedrückt ist, und dieses für eine Function einen kleineren oder einen gröfseren Werth haben als für alle übrigen Functionen; so kann man zur Auffindung jener einen Function die Principien der Differenzialrechnung nicht mit der Leichtigkeit anwenden, mit welcher man bei der eben erwähnten Aufgabe verfuhr. Während dort die Variabeln, welche die Function bestimmen, als von einander unabhängig angesehen werden, hängt in den Aufgaben letzterer Art das Integral von den Relationen zwischen diesen Variabeln selbst ab, so dafs man hier einer neuen Rechnungsart bedarf. Da nun die zu integrirende Function aufser den Variabeln auch ihre Differenzialquotienten enthält, so würde das Integral nur einer einzelnen Curve angehören, wenn die Function von vorn herein den Bedingungen der Integrabilität genügte; die Aufgabe, welche unzählig viele Curven betrifft, würde also ungelöst bleiben. Vielmehr darf die Function nicht integrabel sein, ohne dafs eine Relation zwischen den Variabeln gewonnen wird, und zwar der Art, dafs das resulti-

([1]) *Miscellanea Taurinensia* 1760. — *Théorie des fonctions analytiques*, — *Calcul des fonctions*.

rende Integral einen gröſsten oder kleinsten Werth erhalte. Allgemein nun diese Relation für irgend eine Function aufzustellen, ist die Aufgabe der Variationsrechnung.

Um unter unendlich vielen Curven die gesuchte aufzufinden, bedurfte man eines neuen Begriffs, der den Übergang von einer Curve zur nächsten vermittelte. Es ergab sich daraus die Einführung unendlich kleiner Gröſsen, welche nicht dem Gesetz einer gegebenen Function unterworfen sind, sondern zu ähnlichen, von der vorigen unendlich wenig verschiedenen, Functionen überführen. Diese Gröſsen, Variationen, wurden aber nicht mehr als Hülfsmittel zu diesem Zwecke allein betrachtet, sondern zum Ausgangspunkte einer umfangreichen Doctrin gemacht; und doch hat man dadurch keine Resultate gewonnen, welche von denen über Maxima und Minima verschieden gewesen wären. Euler selbst, welcher im dritten Bande seiner Integralrechnung eine solche Lehre gegeben, kann diesen über den eigentlichen Zweck der Rechnung hinausgehenden Speculationen den Schein der Unfruchtbarkeit nicht absprechen: und wohl nur deshalb hat seine Abhandlung zur Aufklärung über manche schwierige Punkte dieser Rechnungsart weniger beigetragen, als von ihrer klaren und systematischen Anordnung zu erwarten ist. Auch Dirksen faſst in seiner analytischen Darstellung die Aufgabe der Variationsrechnung in noch weiterem Sinne als Euler auf; seine Untersuchungen können einerseits wegen ihrer Allgemeinheit und Unbestimmtheit die Hauptsache nicht erleichtern, und gelangen andrerseits nicht zu einer wirklichen Erweiterung der Rechnung selbst oder ihrer Resultate. Wer die Entwickelung der Variationsrechnung historisch kennt, wird die eingeführten Begriffe nicht weiter zu verfolgen streben, als sie zur Lösung der oben angeführten Probleme dienen; so daſs die Theorie der Variationen sich auf den Umfang beschränkt, der ihr durch Lagrange's Werke bestimmt ist.

II. Methode der Variationsrechnung.

Die Abhandlung Lagrange's in den Turiner Memoiren, welche sowohl wegen der darin zuerst aufgestellten Methode als auch wegen des Reichthums an neuen Resultaten die allgemeinste Bewunderung hat erregen müssen, gewährt keinen Einblick in den Gedankengang, der den groſsen Analytiker zu der Methode der Variationsrechnung geführt hat. Auch fehlt der darin gegebenen kurzen Begründung derselben jene Klarheit und Schärfe, welche sonst den Werken Lagrange's das Gepräge der höchsten Vollendung aufdrücken. Wenn zuerst über die Principien der Differenzialrechnung bemerkt wird, dafs sie noch nicht klar erkannt sind, so würde einem „einfachen Gebrauch eben dieser Principien" derselbe Vorwurf zu machen sein; wahrscheinlich aber hat Lagrange damals jene Bemerkung einfliefsen lassen, um den Encyclopädikern ein Zugeständnifs zu machen, obwohl er dadurch selbst seine neue Methode ihrem Tadel Preis gegeben hätte. Abgesehen von diesen Zweifeln über das Unendlichkleine, welche nur beweisen, dafs in mathematischen Begriffen oft anderes gesucht wird als in ihnen enthalten sein kann, wenden wir uns zur Bestimmung der neu eingeführten Begriffe selbst.

Es wird angenommen, dafs variable Gröfsen sich auf zwei verschiedene Arten verändern, indem x einmal vermehrt wird um dx, das andre Mal um eine Differenz, welche „nicht dieselbe wie jene" ist, und demnach mit δx zu bezeichnen ist: dieses δx soll jedoch nach denselben Regeln wie dx gebildet sein, so dafs aus der Gleichung $dy = m dx$ sich unmittelbar auch $\delta y = m \delta x$ ergiebt. Wenn hier zuerst zwei Arten der Variabilität vorausgesetzt werden, so sind dieselben allerdings analytisch möglich; wodurch diese Annahme nothwendig wird, bleibt unerörtert; die analytischen Begriffe an Zahlen oder geometrischen Anschauungen nachzuweisen, und dadurch ihnen den Schein unbestimmter Allgemeinheit zu nehmen, hat Lagrange meist verschmäht. Nichts aber wäre hier eher an der Stelle gewesen als ein solcher Nachweis, da man bis dahin die Differenziale als die Incremente einer Variabeln betrachtete und sich jetzt zuerst eine neue Art von Incrementen vorstellen sollte. — Was nun die Bildung dieser Incremente betrifft, so verleitet der Ausdruck, dessen sich Lagrange bedient, leicht zu Mifsverständnissen. Werden nämlich in der Gleichung $y = mx$ die Variabeln durch Differenziale vermehrt, so ergiebt sich $dy = m(x + dx) - mx$; und sollen die neuen Incremente „nach denselben Regeln" gebildet werden, so würde das Increment der Function von zwei auf einander folgenden Werthen der Variabeln abhängig zu sein scheinen. Hier aber darf diese Abhängigkeit im Allgemeinen nicht von der Function einer Variabeln angenommen werden, für welche sie bei der Differenziation gilt. — Es wird die Analogie von dx und δx dann so weit ausgedehnt, dafs ohne weitere Erörterung $\delta \int v = \int \delta v$ gesetzt wird; ebenso wird als leicht verständlich angenommen, dafs $\delta dx = d \delta x$, und dafs $\delta \int v$ verschwinden mufs, wenn das Integral durch die Relationen zwischen den Variabeln ein Maximum oder Minimum werden soll. Sieht man aber von allen diesen wenig begründeten Voraussetzungen sowie davon ab, daſs v als Function betrachtet wird von $x, y, dx, d^2x, d^2y, \ldots$, ohne daſs eine unabhängige Variable für diese Differenziale angegeben ist, — wodurch die ganze Behandlung einen Widerspruch gegen die Grundbegriffe der Differenzialrechnung zu enthalten scheint — so ist im Übrigen die Aufgabe der Variationsrechnung in den Problemen der angeführten Abhandlung erschöpfend gelöst.

In der Anwendung dieser Lösung, z. B. in der Aufgabe von der Brachistochrone, zeigen sich nicht blos die Vortheile der eingeführten Methode, welche die allgemeinste Behandlung dieses Problems gestattet; sondern noch deutlicher tritt der Fortschritt hervor, den man durch sie für die Betrachtung der äuſsersten Punkte der Curve gewonnen hat, eine Betrachtung, welche weder von den Bernoulli's, noch von Euler angestellt werden konnte. Wird nämlich v, wie schon angegeben, als Function von mehreren Variabeln $x, y, z \ldots$ und ihren Differenzialen $dx, d^2x, dy, d^2y, \ldots$ betrachtet, so ist, den angeführten Regeln gemäſs,

$$\begin{aligned}\delta v = &\frac{\partial v}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial v}{\partial dx}\,\delta dx + \frac{\partial v}{\partial d^2x}\,\delta d^2x + \ldots \\ &+ \frac{\partial v}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial v}{\partial dy}\,\delta dy + \frac{\partial v}{\partial d^2y}\,\delta d^2y + \ldots \\ &+ \frac{\partial v}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial v}{\partial dz}\,\delta dz + \frac{\partial v}{\partial d^2z}\,\delta d^2z + \ldots \\ &+ \ldots.\end{aligned}$$

Bezeichnet man nun der Kürze halber die partiellen Differenzialquotienten von v nach x und dessen Differenzialen der Reihe nach mit $n, p, q, \ldots$, die nach y resp. z genommen mit $N, P, Q, \ldots$, resp. $\nu, \pi, \chi, \ldots$, so wird, um das Integral $\int v$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, die Variation desselben verschwinden, also die Gleichung stattfinden müssen:

$$\begin{aligned}0 = &\int n\delta x + \int p\,\delta dx + \int q\,\delta d^2x + \ldots \\ &+ \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \ldots \\ &+ \int \nu\delta z + \int \pi\,\delta dz + \int \chi\delta d^2z + \ldots \\ &+ \ldots.\end{aligned}$$

Durch Umsetzung von d, d^2, .. und δ, und durch partielle Integration aller derjenigen Ausdrücke, welche noch $d\delta$ oder $d^2\,\delta$ enthalten, resultirt

$$\begin{aligned}&\int[(n - dp + d^2q - \ldots)\,\delta x + (N - dP + \ldots)\,\delta y + (\nu - d\pi + \ldots)\,\delta z + \ldots] \\ &+ (p - dq + \ldots)\,\delta x + (q - dr + \ldots)\,d\delta x + \ldots + (P - dQ + \ldots)\,\delta y \\ &+ (\pi - d\chi + \ldots)\,\delta z + \ldots = 0,\end{aligned}$$

wo der vom Integralzeichen freie Ausdruck den gegebenen Gränzen des Integrals entspricht. Nachdem die Variationen, welche der Natur des gestellten Problems gemäfs von andern Variationen abhängen, eliminirt sind, ist zuerst der gesammte unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck gleich 0 zu setzen; und da die übrig gebliebenen Variationen nicht durch einander bestimmt werden dürfen, so zerfällt die Gleichung in mehrere, deren Anzahl gleich der der unabhängigen Variationen ist:

$$n - dp + d^2 q - \ldots = 0$$
$$N - dP + d^2 Q - \ldots = 0$$
$$\nu - d\pi + d^2 \chi - \ldots = 0.$$

Es ergiebt sich daraus ein System von Differentialgleichungen, welche, mit einander combinirt, die Function bestimmen, für welche $\int v$ einen gröfsten oder kleinsten Werth erlangt. Sodann sind die Variationen der Gränzgleichung auf die geringste Zahl zu reduciren; bezeichnet man die Werthe der Gröfsen für die Gränzen des Integrals mit den Indices 0 und 1, so bestimmt folgende Gleichung die Lage der Endpunkte der gesuchten Curve:

$$\left.\begin{array}{l}(p_1 - dp_1 + ..)\delta x_1 + (q_1 - dr_1 + ..)d\delta x_1 + .. + (P_1 - dQ_1 + ..)\delta y_1 + \ldots \\ -(p_0 - dp_0 + ..)\delta x_0 - (q_0 - dr_0 + ..)d\delta x_0 - .. - (P_0 - dQ_0 + ..)\delta y_0 - \ldots\end{array}\right\} = 0.$$

Diese Rechnung giebt gleichsam eine Skizze, durch deren vollständige Ausführung die Methode alle mögliche Evidenz und Bestimmtheit erhalten kann. Lagrange aber hat die innere Vollendung seiner Schöpfung Euler überlassen; nachdem dieser die Mängel derselben beseitigt zu haben schien, wandte er sich selbst in seinen späteren Werken davon ab und suchte die Resultate auf einem andern, dem Vorurtheile seiner Zeitgenossen angemessenern Wege zu erreichen. Das Unendlichkleine, aus dem sich die ganze Methode entwickelte, mufste aufgegeben, und der Begriff der derivirten Function vom Ausgangspunkte genommen werden.

In dieser neuen Begründungsart, welche sich in den *Leçons sur le calcul des fonctions*, Leçon XXII, findet, kann nicht genug die Gewandtheit und Schärfe des Denkens bewundert werden, mit denen der Grundbegriff in die Form gekleidet wurde, die für ihn selbst die angemessenste und für die zu Grunde liegende Absicht die zweckmäfsigste war. Betrachtet man die Begründung der Theorie von diesem Standpunkt, so läfst sie sich bis zu ihrer Entstehung verfolgen; ihre einzelnen Theile werden nicht nur klar, sondern nothwendig, und während sie zuerst verwickelt erschien, macht sie dann den Eindruck des vollendetsten analytischen Kunstwerkes. — Es war schon oben festgestellt, dafs eine Gröfse nicht blofs durch Differenziale, sondern auch auf eine zweite Art, durch Variationen, anwachsen könne: um in der Sprache der Derivirten-Theorie zu reden, mufs also eine Function zwei nach verschiedenen unabhängigen Variabeln genommene Derivirte haben. Ist z. B. y eine Function von x, so genügt die Derivirte von y nach x nicht, um Ersatz für die Variation zu geben; y ist aufserdem auch abhängig zu denken von i, einer von x unabhängigen Variabeln. Wird daher $y = \phi(x,i)$ gesetzt, so substituirt man die Derivirte von y nach x, $\phi'(x,i)$, für das Differenzial von y, und die Derivirte von y nach i, die durch $\phi(x,i)$ bezeichnet wird, für die Variation von y. Die eingeführte Bezeichnungsweise zieht unmittelbar mehrere Folgerungen nach sich: da die Ordnung, in welcher nacheinander eine Function derivirt ist, umgekehrt werden kann, so ist offenbar $\phi'(x,i) = \phi'^{\cdot}(x,i)$ d. h., in der Sprache der Variationsrechnung, das Differenzial der Variation ist gleich der Variation des Differenzials oder $d\delta y = \delta d y$. Wird ferner vorausgesetzt, dafs v eine Function von x und y, also von x und i, und dafs $V = U'$ ist, so wird die Derivirte von U nach i, $\dot{U}$, gleich der primitiven Function von $\dot{V}$ nach x sein; mit andern Worten, die Variation des Integrals ist gleich dem Integral der Variation oder $\delta \int v = \int \delta v$. Soll endlich U in Bezug auf alle beliebigen y, also auf i einen gröfsten oder kleinsten Werth erhalten, so mufs die Derivirte von U nach i verschwinden, d. h. $\delta \int v = 0$. Dieser Satz wird von Lagrange aus dem Taylorschen Theorem abgeleitet, indem U, eine Function von i, nach den Potenzen dieser Variabeln in eine Reihe entwickelt wird; wenn aber hierbei vorausgesetzt wird, dafs der Werth des zweiten Gliedes dieser Reihe, welches die erste Potenz von i enthält, die mit höhern Potenzen von i behafteten Glieder zusammengenommen übertrifft, so ist dies nicht anders möglich, als dafs eben i als eine Variable aufgefafst wird, die immer kleinere Werthe erhalten, d. h. nach 0 convergiren soll: hiermit ist die Theorie der Derivirten gezwungen, den Begriff des Unendlichkleinen zu ihrer Ergänzung anzunehmen. Aus der Reihenentwicklung selbst ergiebt sich ferner, dafs durch das Vorzeichen der zweiten Derivirten von U nach i, oder der zweiten Variation des Integrals, bestimmt wird, ob der gefundene Werth von U ein Maximum oder ein Minimum sei. — Wenn hiermit gezeigt worden ist, wie sich aus diesen Principien mehrere Grundsätze ableiten lassen, so ist noch die Durchführung derselben für die Lösung des eigentlichen Problems zu betrachten.

Ist V die zu integrirende Function von $x, y, y', y'' \ldots$, und wird für y die $\phi(x, i)$ eingesetzt, so ist V als Funktion von i in eine Reihe zu entwickeln, die nach steigenden Potenzen von i fortschreitet, während x hierbei als constant anzusehen ist, so daſs

$$V = V_0 + \frac{i}{1}\dot{V}_0 + \frac{i^2}{1 \cdot 2}\ddot{V}_0 + \ldots,$$

wo der Index 0 bezeichnet, daſs in den von ihm behafteten Gröſsen i gleich 0 zu setzen ist. Durch Vergleichung dieser Rechenentwickelung mit der analogen für U ergiebt sich leicht, daſs $\dot{U}_0$ die nach x genommene primitive Function von $\dot{V}_0$ ist; da aber nach dem oben angeführten Satz die Derivirte von U nach i verschwinden muſs, wenn U ein Maximum oder Minimum ist, so ist das nach x genommene Integral von $\dot{V}_0$ gleich 0 zu setzen. Um $V = f(x, y, y', y'', \ldots)$ nach i zu deriviren, hat man die Regeln über Functionen von Functionen zu beachten, so daſs, wenn $f'(y), f'(y') \ldots$ die Derivirten von V nach $y, y' \ldots$ bezeichnen,

$$\dot{V} = \dot{y}f'(y) + \dot{y}'f'(y') + \dot{y}''f'(y'') + \ldots$$

Nachdem aus dieser Gleichung $\dot{V}_0$ gebildet, also überall $i = 0$ gesetzt ist, und endlich die Derivirten von f der Reihe nach mit $n, p, q \ldots$ bezeichnet sind, wird die Bedingung, daſs $\dot{U}_0$ verschwinde, durch die Gleichung ausgedrückt

$$\int (n\dot{y}_0 + p\dot{y}'_0 + q\dot{y}''_0 + \ldots) = 0.$$

Diese zerfällt durch partielle Integration nach x in zwei, deren eine

$$n - p' + q'' \mp \ldots = 0$$

die Form der Function ϕ für $y = \phi(x)$ bestimmt, während die andre die Werthe dieser Function für die Gränzwerthe des Integrals ausdrückt.

Es wird sodann in mehr directer Weise als in den früheren Abhandlnngen über diesen Gegenstand der Nachweis geliefert, daſs jene erstere Gleichung genügt, auch wenn x variirt oder als Function von i betrachtet wird; in diesem Falle wird nur die Gränzgleichung um ein Glied vermehrt. Zur Verallgemeinerung der Resultate wird ferner V als eine Function von beliebig vielen Variabeln und deren Derivirten angesehen, und endlich der Fall discutirt, wo ein doppeltes Integral einen gröſsten oder kleinsten Werth erhalten soll. Von besonderer Wichtigkeit ist aber die hier zuerst gegebene eigenthümliche Behandlung derjenigen Bedingungsgleichungen, welche die in der zu integrirenden Function vorkommenden Variabeln enthalten. Sind nämlich diese Bedingungsgleichungen sämmtlich auf die Form $L = 0$ gebracht, wo L eine Function von $x, y, z, y', z', y'', z'', \ldots$ ist; so mufs auch die nach i genommene Derivirte $\dot{L}$ verschwinden. Aus diesen Gleichungen würden einige der $\dot{y}, \dot{z} \ldots$ durch andere ausgedrückt werden können, so dafs in der Gleichung $\dot{U} = 0$ nach Einsetzung der gefundenen Werthe nur die Coefficienten der übrig gebliebenen Derivirten nach i gleich 0 gemacht würden. Da jedoch die Elimination dieser Gröfsen oft langwierig und schwer auszuführen ist, hat Lagrange (cf. *Mécan. analyt.*) von folgendem Satze Gebrauch gemacht. Hat man eine Gleichung ersten Grades mit p unabhängigen Gröfsen, und aufserdem n Gleichungen, in welchen alle oder einige jener Gröfsen linear vorkommen, so kann man jede dieser n Gleichungen, mit einem unbestimmten Factor multiplicirt, zu der ersten Gleichung addiren und die hieraus entstandenen Coefficienten der p Gröfsen gleich 0 setzen; es ergiebt sich dann nach Elimination der n unbestimmten Factoren ein System von Gleichungen, das mit dem durch directe Elimination der Gröfsen erhaltenen System identisch ist. Nachdem also die Producte der Derivirten $\dot{L}$ mit unbestimmten Factoren λ zu der linken Seite der ursprünglichen Gleichung $\dot{U} = 0$ hinzugefügt worden, vereinigt man die Glieder mit gleichen Derivirten $\dot{y}, \dot{z}, \ldots,$ setzt die Coefficienten $= 0$, und gewinnt durch Elimination der λ die Endgleichungen. Für die specielle Anwendung dieses Verfahrens auf die Probleme über relative Maxima und Minima, z. B. auf die isoperimetrischen Aufgaben, beweist Lagrange, dafs jener unbestimmte Factor eine Constante ist; die Gleichung für die Gränzwerthe bleibt demnach unverändert, und man hat nur dem Ausdruck $\dot{V}$ noch ein Glied hinzuzufügen. Die ganze Ausführung der zu Grunde gelegten Theorie so wie die Behandlung einzelner Probleme zeugen von dem Scharfsinn des grofsen Meisters der Analysis; und nur die Principien selbst haben nicht die zu wünschende Einfachheit, weil sie in künstlichen Umformungen der ursprünglichen Gedanken bestehen.

Da aber die ursprünglichen Vorstellungen in ein schwer zu durchdringendes Dunkel gehüllt zu sein schienen, hat Euler nicht verschmäht, die Grundbegriffe der Variationsrechnung in systematischer Ordnung zu erörtern (*Instit. calc. integr.* Vol. III). Jedoch können unter den allgemeinen Definitionen Dinge begriffen werden, die von den definirten zu unterscheiden sind: es läfst sich dies aus dem Bestreben erklären, in die Definitionen keine durch Negationen ausgedrückte Beschränkungen aufzunehmen. So wird nach der ersten und wichtigsten Definition: „*Relatio inter binas varia-*

biles variari dicitur, si valor, quo altera inde per alteram determinatur, incremento infinite parvo augeri concipiatur...." schwer zu erkennen sein, ob nicht auch Differenziale zu den definirten Gröſsen gehören. Nachdem dagegen in den darauf folgenden Zusätzen der wahre Unterschied beider Arten von Incrementen klar ausgesprochen worden, weist Euler ihn an geometrischen Anschauungen nach, welche sehr geeignet sind, die schwierigeren analytischen Vorstellungen zu sondern, und ihnen gröſsere Bestimmtheit zu verleihen. Wenn in der Folge der Erklärungen die Variationen von drei Variabeln, zwischen denen zwei Relationen bestehen, als Functionen einer einzigen Variabeln angesehen werden, wofern diese Functionen nur selbst unendlich klein oder mit unendlich kleinen Factoren multiplicirt sind; so bleibt danach die Behauptung unverständlich, daſs für die Variationen von n Variabeln, welche durch $n-1$ Relationen verbunden sind, nicht ein ähnlicher Satz gilt, und für $n=2$ ein so bedeutender Unterschied stattfindet. Es wird im Gegentheil (§ 25) in völliger Allgemeinheit ausgesprochen, wenn n Relationen zwischen m Variabeln existiren, so seien die Variationen als Functionen von $m-n$ Variabeln auszudrücken, diese Functionen selbst aber in keiner Weise von einander abhängig zu denken. — Euler geht in dem zweiten Kapitel seiner Abhandlung zur Variation von Differenzialformeln über und macht den Anfang mit dem Satze, daſs die Variation des Differenzials gleich dem Differenzial der Variation sei. Bei dem zuerst gegebenen Beweise wird aber von ihm angenommen, daſs $\delta(V+dV)$ schon $\delta V + d\delta V$ sei, denn anderes kann in der Behauptung nicht liegen: „$\delta(V+dV)$ ist der nächste Werth, in welchen die Variation, um ihr Differenzial vermehrt, übergeht." Die Herleitung des Satzes so wie diejenige, welche Euler aus der Betrachtung der Curven gewinnt, beruht aber keineswegs auf solcher Behauptung, die entweder eine Tautologie des bewiesenen Satzes ist, oder sogar als eine Folgerung aus demselben betrachtet werden kann; sondern auf den Begriffen der Variation und des Differenzials selbst, und ist daher in einfacherer Weise darzustellen. Auch die Variation des Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ wird durch die Mittel der Variationsrechnung selbst zu gewinnen, die Form der Variation irgend eines Ausdrucks, der aus den Variabeln und ihren Differenzialen zusammengesetzt ist, klarer zu begründen sein, wenn die scharf zu begränzende Analogie der Variationsrechnung mit der Differenzialrechnung gleich zu Anfang in bestimmten Sätzen durchgeführt ist. — Für die Variation von Integralformeln, welche im dritten Kapitel behandelt wird, wäre der einfachste Beweis des

Satzes $\delta\int V = \int\delta V$ derjenige gewesen, welchen man aus der Variation des Differenzials gewinnt: je abstracter die einer Theorie zu Grunde gelegten Begriffe sind, um so mehr hat man sich auf die schon erhaltenen Resultate zu stützen, um nicht häufiger als nöthig ist denselben schwierigen Weg zurücklegen zu müssen. — Es beinträchtigt Euler's Ruhm nicht, daſs die in den ferneren Abhandlungen behandelten Probleme von Lagrange in den Leçons mit gröſserer Gewandtheit und Kürze behandelt sind; offenbar genug ist ja der Fortschritt, den die Variationsrechnung in der Aufklärung ihrer Prinzipien durch Euler gemacht hat. Bewundernswerth ist es, wie bereitwillig er die Ausbildung einer Theorie übernimmt, welche einen groſsen Theil seiner früheren überall anerkannten Leistungen entbehrlich macht: die Wahrheit der Wissenschaft selbst leitet den gefeierten Meister zu dem Wege, den das junge Genie eben eröffnet hat. — Man hat auch Lagrange's und Euler's Werke als die einzigen Quellen für die Theorie der Variationsrechnung zu betrachten; ihre Arbeiten sind häufig von den Verfassern der Lehrbücher benutzt, aber es scheint, daſs das Verständniſs der Principien noch gefördert, mehrere Operationen übersichtlicher ausgeführt werden können. Die Theorie selbst ist seitdem erst durch Jacobi in einem wichtigen Punkte weiter entwickelt worden; ihre Anwendung auf neue Probleme ist meist durch die Schwierigkeit beschränkt, welche die aus der Rechnung resultirenden Differenzialgleichungen darbieten.

III. Theorie der Variationsrechnung.

Wenn y eine Function der Variabeln x ist, so werden aus einer Gleichung zwischen beiden Gröſsen alle Werthe von y durch die Werthe von x bestimmt. Einer unendlichkleinen Vermehrung oder Verminderung von x entspricht, gemäſs jener Gleichung, eine Vermehrung oder Verminderung von y, die bei einem stetigen y ebenfalls unendlichklein ist. Ein solches Increment der Function heiſst ihr Differenzial; fügt man daher zu beiden Gröſsen y und x ihre Differenziale hinzu, so genügen $y + dy$ und $x + dx$ derselben Gleichung wie y und x. — Man kann sich aber denken, daſs man y und x unendlichkleine Zuwächse ertheilt, so daſs — wenn man die vermehrten Werthe in die erste Gleichung einsetzt — diese nicht mehr erfüllt wird. Ein solches Increment der einen Gröſse kann also nicht durch zwei aufeinanderfolgende Werthe der andern Gröſse gegeben sein, d. h. diese Zuwächse haben nicht den durch die Form der Function bestimmten Zusammenhang unter einander. Dieser unendlichkleine Zuwachs der Function, welcher von dem Zuwachs der Variabeln nicht abhängt, ist demnach vom Differenzial verschieden: er heiſst Variation und wird mit δy oder δx bezeichnet.

Insofern jede Function von einer Variabeln sich als Coordinate einer Curve darstellen läſst, deren Abscissen durch die Werthe der unabhängigen Variabeln bestimmt werden; entsprechen auch zwei unendlichwenig von einander verschiedenen Abscissen zwei aufeinanderfolgende Ordinaten dieser Curve, deren Unterschied die Darstellung des Differenzials der Function ist. — Vermehrt man die Abscisse um eine unendlichkleine Gröſse, aber die Ordinate nicht um den entsprechenden Zuwachs, sondern um eine völlig beliebige unendlichkleine Gröſse, so wird der Endpunkt der Ordinate nicht mehr auf der gegebenen Curve, sondern auf einer neuen liegen, die jener unendlich nahe ist. Giebt man also der Variabeln und ihrer Function die Variation δx und δy, so wird die entstandene Gleichung durch eine neue Curve dargestellt, deren Punkte von denen der vorigen unendlichwenig entfernt sind. Man kann sogar, um sämmtliche unendlichnahen Curven zu erhalten, annehmen, daſs die Variationen nicht nur nicht den durch die Natur der gegebenen Curve bestimmten Zusammenhang haben, sondern überhaupt nicht von einander abhängen. Daher läſst sich δy als unendlichkleine Variable betrachten, z. B. als Function von y, die mit einem unendlichkleinen Factor multiplicirt ist; sind also die Coordinaten um die Variationen vermehrt, so ist dadurch der ganze Lauf der neuen Curve bestimmt. An dieser geometrischen Anschauung wird nun besonders deutlich, daſs, nachdem durch die Variationen die neue Curve gegeben ist, auch die Richtungen der Tangenten und die Krümmungsradien dieser Curve nicht mehr willkürlich sind. Diese aber müssen durch die Variationen der ersten und zweiten Differenzialquotienten der Function ausgedrückt werden; woraus zu ersehen ist, daſs — allgemein gefaſst — die Variationen der Differenzialquotienten einer Function abhängen von den Variationen der Function und ihrer Variabeln.

In ähnlicher Weise lassen sich drei Variabeln, die durch eine oder zwei Relationen mit einander verbunden sind, durch Variationen vermehren, welche untereinander keinen Zusammenhang haben. Ist nur eine Relation gegeben, so läſst sich das System aller durch Variationen veränderten Gleichungen durch aufeinander folgende Flächen darstellen. — Zwei Relationen aber kann man sich so umgeformt denken, daſs jede derselben nur zwei Variable enthält, und daher als Cylinderfläche zu construiren ist; beide Relationen zusammen bestimmen also den Schnitt dieser Flächen, der im Allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung giebt. Werden nun die Variabeln durch Variationen vermehrt, so entstehen beliebige, doch der ersten Curve unendlichnahe Curven: ihre Projectionen auf die Coordinatenebenen sind gleichfalls von den Projectionen der ursprünglichen Curve unendlichwenig entfernt. Hieraus ist leicht ersichtlich, daſs die Variationen der Differenzialquotienten zweier Variabeln nach einer dritten abhängen von den Variationen der einen entsprechenden und der dritten Variabeln.

Das bisher Gesagte läſst sich leicht auf n Variable ausdehnen, welche durch m Relationen verbunden sind: vorausgesetzt, daſs $m \overline{\gtrless} n - 1$. Die geometrische Anschauung kann zwar im Allgemeinen nicht mehr angewandt werden; doch bedürfen die durch dieselbe erläuterten Begriffe hier nicht mehr einer besondern Erörterung.

Wird von Variabeln, die unabhängig sind oder durch Relationen als Functionen der unabhängigen bestimmt werden, ein Ausdruck gebildet, der eine von ihnen abhängige Gröſse darstellt; so ist zu bedenken, daſs diese Gröſse selbst alle beliebigen Veränderungen erfährt, wenn man sämmtliche Variabeln durch alle möglichen Variationen vermehrt. Einem solchen Ausdruck, der also von den veränderlichen Gröſsen und ihren Relationen abhängt, braucht man daher nicht mehr unabhängige Variationen zu ertheilen; man betrachtet vielmehr seine Variation als abhängig von denen der Variabeln. Um dies an einem Beispiel anschaulich zu machen, denke man sich eine Curve, welche zwei, nicht in derselben Horizontalen liegende Punkte verbindet. Ein beweglicher Punkt, welcher vom ersten gegebenen Punkt längs der Curve bis zur zweiten herabfällt, erlangt am letztern eine Geschwindigkeit, welche von der Natur der gedachten Curve abhängig ist. Diese Geschwindigkeit ist also ein Ausdruck, der von den Coordinaten der Curve gebildet wird. Durch die Variationen der Variabeln, welche die Coordinaten darstellen, geht man zu allen der gedachten Curve unendlichnahen Curven über, und durch neue Variationen gelangt man zu allen die beiden gegebenen Punkte verbindenden Linien. Die Geschwindigkeiten, welche der bewegliche Punkt auf allen diesen Curven nacheinander erhält, werden durch Gröſsen von aufeinanderfolgenden Werthen ausgedrückt. Man erhält alle diese Werthe, wenn man in den Ausdruck der ursprünglichen Geschwindigkeit die variirten Coordinaten einsetzt; daher ist die Variation der Geschwindigkeit als abhängig von den Variationen der Variabeln zu betrachten. Alle unabhängigen Variabeln aber, so wie alle abhängigen Variabeln, durch deren Relationen mit jenen oder mit einander die Form eines solchen Ausdruckes bestimmt wird, müssen — um die verlangte Allgemeinheit zu erreichen — beliebige, von einander durchaus unabhängige Variationen erhalten. Der Ausdruck, dessen Variationen hiernach als von andern abhängig betrachtet werden, ist durch den Sinn jedes einzelnen Problems bestimmt.

Ist A ein solcher Ausdruck, welcher von x und dessen Function y gebildet ist, und dessen Form durch $\phi(x, y)$ bezeichnet werde, so erhält man die Variation von A, δA, indem man x und y um ihre von einander unabhängigen Variationen vermehrt, und von dem so variirten A den ursprünglichen Werth subtrahirt. Daher

$$\delta A = \phi(x + \delta x,\ y + \delta y) - \phi(x, y).$$

Man addire und subtrahire $\phi(x, y + \delta y)$, dividire und multiplicire mit δx und δy, so erhält man

$$\delta A = \frac{\phi(x + \delta x,\ y + \delta y) - \phi(x, y + \delta y)}{\delta x}\,\delta x + \frac{\phi(x, y + \delta y) - \phi(x, y)}{\delta y}\,\delta y.$$

Da nun in der Differenzialrechnung allgemein bewiesen wird, daſs

$$\frac{\phi(z + \zeta) - \phi(z)}{\zeta},$$

wo ζ unendlich klein, eine Function von z, und zwar der Differenzialquotient von $\phi(z)$ nach z ist; so folgt, der Annahme über die Gröſse von δx, δy gemäſs, daſs mit Fortlassung des Unendlichkleinen höherer Ordnung

$$\delta A = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\delta y;$$

d. h.: die abhängige Variation eines Ausdrucks ist die Summe der partiellen Differenzialquotienten des Ausdrucks nach den einzelnen Variabeln, multiplicirt mit den unabhängigen Variationen der resp. Variabeln.

Hieraus folgt: Die abhängige Variation einer Summe von Variabeln ist die Summe der unabhängigen Variationen der Variabeln.

$$\delta(x + y + z + \ldots) = \delta x + \delta y + \delta z + \ldots$$

Die abhängige Variation eines Produktes von Variabeln ist die Summe der Produkte, welche aus allen Variabeln weniger einer und der unabhängigen Variation dieser einen gebildet sind.

$$\delta(xyz\ldots) = yz\ldots\delta x + xz\ldots\delta y + xy\ldots\delta z + \ldots$$

Erhält A außer den Variabeln auch die Differenzialquotienten einiger Variabeln nach andern, so sind auch diese zu variiren; da sie selbst noch nicht als Functionen der Variabeln allein gegeben sind, so bildet man die partiellen Differenzialquotienten nach ihnen, betrachtet aber ihre Variationen als abhängig von denen der ursprünglichen Variabeln; daher wird δA nur bestimmt durch die letzteren. Stellen wir jedoch für jetzt die Variationen der Differenzialquotienten $y', y'', \ldots, z', z'', \ldots$ durch $\delta y', \delta y'', \ldots \delta z', \ldots$ dar, so ist

$$\delta A = \delta\phi(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\phi}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\phi}{\partial z'}\delta z' + \ldots$$

Wiewohl bisher nur die Variationen erster Ordnung in Rechnung gezogen sind, so ist doch zu bedenken, daſs $\phi(x + \delta x, y + \delta y, \ldots)$ in eine Reihe entwickelt werden kann, welche nach den Potenzen der unabhängigen Variationen $\delta x, \delta y, \ldots$ fortschreitet. Die abhängige Variation von ϕ ist nämlich eine Function von $\delta x, \delta y \ldots$; für sie kann daher nach dem Taylorschen Satze folgende Reihe gebildet werden:

$$\phi(x+\delta x, y+\delta y, \ldots) = \phi(x, y, \ldots) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \ldots + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\delta x^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\delta x\delta y + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\delta y^2 + \ldots$$

Das zweite und dritte Glied der Reihe ist zusammenzufassen in $\delta\phi$; da die drei folgenden Glieder aus $\delta\phi$ gebildet sind wie $\delta\phi$ aus ϕ selbst, so wird man sie als die zweite Variation von ϕ betrachten und mit $\delta^2\phi$ bezeichnen.

Soll nun $\phi(x, y \ldots)$ einen gröſsten oder kleinsten Werth haben, so ergiebt hier dieselbe Betrachtung wie in der Differenzialrechnung, daſs die Gleichung $\delta\phi = 0$ erfüllt werden muſs; das negative oder positive Vorzeichen von $\delta^2\phi$ bestimmt, ob der in Rede stehende Ausdruck ein Maximum oder Minimum sei. Nur werden sich aus der Gleichung $\delta\phi = 0$ nicht einzelne Werthe der Variabeln ergeben, sondern Relationen zwischen ihnen und ihren Differenzialquotienten, durch welche man die Form der Functionen und damit den Zusammenhang zwischen den einzelnen Variabeln zu finden hat.

Satz I.

Die Variation eines Differenzials dy ist gleich dem Differenzial der Variation δy.

Beweis. Werden durch y und $y + dy$ zwei unendlichwenig verschiedene Werthe einer Function bezeichnet, so erhält man durch Variation beider, $y + \delta y$ und $y + dy + \delta(y + dy)$, zwei aufeinanderfolgende Werthe einer neuen Function. Zu dem auf $y + \delta y$ folgenden Werthe letzterer Function gelangt man aber auch durch Differenziation, so dafs derselbe $y + \delta y + d(y + \delta y)$ wird. Nachdem daher die Gleichung gebildet

$$y + dy + \delta(y + dy) = y + \delta y + d(y + \delta y),$$

ergiebt sich nach Fortlassung der gleichen Glieder auf beiden Seiten:

$$\delta dy = d\delta y.$$

Anmerkung. Sind zZ und $z_{,}Z_{,}$ zwei unendlichnahe liegende Ordinaten einer Curve, so gelangt man durch Hinzufügung der Variation $Z\zeta$ zu einer neuen Curve, deren Ordinate daher $z\zeta$ ist. Indem man $z_{,}Z_{,}$ um die Variation $Z_{,}\zeta_{,}$ verlängert, erhält man die auf $z\zeta$ folgende Ordinate $z_{,}\zeta_{,}$ derselben neuen Curve. Demnach findet auch die Gleichung statt: $z\zeta + d(z\zeta) = z_{,}\zeta_{,}$ d. h.

$$zZ + \delta(zZ) + d(z\zeta) = zZ + d(zZ) + \delta(z_{,}Z_{,}),$$

oder

$$\delta(z_{,}Z_{,} - zZ) = d(z\zeta - zZ),$$

welche Gleichung zu demselben Resultate führt.

Übrigens hat dieser Satz nur dann einen Sinn, wenn man unter δy eine unendlichkleine Variable versteht; ihre Beziehung zu y mufs aber der Allgemeinheit wegen völlig unbestimmt bleiben.

Zusatz: Aus Satz I ergiebt sich dadurch, dafs man die Umsetzung der Zeichen d und δ wiederholt, dafs $\delta d^n y = d^n \delta y$.

Satz II.

Die Variation des Differenzialquotienten n^{ter} Ordnung $\frac{d^n y}{dx^n}$ ist gleich dem n^{ten} Differenzialquotienten von $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$, vermehrt um das Produkt von δx mit dem Differenzialquotienten $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$.

Beweis. Setzt man $\frac{dy}{dx} = \alpha$, so ist nach dem Satz über die Variation eines Produktes $\delta dy = \alpha \delta dx + \delta\alpha \cdot dx$; nachdem hieraus $\delta\alpha$ bestimmt, Satz I angewandt, und endlich $\frac{d\alpha}{dx}\left(= \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ addirt und subtrahirt ist, gelangt man zu

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right)}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\delta x.$$

Nimmt man nunmehr an, daſs auch

$$\delta \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right)}{dx^{n-1}} + \frac{d^n y}{dx^n}\delta x,$$

und setzt man $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \mu$, $\frac{d^n y}{dx^n} = \nu$, so ist hiernach

$$\delta\mu - \nu\delta x = \frac{d^{n-1}\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right)}{dx^{n-1}};$$

da ferner $\frac{d\mu}{dx} = \nu$, so hat man nach Anwendung derselben Operationen wie oben $d\delta\mu = \nu d\delta x + \delta\nu \cdot dx$, d. h.

$$\delta\nu = \frac{d(\delta\mu - \nu\delta x)}{dx} + \frac{d\nu}{dx}\delta x.$$

Durch Gebrauch des eben gefundenen Ausdruckes für $\delta\mu - \nu\delta x$, erhält man

$$\delta \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right)}{dx^n} + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\delta x.$$

Da der erste Theil des Beweises zeigt, daſs der Satz für $n = 1$ gilt, so folgt aus seinem zweiten Theil, daſs der Satz für jedes beliebige ganze n stattfindet.

Zusatz. Es ergiebt sich hieraus, daſs wenn ein aus x, ihrer Function y und deren Differenzialquotienten $y', y'' \ldots$ zusammengesetzter Ausdruck $A = \phi(x, y, y', y'' \ldots)$ gegeben ist, die Variation von A aus folgender Gleichung bestimmt wird, in welcher man Δ für $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$ gesetzt hat:

$$\delta A = \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial y'}\left(\frac{d\Delta}{dx} + y''\delta x\right) + \frac{\partial\phi}{\partial y''}\left(\frac{d^2\Delta}{dx^2} + y'''\delta x\right) + \ldots$$

Satz III.

Die Variation eines Integrals ist gleich der Variation der zu integrirenden Function.

Beweis. Ist das Integral $\int V dx$, und bezeichnet U dessen Werth, so ist $dU = V dx$. Da nun $d\delta U = \delta dU$ ist, so gilt auch, indem man die willkürliche Constante unter dem unbestimmten Integralzeichen mitbegreift: $\int d\delta U = \int \delta dU$. Es ist aber $\int d\delta U = \delta U$, daher erhält man durch Einsetzung der Werthe von U und dU

$$\delta \int V dx = \int \delta (V dx).$$

Aufgabe I.

Die Variation eines Integralausdruckes so umzuformen, daſs unter dem Integralzeichen kein Differenzial einer Variation bleibt.

Auflösung. Gegeben sei das Integral $\int_{x_0}^{x_1} \phi(x, y, y', y'', ..) dx$, dessen Variation der Kürze halber mit $\delta \int \phi dx$ bezeichnet werde; der höchste Differenzialquotient von y, der in ϕ vorkommt, sei von der n^{ten} Ordnung.

Nach Satz III ist $\delta \int \phi dx = \int \delta (\phi dx) = \int (\delta \phi \cdot dx + \phi \delta dx)$ Da für $\int \phi \delta dx$ auch $\int \phi d \delta x$ gesetzt wird, so ergiebt sich durch partielle Integration hierfür $\phi \delta x - \int d\phi \cdot \delta x$, wo $d\phi$ das totale Differenzial von ϕ nach x bezeichnet. Von der Gleichung

$$\delta \int \phi dx = \phi \delta x + \int (\delta \phi \cdot dx - d\phi \cdot \delta x)$$

ist jetzt also nur noch das letzte Integral zu behandeln. Aus dem Zusatz zu Satz II hat man

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \left(\frac{d \Delta}{dx} + y'' \delta x \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y''} \left(\frac{d^2 \Delta}{dx^2} + y''' \delta x \right) + \dots$$
$$+ \frac{\partial \phi}{\partial y^{(n)}} \left(\frac{d^n \Delta}{dx^n} + y^{(n+1)} \delta x \right).$$

Setzt man ferner für $dy, dy', dy'', \dots$ die gleichbedeutenden $y' dx$, $y'' dx$, $y''' dx, \dots$, so erhält man

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' dx + \frac{\partial \phi}{\partial y'} y'' dx + \frac{\partial \phi}{\partial y''} y''' dx + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} dx.$$

Nachdem man $\delta \phi$ mit dx, $d\phi$ mit δx multiplicirt und letzteres Product vom erstern abgezogen, wird

$$\delta \phi \cdot dx - d\phi \cdot \delta x = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta dx + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{d\Delta}{dx} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y''} \frac{d^2 \Delta}{dx^2} dx + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y^{(n)}} \frac{d^n \Delta}{dx^n} dx$$

Der rechts stehende Ausdruck soll so umgeformt werden, daſs nur ein Produkt von Δ mit noch unbekannten, von Δ freien Factoren unter dem Integralzeichen bleibt; der andre Theil des Ausdrucks wird daher integrabel,

d. h. ein Differenzialquotient nach x werden. Setzt man demnach den ganzen Ausdruck gleich

$$\Phi \cdot \Delta \, dx + \frac{d\xi}{dx} dx,$$

so wird ξ alle Differenzialquotienten von Δ bis zu dem der $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten müssen. Sei deshalb, wenn die Factoren ϱ noch unbekannte Functionen bezeichnen,

$$\xi = \varrho_0 \Delta + \varrho_1 \frac{d\Delta}{dx} + \varrho_2 \frac{d^2\Delta}{dx^2} + \ldots + \varrho_{n-1} \frac{d^{n-1}\Delta}{dx^{n-1}}.$$

Durch Vergleichung der mit Δ, $\frac{d\Delta}{dx}$, ... behafteten Glieder beider Ausdrücke erhält man leicht

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \Phi + \frac{d\varrho_0}{dx}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y'} = \varrho_0 + \frac{d\varrho_1}{dx}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y''} = \varrho_1 + \frac{d\varrho_2}{dx},$$
$$\ldots \frac{\partial\phi}{\partial y^{(n-1)}} = \varrho_{n-2} + \frac{d\varrho_{n-1}}{dx}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y^{(n)}} = \varrho_{n-1}.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

$$\varrho_{n-2} = \frac{\partial\phi}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial y^{(n)}}}{dx}, \ldots \varrho_1 = \frac{\partial\phi}{\partial y''} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial y'''}}{dx} \pm \ldots + (-1)^n \frac{d^{n-2}\frac{\partial\phi}{\partial y^{(n)}}}{dx^{n-2}},$$

$$\varrho_0 = \frac{\partial\phi}{\partial y'} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial y''}}{dx} + \frac{d^2\frac{\partial\phi}{\partial y'''}}{dx^2} \mp \ldots - (-1)^n \frac{d^{n-1}\frac{\partial\phi}{\partial y^{(n)}}}{dx^{n-1}};$$

und daher

$$\Phi = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial y'}}{dx} + \frac{d^2\frac{\partial\phi}{\partial y''}}{dx^2} \mp \ldots + (-1)^n \frac{d^n\frac{\partial\phi}{\partial y^{(n)}}}{dx^n}.$$

Die Variation des Integrals erhält daher die Form:

$$\delta\int\phi\, dx = \phi\,\delta x + \xi + \int\Phi \cdot \Delta dx,$$

wo in $\phi\delta x + \xi$ für die Variabeln die den Gränzen des Integrals entsprechenden Werthe einzusetzen sind.

Anmerkung. Wenn der aus Variabeln, abhängigen und unabhängigen, so wie aus deren Differenzialquotienten zusammengesetzte Ausdruck als ein Integral erscheint, so hängt dessen Form von den noch unbekannten oder nur theilweise gegebenen Relationen zwischen jenen Variabeln ab; eine solche Relation kann als analytischer Ausdruck der Bedingung betrachtet werden, welche die Aufgabe für den Integralausdruck festsetzt. Dies führt zu dem wichtigsten Problem der Variationsrechnung.

Aufgabe II.

Wenn in dem Integral $\int_{x_0}^{x_1} dx \cdot \phi(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'' \ldots)$ y, z unbekannte Functionen von x, und $y', y'', z' \ldots$ deren Differenzialquotienten bezeichnen, so ist die Bedingung analytisch auszudrücken, daſs jenes Integral zwischen den gegebenen Gränzen einen gröſsten oder kleinsten Werth haben soll.

Auflösung. Nach den Erörterungen pag. 15 über solche Ausdrücke, wie unser Integral ist, muſs die Variation des Integrals verschwinden, wenn dasselbe ein Maximum oder Minimum wird. Die Variation des Integrals kann nach dem Resultate der vorigen Aufgabe so umgeformt werden, daſs sie in ein Integral und in einen vom Integralzeichen freien Ausdruck zerfällt. Nur hat man noch unter das Integralzeichen einen Ausdruck zu setzen, der ebenso aus ϕ für z gebildet ist, wie das obige Φ für y; derselbe ist sodann mit $\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x$ zu multipliciren, das mit E bezeichnet werde. Ebenso ist der zweite Theil des obigen Resultates um einen analogen Ausdruck für z und E zu vermehren. Da nun das totale Integral wegen der darin vorkommenden beliebigen Variationen Δ und E nicht integrabel ist, die Variation aber 0 gesetzt werden muſs; so ist die Function unter dem Integralzeichen für sich und ebenso der von demselben freie Ausdruck gleich Null zu setzen, indem man in letzteren die den Integralgränzen entsprechenden Werthe der Variabeln und ihrer Differenzialquotienten einführt. Man erhält also zwei Gleichungen:

$$(1) \quad 0 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial y'}}{dx} + \frac{d^2\frac{\partial\phi}{\partial y''}}{dx^2} \mp \ldots\right)\Delta + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial z'}}{dx} + \frac{d^2\frac{\partial\phi}{\partial z''}}{dx^2} \mp \ldots\right)\mathrm{E}$$

$$(2) \quad 0 = \phi\delta x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y'} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial y''}}{dx} \pm \ldots\right)\Delta + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y''} \mp \ldots\right)\frac{d\Delta}{dx} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial\phi}{\partial z'} - \frac{d\frac{\partial\phi}{\partial z''}}{dx} \pm \ldots\right)\mathrm{E} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z''} \pm \ldots\right)\frac{d\mathrm{E}}{dx} + \ldots$$

Die Gleichung (1) findet zum Unterschied von (2) für jeden Werth der Variabeln statt: man erhält daher durch sie wenigstens eine Differenzialgleichung zwischen x, y, z. Existirt für die Aufgabe weiter keine Bedingung zwischen diesen Variabeln, so sind die Variationen Δ und E völlig unabhängig von einander, und es kann (1) nur erfüllt werden, wenn die mehrgliedrigen Coefficienten von Δ und E einzeln gleich 0 gesetzt werden. Im Allgemeinen wird man dann so viel Differenzialgleichungen erhalten, als Variabeln vorhanden sind, welche von x abhängen: durch sie findet man die Formen der einzelnen Functionen. — Aus (2) ergeben sich Gränzbedingungen, welche über die Werthe der Functionen an den Gränzen des Integrals Aufschlufs geben. Sind diese Gränzen so fixirt, dafs x, y, z gegebene Werthe haben, so verschwinden Δ und E, denn die Variationen von Constanten sind Null: (2) wird daher alsdann von selbst erfüllt. Verbinden sich aber mit (2) noch andre durch das Problem gegebene Relationen zwischen den Variationen, so reducirt man dieselben durch Elimination auf die kleinste Anzahl, und setzt die Coefficienten der übrig bleibenden Variationen gleich Null. Aus diesen Gleichungen kann sodann die Bestimmung der willkürlichen Constanten gewonnen werden, die durch Integration der Gleichungen (1) in die Relationen der Variabeln aufgenommen sind. — Wenn aber n Relationen zwischen den Variabeln für die ganze Ausdehnung des Integrals oder für die Gränzen desselben gegeben sind, so werden die dadurch entstehenden Veränderungen der obigen Gleichungen durch eine der beiden folgenden Aufgaben gefunden. Man hat dabei vorauszusetzen, dafs die Anzahl der Variabeln in ϕ beliebig, und zwar gröfser als $n + 1$ sei, wodurch die Gleichungen (1) und (2) nur um analoge Glieder vermehrt werden.

Aufgabe III.

Die Veränderungen zu finden, welche in den Gleichungen (1) und (2) vorzunehmen sind, wenn die Variabeln für die ganze Ausdehnung des Integrals durch n Bedingungsgleichungen verbunden sind.

Auflösung. Es mufs zuerst an einen Hülfssatz aus der Theorie der Elimination erinnert werden. Nimmt man eine Gleichung ersten Grades zwischen m Gröfsen an von der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m = 0,$$

welche für alle beliebigen Werthe der $x_1, x_2, \ldots x_m$ erfüllt werden mufs; sind diese aufserdem durch p Gleichungen verbunden:

$$\begin{gathered} b_{1,1}\, x_1 + b_{2,1}\, x_2 + \ldots + b_{m,1}\, x_m = 0, \\ b_{1,2}\, x_1 + b_{2,2}\, x_2 + \ldots + b_{m,2}\, x_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1,p}\, x_1 + b_{2,p}\, x_2 + \ldots + b_{m,p}\, x_m = 0, \end{gathered}$$

wo $p < m - 1$ ist, und einige der Coefficienten b verschwinden können; so wird man die $x_1, x_2, \ldots x_m$ eliminiren und nach vollbrachter Reduction die Coefficienten der übrigen Gröſsen x gleich Null setzen. Statt dieses meist langwierigen Verfahrens kann man jede der p Bedingungsgleichungen mit einem beliebigen Factor $\alpha, \beta, \ldots \pi$ multipliciren und zur ursprünglichen Gleichung addiren, wodurch man das Resultat erhält

$$0 = (a_1 + \alpha b_{1,1} + \beta b_{1,2} + \ldots + \pi b_{1,p}) x_1 + (a_2 + \alpha b_{2,1} + \beta b_{2,2} + \ldots + \pi b_{2,p}) x_2 + \ldots$$
$$+ (a_m + \alpha b_{m,1} + \ldots + \pi b_{m,p}) x_m.$$

Läſst man nun die Coefficienten der x einzeln verschwinden, und eliminirt die $\alpha, \beta, \ldots \pi$, deren Anzahl p wenigstens um 2 kleiner als m ist; so erhält man dieselben Gleichungen zwischen den Coefficienten a und b, wie vorhin bei directer Elimination der Gröſsen x. —

Um die vorgelegte Aufgabe zu lösen unterscheidet man zwei Fälle, indem der erste einfachere zur schnelleren Erledigung des zweiten führt.

Erster Fall: Die n Bedingungsgleichungen zwischen den Variabeln des Ausdrucks ϕ enthalten nur diese Variabeln selbst. Sie werden bezeichnet mit

$$\psi_1(x, y, z \ldots) = 0, \quad \psi_2(x, y, z \ldots) = 0, \quad \ldots \psi_n(x, y, z \ldots) = 0.$$

Diese Gleichungen müssen für alle Werthe der Variabeln, also auch für die durch Variationen veränderten erfüllt werden. Bildet man von jeder das totale Differenzial, indem man x als unabhängige Variable, y und $z \ldots$ als deren Functionen betrachtet; eben so von jeder die vollständige Variation, wobei die einzelnen Variationen als völlig unabhängig von einander vorausgesetzt werden; so müssen beide entstandenen Ausdrücke verschwinden. Man multiplicire das Differenzial mit δx und subtrahire es von der Variation, so erhält man n Gleichungen

$$(3) \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \Delta + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \mathrm{E} + \ldots = 0, \quad \ldots \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \Delta + \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \mathrm{E} + \ldots = 0.$$

Da jede die Variationen Δ, E, ... enthält, welche sich auch in der verallgemeinerten Gleichung (1) finden, so kann man auf dieses System von Gleichungen den Hülfssatz anwenden. Bezeichnen $\lambda, \ldots \nu$ die unbestimmten Factoren der n Gleichungen (3), werden die Producte zur linken Seite der (1) addirt, die Coefficienten der Δ, der E, ... vereinigt und alsdann gleich 0 gesetzt; so resultiren so viel Gleichungen, als Variabeln $y, z \ldots$ in ϕ enthalten sind, von der Form:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial\phi}{\partial y'}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{\partial\phi}{\partial y''}}{dx^2} \mp \ldots + \lambda\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \ldots + \nu\,\frac{\partial\psi_n}{\partial y} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen sind die Factoren $\lambda, \ldots \nu$ zu eliminiren; die dadurch gewonnenen Differenzialgleichungen bestimmen die Formen der einzelnen Functionen. Die Gleichung (2) wird durch die Einführung solcher Bedingungsgleichungen nicht verändert.

Zweiter Fall: Die n Bedingungsgleichungen enthalten aufser den Variabeln des Ausdrucks ϕ auch deren Differenzialquotienten nach x; sie seien bezeichnet durch

$$\psi_1(x, y, y', y'', \ldots, z, z', \ldots) = 0, \ldots \quad \psi_n(x, y, y', y'', \ldots, z, z', \ldots) = 0.$$

Auch hier bilde man das totale Differenzial eines jeden ψ nach x, und setze in der vollständigen Variation desselben statt $\delta y^{(n)}$, $\delta z^{(n)}$ die in Satz II gefundenen Werthe, indem man sich der Zeichen Δ, E, ... bedient. Nachdem man die Producte der Differenziale mit δx von den Variationen subtrahirt, erhält man n Gleichungen von der Form:

$$0 = \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\,\Delta + \frac{\partial\psi_1}{\partial y'}\,\frac{d\Delta}{dx} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y''}\,\frac{d^2\Delta}{dx^2} + \ldots + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\,\mathrm{E} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z'}\,\frac{d\mathrm{E}}{dx} + \ldots\ldots$$

Multiplicirt man jede derselben mit dx und einem Factor $\lambda, \ldots \nu$, so wird auch das Integral eines jeden dieser Producte verschwinden; diese Integralgleichungen finden für alle beliebigen Werthe von Δ, E, ... statt, so dafs man dieselben zu $\int(\delta\phi\cdot dx - d\phi\cdot\delta x)$, wie dies in der Aufgabe I erscheint, addiren kann. Es ergiebt sich daher eine Gleichung von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} 0 = &\int\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \ldots + \nu\,\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\Big)\,\Delta\,dx + \int\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y'} + \lambda\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y'} + \ldots\Big)\,\frac{d\Delta}{dx}\,dx + \ldots \\ &+ \int\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \lambda\,\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \ldots + \nu\,\frac{\partial\psi_n}{\partial z}\Big)\,\mathrm{E}\,dx + \int\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z'} + \lambda\,\frac{\partial\psi_1}{\partial z'} + \ldots\Big)\,\frac{d\mathrm{E}}{dx}\,dx + \ldots \end{aligned}$$

Nimmt man mit der rechten Seite dieser Gleichung dieselben Umformungen wie in Aufgabe I vor, so resultirt erstlich die Integralgleichung:

$$\begin{aligned} 0 = &\int\Big[\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \ldots + \nu\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\Big) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial y'} + \ldots\Big) + \frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y''} + \ldots\Big) \mp \ldots\Big]\,\Delta\,dx \\ &+ \int\Big[\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \ldots + \nu\frac{\partial\psi_n}{\partial z}\Big) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial z'} + \ldots\Big) + \frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z''} + \ldots\Big) \mp \ldots\Big]\,\mathrm{E}\,dx + \ldots \end{aligned}$$

Da in dieser Gleichung die Coefficienten von Δ, E, ... gleich 0 zu setzen sind, so erhält man die Differenzialgleichungen, welche nach Elimination von $\lambda \ldots \nu$ die gesuchten Relationen zwischen den Variabeln geben.

Sodann verändert sich die Gleichung (2) in Folge der vorgenommenen partiellen Integrationen, so dafs sie nunmehr erscheint als

$$\phi\,\delta x + \Big[\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial y'} + \ldots\Big) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y''} + \ldots\Big) \pm \ldots\Big]\,\Delta$$
$$+ \Big[\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y''} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial y''} + \ldots\Big) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial y'''} + \ldots\Big) \pm \ldots\Big]\,\frac{d\Delta}{dx} + \ldots$$
$$+ \Big[\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z'} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial z'} + \ldots\Big) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z''} + \ldots\Big) \pm \ldots\Big]\,\mathrm{E}$$
$$+ \Big[\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z''} + \lambda\frac{\partial\psi_1}{\partial z''} + \ldots\Big) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial z'''} + \ldots\Big) \pm \ldots\Big]\,\frac{d\mathrm{E}}{dx} + \ldots$$

In diese Gleichung hat man für $\lambda, \ldots \nu$ die gefundenen Werthe zu substituiren, die den Integralgränzen entsprechenden Werthe der Variabeln einzusetzen, und, wenn alsdann keine andern Bedingungen für die Gränzwerthe der Variationen δx, Δ, E ... und ihrer Differenzialquotienten $\frac{d\Delta}{dx}$, $\frac{d\mathrm{E}}{dx}$, ... existiren, die Coefficienten dieser Größen einzeln verschwinden zu lassen. Die Benutzung dieser Gleichungen zur Bestimmung der willkürlichen Constanten, welche sich in den Ausdrücken für y, z ... finden, ist schon oben erwähnt worden.

Anmerkung. Besteht das zu einem Maximum oder Minimum zu machende Integral nur aus einer Variabeln $\phi = \frac{dy}{dx}$, und hängt y mit den andern Variabeln und deren Differenzialquotienten durch eine Bedingungsgleichung zusammen; so ergiebt sich unmittelbar

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y'} = 1,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y''} = 0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0, \ldots$$

Daher wird die Gleichung (1) hier

$$\Big[\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y'}\Big) \pm \ldots\Big]\,\Delta + \Big[\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z'}\Big) \pm \ldots\Big]\,\mathrm{E} + \ldots = 0.$$

Hier setzt man die Coefficienten von Δ, E, ... gleich 0, eliminirt den Factor λ, und findet durch Verbindung der resultirenden Gleichungen mit der Bedingungsgleichung die Relationen zwischen den Variabeln. Wenn in ψ kein höherer Differenzialquotient von y als der n^{te} vorkommt, so wird λ n willkürliche Constanten enthalten, da die obigen Differenzialgleichungen in Bezug auf λ lineär und von n^{ter} Ordnung sind. Diese Constanten kann man zur Erfüllung von n Gleichungen für die eine Gränze des Integrals benutzen. Die Gleichungen reduciren sich aber, außer der ersten

$$1 + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y''}\Big) + \ldots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y^{(n)}}\Big) = 0,$$

sämmtlich auf die Form:

$$\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y''} - \frac{d}{dx}\Big(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y'''}\Big) + \ldots \pm \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Big(\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y^{(n)}}\Big) = 0,$$

so dafs die letzte ist

$$\lambda \frac{\partial \psi}{\partial y^{(n)}} = 0.$$

Sie werden erfüllt, wenn man für die eine gegebene Gränze des Integrals setzt:

$$\lambda = 0, \quad \frac{d\lambda}{dx} = 0, \ldots \frac{d^{n-2}\lambda}{dx^{n-2}} = 0, \quad \frac{d^{n-1}\lambda}{dx^{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y^{(n-1)}} + 1 = 0.$$

Da hiernach für den Gränzwerth x_1 die letzte Gleichung stattfindet, so kann man den allgemeinen Werth von $\frac{d^{n-1}\lambda}{dx^{n-1}}$ durch folgende Gleichung bestimmen:

$$\frac{d^{n-1}\lambda}{dx^{n-1}} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial y^{(n-1)}}\right)_1 + x - x_1 + 1 = 0,$$

deren Differenzial dann die schon von Lagrange gegebene Form hat

$$\frac{d^n\lambda}{dx^n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y^{(n-1)}}\right)_1 + 1 = 0.$$

Dritter Fall. Sind als Bedingungen für die Variabeln n Integrale gegeben, welche innerhalb der gegebenen Gränzen gewisse Werthe behalten sollen, $\int f_1 dx, \ldots \int f_n dx$,
wie dies für $n = 1$ der Fall bei den isoperimetrischen Problemen ist, und sind deren unbestimmte Werthe $F_1, \ldots F_n$, wo F_1, F_n noch unbekannte Functionen von x bezeichnen; so können als Bedingungsgleichungen angesehen werden:

$$F_1 - \int f_1 dx = 0, \ldots F_n - \int f_n dx = 0,$$

oder auch $dF_1 - f_1 dx = 0, \ldots dF_n - f_n dx = 0.$

Da diese Gleichungen für alle Werthe der Variabeln erfüllt sein sollen, so müssen auch die Variationen verschwinden, d. h. $\delta(dF_1) - \delta(f_1 dx) = 0, \ldots$ Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\lambda, \ldots \nu$, und addirt die Integrale dieser Producte zu $\int \delta(\phi dx)$; beachtet man ferner dafs

$$\int \lambda \delta dF_1 = \int \lambda d \delta F_1 = \lambda \delta F_1 - \int \frac{d\lambda}{dx} dx \delta F_1;$$

so bleibt unter dem Integralzeichen nur je ein Glied, welches mit der Variation eines F behaftet ist. Da diese Variationen, als solche von noch unbekannten Functionen, unabhängig von denen der andern Variabeln sind, so müssen die Glieder, welche sie enthalten, gleich 0 werden, d. h. die Factoren dieser Variationen müssen verschwinden. Letztere sind aber die totalen Differenzialquotienten der Factoren λ nach x, daher sind $\lambda, \ldots \nu$ von x unabhängige Gröfsen oder Constanten $a, \ldots h$. Unter dem Integralzeichen bleiben daher nur die Variationen der zu integrirenden Ausdrücke

$f\,dx$, multiplicirt mit constanten Factoren. — Die Glieder $\lambda\delta F$ aber, welche zur Gleichung (2) gehören würden, verschwinden ebenfalls; denn da die F, zwischen den Gränzen des Integrals genommen, constante Werthe haben, so müssen die Variationen dieser Werthe, oder die Differenzen der Variationen von F an den beiden Gränzen verschwinden. Also rühren alle Veränderungen, welche (1) und (2) erleiden, nur von den Variationen der $f\,dx$ her; (1) geht daher über in die Gleichungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + a\,\frac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots + h\,\frac{\partial f_n}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} + a\,\frac{\partial f_1}{\partial y'} + \ldots\right) \pm \ldots = 0, \text{ etc.}$$

Die Gleichung (2) aber wird:

$$(\phi + af_1 + \ldots + hf_n)\,\delta x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} - \frac{d\,\frac{\partial \phi}{\partial y''}}{dx} \pm \ldots + a\,\frac{\partial f_1}{\partial y'} - a\,\frac{d\,\frac{\partial f}{\partial y''}}{dx} \pm \ldots + h\,\frac{\partial f_n}{\partial y'} \mp \ldots\right)\Delta + \ldots = 0.$$

Aufgabe IV.

Die Veränderungen der Gränzgleichung (2) zu bestimmen, wenn zwischen den Variabeln für die Gränzwerthe des Integrals n Bedingungsgleichungen stattfinden.

Auflösung. Bezeichnet man die Gränzwerthe von x mit x_1 und x_0, und die denselben entsprechenden Werthe der übrigen Variabeln und ihrer Differenzialquotienten mit $y_1, y'_1, y''_1, y_0, y'_0, \ldots z_1, z'_1, z_0, z'_0, \ldots$, so seien die Gränzgleichungen von der Form

$$\chi(x_1, x_0, y_1, y'_1, \ldots y_0, y'_0 \ldots, z_1, z'_1, z_0, \ldots) = 0.$$

Da diese Gleichungen für alle Gränzwerthe der Variabeln erfüllt sein müssen, so auch für die durch Variationen vermehrten: daher werden die Variationen der χ verschwinden, so daſs

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \chi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial \chi}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial \chi}{\partial y'_1}\delta y'_1 + \ldots + \frac{\partial \chi}{\partial y_0}\delta y_0 + \ldots + \frac{\partial \chi}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial \chi}{\partial z_0}\delta z_0 + \ldots = 0.$$

Statt die einzelnen Variationen zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung (2) zu eliminiren, multiplicirt man wiederum die zuletzt erhaltenen mit unbestimmten Factoren $\alpha, \beta, \ldots$, addirt die Producte zu (2) und setzt die Coefficienten aller einzelnen Variationen gleich 0. Nach der Elimination von $\alpha, \beta, \ldots$ hat man die noch übrig bleibenden Gleichungen vermittelst der willkürlichen Constanten zu erfüllen, welche durch die Integration der Differenzialgleichungen (1) in die Ausdrücke für $y, z, \ldots$ übergegangen sind. Hierbei aber ist zu bemerken, daſs einige dieser Variationen sich als Functionen andrer ausdrücken lassen. Ist nämlich eine der Variabeln in den Differenzialgleichungen so enthalten, dafs ihr höchster Differenzialquotient von der m^{ten} Ordnung ist, so enthält die Variable selbst m willkürliche Constanten, oder die Variable selbst und ihre $m-1$ ersten Differenzialquotienten sind für einen gegebenen Werth von x willkürlich zu bestimmen. Findet dies für $x=x_0$ statt, so dafs dadurch den Bedingungen der Aufgabe genügt wird, so können diese Gränzwerthe der Variabeln u. s. w. als gegebene Functionen der andern Variabeln u. s. w. betrachten, eben so auch ihre Variationen als abhängig von den übrigen Variationen. Die m arbiträren Constanten sind hierdurch bestimmt, und man hat daher die dem Gränzwerthe x_1 entsprechenden Variationen jener Variabeln u. s. w. als unabhängige zu behandeln.

Aufgabe V.

Die Unterscheidungszeichen der Maxima und Minima zu finden.

Auflösung. Es ist schon pag. 15 bemerkt, ein Ausdruck sei ein Maximum, wenn seine zweite Variation ein negatives Vorzeichen habe. Wird also die durch Gleichung (1) gefundene Form von y in die zweite Variation des gegebenen Integralausdrucks substituirt, so mufs diese beständig negativ oder beständig positiv sein, wenn das Integral ein Maximum oder ein Minimum haben soll. Nimmt man der kürzern Rechnung wegen an, dafs von y nur der erste Differenzialquotient in ϕ vorkommt, so ist die erste Variation von $\int\phi\,dx$ folgende

$$\int\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{d\Delta}{dx}\right)dx;$$

diese variirt giebt die zweite Variation:

$$\int dx\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\Delta^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial y'}\Delta\frac{d\Delta}{dx}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}\frac{d\Delta^2}{dx^2}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\delta\Delta+\frac{\partial\phi}{\partial y'}\frac{d\delta\Delta}{dx}\right).$$

Integrirt man das letzte Glied theilweise, so bleibt unter dem Integralzeichen statt der beiden letzten Glieder

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{d\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}}{dx}\right)\delta\Delta,$$

wovon der erste Factor in Folge der für y schon erfüllten Gleichung (1) verschwindet; daher ist die Bedingung folgende:

$$\int dx\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\Delta^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial y'}\Delta\frac{d\Delta}{dx}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}\frac{d\Delta^2}{dx^2}\right)$$

mufs innerhalb der gegebenen Gränzen für ein stattfindendes Maximum stets negativ, für ein Minimum stets positiv sein, so klein auch Δ sein mag. Es findet daher ein Minimum auch dann statt, wenn der Werth des Trinoms unter dem Integralzeichen von der untern Gränze $x = x_0$ bis zur obern $x = x_1$ beständig positiv ist; ein Maximum dagegen, wenn während dieses ganzen Intervalles das Trinom das negative Vorzeichen behält. Beide Bedingungen vereinigen sich in der, dafs das Trinom nicht vom Positiven zum Negativen übergehe. Bezeichnet man $\frac{d\Delta}{dx}$ mit Δ', und den Theil des Trinoms, der stets ein und dasselbe Vorzeichen behält, mit

$$(a) \qquad M\Delta^2 + 2N\Delta\Delta' + P\Delta'^2.$$

Bringt man diesen auf die Form

$$P\Delta^2\left(\frac{\Delta'^2}{\Delta^2} + 2\frac{\Delta'}{\Delta}\frac{N}{P} + \frac{M}{P}\right),$$

so ist zunächst das Vorzeichen von $P\Delta^2$ d. h. von P zu bestimmen. Damit für alle beliebigen Werthe von $\frac{\Delta'}{\Delta}$ der in Klammern eingeschlossene Ausdruck stets positiv bleibe, wie es für sehr grofse Werthe jenes Quotienten der Fall ist, ist zu verhüten, dafs derselbe vom Positiven durch 0 zum Negativen übergehe. Diese Bedingung wird ausgedrückt durch $N^2 - MP \leqq 0$; dann ist (a) positiv und negativ zugleich mit P. Aus der Untersuchung der Gröfsen M, N, P in jedem einzelnen Falle ergiebt sich das Verhalten des Ausdrucks, falls derselbe unendlich werden sollte.

Der vom Trinom übrig bleibende Theil ist

$$(b) \qquad \Delta^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - M\right) + 2\Delta\Delta'\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial y'} - N\right) + \Delta'^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2} - P\right);$$

sein Integral sei $\varkappa + \lambda\Delta + \mu\Delta^2$, woraus man findet

$$\mu = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial y'} - N, \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - M, \quad \lambda = 0, \quad \frac{d\varkappa}{dx} = 0.$$

Letztere zwei Gleichungen ergeben, dafs $\lambda\Delta$ aus dem Integral verschwindet, und $\varkappa$ eine Constante ist. Da das Glied, welches $P - \frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}$ entspricht, im differenzirten Integrale fehlt, so erhält man den Werth von P gleich $\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}$. Das Integral $\varkappa + \mu\Delta^2$ ist, in Bezug auf die beiden Gränzen x_1, x_0 genommen, nur abhängig von μ_1 und μ_0; $\Delta^2(\mu_1 - \mu_0)$ ist aber

positiv, wenn für $x = x_0$, $\mu \leqq 0$; für $x = x_1$, $\mu \geqq 0$;
negativ, ... , $\mu \geqq 0$, ... , $\mu \leqq 0$.

Es kommt also bei der Unterscheidung zwischen Maxima und Minima einmal auf das Vorzeichen von $\frac{\partial^2\phi}{\partial y'^2}$ an, alsdann auf die Werthe von μ. Diese

Gröfse ist durch die Bedingung bestimmt: $N^2 - MP \leqq 0$, welche nach Einsetzung der oben gefundenen Werthe folgende Differenzialgleichung ergiebt:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \gtreqless \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial y'} - \mu\right)^2.$$

Läfst man der Einfachheit wegen nur das Gleichheitszeichen gelten, so ist doch die allgemeine Auffindung von μ, eine Aufgabe der Theorie der Differenzialgleichungen, erst Jacobi gelungen (Crelle XVII). Dieser bestimmte μ durch die partiellen Differenziale von y selbst auf folgende Weise. Enthält y nach der Integration der Gleichung (1) zwei willkürliche Constanten a und b, und setzt man $\nu = \alpha \frac{\partial y}{\partial a} + \beta \frac{\partial y}{\partial b}$, wo α und β zwei neue Constanten bezeichnen, so wird $\mu = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial y'} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}$. Dieser Satz ist schon im sechsten Bande des Liouville'schen Journals bewiesen worden; jedoch kann die Herleitung und die Verallgemeinerung des Satzes aus so fruchtbaren und umfassenden Betrachtungen von Differenzialgleichungen gewonnen werden, dafs wir diese schicklicher an einem andern Orte zu geben gedenken.

Aufgabe VI.

Wenn in dem Doppel-Integral

$$\iint dx\, dy \cdot \phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

z eine unbekannte Function von x und y, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ... die partiellen Differenzialquotienten von z nach x und y bezeichnen, so ist die analytische Relation zwischen diesen Gröfsen zu finden, welche ausdrückt, dafs jedes Integral zwischen gegebenen Gränzen einen gröfsten oder kleinsten Werth habe.

Auflösung. Die Variation des Integrals mufs auch hier verschwinden; durch zweimalige Anwendung des Satzes III wird aber die Variation auf den zu integrirenden Ausdruck $\phi\, dx\, dy$ übertragen. Da nun $\delta(\phi\, dx\, dy) = \delta\phi \cdot dx\, dy + d\delta x \cdot \phi\, dy + d\delta y \cdot \phi\, dx$, und

$$\int d\delta x \cdot \phi\, dy = \delta x \cdot \phi\, dy - \int \frac{d\phi}{dx} \delta x\, dx\, dy, \int d\delta y \cdot \phi\, dx = \delta y \cdot \phi\, dx - \int \frac{d\phi}{dy} \delta y\, dy\, dx,$$

so ist die Gleichung für die totale Variation:

$$0 = \int \phi\, \delta x \cdot dy + \int \phi\, \delta y \cdot dx + \iint \left(\delta\phi - \frac{d\phi}{dx}\delta x - \frac{d\phi}{dy}\delta y\right) dx\, dy.$$

Was zuerst das vorhandene Doppel-Integral betrifft, so ist die abhängige Variation $\delta\phi$ in der Weise zu bilden, daſs auſser x und y auch z und für's Erste dessen partielle Differenziale unabhängige Variationen erhalten. Für das totale Differenzial $\frac{d\phi}{dx}$ sind nicht nur z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, sondern auch $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ als implicite Functionen von x zu betrachten; dasselbe gilt in entsprechender Weise für $\frac{d\phi}{dy}$. Bezeichnet man ferner die partiellen Differenzialquotienten von ϕ nach $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, ... mit $\frac{\partial\phi}{\partial(z,\,x)}$, $\frac{\partial\phi}{\partial(z,\,x^2)}$, $\frac{\partial\phi}{\partial(z,\,xy)}$.., so erhält man als Function unter dem doppelten Integralzeichen

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}\left(\delta z - \frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x - \frac{\partial z}{\partial y}\,\delta y\right) + \frac{\partial\phi}{\partial(z,\,x)}\left(\delta\,\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta x - \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\delta y\right)$$
$$+ \frac{\partial\phi}{\partial(z,\,y)}\left(\delta\,\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,\delta x - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\delta y\right) + \frac{\partial\phi}{\partial(z,\,x^2)}\left(\delta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,\delta x - \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}\,\delta y\right) + ..$$

Der Factor von $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ hat eine Form, welche ähnlich wie in den früheren Aufgaben Δ, E gebildet ist; bezeichnen wir ihn mit Z, so sind die Factoren der übrigen Differenziale auf Z zurückzuführen.

Um zuerst die Variation von $\frac{\partial z}{\partial x}$ zu bilden, betrachte man den Zuwachs, den z erhält, wenn y als constant angesehen wird: er besteht in $\frac{\partial z}{\partial x}\,dx$; variirt man den um dieses partielle Differenzial vermehrten Werth, so führt dies zu einer neuen Function z. Andrerseits ist zu $z + \delta z$ das Increment zu addiren, welches den auf $z + \delta z$ folgenden Werth eben dieser neuen Function bestimmt: die Differenziation kann nur nach x geschehen, so daſs

$$z + \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \delta\left(z + \frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right) = z + \delta z + \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\,dx.$$

Im partiellen Differenzial wird dx als ein invariabler Factor betrachtet; daher giebt die eben erhaltene Gleichung

$$\delta\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\,\delta z}{\partial x}.$$

Da nun $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\delta x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\delta y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\,\delta y\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\delta x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x\right)$, wo man der Allgemeinheit wegen δx, δy nicht differenzirt, so sind die Factoren der partiellen Differenziale von ϕ in obigem Ausdruck auſser dem ersten $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$, ..., und dieser Ausdruck selbst

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}Z+\frac{\partial\phi}{\partial(z,x)}\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial(z,y)}\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^2)}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$$
$$+\frac{\partial\phi}{\partial(z,y^2)}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}.$$

Bei der Transformation desselben darf unter dem doppelten Integralzeichen nur ein Product von Z bleiben; der andre Theil wird daher aus einem oder aus beiden Integralen heraustreten. Setzt man daher den totalen Ausdruck gleich

$$\Phi\cdot Z+\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y},$$

so werden ξ, η noch mit einem der ersten partiellen Differenzialquotienten behaftet sein. Sei

$$\xi=\varrho_0 Z+\varrho_1\frac{\partial Z}{\partial x},\quad \eta=\sigma_0 Z+\sigma_1\frac{\partial Z}{\partial y},\quad \zeta=\tau Z.$$

Durch Vergleichung der mit z oder dessen Differenzialen behafteten Glieder, erhält man

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\Phi-\frac{\partial\varrho_0}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_0}{\partial y}-\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial(z,x)}=\varrho_0+\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y},\quad \frac{\partial\phi}{\partial(z,y)}=\sigma_0+\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}+\frac{\partial\tau}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^2)}=\varrho_1,\quad \frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}=\tau,\quad \frac{\partial\phi}{\partial(z,y^2)}=\sigma_1.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\varrho_0=\frac{\partial\phi}{\partial(z,x)}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^2)}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}}{\partial y},\quad \sigma_0=\frac{\partial\phi}{\partial(z,y)}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,y^2)}}{\partial y}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}}{\partial x},$$
$$\Phi=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,x)}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,y)}}{\partial y}+\frac{\partial^2\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^2)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\frac{\partial\phi}{\partial(z,y^2)}}{\partial y^2}.$$

Hier ist Φ der unter dem doppelten Integralzeichen stehende Ausdruck; dagegen tritt $\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}$ aus demselben gänzlich heraus; $\varrho_0 Z+\varrho_1\frac{\partial Z}{\partial x}$, aus den eben gefundenen Gleichungen für ϱ_0 und ϱ_1 zusammengesetzt, steht unter dem auf y, $\sigma_0 Z+\sigma_1\frac{\partial Z}{\partial y}$ unter dem auf x sich beziehenden Integralzeichen. Demnach wird der nur einer Integration unterworfene Theil der gesammten Variation folgende Gestalt haben:

$$(2)\quad \begin{aligned}&\int dx\left[\phi\delta y+\left(\frac{\partial\phi}{\partial(z,y)}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,y^2)}}{\partial y}\right)Z+\frac{\partial\phi}{\partial(z,y^2)}\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\\ &+\int dy\left[\phi\delta x+\left(\frac{\partial\phi}{\partial(z,x)}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^2)}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy)}}{\partial y}\right)Z+\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^2)}\frac{\partial Z}{\partial x}\right].\end{aligned}$$

Setzt man, um die Variation verschwinden zu lassen, zuerst Φ gleich 0, so gewinnt man eine partielle Differenzialgleichung, aus welcher z zu bestimmen ist. In (2) hat man den Factor von dx für die Gränzwerthe des auf y bezüglichen Integrals, den von dy für die des auf x bezüglichen Integrals einzurichten. — Wendet man hierauf geometrische Vorstellungen an, so hat man Probleme über Flächen hierher zu rechnen: $\Phi = 0$ mufs dann für die ganze Ausdehnung der Flächen erfüllt werden. Da die Begränzung derselben durch Curven geschieht, so mufs (2) $= 0$ für die Punkte dieser Gränzcurven stattfinden. Für die Discussion von (2) $= 0$ gelten die Bemerkungen über Elimination von Variationen, wie sie schon für Aufgaben mit einfachen Integralen aufgestellt sind. Ist die Gränzcurve völlig bestimmt und unveränderlich, so verschwinden die Variationen der Gränzgleichung von selbst.

Anmerkung 1. Man kann zu dieser Aufgabe Bedingungsgleichungen hinzufügen, welche die Resultate mehr oder weniger complicirt machen (s. Aufg. III und IV). Hier soll nur noch die dem isoperimetrischen Problem analoge Aufgabe erörtert werden. Ist nämlich die Bedingung für das Maximum oder Minimum des Integrals gegeben, dafs ein neues Doppel-Integral

$$\int\int f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\right) dx\, dy$$

für die gegebenen Gränzen einen constanten Werth haben soll, so kann dieselbe auch durch die Gleichung ausgedrückt werden $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} - f = 0$, wo F das unbestimmte doppelte Integral von f ist. Multiplicirt man die ebenfalls verschwindende Variation der linken Seite dieser Gleichung mit einem unbestimmten Factor ω, so ist das Doppel-Integral dieses Productes zur Variation des ursprünglichen Integrals zu addiren. Hier aber findet sich nach Ausführung partieller Integrationen nur ein Glied unter dem doppelten Integralzeichen, welches die unabhängige Variation δF enthält. Da demnach der Factor von δF, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\, \partial y}$, verschwinden mufs, so ist leicht zu sehen, dafs die Variabeln x und y in ω von einander getrennt sind, also $\omega = \psi_1(x) + \psi_2(y)$. Besteht $f(x, \ldots)$ nur in z selbst, d. h. soll das Volumen einer Fläche, deren Gränzen durch die des Integrales bestimmt sind, einen constanten Werth haben, so tritt zu dem Ausdruck Φ nur noch das Glied $-\omega$ hinzu.

Anmerkung 2. Die hier angewandte Methode zur Auffindung der unter dem doppelten, unter den einfachen Integralzeichen stehenden, und der von denselben freien Ausdrücke, liefert bestimmte Resultate auch für den Fall, daſs in dem Integralausdruck sämmtliche partielle Differenzialquotienten von z bis zu denen der n^{ten} Ordnung vorkommen.

Nach geschehener Variation kann der Ausdruck unter dem Integralzeichen auf die Form gebracht werden:

$$(A)\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}Z+\frac{\partial\phi}{\partial(z,x)}\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial(z,y)}\frac{\partial Z}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^n)}\frac{\partial^n Z}{\partial x^n}$$
$$+\frac{\partial\phi}{\partial(z,x^{n-1}y)}\frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1}\partial y}+\,..+\frac{\partial\phi}{\partial(z,xy^{n-1})}\frac{\partial^n Z}{\partial x\partial y^{n-1}}+\frac{\partial\phi}{\partial(z,y^n)}\frac{\partial^n Z}{\partial y^n}.$$

Für diesen hat man wie vorhin zu setzen

$$\Phi\cdot Z+\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}.$$

Bezeichnen $\varrho_0, \varrho_1 \ldots, \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \tau_0, \tau_{1,0}, \tau_{1,1}, \ldots$ noch unbekannte Functionen, so werden die Gröſsen ξ, η, ζ durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$\xi=\varrho_0 Z+\varrho_1\frac{\partial Z}{\partial x}+\varrho_2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\ldots+\varrho_{n-1}\frac{\partial^{n-1}Z}{\partial x^{n-1}},$$
$$\eta=\sigma_0 Z+\sigma_1\frac{\partial Z}{\partial y}+\sigma_2\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\ldots+\sigma_{n-1}\frac{\partial^{n-1}Z}{\partial y^{n-1}},$$
$$\zeta=\tau_0 Z+\tau_{1,0}\frac{\partial Z}{\partial x}+\tau_{1,1}\frac{\partial Z}{\partial y}+\tau_{2,0}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\tau_{2,1}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}+\ldots$$
$$+\tau_{n-2,0}\frac{\partial^{n-2}Z}{\partial x^{n-2}}+\tau_{n-2,1}\frac{\partial^{n-2}Z}{\partial x^{n-3}\partial y}+\,..+\tau_{n-2,n-2}\frac{\partial^{n-2}Z}{\partial y^{n-2}};$$

hier hat man zu beachten, daſs in den Indices von τ der erste Theil, vor dem Komma, die Ordnung des Differenzialquotienten von Z, der zweite, nach dem Komma stehende Theil den Grad des im Nenner des Differenzialquotienten vorkommenden ∂y angiebt.

Da in ζ $\frac{n^2-n}{2}$ Factoren vorkommen, so hat man, incl. Φ, überhaupt $\frac{n^2+3n}{2}+1$ unbekannte Functionen, also eben so viel, als in (A) Coefficienten von Z und dessen Differenzialen vorhanden sind. Um ϱ, σ, τ zu finden, muſs man $\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}$ entwickeln, und die Factoren der Differenziale von Z gleich den entsprechenden in (A) setzen. Über die aus dieser Entwicklung resultirenden Factoren ist zu bemerken: daſs sie in je vier Gliedern bestehen, mit Ausnahme derjenigen, welche in die $n-1^{\text{ten}}$ Differenziale von Z multiplicirt werden und nur je drei Glieder enthalten, so wie derjenigen, welche zu den n^{ten} Differenzialen von Z gehören und nur in je einem Glied bestehen. Der Factor von Z selbst ist

$$\Phi + \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x\, \partial y};$$

die Form eines Factors von $\frac{\partial^m Z}{\partial x^m}$ ist

$$\varrho_{m-1} + \frac{\partial \varrho_m}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{m-1,\,0}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{m,\,0}}{\partial x\, \partial y},$$

die eines solchen von $\frac{\partial^m Z}{\partial y^m}$ ist

$$\sigma_{m-1} + \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{m-1,\,m-1}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{m,\,m}}{\partial x\, \partial y},$$

endlich die eines Factors von $\frac{\partial^m Z}{\partial x^{m-p}\, \partial y^p}$

$$\tau_{m-2,\,p-1} + \frac{\partial \tau_{m-1,\,p-1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{m-1,\,p}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{m,\,p}}{\partial x\, \partial y}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daſs der gesammte Ausdruck, welcher die n^{ten} Differenziale von Z enthält, folgender ist:

$$\frac{\partial^n Z}{\partial x^n}\varrho_{n-1} + \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}\tau_{n-2,\,0} + \frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}\tau_{n-2,\,1} + \ldots + \frac{\partial^n Z}{\partial x\,\partial y^{n-1}}\tau_{n-2,\,n-2}$$
$$+ \frac{\partial^n Z}{\partial y^n}\sigma_{n-1}.$$

Indem man dies mit den entsprechenden Formen des Ausdrucks A vergleicht, erhält man

$$\varrho_{n-1} = \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, x^n)},\ \sigma_{n-1} = \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, y^n)},\ \tau_{n-2,\,0} = \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, x^{n-1}y)}, \ldots \tau_{n-2,\,n-2} = \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, xy^{n-1})}.$$

Aus den Differenzialen dieser Werthe nach x und y in Verbindung mit den resp. Gliedern von (A) erhält man ohne jede Rechnung sämmtliche ϱ, σ, τ und endlich Φ. Der letztere Ausdruck ist bekannt; er giebt, gleich 0 gesetzt, die Differenzialgleichung für z. Die Ausdrücke unter den nach x resp. y zu nehmenden einfachen Integralen, welche schon in Aufgabe VI angegeben sind, werden vermehrt um

$$\left(\frac{\partial^2 \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, x^2 y)}}{\partial x^2} + \ldots\right) Z + \left(-\frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, xy^2)}}{\partial x} - \ldots\right)\frac{\partial Z}{\partial y} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial(z,\, y^3)} + \ldots\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, x^3)}}{\partial x^2} + \ldots\right) Z + \left(-\frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, x^2 y)}}{\partial y} - \ldots\right)\frac{\partial Z}{\partial x} + \ldots,$$

endlich der von allen Integrationen freie Ausdruck ist

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial(z,\, xy)} - \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, x^2 y)}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial(z,\, xy^2)}}{\partial y} + \ldots\right) Z + \left(\frac{\partial \phi}{\partial(z,\, x^2 y)} - \ldots\right)\frac{\partial Z}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial(z,\, xy^2)} - \ldots\right)\frac{\partial Z}{\partial y} + \ldots$$

Die Einführung der Gröfsen ξ, η, ζ hat den Vortheil, dafs aus einer und derselben Rechnung alle Theile der Variation des Integrals sich ergeben, und sogleich jeder derselben einzeln für sich resultirt; man findet unmittelbar die unter dem doppelten, den einfachen Integralzeichen stehenden Ausdrücke und denjenigen, der vom Integral frei ist. Allerdings scheint Jacobi in dem Crelle'schen Journal (XVII, pag. 75) einen kürzern Weg einzuschlagen. Wenn man danach die Variation eines $n$fachen Integrals discutiren will, so erscheinen die im Anfang eingeführten Ausdrücke höchst einfach. Setzt man nämlich y als abhängige Variable, $x_1, x_2, \ldots x_n$ als unabhängige Variabeln, so ist die Gleichung zu bilden

$$\frac{\partial f}{\partial y}w + \frac{\partial f}{\partial(y, x_1)}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial(y, x_n)}\frac{\partial w}{\partial x_n} + \ldots = Aw + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

wo ξ_1 u. s. w. Functionen von w, $\frac{\partial w}{\partial x_1}$, ... u. s. w. bezeichnen. Die Auffindung der ξ selbst aber, und damit des A, bietet so erhebliche Schwierigkeiten wegen der resultirenden Differenzialgleichungen dar, ebenso die Trennung der unter $n-1$, $n-2$, .. 1, 0 Integralzeichen stehenden Ausdrücke, sogar schon dann, wenn unter dem zweifachen Integral sich nur die zweiten Differenzialquotienten von f befinden; dafs man in dem von uns beobachteten Verfahren einen mindestens eben so kurzen Weg zum Resultate finden wird. Unsere Rechnung hält die einzelnen Theile des Resultates mehr aus einander, und hat mit der Jacobi's den Vorzug der Einfachheit gemeinsam, dafs man durch eine und dieselbe Operation zu sämmtlichen Theilen des Resultates gelangt.