Einführung in die Infinitesimalrechnung.

Die Aufnahme der analytischen Geometrie in den Unterrichtsplan aller höheren Lehranstalten hat zur Folge gehabt, dafs diesem Unterrichtszweige eine gröfsere Beachtung als bisher zu Teil geworden ist, indem nicht nur in den bestehenden mathematischen Lehrbüchern der analytischen Geometrie ein besonderer Abschnitt eingeräumt wurde, sondern auch vielfach selbständige Leitfäden, die sich nur mit diesem Gegenstande beschäftigen, entstanden sind. Gewöhnlich wurde bei der Behandlung des Stoffes von den Eigenschaften einzelner Curven ausgegangen und hieraus die Gleichung derselben abgeleitet; nur vereinzelt findet man das umgekehrte Verfahren, aus der Gleichung auf die Gestalt und die Eigenschaften der sie darstellenden Curven zu schliefsen. Und doch ist gerade die letzte Betrachtungsweise die wichtigere, da sie es besonders gestattet, gleich von Anfang an die praktische Anwendbarkeit des Koordinatenbegriffs zu zeigen. Man sollte sich aber zunächst hiermit begnügen. Denn wollte man bei der Behandlung der Kegelschnitte die allgemeine Gleichung des 2. Grades zu Grunde legen, so würde das für den Anfänger oft zu grofse Schwierigkeiten bieten; legt man sich aber vorher die Gleichung so zurecht, dafs sie der Reihe nach vom Kreis beginnend die einzelnen Kegelschnitte ergiebt, so ist dabei die Willkür zu vorherschend und wirkt deshalb hemmend auf die ganze Entwicklung ein. Hier ist die erste Behandlungsweise vorzuziehen, da sie die einfachere und daher für den Anfänger leichter fafsliche ist, auch hat sie noch das für sich, dafs sie mit dem Verfahren übereinstimmt, das Cartesius, der Begründer der analytischen Geometrie, zuerst angewendet hat, nur mufs sie an geeigneten Stellen passend durch die erste Methode ergänzt werden.

Die praktische Anwendbarkeit des Koordinatenbegriffs ist eine so vielseitige und verbreitete, dafs niemand in Verlegenheit sein wird, geeignete Beispiele für die Schule zu finden, sei es dafs er dieselben aus der Statistik, Erdkunde, Physik oder aus anderen Gebieten entnimmt. Überall, wo eine derartige Abhängigkeit zwischen zwei Gröfsen besteht, dafs die Änderung der einen auch die Änderung der anderen zur Folge hat (eine Funktion der anderen ist), wird eine graphische Darstellung mit Hilfe des Koordinatensystems möglich sein. Die einfachste und sich am häufigsten darbietende Beziehung ist die, die veränderliche Gröfse als Funktion der Zeit zu betrachten, doch werden sich namentlich auch in der Physik leicht andere Beziehungen finden lassen. Ich führe nur ein Beispiel an: Die Druckhöhe in communicierenden Röhren eine Funktion der Entfernung vom Druckgefäfs, da dies zur allgemeinen Behandlung der geraden Linie überleiten kann.

Besondere Anwendung findet die graphische Darstellung auch in der Medicin und vor allem in der Physiologie, wobei die Veränderungen, die in verschiedenen Lebewesen vor sich gehen, nicht nur als Funktionen der Zeit, sondern auch als solche von verschiedenen äufseren Eindrücken, als Reizstärke, Druck, Temperatur etc., dargestellt werden können. Wenn auch noch so genaue und umfangreiche Tabellen angefertigt werden, welche die Beziehung verschiedener Gröfsen zu einander ausdrücken sollen, so werden sie doch nicht im Entferntesten erreichen, was hier die graphische Darstellung leistet. So giebt z. B. die Fiebercurve (Lebenswärme als Funktion der Zeit), die jeder Wärter ohne Schwierigkeiten aufzeichnen kann, dem Arzt sofort einen Überblick über den Verlauf der Krankheit; und namentlich wenn durch besondere Zeichen an der Curve die Zeiten angemerkt werden, an denen die Mahlzeiten eingenommen oder irgendwelche ärztliche Anordnungen ausgeführt wurden, so können die Wirkungen sofort festgestellt werden, wenn man den Verlauf der Curve mit der eines gesunden Menschen vergleicht. Bei vielen Vorgängen ist aber die Zeit, in der merkliche Veränderungen stattfinden, eine so kleine, dafs direkte Aufzeichnungen unmöglich werden. Dies hat zur Konstruktion von Registrierapparaten geführt, die fortlaufend selbstthätig die Curven aufzeichnen, und die auch im ausgedehntesten Mafse bei metereologischen Beobachtungen Verwendung finden. Wer sich genauer über diesen Gegenstand unterrichten will, den verweise ich auf „Langendorff, Physiologische Graphik".

Nur selten zwar werden die so aufgezeichneten Curven ein bestimmtes Gesetz erkennen lassen und eine weitere mathematische Behandlung gestatten, wenn aber ein solches Gesetz bekannt ist, nach welchem die Abhängigkeit zweier Gröfsen von einander stattfindet, wenn also zwischen zwei Gröfsen x und y eine Gleichung sich aufstellen läfst $y = f(x)$, so läfst sich aus derselben auf die Gestalt und den Verlauf der Curve, ob sie zu- oder abnimmt, der x Achse die concave oder convexe Seite zukehrt, wenn sie den höchsten Punkt erreicht etc., ein Schlufs ziehen, ohne dafs die Curve gezeichnet zu werden braucht. Hierzu ist aber die Einführung in die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung erforderlich, ein Schritt, der zwar etwas Neues für die Schule zu fordern scheint, in Wirklichkeit aber mehr oder weniger versteckt schon oft gemacht worden ist. Ja, wenn man bedenkt, eine wie mannigfaltige Anwendung die Infinitesimalrechnung zuläfst, uud mit wie einfachen Mitteln sie oft schnell zum Ziele führt, so mufs man sich wundern, dafs dieser Zweig der mathematischen Wissenschaft, dem sie selbst einen so ungeahnten Erfolg zu verdanken hat, der jetzt auf allen Gebieten der Naturwissenschaft eine herrschende Rolle spielt und zu grofsartigen Entdeckungen geführt hat, nicht schon längst eine weitere Beachtung gefunden hat. Der Grund hierzu mag wohl darin liegen, dafs bis in dieses Jahrhundert hinein selbst zwischen den berühmtesten Mathematikern keine Einigkeit in der Deutung der Differentiale bestand, und dafs die Rechnung mit unentlich kleinen Gröfsen, die nachher wieder vernachlässigt werden, in dem Anfänger den Schein erwecken können, als handele es sich hier nur um eine Beinahrechnung und nicht um ebenso absolute Gewifsheit, wie in den übrigen Zweigen der reinen Mathematik. Dieser Schein wird schwinden, wenn man den Stein des Anstofses ganz beseitigt und die Differentialquotienten ohne Benutzung unendlich kleiner Gröfsen ableitet, was sich ohne grofse Schwierigkeit bewerkstelligen läfst. Bevor wir aber hierzu übergehen, wollen wir eine kurze Übersicht über die Geschichte der Infinitesimalrechnung vorausschicken und dann die verschiedenartige Bedeutung und Anwendbarkeit der Differentialquotienten auseinandersetzen.

Drei Probleme waren es, die hauptsächlich zur Entdeckung der Infinitesimalrechnung geführt haben: 1. Die Quadratur, 2. das Tangentenproblem, 3. die Maxima- und Minimarechnung. Das älteste Problem, die Quadratur des Kreises, läfst sich bis in das 17. Jahrhundert v. Chr. verfolgen, wo wir bei den Ägyptern in dem Papyros des Ahmes die Angabe finden, dafs der Inhalt des Kreises gleich dem eines Quadrates sei, dessen Seite der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Durchmesser ist, also $K = \left(2 - \frac{2}{9}\right)^2 r^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$, woraus für π der schon ziemlich brauchbare Werth 3,16 folgt. Etwas später finden wir bei den Babyloniern ein Verfahren, aus dem sich zwar für π der ungenauere Werth 3 ergiebt, das aber insofern von Wichtigkeit ist, als hier zum ersten Male ein in den Kreis eingeschriebenes regelmäſsiges Polygon, nämlich das Sechseck, zur Berechnung des Kreises benutzt wird.

Antiphon, ein Zeitgenosse des Socrates, suchte auf zwei verschiedenen Wegen den Inhalt des Kreises zu bestimmen, indem er erst von dem dem Kreise eingeschriebenem Quadrat, dann von dem eingeschriebenem Dreieck ausging, und durch Anlegung von gleichschenkligen Dreiecken an die Polygonseiten dem Kreise immer näher zu kommen suchte. Noch genauer war das Verfahren von Bryson, der dem eingeschriebenen Polygon noch das umgeschriebene hinzufügte, und dadurch den Grund zu der heute üblichen und für die Infinitesimalrechnung so wichtigen Grenzbestimmung legte. Die Alten sind aber nie so weit gegangen, die krumme Linie als ein Polygon von unendlicher Seitenanzahl zu betrachten, selbst bei der von ihnen angewandten Exhaustionsmethode vergleichen sie nur Teile, die eine endliche vergleichbare Gröſse haben. Zwar hatte schon Aristoteles eine klare Vorstellung von dem Begriff der Stetigkeit, auch wuſste er besonders den Trugschlüssen eines Zeno gegenüber geltend zu machen, daſs ein Unterschied vorhanden ist, unendlich vieles zu zählen und durch unendlich viele continuierlich auf einander folgende Punkte sich bewegen, doch hat er so wenig wie Archimedes, der durch seine Sandrechnung den Begriff des Unendlichgroſsen in die Mathematik einführte, eine allgemeine Methode für die Quadratur aufzustellen vermocht, so mannigfaltig und bewunderungswürdig auch die vielfältigen Flächen und Körperberechnungen namentlich bei Archimedes sind.

Erst Keppler betrachtete den Umfang des Kreises als aus unendlich vielen Punkten zusammengesetzt, von denen ein jeder die Basis eines Dreiecks bildet, dessen Spitze der Mittelpunkt des Kreises ist, und wandte dieselbe Betrachtungsweise auch auf die Kugel an. Durch ihn wurde der Begriff des Unendlichkleinen in die Mathematik eingeführt und, was die Hauptsache ist, auf verschiedenartige Weise bei vielen Problemen mit groſsem Vorteil benutzt. Seine Faſsrechnung machte Keppler zum Vorläufer des Cavalieri, der in seinem Methodus indivisibilium das nach ihm später benannte Princip zur Berechnung von Körpern anwendete, und damit gewisser Maſsen eine Integration oder Summation unendlich vieler unendlich kleiner Gröſsen vornahm. Zugleich trat jetzt auch das Tangentenproblem, die Konstruktion von Tangenten an beliebige Curven, und mit ihm die Maxima- und Minimarechnung in den Vordergrund, besonders, nachdem durch Cartesius eine bequeme und leichte Behandlung der Curven mit Hilfe des Koordinatensystems möglich wurde. Denkt man sich an eine beliebige Curve in einem Punkte P, dessen Koordinaten x, y sind, eine Tangente gezogen, und nennt man den Winkel, den diese Tangente mit der Abscissenachse einschlieſst α, die Subtangente a, denn ist $a = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}$, mithin ist die Subtangente und damit auch die Tangente bekannt, wenn es möglich wird, $\operatorname{tg}\alpha$ durch die Koordinaten des Punktes P auszudrücken. Derartige Erwägungen führten Leibnitz zu der Entdeckung der Infinitesimalrechnung, und zwar auf rein mathematischem Wege, während Newton unabhängig davon zu denselben Ergebnissen gelangte, indem er einerseits von der Quadratur ausging, andererseits die Mechanik zu Hilfe nahm, eine Betrachtungsweise, die vor ihm Roberval und vor allem Barrow angewendet hatte, ohne sie jedoch zu einer allgemeinen Methode zu erheben. Barrow lieſs die Curven entstehen durch Bewegung einer Graden (Directrix) parallel mit sich selbst und eines Punktes auf dieser Graden, und er zeigte, daſs die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangentenlinie mit der Abscissenachse bildet, gleich ist dem

Quotienten aus der Geschwindigkeit des Punktes zu der der Graden, was im wesentlichen mit der Newtonschen Ableitung des Differentialquotienten übereinstimmt. Leibnitz und Newton haben beide das Verdienst, zuerst allgemeine Regeln zur Ableitung des Differentialquotienten angegeben zu haben, während vorher nur einzelne Fälle behandelt wurden, und Leibnitz das besondere Verdienst, zuerst für das Differential und Integral bestimmte Zeichen eingeführt zu haben, wodurch die Rechnung bedeutend vereinfacht wurde. Einen Beweis für die von ihm aufgestellten Regeln konnte Leibnitz aber nicht immer bringen, da er über die Grundlage seiner Rechnung sich selbst nicht klar war. Die Differentiale sollten kleiner sein als jede angebbare Gröſse und doch nicht Null. Null konnten sie nach Leibnitz' Ansicht nicht sein, da mit ihnen dividiert wurde, und eine Division mit Null keinen Sinn hätte, und doch vernachlässigte er diese Gröſsen endlichen gegenüber, ohne einen anderen Grund angeben zu können, als den, daſs die Rechnung zu richtigen Resultaten führte.*)

Genauer und bestimmter in seinen Angaben ist Newton. Nach ihm sind der Differentialquotient und das Integral die Grenzwerte, denen sich der Quotient verschwindender Gröſsen oder die Summe dieser Gröſsen nähern, je kleiner sie selbst werden. Auch kommt bei ihm zuerst das Prinzip der Infinitesimalrechnung in Anwendung, eine Gröſse wachsen zu lassen, um sie dann nach erfolgter Umformung wieder zu annullieren. Es kann hier nicht der Ort sein, das Verfahren dieser beiden groſsen Mathematiker im einzelnen zu verfolgen, ebenso wenig wie die verschiedenen Versuche späterer Mathematiker, besonders eines Euler, Lagrange, Cauchy, eine strengere Begründung der Infinitesimalrechnung herbeizuführen, es soll im folgenden nur gezeigt werden, wie dem Schüler der Begriff des Differential-Quotienten und der Rechnung mit demselben klar und ohne groſse Schwierigkeit dargelegt werden kann, und daſs die mannigfaltige Anwendung, die diese Rechnung gewährt, Zeit und Mühe reichlich belohnt, die darauf angewendet wurden, da sie viele Beweise, namentlich auch aus der Physik, die sonst nur auf umständliche und oft sehr schwer verständliche Weise geführt werden konnten, viel schneller und sicherer erledigt. Ausdrücklich möge noch einmal betont werden, daſs das Verfahren, das hier benutzt wird, nicht etwas absolut Neues in den Schulunterricht einführen soll, sondern daſs es sich im wesentlichen an dasjenige anschlieſst, das Schellbach in ähnlicher Weise vielfach angewendet hat, nur soll dasselbe verallgemeinert werden, damit der Schüler nicht bei jedem Beispiel die Rechnung von neuem auszuführen hat.

I.

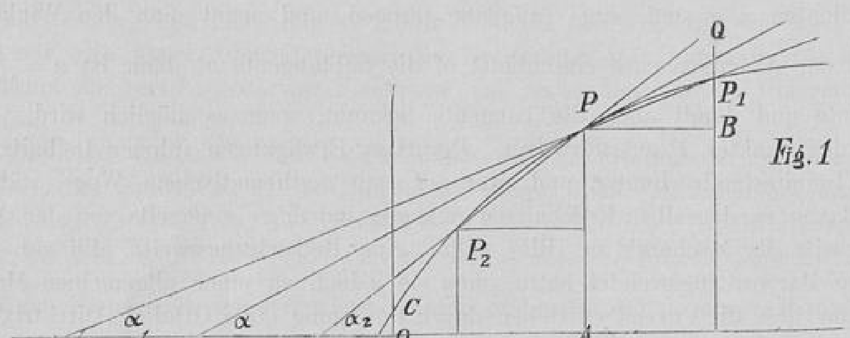


Fig. 1

*) Lüroth, Rektoratsrede. Freiburg 1889.

Es sei $y=f(x)$ die Gleichung irgend einer Curve, $x=OA$ und $y=PA$ die Koordinaten eines Punktes P, x_1, y_1 die eines benachbarten Punktes P_1, für den also $y_1=f(x_1)$. Zieht man dann zur Abscissenachse die Parallele $PB=x_1-x$, dann ist $P_1B=y_1-y=f(x_1)-f(x)$ und $\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$; $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ ist aber $\operatorname{tg} P_1PB=\operatorname{tg}\alpha_1$, wo α_1 der Winkel ist, den die Sekante PP_1 mit der Abscissenachse bildet. Denkt man sich nun diese Sekante um P gedreht, so dafs die Punkte P und P_1 immer näher rücken, so behält die Gleichung $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{y_1-y}{x_1-x}$ stets ihre Gültigkeit, sie wird sie daher auch behalten, wenn P_1 mit P und mithin auch x_1 mit x und y_1 mit y zusammenfallen, d. h. wenn die Sekante zur Tangente wird. Bezeichnen wir den Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet, mit α, so ist also $\operatorname{tg}\alpha=\lim\frac{y_1-y}{x_1-x}$, wo lim (limes) den Grenzwert bezeichnet, den dieser Quotient erreicht, wenn xy mit x_1y_1 zusammenfällt. Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit y' und nennen ihn den Differentialquotienten oder die Ableitung der ursprünglichen Funktion $y=f(x)$, während man das umgekehrte Verfahren, das Aufsuchen der Funktion aus ihrer Ableitung Integration nennt. Es besteht mithin zwischen dem Differentialquotienten und dem Integral eine ähnliche Beziehung, wie zwischen Potenz und Wurzel. Diese Auffassung der Integration als die Umkehrung der Differentiation gestattet es, aus einer abgeleiteten Funktion die ursprüngliche Funktion zu bilden, ohne von einer Summe unendlich vieler unendlich kleiner Gröfsen reden zu müssen.

Genauer läfst sich der Wert von $\operatorname{tg}\alpha$ noch auf folgende Weise bestimmen: Nimmt man einen zweiten Punkt P_2 auf der entgegengesetzten Seite von P an, und bezeichnet den Winkel, den die Sekante PP_2 mit der Abscissenachse bildet mit α_2, so ist $\alpha_2>\alpha>\alpha_1$, mithin $\operatorname{tg}\alpha_2>\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\alpha_1$.

Nun ist aber $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{y_1-y}{x_1-x}$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{y-y_2}{x-x_2}$, daher

$$\frac{y-y_2}{x-x_2}>\operatorname{tg}\alpha>\frac{y_1-y}{x_1-x},$$

$\operatorname{tg}\alpha$ liegt also zwischen den Grenzen $\frac{y-y_2}{x-x_2}$ und $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, diese nähern sich aber immer mehr, je näher x_1y_1 und x_2y_2 dem Punkt xy kommt, und gehen endlich in einander über, wenn die Punkte zusammenfallen, daher ist $\operatorname{tg}\alpha=\lim\frac{y_1-y}{x_1-x}$ für $x=x_1$. Beide Betrachtungsweisen sind dem Schüler nicht fremd. Die Entstehung der Tangente durch Drehung der Sekante wird beim Beweise des Satzes: „Die Tangente ist mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Sehne“ angewendet; ebenso findet sich für die Grenzbestimmung Gelegenheit, auf frühere Sätze hinzuweisen, sei es auf die Beweise der Proportionalität oder der Flächenberechnung für incommensurable Gröfsen, oder auf die Ableitung der Zahl π, die Fallgesetze etc. Das einzig Neue ist der Umstand, dafs der Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$ unter der Form $\frac{0}{0}$ auftritt, und da $\operatorname{tg}\alpha$ fortwährend mit α seinen Wert ändert, so mufs der Quotient $\frac{0}{0}$ alle möglichen Werte annehmen können, für einen bestimmten Fall aber immer einen bestimmten Wert. Die Möglichkeit hiervon kann dem Schüler an einigen einfachen Beispielen klar gemacht werden.

Es ist $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$. Hieraus erhält man für $b=a$

$$\frac{0}{0}=2a$$

$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$, woraus für $b=a$

$$\frac{0}{0}=3a^2$$

$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}$ und für $x=1$

$$\frac{0}{0}=\frac{3}{2}.$$

Ein anderes Beispiel, das später Anwendung finden wird, ist die Ermittelung des Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$.

Es ist $\operatorname{tg} x > x > \sin x$. Dividiert man nun $\sin x$ durch jede dieser drei Gröfsen, so ergiebt sich:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

$\frac{\sin x}{x}$ liegt also zwischen den Grenzen 1 und $\cos x$, von denen die erste fest bleibt, während die zweite sich ihr immer mehr nähert, je kleiner x wird, um endlich für $x=0$ mit ihr zusammenzufallen. Daraus folgt, dafs auch $\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$ den Wert 1 annimmt.

Der Quotient oder das geometrische Verhältnis $\frac{0}{0}$ ist also an und für sich etwas Unbestimmtes, es erhält aber einen bestimmten Wert, sobald man weifs, wie die Nullen entstanden sind. Um diese verschiedene Entstehungsweise zu kennzeichnen, schreibt man für den Differentialquotienten $\lim \frac{y_1-y}{x_1-x}$ auch $\frac{dy}{dx}$, wobei dy die aus y, dx die aus x entstandene Null bedeutet; dy kann durch dx nicht ersetzt werden, wohl aber dx durch dx, denn da $\frac{x_1-x}{x_1-x}=1$ für alle Werte von x, so bleibt es auch 1, wenn x_1 und x zusammenfällt, d. h. $\frac{dx}{dx}=1$, ebenso $\frac{3\,dx}{dx}=3$, aber $\frac{dy}{dx}$ ist unbestimmt, solange man nicht den Zusammenhang von dy und dx kennt. Kennt man aber die Entstehungsweise von dy und dx, so kann man mit ihnen wie mit ganzen Zahlen rechnen, während sonst eine Division mit Null nicht erlaubt ist. Man kann jedoch von dieser Bezeichnungsweise ganz absehen, wenn man sich auf einfache Beispiele beschränkt, für diesen Fall genügt die Bezeichnung y' für den Differentialquotient. Nur bei einzelnen Anwendungen soll der Kürze wegen die andere Bezeichnungsweise gewählt werden.

Ist also $y=f(x)$ die Gleichung einer Curve, so ist $y'=\lim \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=f'(x)$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangentenlinie mit der x-Achse nach der positiven Seite bildet. Hierdurch ist nicht allein das Mittel gegeben, die Tangente und Subtangente einer Curve zu finden, sondern wir können uns auch aus dem Werte von y' eine Vorstellung von dem Verlauf der Curve machen. Solange y' positiv, steigt die Curve, ist y' negativ, so fällt sie, für $y'=0$ erreicht sie ihren höchsten oder tiefsten Punkt. Dieser letzte Umstand wiederum kann zur Lösung der Aufgaben über Maxima und Minima verwendet werden. Auch läfst sich sehr einfach die Gleichung der Tangente an eine beliebige Curve ableiten. Die Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt $x_1 y_1$ geht, ist $y-y_1=a(x-x_1)$, wo a die trigonometrische Tangente des Winkels, den diese Gerade mit der x-Achse bildet. Soll die Gerade Tangente an die Curve $y=f(x)$ sein, so ist $a=y_1'$, mithin die Gleichung der Tangente: $y-y_1=y_1'(x-x_1)$.

II.

Ist $y=f(x)$ das Gesetz, nach dem sich ein Punkt auf einer Geraden bewegt, wobei y angiebt, wie weit der Punkt P nach x Sekunden von einem als Ausgangspunkt gewählten Punkt O entfernt ist, und ist nach x_1 Sekunden die Entfernung y_1, dann hat der Punkt in x_1-x Sekunden den Weg y_1-y zurückgelegt, seine Geschwindigkeit wäre also $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, wenn die Geschwindigkeit constant bliebe, ändert sich dagegen die Geschwindigkeit, so kann man nur von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick sprechen. Will man daher die Geschwindigkeit gerade nach x Sekunden ermitteln, so läfst man x_1 immer näher an x, und damit auch y_1 immer näher an y heranrücken, bis endlich die Punkte zusammenfallen, und man erhält dann für die Geschwindigkeit im Punkte P wieder den Grenzwert von $\frac{y_1-y}{x_1-x}$, wenn $x_1=x$.

Genauer ist auch hier ganz ähnlich wie bei I. folgende Betrachtung:

Unter der Geschwindigkeit in einem Augenblicke versteht man den Weg, den der Körper in der nächsten Sekunde zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit während dieser Zeit unverändert bliebe. Liegt nun P zwischen den Punkten P_2 und P_1, und ist die Geschwindigkeit von P_2 nach P_1 hin wachsend, sind ferner $OP_1=y_1$ und $OP_2=y_2$ die Entfernungen vom Nullpunkte nach x_1 resp. x_2 Sekunden und ist $x_1 > x_2$, so ist der Weg $y-y_2$, den der Punkt in $x-x_2$ Sekunden zurücklegt, offenbar kleiner, und ebenso der Weg y_1-y, den er in x_1-x Sekunden durchläuft, gröfser, als derjenige, den er zurücklegen würde, wenn er sich während dieser Zeitabschnitte mit der Geschwindigkeit y' bewegen würde, die er im Punkte P hat,

$$\text{d. h. } y-y_2 < y'(x-x_2) \text{ und } y_1-y > y'(x_1-x),$$

$$\text{mithin } \frac{y-y_2}{x-x_2} < y' < \frac{y_1-y}{x_1-x}.$$

Die beiden Grenzen, zwischen denen y' liegt, nähern sich aber immer mehr, je näher P_1 und P_2 dem Punkte P kommt, sie werden gleich, wenn die Punkte zusammenfallen, folglich ist

$$y'=\lim \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ für } x=x_1.$$

Zu demselben Resultat kommt man natürlich auch, wenn die Geschwindigkeit abnimmt.

Umgekehrt kann man dann auch aus der Ableitung auf die ursprüngliche Funktion, d. h. aus der Geschwindigkeit y' auf den Weg y schliefsen.

Die wichtigsten Anwendungen von dieser Beziehung zwischen dem Differentialquotienten und der Geschwindigkeit eines Punktes wird naturgemäfs die Mechanik bieten, doch kann dieselbe auch zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung dienen.

Besteht irgend eine Gleichung zwischen einer Unbekannten, und hat man dieselbe auf Null reduciert, so dafs sie die Form annimmt $f(x) = 0$, so setze man zunächst $y = f(x)$, und nehme an, es bewege sich ein Punkt nach diesem Gesetze, wobei wieder x die Zeit und y die Entfernung vom Nullpunkte sein möge, dann handelt es sich um die Frage, für welchen Wert von x ist $y = 0$, d. h. nach welcher Zeit wird der Punkt durch den Nullpunkt gehen. Man wählt nun für x einen Wert x_1, für den der Punkt dem Nullpunkt möglichst nahe kommt, die Entfernung sei y_1, so ist nur noch zu bestimmen, welche Zeit der Punkt braucht, um diese Strecke y_1 zurückzulegen. Zu diesem Zweck berechnet man die Geschwindigkeit des Punktes y', dann ist annähernd die gewünschte Zeit $\frac{y_1}{y'}$. Dieser Wert ist zu x_1 hinzuzufügen oder davon abzuziehen, je nachdem sich der Punkt vor oder hinter dem Anfangspunkt befindet. Bei mehrfacher Wiederholung dieses Verfahrens kann man jeden Grad von Genauigkeit erzielen.

III.

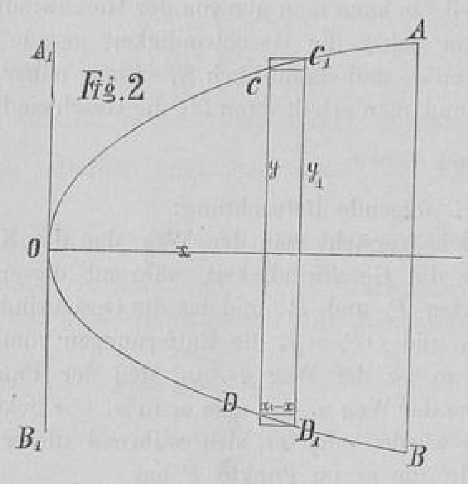


Fig. 2

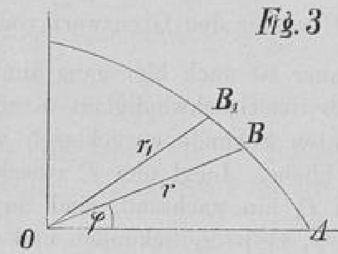


Fig. 3

a) Die Fläche AOB werde begrenzt von der Curve AOB und der Graden AB, und es sei $A_1 B_1$ die durch O parallel zu AB gelegte Tangente. Denkt man sich nun $A_1 B_1$ parallel mit sich selbst verschoben, so möge das Stück der Parallelen, welches von der Curve abgeschnitten wird $CD = y$ eine Funktion der Entfernung von der Graden $A_1 B_1$ sein. Bezeichnet man diese Entfernung mit x, so sei $y = f(x)$ und ebenso $C_1 D_1 = y_1 = f(x_1)$. Ist ferner die Fläche $OCD = z$, $OC_1 D_1 = z_1$, und die Curve in der Nähe von C im Wachsen begriffen, so ist $z_1 - z$ offenbar gröfser als das Rechteck über y mit der Höhe $x_1 - x$ und kleiner als das Rechteck über y_1 und derselben Höhe.

Mithin
$$y(x_1 - x) < z_1 - z < y_1(x_1 - x)$$
oder
$$y < \frac{z_1 - z}{x_1 - x} < y'.$$

Hieraus folgt $$z' = \lim \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = y.$$

Umgekehrt wird man aus dem Werte von $z' = y = f(x)$ auf den Inhalt der Fläche z schliefsen können.

b) Ist s (Fig. 3) der Sektor OAB, $s_1 = OAB_1$ und $OB(r) > OB_1(r_1)$, $\angle AOB = \varphi$, $AOB_1 = \varphi_1$, dann ist $s_1 - s > \frac{r_1^2}{2} \sin(\varphi_1 - \varphi)$ und $s_1 - s < \frac{r^2}{2} \sin(\varphi_1 - \varphi)$, folglich

$$\frac{r_1^2}{2} \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\varphi_1 - \varphi} < \frac{s_1 - s}{\varphi_1 - \varphi} < \frac{r^2}{2} \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\varphi_1 - \varphi}.$$

Da nun für $\varphi_1 = \varphi$, $r_1 = r$ und $\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\varphi_1 - \varphi} = 1$ wird, so ist

$$\lim \frac{s_1 - s}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r_2}{2}.$$

IV.

Das gleiche Verfahren wie in IIIa läfst sich auch auf einen Körper anwenden, der sich zwischen 2 parallele Ebenen legen läfst, wenn der parallel zu diesen Ebenen gelegte Querschnitt sich als eine Funktion der Entfernung von einer dieser Ebenen ausdrücken läfst. Auch dann ist $z' = y = f(x)$, nur bedeutet hier y den Querschnitt und z den Körper von der Anfangsebene bis zu diesem Querschnitt.

Wir wollen uns vorläufig auf die hier angeführten Fälle beschränken, und um zu den Anwendungen schreiten zu können, die Differentialquotienten der einfachsten Funktionen ableiten.

Wir haben gesehen, dafs der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ $\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ für $x_1 = x$ ist. Wir bezeichnen denselben mit y' und umgekehrt $\lim \frac{x_1 - x}{y_1 - y}$ mit x', so dafs also $x' = \frac{1}{y'}$, was sich vorteilhaft bei einzelnen Ableitungen benutzen läfst.

1. $$y = x + a, \quad y_1 = x_1 + a, \quad y_1 - y = x_1 - x, \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 1.$$

Dieser Quotient ist stets gleich 1, auch wenn x_1 immer näher an x heranrückt, er wird es daher auch bleiben für den Grenzfall $x_1 = x$. Es ist also $y' = 1$. Ebenso ergiebt sich aus $y = -x + a$, $y' = -1$. Mithin auch umgekehrt:

Wenn $y' = \pm 1$, ist $y = \pm x + a$.

Man ersieht hieraus, dafs bei der Ableitung ein constanter Summand verschwindet, daher kann auch umgekehrt bei der Bestimmung der Funktion aus der Ableitung stets eine constante Gröfse hinzugefügt werden. Diese Constante ist der Werth von y, den man erhält, wenn man $x = o$ setzt, sie wird also selbst gleich Null sein, wenn für $x = o$ auch $y = o$ ist, was bei einfachen Anwendungen durch passende Wahl des Anfangspunktes meist leicht bewirkt werden kann. In den folgenden Beispielen soll diese constante Gröfse bei der Umkehrung fortgelassen werden.

2. Aus $y = ax$ ergiebt sich auf dieselbe Weise $y' = a$ und umgekehrt.

3. $$y=\frac{a}{x},\ y_1=\frac{a}{x_1},\ y_1-y=\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x}=-a\frac{(x_1-x)}{x_1 x}$$
$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=-\frac{a}{x_1 x},\ y'=-\frac{a}{x^2}.$$

Also umgekehrt: ist $y'=-\frac{a}{x^2}$, so ist $y=\frac{a}{x}$.

Ebenso wie aus den beiden letzten Beispielen, folgt auch allgemein für $y=af(x)$, $y'=af'(x)$, d. h. ein constanter Faktor kommt bei der Ableitung unverändert wieder vor.

4. $$y=x^n,\ y_1=x_1^n,\ y_1-y=x_1^n-x^n,\ \frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1^n-x^n}{x_1-x}$$
$$=x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x+x_1^{n-3}x^2+\ldots+x^{n-1}$$
$$y'=nx^{n-1}$$

5. Aus 4 folgt $x=\sqrt[n]{y}$ und $x'=\frac{1}{y'}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$.

Vertauscht man nun x mit y, so ergiebt sich ebenso aus $y=\sqrt[n]{x}$, $y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ oder aus $y=x^{\frac{1}{n}}$, $y'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

6. $$y=\frac{1}{x^n},\quad y_1=\frac{1}{x_1^n},\quad y_1-y=-\frac{x_1^n-x^n}{x_1^n x^n},$$
$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=-\frac{x_1^n-x^n}{(x_1-x)x_1^n x^n},\ \text{woraus}\ y'=-\frac{nx^{n-1}}{x^{nn}}=-\frac{n}{x^{n+1}}$$
oder aus $y=x^{-n}$ folgt $y'=-nx^{n-1}$.

Die unter 4. angegebene Regel gilt daher allgemein, auch wenn n negativ oder gebrochen ist. Es folgt daher auch umgekehrt aus $y'=nx^{n-1}$ stets $y=x^n$, d. h. man erhält aus der abgeleiteten Funktion die ursprüngliche, wenn man den Exponenten von x um 1 erhöht und den Coefficienten von x durch den so erhaltenen Exponenten dividiert. Wendet man diese Regel auf $y'=x^n$ an, so erhält man $y=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

7. $$y=\sin x,\quad y_1=\sin x_1,\quad \frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\sin\frac{x_1-x}{2}}{\frac{x_1-x}{2}}\cos\frac{x_1+x}{2}$$

Da nun $\lim\frac{\sin\frac{x_1-x}{2}}{\frac{x_1-x}{2}}=1$, so ist $y'=\cos x$.

Aus $y'=\cos x$ erhält man daher $y=\sin x$.

8. Aus 7. ergiebt sich ferner $x=\operatorname{arc}\sin y$ und $x'=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, und wenn x und y vertauscht werden, folgt aus $y=\operatorname{arc}\sin x$, $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und umgekehrt.

9. $$y = \cos x, \quad \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{\sin\frac{x_1 - x}{2}}{\frac{x_1 - x}{2}} \sin\frac{x_1 + x}{2}, \quad y' = -\sin x.$$

Umgekehrt ergiebt sich aus $y' = \sin x$, $y = -\cos x$.

10. Aus 9. folgt $x = \operatorname{arc\,cos} y$, $x_1 = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$, und wenn $y = \operatorname{arc\,cos} x$, ist $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ und umgekehrt.

Bevor wir zu den folgenden Ableitungen übergehen, sollen erst die allgemeinen Regeln für die Behandlung von Summen, Produkten und Quotienten mehrerer Funktionen aufgestellt werden.

11. Ist $y = f(x) + \varphi(x) + \psi(x)$ etc. und bezeichnet man der Kürze wegen die einzelnen Funktionen mit u, v, w etc., und die dem Werte x_1 entsprechenden Werte dieser Funktionen mit u_1, v_1, $w_1 \ldots$, während y in y_1 übergeht, denn ist $y_1 - y = u_1 - u + v_1 - v + w_1 - w \ldots$,

$$\text{mithin } \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{x_1 - x}{v_1 - v} + \frac{w_1 - w}{x_1 - x} \ldots$$

$$y' = u' + v' + w' \ldots$$

12. $$y = uv, \quad y_1 - y = u_1 v_1 - uv = u_1(v_1 - v) + v(u_1 - u)$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = u_1 \frac{v_1 - v}{x_1 - x} + v \frac{u_1 - u}{x_1 - x}; \quad y' = uv' + vu'.$$

13. $$y = \frac{u}{v}, \quad y_1 - y = \frac{u_1 v - v_1 u}{v \cdot v_1} = \frac{v(u_1 - u) - u(v_1 - v)}{v \cdot v_1}$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{v \frac{u_1 - u}{x_1 - x} - u \frac{v_1 - v}{x_1 - x}}{v \cdot v}, \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

14. $$y = f(u), \text{ wo } u = \varphi(x)$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1) - f(u)}{x_1 - x} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$

$$y' = f'(u) u'.$$

Wenden wir die letzte Regel z. B. auf $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ an, worin $u = a^2 - x^2$, $u' = -2x$, so ist $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

15. $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, unter Anwendung der Regel 13. erhält man $y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$, mithin für $x = \operatorname{arctg}\, y$, $x' = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$, und wenn $y = \operatorname{arctg} x$, $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ und umgekehrt.

16. $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $y' = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Für $x = \operatorname{arccot} y$ erhält man $x' = -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + \cot^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}$, ist aber $y = \operatorname{arccot} x$, dann ist $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$ und umgekehrt.

17. $$y = a^x;\ \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a^{x_1} - a^x}{x_1 - x} = a^x \frac{(a^{x_1 - x} - 1)}{x_1 - x}.$$

Da a^x sich nicht ändert, wenn x_1 mit x zusammenfällt, so handelt es sich nur um den Grenzwert von $\frac{a^{x_1 - x} - 1}{x_1 - x.}$.

Setzt man hierin a^n statt a, so erhält man:

$$\frac{a^{n(x_1 - x)} - 1}{x_1 - x} = n\left[\frac{a^{n(x_1 - x)} - 1}{n(x_1 - x)}\right].$$

Nun ist aber der Grenzwert des Ausdruckes in der eckigen Klammer derselbe, wie $\lim \frac{a^{(x_1 - x)} - 1}{x_1 - x}$, daraus geht hervor, dafs dieser Grenzwert n mal so grofs wird, wenn man a statt a^n setzt. Es kann daher $\lim \frac{a^{(x_1 - x)} - 1}{x_1 - x}$ alle möglichen Werte annehmen, je nach der Wahl von a, mithin mufs es auch einen Wert von a geben, für den dieser Grenzwert $= 1$ wird. Wir bezeichnen diesen Wert von a mit e, so dafs $\lim \frac{e^{x_1 - x} - 1}{x_1 - x} = 1$. Diese Gröfse e, die nachher bestimmt werden soll, ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Ist also z. B. $a = e^b$, so ist $b = la$ und $\lim \frac{a^{x_1 - x} - 1}{x_1 - x} = b\,\frac{e^{b(x_1 - x)} - 1}{b(x_1 - x)} = b = la$.

Mithin $$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = y' = a^x\,la.$$

18. Aus 17 folgt ferner $x = \log^a y$, $x' = \frac{1}{a^x la} = \frac{1}{y\,la}$.

Ist daher $y = \log^a x$, so ist $y' = \frac{1}{x\,la}$.

Für $y = e^x$ ergiebt sich auch $y' = e^x$, und für $y = lx$ $y' = \frac{1}{x}$ und umgekehrt.

e^x läfst sich sehr leicht nach der Methode der unbestimmten Coefficienten in eine Reihe entwickeln.

Es sei $y = e^x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

dann ist $y' = e^x = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \ldots$

mithin, da für $x = 0$ aus der ersten Gleichung $a = 1$ folgt,

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + \ldots$$

Folglich ist $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2!}$, $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3!}$ etc.

und $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

also $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2{,}718281828\ldots$

Auf dieselbe Weise lassen sich auch die Reihen für $\sin x$, $\cos x$ etc. ableiten. Auch der binomische Satz ergiebt sich mit Hilfe dieses Verfahrens auf sehr einfache Weise:

Ist $y = (1 + x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

so folgt zunächst für $x = 0$ $a_0 = 1$. Ferner ist:

$$y' = n(1 + x)^{n-1} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + \ldots$$

Multipliziert man mit $\frac{1+x}{n}$, so erhält man:

$$(1+x)^n = \frac{a_1}{n} + \frac{2a_2 x}{n} + \frac{3a_3 x^2}{n} + \frac{4a_4 x^3}{n} + \ldots$$
$$+ \frac{a_1 x}{n} + \frac{2a_2 x^2}{n} + \frac{3a_3 x^3}{n} + \ldots$$

Mithin ist $\frac{a_1}{n} = a_0 = 1;\ a_1 = n$

$$\frac{2a_2}{n} + \frac{a_1}{n} = a_1;\ a_2 = \frac{a_1(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$$
$$\frac{3a_3}{n} + \frac{2a_2}{n} = a_2;\ a_3 = \frac{a_2(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

Allgemein $a_s = \frac{a_{s-1}(n-s+1)}{s} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{s!}$

Man erhält also:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)x^s}{s!} + \ldots$$

Da nun aus $y = x^n$, $y' = n x^{n-1}$ folgte, auch wenn n negativ oder gebrochen war, so hat diese Herleitung auch für negative und gebrochene Exponenten Giltigkeit. Ist n eine ganze Zahl, dann schreitet die Reihe bis x^n fort, da für alle folgenden Potenzen von x der Coefficient gleich Null wird. Ist n negativ oder gebrochen, so wird die Reihe unendlich, für welchen Fall noch die Convergenzbedingung zu untersuchen wäre.

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multipliciert beide Seiten der Gleichung mit a^n, so ergiebt sich:

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{s!} a^{n-s} b^s + \ldots$$

Da die Ableitungen im allgemeinen selbst wieder eine Funktion von x sind, so läſst sich aus ihnen auf dieselbe Weise wieder eine Ableitung bilden. Ist nämlich $y' = f'(x)$ und sind y_1' und x_1' entsprechende Werte, so ist $\lim \frac{y_1' - y'}{x_1 - x} = \lim \frac{f'(x_1) - f'(x)}{x_1 - x}$, wofür wir der Kürze wegen schreiben

$$y'' = f''(x).$$

Wird z. B. durch $y = f(x)$ die Bewegung eines Punktes dargestellt, dann ist $\frac{y_1' - y'}{x_1 - x}$ die Zunahme an Geschwindigkeit in einer Sekunde oder die Beschleunigung, wenn diese Zunahme constant ist, und $\lim \frac{y_1' - y'}{x_1 - x} = y''$ die Beschleunigung nach x Sekunden bei veränderlicher Beschleunigung.

Um eine Anwendung der 2. Ableitung und zugleich der in 11. und 12. angeführten Regeln zu geben, gehen wir von einem Ausdruck aus, der später Verwendung finden soll.

Es sei $xy' - yx' = c$, worin x und y Funktionen von t sein mögen und $y' = \lim \frac{y_1 - y}{t_1 - t}$, $x' = \lim \frac{x_1 - x}{t_1 - t}$ für $t_1 = t$.

Dann ist $x'y' + xy'' - y'x' - yx'' = 0$ oder $xy'' - yx'' = 0$.

Mithin auch umgekehrt, wenn $xy'' - yx'' = 0$, so ist $xy' - yx' = c$.

Die bisher angeführten Regeln bieten ein hinreichendes Material zur praktischen Behandlung der in I.—IV. angeführten Fälle, es soll nun im folgenden für jeden derselben das Verfahren an einigen Beispielen gezeigt werden, wobei wir die entsprechenden Abschnitte mit denselben Ziffern I.—IV. bezeichnen wollen.

I.

Die Benutzung der Differentialquotienten zur Bestimmung des Verlaufs einer Curve ist oben angedeutet und braucht wohl nicht weiter erörtert zu werden; wie weit hierbei die 2. Differentialquotienten hinzuzuziehen sind zur Bestimmung der Lage der Curven, von Wendepunkten etc. wird von Zeit und Umständen abhängen. Es sollen nur zwei Aufgaben aus der Maxima- und Minimarechnung angeführt werden, die für die Physik von besonderer Wichtigkeit sind.

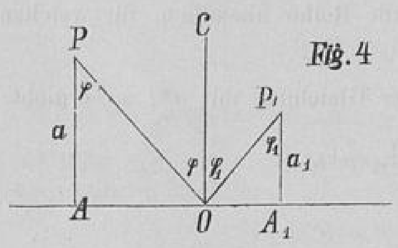


Fig. 4

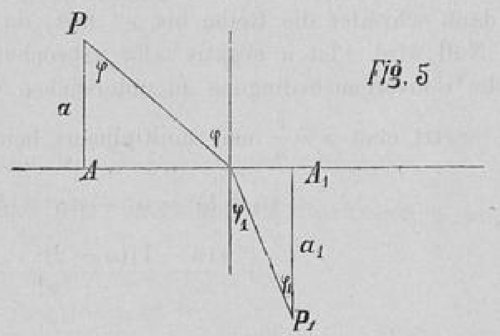


Fig. 5

Gegeben eine Gerade und aufserhalb derselben 2 Punkte P und P_1 (Fig. 4), gesucht ein Punkt O auf der Geraden, so dafs die Summe der Entfernungen dieses Punktes von den beiden gegebenen ein Minimum wird.

Es seien die Entfernungen der Punkte P und P_1 von der Geraden $PA = a$, $P_1A_1 = a_1$, $AA_1 = b$ und $AO = x$, mithin $OA_1 = b - x$, dann ist $OP = \sqrt{a^2 + x^2}$, $OP_1 = \sqrt{a_1{}^2 + (b-x)^2}$.

Die Summe der Entfernung ist $y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a_1{}^2 + (b-x)^2}$ oder $y = \sqrt{u} + \sqrt{v}$, wo $u = a^2 + x^2$, $v = a_1{}^2 + (b-x)^2$. Denkt man sich nun, es stelle die Gleichung $y = \sqrt{u} + \sqrt{v}$ eine Curve dar, so handelt es sich um die Frage, für welchen Wert von x wird die Ordinate ein Minimum? Ist y ein Minimum, so ist die in dem Endpunkt von y an die Curve gezogene Tangente der xAchse parallel, und daher der Winkel, den sie mit der Abscissenachse bildet und seine trigonometrische Tangente gleich Null; d. h. $y' = 0$.

Es ist aber $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,u' + \frac{1}{2\sqrt{v}}\,v'$ und $u' = 2x$, $v' = -2(b-x)$ also $y' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{a_1{}^2+(b-x)^2}}$ oder, wenn man den Winkel $APO = POC$ mit φ und $A_1P_1O = P_1OC$ mit φ_1 bezeichnet, wo OC das in O errichtete Lot ist, so wird für das Minimum

$$y' = \sin\varphi - \sin\varphi_1 = 0 \text{ oder } \sin\varphi = \sin\varphi_1,\ \varphi = \varphi_1.$$

Bewegt sich ein Punkt von P nach der Graden und von dort nach P_1 mit der constanten Geschwindigkeit c, so wird der kürzeste Weg POP_1 auch in der kürzesten Zeit zurückgelegt, was für den Stofs elastischer Körper, sowie für das Reflexionsgesetz von grofser Bedeutung ist.

Befinden sich die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten der Graden (Fig. 5), und bewegt sich der Punkt auf der einen Seite der Graden mit der Geschwindigkeit c, auf der anderen mit der Geschwindigkeit c_1, dann wird der Weg, den der Punkt in der kürzesten Zeit zurücklegt, um von P nach P_1 zu gelangen, nicht die Grade PP_1 sein, sondern etwa die gebrochene Linie POP_1. Die Bezeichnungen seien dieselben, wie vorher, und es werde PO in in der Zeit t, P_1O in der Zeit t_1 zurückgelegt, dann ist $PO = ct = \sqrt{a^2+x^2}$, $P_1O = c_1t_1 = \sqrt{a_1{}^2+(b-x)^2}$,

$$\text{mithin } y = t + t_1 = \frac{1}{c}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{c_1}\sqrt{a_1{}^2+(b-x)^2}$$

$$y' = \frac{x}{c\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{c_1\sqrt{a_1{}^2+(b-x)^2}} = \frac{\sin\varphi}{c} = \frac{\sin\varphi_1}{c_1}.$$

Woraus man für das Minimum das Brechungsgesetz erhält $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1} = \frac{c}{c_1}$, oder wenn $\frac{c}{c_1} = n$ gesetzt wird:

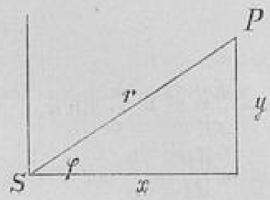
$$\sin\varphi = n\sin\varphi_1.$$

II.

Unter den zahlreichen Anwendungen, welche die Mechanik bietet, mache ich nur darauf aufmerksam, dafs sich die Fallgesetze unmittelbar mit Hilfe der aufgestellten Regeln ableiten lassen. Aus $y'' = g$, folgt die Geschwindigkeit $y' = gt$ und der Weg $y = \frac{1}{2}gt^2$.

Ausführlicher sollen nur die Kepplerschen Gesetze und das Pendelgesetz behandelt werden, da namentlich diese beiden vielfach in Physikbüchern und Zeitschriften zum Gegenstand sogenannter elementarer Behandlung gemacht worden sind, aber teils nur zu Scheinbeweisen geführt haben, teils an die Vorstellungskraft der Schüler nach meiner Ansicht viel gröfsere Anforderungen stellen, als dies bei Benutzung der Differentialrechnung der Fall ist. Bei der Ableitung der Kepplerschen Gesetze benutze ich im wesentlichen das von Jacobi angegebene Verfahren.

Fig. 6



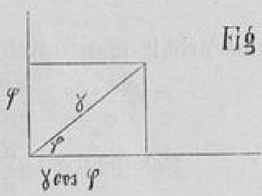


Fig 7

Es stelle P (Fig. 6) den Ort eines Planeten und S den der Sonne dar, die Koordinaten des Punktes P, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt S, seien x und y, $PS = r$ bilde mit der Abscissenachse den Winkel φ, dann ist

1. $$x = r \cos\varphi,\ y = r \sin\varphi.$$

Ist nun γ die Anziehungskraft oder die Beschleunigung, die der Punkt P in jedem Augenblick nach S zu erfährt, so ist nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz

2. $$\gamma = \frac{k}{r^2},$$

und die Componenten dieser Kraft oder die Beschleunigungen in der Richtung der x- und y-Achse $\gamma \cos\varphi$ und $\gamma \sin\varphi$, oder wenn man die Richtung von S nach P als positiv bezeichnet, $-\gamma\cos\varphi$ und $-\gamma\sin\varphi$. Setzt man für γ, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Werte aus 1. und 2. ein, so erhält man für diese Componenten $-\frac{kx}{r^3}$ und $-\frac{ky}{r^3}$. Es sind nun sowohl r und φ als auch x und y mit der Zeit veränderlich, d. h. Funktionen der Zeit. Es soll daher, um Verwechslungen zu vermeiden, die oben angegebene Schreibweise für die Differentialquotienten benutzt werden. Die Geschwindigkeit in der Richtung der x-Achse ist $x' = \frac{dx}{dt}$, in der Richtung der y-Achse $y' = \frac{dy}{dt}$ und die Beschleunigungen in der Richtung dieser Achsen $x'' = \frac{dx'}{dt}$, $y'' = \frac{dy'}{dt}$. Man erhält daher die beiden Gleichungen:

3. $$\frac{dx'}{dt} = -\frac{kx}{r^3},\ \frac{dy'}{dt} = -\frac{ky}{r^3}, \text{ mithin } x\frac{dy'}{dt} = y\frac{dx'}{dt} \text{ oder } x\frac{dy'}{dt} - y\frac{dx'}{dt} = 0.$$

Hieraus folgt, wie früher gezeigt wurde:

4. $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c.$$

Aus 1. ergiebt sich aber unter Anwendung der Regel für die Differentiation eines Produktes zweier Funktionen:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{dr}{dt}$$
$$y\frac{dx}{dt} = -r^2\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} + r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt}$$
$$x\frac{dy}{dt} = r^2\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} + r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt}$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = c \text{ oder}$$

5. $$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}.$$

Hieraus erhält man durch Division mit 3.:

$$\frac{dx'}{d\varphi} = -\frac{kx}{cr} = -\frac{k}{c}\cos\varphi,\quad \frac{dy'}{d\varphi} = -\frac{ky}{cr} = -\frac{k}{c}\sin\varphi.$$

Folglich $x' = \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{c}\sin\varphi + c_1,\ y' = \frac{dy}{dt} = \frac{k}{c}\cos\varphi + c_2.$

Setzt man diese Werte in 4. ein und $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so erhält man:

$$r\cos\varphi\left(\frac{k}{c}\cos\varphi + c_2\right) - r\sin\varphi\left(-\frac{k}{c}\sin\varphi + c_1\right) = c$$

$$\frac{k}{c}\,r + c_2\,r\cos\varphi - c_1\,r\sin\varphi = c.$$

6. $$r = \frac{c}{\frac{k}{c} + c_2\cos\varphi - c_1\sin\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten, wenn der Brennpunkt Koordinatenanfangspunkt, und da die Planeten die Sonne umkreisen, mufs es eine Ellipse sein.

Damit ist das erste Kepplersche Gesetz bewiesen.

Wir wollen nun noch die Constanten bestimmen und die Gleichung auf die gebräuchliche Form $r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ bringen.

Rechnet man φ von der grofsen Hauptachse, dann ist für $\varphi = 0$ $x' = 0$, und da $x' = -\frac{k}{c}\sin\varphi + c_1$ auch $c_1 = 0$.

Für $\varphi = 0$ ist $r = a + e$, für $\varphi = \pi$ ist $r = a - e$, setzt man dies in die Gleichung 6. ein, so erhält man:

$$a + e = \frac{c}{\frac{k}{c} + c_2}, \quad a - e = \frac{c}{\frac{k}{c} - c_2} \quad \text{mithin:}$$

$$\frac{k}{c} + c_2 = \frac{c}{a+e}, \quad \frac{k}{c} - c_2 = \frac{c}{a-e}, \quad \frac{2k}{c} = \frac{2ac}{a^2 - e^2}.$$

$$\frac{k}{c} = \frac{ac}{b^2}, \quad c^2 = \frac{b^2 k}{a}.$$

$$c_2 = \frac{k}{c} - \frac{c}{a-e} = \frac{ac}{b^2} - \frac{c(a+e)}{b^2} = -\frac{ce}{b^2} \text{ und } cc_2 = -\frac{ke}{a}.$$

$$\text{Nun ist aber } r = \frac{c^2}{k + cc_2\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2 k}{a}}{k - \frac{ke}{a}\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi}$$

$$\text{und da } \frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{e}{a} = \varepsilon$$

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Es war $r^2\frac{d\varphi}{dt} = c$, mithin mit Benutzung von III b. $\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{k}{a}}$, folglich $s = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}\,t + c_3$.

Da für $t = 0$ auch $s = 0$, ist $c_3 = 0$, also $s = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}\,t$, ebenso $s_1 = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}\,t_1$, daher $s : s_1 = t : t_1$, d. h.:

Die Radienvectoren beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. (2. Kepplersches Gesetz.)

Ist T die ganze Umlaufszeit, dann wird $s = ab\pi$, $\quad ab\pi = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{k}{a}}\,T$, $\quad T = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{k}}$, $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k}$, ebenso wird $T_1{}^2 = \frac{4\pi^2 a_1{}^3}{k}$ und $T^2 : T_1{}^2 = a^3 : a_1{}^3$.

Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der grofsen Halbachsen. (3. Kepplersches Gesetz.)

Ableitung des Pendelgesetzes.

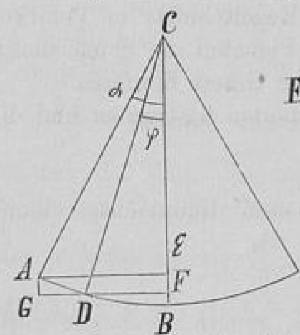


Fig. 8

Das Pendel, dessen Länge $BC = l$, sei um den Winkel $ACB = \alpha$ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt; nach t Sekunden möge es die Lage CD annehmen. Es sei $\angle\ DCB = \varphi$; ferner ziehe man AE und $DF \perp BC$ und $AG \perp GF$, dann ist nach einer Folgerung aus dem Gesetz für die schiefe Ebene die Geschwindigkeit in D gerade so grofs, als wenn der Körper von A nach G senkrecht herabfällt, diese Geschwindigkeit ist aber $v = \sqrt{2g\,EF}$, da $EF = AG$. Nun ist aber $EF = CF - CE = l(\cos\varphi - \cos\alpha) = 2l\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$.

Ist nun der Winkel α und mithin auch φ sehr klein, und nur für diesen Fall soll das Pendelgesetz abgeleitet werden, so kann man für den sinus den Bogen setzen, und man erhält:

$$EF = \frac{l}{2}(\alpha^2 - \varphi^2), \quad v = \sqrt{gl(\alpha^2 - \varphi^2)} = \alpha\sqrt{gl\left(1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2\right)}$$

und wenn man $\frac{\varphi}{\alpha} = y$ setzt $\quad v = \alpha\sqrt{gl(1 - y^2)}$.

Bezeichnet man AD mit x, dann ist $x = AB - AD = l\alpha - l\varphi = l\alpha - l\alpha y$, und da x und φ sich mit der Zeit ändern, so ist die Geschwindigkeit in D auch $\frac{dx}{dt} = -\alpha l\frac{dy}{dt}$, folglich:

$$-\alpha l\frac{dy}{dt} = \alpha\sqrt{gl(1 - y^2)}, \; \frac{dt}{dy} = -\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\arccos y + c = \sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha} + c.$$

Da für $\varphi = \alpha$ arc cos $1 = 0$ und $t = 0$, so ist auch $c = 0$, mithin $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\arccos\frac{\varphi}{\alpha}$. Um die Zeit zu finden, in der das Pendel eine halbe Schwingung macht, ist $\varphi = o$ zu setzen, und da $\arccos o = \frac{\pi}{2}$, wird $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$, also für eine einfache Schwingung $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Als Beispiel für die näherungsweise Berechnung der Wurzeln einer Gleichung wollen wir $\sqrt[5]{35}$ berechnen. Setzt man $\sqrt[5]{35} = x$, so handelt es sich um die Auflösung der Gleichung $x^5 - 35 = 0$. Es sei nun $x^5 - 35 = y$, und es bewege sich ein Punkt nach diesem Gesetz auf einer Graden, so handelt es sich um die Frage, nach welcher Zeit wird der Punkt durch den Nullpunkt gehen?

Die Geschwindigkeit ist $y' = 5x^4$. Für $x = 2$ wird $y = -3$ $y' = 80$, und da der Punkt, wie aus der Gleichung leicht ersichtlich, von links kommt, so ist der Wert 2 zu klein, es ist also zu bestimmen, wieviel Zeit der Punkt noch braucht, um die Strecke von 3 Maſseinheiten zurückzulegen. Diese Zeit ist aber $3 : 80 = 0,0375$, mithin $x = 2,0375$. Die Aufgabe wäre hiermit gelöst, wenn die Geschwindigkeit constant bliebe, da sie sich aber fortwährend ändert, so ist auch dieser Wert nur annäherungsweise richtig, durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man aber die Näherung immer weiter treiben. Um unnötige Rechnung zu ersparen, nehmen wir für x nur die beiden ersten von Null verschiedenen Stellen nach dem Komma und setzen $x = 2,037$, dann ergiebt sich $y = 0,017567$, $y' = 86,08632$.

Der Punkt befindet sich jetzt also bereits rechts vom Nullpunkt, mithin ist der Wert von x zu groſs, und es ist die Zeit, die er braucht, um die Strecke 0,017567 zurückzulegen, von 2,037 abzuziehen. Diese Zeit ist jetzt $0,017567 : 86,08632 = 0,0008313$. Folglich $x = 2,0361687$, ein Wert, der schon bis zur 6. Stelle genau ist. Eine nochmalige Wiederholung giebt x auf 10 Stellen genau. Die Hinzuziehung der Beschleunigung bei der Berechnung der Zeit erschwert das Verfahren unnötig und führt auch nicht schneller zum Ziel.

III.

Die unter III angegebene Methode der Flächenberechnung soll auf das Dreieck, Parabel, Kreis und Ellipse angewendet werden.

1. Flächenberechnung des Dreiecks.

Zieht man durch die Spitze O des Dreiecks eine Parallele zu der Grundlinie $AB = g$ und verschiebt dieselbe parallel mit sich selbst bis $A_1 B_1 = y$, nennt die Entfernung der Graden y von O x, während die Höhe des Dreiecks h sein möge, so ist $y = \frac{g}{h} x = z'$, folglich $z = \frac{1}{2} \frac{g}{h} x^2$.

Die Constante verschwindet, da für $x = 0$ auch $z = 0$.

Ist $x = h$, so erhält man den Inhalt des ganzen Dreiecks.

$$\Delta = \frac{1}{2} g h.$$

2. Flächenberechnung der Parabel.

Bezeichnet man mit y die parallel zur Ordinatenachse gezogene Sehne, so ist

$$y = 2\sqrt{2px} = z', \quad z = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} x \sqrt{2px}, \; z = \frac{2}{3} x y$$

d. h. $\frac{2}{3}$ des um die Parabelfläche beschriebenen Rechtecks.

3. Flächenberechnung des Kreises und der Ellipse.

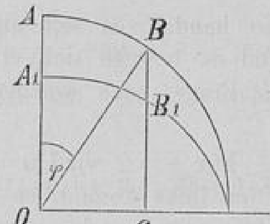


Fig. 9

Ist a der Radius des Kreises, so ist nach III b $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{2} a^2$, mithin $s = \frac{1}{2} a^2 \varphi$, die Constante verschwindet, wenn φ von AO aus gerechnet wird. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man den Inhalt des Kreisquadranten $\frac{K}{4} = \frac{a^2 \pi}{4}$, folglich $K = a^2 \pi$.

Die Fläche zwischen AO und BC ist, wie leicht ersichtlich (Fig. 9)

$$z = \frac{1}{2} a^2 \varphi + \frac{xy}{2}, \text{ wenn } OC = x, \quad BC = y.$$

Da nun $\varphi = \arcsin \frac{x}{a}$ und $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, so ist $z = \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Es ist aber $$y = z' = \sqrt{a^2 - x^2},$$

daher mufs $\sqrt{a^2 - x^2}$ die Ableitung von $\frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$ sein, was sich auch direkt nachweisen läfst.

Für die Ellipse ist $y = z' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem des Kreises nur durch den constanten Faktor $\frac{b}{a}$, daher kann sich auch die Funktion z oder die Fläche der Ellipse zwischen OA_1 und B_1C nur durch diesen Faktor von der entsprechenden Fläche des Kreises unterscheiden. Man erhält daher für die Ellipse:

$$z = \frac{b}{2a} \left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right).$$

Hieraus folgt für $x = a$: $\quad \frac{E}{4} = \frac{ab\pi}{4}, \quad E = ab\pi.$

IV.

Die Volumina der Körper, die in den Lehrbüchern der Elementarmathematik behandelt zu werden pflegen, ergeben sich nach der angegebenen Methode ohne Schwierigkeit. So ist z. B. für die Kugel jeder Querschnitt $\pi \varrho^2 = 2\pi r x - \pi x^2 = z'$, mithin $z = \pi r x^2 - \frac{\pi x^3}{3}$, woraus für $x = h$ der Inhalt des Kugelsegments $S = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h)$.

Auch der Beweis, daſs der Satz vom Körperstumpf für alle Körper gilt, die zwischen zwei parallelen Ebenen liegen oder sich legen lassen, und deren parallel zu diesen Ebenen gelegten Querschnitte sich durch eine Funktion 3. Grades des Abstandes x ausdrücken läſst, (Mehler, Elementarmathematik) ist hiernach sehr einfach.

Aus $y = a + bx + cx^2 + dx^3 = z'$ folgt $z = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}$.

Nun ist aber $g = a$, $k = a + bh + ch^2 + dh^3$ und $4m = 4a + 2bh + ch^2 + \frac{dh^3}{2}$.

Daher $$I = \frac{h}{6}(g + k + 4m) = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4},$$
was mit dem vorhin gefundenen Wert von z übereinstimmt, wenn $x = h$ gesetzt wird.

Für das durch Rotation um die kleine Achse entstehende Ellipsoid ist $g = 0$, $k = 0$, $m = \pi a^2$, $h = 2b$, mithin $I = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Für das Paraboloid, das durch Rotation um die x-Achse entsteht, ist jeder Querschnitt, der parallel ist zu der im Scheitelpunkt an das Paraboloid gelegten Tangentialebene $\pi y^2 = 2p\pi x = z'$.

Folglich $z = p\pi x^2 = \frac{\pi x y^2}{2}$, d. h. gleich der Hälfte des umgeschriebenen Cylinders.

Nicht ganz so einfache Beziehungen, wie bei der Flächen- und Körperberechnung, lassen sich bei der Bestimmung des Bogens einer Fläche oder der Oberfläche eines Körpers aufstellen. Doch ergeben sich auch hier die Resultate sehr leicht in der bisher angewandten Weise der Grenzbetrachtung.

Es sei (Fig. 1) $CP = s$, $CP_1 = s_1$, also $\widehat{PP_1} = s_1 - s$. Der Durchschnittspunkt der Tangenten in P mit der Ordinate in P_1 sei Q, dann ist $PQ > s_1 - s > \overline{PP_1}$ oder:
$$\frac{x_1 - x}{\cos\alpha} > s_1 - s > \frac{x_1 - x}{\cos\alpha_1}, \quad \frac{1}{\cos\alpha} > \frac{s_1 - s}{x_1 - x} > \frac{1}{\cos\alpha_1}.$$
$$\lim\frac{s_1 - s}{x_1 - x} = \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1 + y'^2}.$$
Bezeichnet man ferner die durch Rotation von CP und CP_1 um die x-Achse entstehenden Flächen mit z und z_1, so ist $z_1 - z$ gröſser als der Mantel des abgestumpften Kegels, dessen Grundriſs die Radien y und y_1 haben, und kleiner als der Mantel des Kegels mit den Radien y und y_2, wo y_2 die bis Q verlängerte Ordinate sein möge; d. h.
$$\pi(y + y_1)\frac{x_1 - x}{\cos\alpha_1} < z_1 - z < \pi(y + y_2)\frac{x_1 - x}{\cos\alpha},$$
$$\frac{\pi(y + y_1)}{\cos\alpha_1} < \frac{z_1 - z}{x_1 - x} < \frac{\pi(y + y_2)}{\cos\alpha}.$$
Nun fällt aber zugleich mit x_1 und x, y_1 und y_2 mit y, φ_1 mit φ zusammen, folglich ist:
$$\lim\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{dz}{dx} = \frac{2\pi y}{\cos\alpha} = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}.$$
Als Beispiel sollen hier nur die Ellipse und das Rotationsellipsoid dienen, wegen der Wichtigkeit ihrer Anwendung auf die Erde.

Für die Ellipse ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, woraus sich nach einiger Umformung $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}$ ergiebt, wenn $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Setzt man noch $x = a\xi$, dann wird:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{ds}{a\,d\xi} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2\xi^2}{1 - \xi^2}}$$

und wenn man den Zähler nach dem binomischen Satz entwickelt, was erlaubt ist, da sowohl ε^2 als $\xi^2 < 1$, so erhält man:

$$\frac{ds}{d\xi} = a\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\frac{1}{8}\varepsilon^4\xi^4}{\sqrt{1-\xi^2}} \dots\right).$$

Ist ε sehr klein, so kann man ohne merklichem Fehler die Glieder von ε^4 ab fortlassen, und man erhält dann näherungsweise:

$$\frac{ds}{d\xi} = a\left[\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \sqrt{1-\xi^2}\right)\right]$$

$$s = a\left[\arcsin\xi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\arcsin\xi - \frac{1}{2}\xi\sqrt{1-\xi^2} - \frac{1}{2}\arcsin\xi\right)\right]$$

$$s = a\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{4}\varepsilon^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right).$$

Ist $x = a$, so erhält man den Bogen der Viertelellipse $s = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$. Für $a = 6377{,}4$ km, $b = 6356{,}1$ km erhält man den Meridian der Erde $u = 2a\pi\, 0{,}99827 = 40000$ km.

Die Oberfläche des durch Rotation um die x-Achse entstandenen Ellipsoids findet man aus:

$$\frac{dz}{dx} = 2\pi y\sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} = \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2},$$

woraus

$$Z = \frac{\pi b\varepsilon}{a}\left(x\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2} + \frac{a^2}{\varepsilon^2}\arcsin\frac{x\varepsilon}{a}\right).$$

Setzt man $x = a$ und multipliziert mit 2, so ergiebt sich für die Gesamtoberfläche

$$O = 2\pi b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

Soll das durch Rotation um die y-Achse entstandene Ellipsoid berechnet werden, so ist in der Ableitung x mit y zu vertauschen, und man erhält:

$$\frac{dz}{dy} = 2\pi x\sqrt{1 + x'^2};\quad x'^2 = \frac{a^2(a^2 - x^2)}{b^2 x^2} = \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2\pi}{b^2}\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2} = \frac{2\pi a}{b^2}\sqrt{b^4 + a^2\varepsilon^2 y^2} = 2\pi a\sqrt{1 + \frac{a^2\varepsilon^2 y^2}{b^4}}.$$

Setzt man $\frac{a^2\varepsilon^2}{b^4} = c^2$ und wendet den binomischen Satz an, so ist

$$\frac{dz}{dy} = 2\pi a\left(1 + \frac{(cy)^2}{2} - \frac{(cy)^4}{8} + \dots\right)$$

Also näherungsweise $z = 2\pi a\left(y + \frac{c^2 y^3}{6} - \frac{c^4 y^5}{40}\right)$

$$O = 4\pi a\left(b + \frac{a^2 \varepsilon^2}{6b} - \frac{a^4 \varepsilon^4}{40 b^3}\right).$$

Für die oben angeführten Werte von a und b ergiebt sich schon aus den beiden ersten Gliedern fast genau die Oberfläche der Erde $O = 509\,950\,000$ qkm.

Zum Schlufs möge noch kurz die Bestimmung des Krümmungsradius und die Anwendung auf die Ellipse erörtert werden, die von besonderer Wichtigkeit ist, da ohne dieselbe der Schüler keine genaue Vorstellung darüber erhalten kann, wie die Grade auf dem Meridian vom Äquator nach den Polen zunehmen.

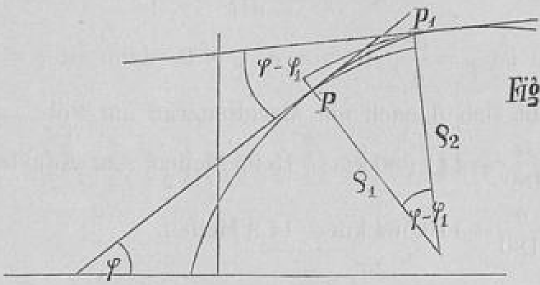


Fig. 10

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die in zwei benachbarten Punkten errichteten Normalen bis zu ihrem Schnittpunkt, so ist der Winkel, den sie einschliefsen gleich dem, den die in denselben Punkten an die Curven gezogenen Tangenten mit einander einschliefsen, gleich $\varphi - \varphi_1$. Ist $\varrho_2 > \varrho_1$, so ist der mit dem Radius ϱ_1 beschriebene Bogen, der zwischen den Schenkeln des Winkels $\varphi - \varphi_1$ liegt, kleiner als der Bogen $PP_1 = s_1 - s$, dagegen der entsprechende mit ϱ_2 beschriebene Bogen gröfser als $s_1 - s$, d. h.:

$$\varrho_1(\varphi - \varphi_1) < s_1 - s < \varrho_2(\varphi - \varphi_1)$$

$$\varrho_1 < \frac{s_1 - s}{\varphi - \varphi_1} < \varrho_2$$

Je mehr die Punkte P und P_1 aneinanderrücken, desto mehr nähern sich auch die Werte von φ_1 und φ, s_1 und s, ϱ_1 und ϱ_2 und damit auch die beiden Kreisbogen der Curve, bis sie schliefslich alle zusammenfallen. Bezeichnet man diesen Grenzwert von $\frac{s_1 - s}{\varphi - \varphi_1}$ mit ϱ, so ist dies der Radius des Kreises, der sich im Punkt P der Curve am engsten anschliefst, oder der Krümmungsradius.

Es ist also $\varrho = -\lim \frac{s_1 - s}{\varphi_1 - \varphi} = -\frac{ds}{d\varphi}$.

Kehrt die Curve der x-Achse die convexe Seite zu, dann ist der Winkel, den die beiden Normalen mit einander einschliefsen $\varphi_1 - \varphi$ und $\varrho = +\frac{ds}{d\varphi}$. Handelt es sich um die Bestimmung der Länge des Krümmungsradius, so ist ϱ natürlich stets positiv zu nehmen. Wir wollen daher das Minuszeichen bei der weiteren Rechnung fortlassen und setzen $\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$.

Nun ist aber $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$ und $y' = \operatorname{tg} \varphi$, mithin

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dx} = y'' \cos^2 \varphi = \frac{y''}{1 + y'^2},$$

folglich $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''} = \varrho$.

Für die Ellipse ist $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$, woraus für die Länge des Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Ist $x = 0$, $y = b$, so ist $\varrho = \frac{a^2}{b}$, ist $x = a$, $y = 0$, dann ist $\varrho = \frac{b^2}{a}$.

Für die Erde ergiebt sich danach ein Meridiangrad am Pol

$$\frac{a^2}{b} \frac{\pi}{180} = 111{,}680 \text{ km} = 15{,}05 \text{ Meilen, am Äquator}$$

$$\frac{b^2}{a} \frac{\pi}{180} = 110{,}564 \text{ km} = 14{,}9 \text{ Meilen.}$$

Die angeführten Beispiele mögen genügen, um die mannigfaltigen Anwendungen der wenigen Formeln zu zeigen, zu deren Ableitung an den Schüler sicher keine zu grofsen geistigen Anforderungen gestellt werden. Zugleich bietet die Einführung in die Infinitesimalrechnung auch eine passende Gelegenheit zu einer Wiederholung auf fast allen Gebieten der Algebra unter einem einheitlichen Gesichtspunkte, weshalb sie am zweckmäfsigsten in die für die Unter-Prima angesetzten Übungsstunden verlegt werden kann. Dies ist auch aus dem Grunde wünschenswert, weil in der Unter-Prima die Mechanik behandelt werden soll, und gerade auf diesem Gebiete die Anwendung der Infinitesimalrechnung, sowie des Koordinatensystems am vorteilhaftesten geschehen kann. Die Benutzung des Koordinatensystemes schliefst sich wieder am besten an die Konstruktion algebraischer Ausdrücke an, die in den planimetrischen Stunden der Ober-Sekunda geübt werden könnte. Da sich ferner der binomische Satz sehr einfach nach dem oben angegebenen Verfahren ableiten läfst, ohne, wie meist üblich, die Kombinationsrechnung dabei anzuwenden, so kann dieser Unterrichtszweig ganz fortfallen, da er gewifs eher entbehrt werden dürfte, als die Infinitesimalrechnung.