Analytisch-geometrische Untersuchung einer algebraischen Fläche vierten Grades.

Aufgabe. Den Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Abstände von zwei sich schneidenden geraden Linien eine constante Summe haben.

Das Coordinatensystem, auf welches die Gleichung des gesuchten Ortes bezogen werden soll, sei ein rechtwinkliges, der Ursprung desselben der Durchschnittspunkt der beiden Geraden und die xy-Ebene diejenige, welche durch die Geraden bestimmt wird. Nimmt man noch ferner an, daß der Winkel 2φ, welchen diese Linien miteinander bilden, durch die Axe der x halbirt wird, so erhält man für diese Geraden die Gleichungen

$$y = \tang \varphi x \; \ldots . \; (1)$$

$$y = -\tang \varphi x \; \ldots . \; (2)$$

Sind nun x, y, z die Coordinaten eines Punktes **A** des gesuchten Ortes, x_1, y_1 die Coordinaten des Endpunktes **B** des auf die Linie (1) gefällten Lothes, so hat man für die Entfernungen dieser Punkte vom Anfangspunkte **O** und für ihren gegenseitigen Abstand die Ausdrücke

$$OA^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$OB^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 = x_1{}^2\,(1 + \tang^2\varphi) = \frac{x_1{}^2}{\cos^2\varphi},$$

$$AB^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = (x - x_1)^2 + (y - x_1 \tang\varphi)^2 + z^2.$$

Da nun das Dreieck **OAB** ein rechtwinkliges sein soll, so hat man

$$OA^2 = OB^2 + AB^2,$$

also, wenn man die voranstehenden Werthe einsetzt,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x_1{}^2}{\cos^2\varphi} + x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x_1{}^2}{\cos^2\varphi} - 2x_1\,(x + y \tang\varphi).$$

Hieraus und aus (1) ergeben sich zwischen x, y und x_1, y_1 die Beziehungen

$$x_1 = (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\cos\varphi,$$

$$y_1 = (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\varphi$$

und vermittelst derselben

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x\sin^2\varphi - y\sin\varphi\cos\varphi)^2 + (-x\sin\varphi\cos\varphi + y\cos^2\varphi)^2 + z^2 \\ &= (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 + z^2 \\ &= x^2\sin^2\varphi - 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2\cos^2\varphi + z^2. \end{aligned}$$

Aendert man hierin das Zeichen von φ, so erhält man ohne weitere Rechnung für die Entfernung **AC** des Punktes **A** von der Linie (2) den Ausdruck

$$AC^2 = x^2 \sin^2\varphi + 2xy \sin\varphi \cos\varphi + y^2 \cos^2 + z^2.$$

Bezeichnet man noch die constante Summe der beiden Abstände irgend eines Punktes des gesuchten Ortes von den beiden gegebenen Geraden mit $2c$, so hat man zur Bestimmung der verlangten Fläche die Gleichung

$$\sqrt{x^2\sin^2\varphi - 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2\cos^2\varphi + z^2} + \sqrt{x^2\sin^2\varphi + 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2\cos\varphi + z^2} = 2c.$$

Schafft man die Wurzeln weg, so erhält man die Gleichung

$$x^2 y^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^2 x^2 \sin^2\varphi - c^3 y^2 \cos^2\varphi + c^4 = c^2 z^2,$$

welche sich auch auf die Form

$$(x^2 \sin^2\varphi - c^2)(y^2 \cos^2\varphi - c^2) = c^2 z^2 \quad \ldots . (3)$$

bringen läßt.

Der gesuchte Ort ist demnach eine algebraische Fläche vierten Grades. Dieselbe hat einen Mittelpunkt, der mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt, und sie wird durch die Coordinatenebenen in acht symmetrische Theile zerlegt.

Eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt geht und mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, schneidet die Fläche in Punkten, deren z Coordinate durch die Gleichung

$$z^2 = c^2\cos^2\gamma \frac{\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \cos^2\beta\cos^2\varphi + \cos^2\gamma \pm \sqrt{(\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \cos^2\beta\sin^2\varphi + \cos^2\gamma)^2 - 4\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\varphi\cos^2\varphi}}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$= c^2\cos^2\gamma \frac{\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \cos^2\beta\cos^2\varphi + \cos^2\gamma \pm \sqrt{\{(\cos\alpha\sin\varphi + \cos\beta\cos\varphi)^2 + \cos^2\gamma\}\{(\cos\alpha\sin\varphi - \cos\beta\cos\varphi)^2 + \cos^2\gamma\}}}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

bestimmt wird. Da die Größe unter dem Wurzelzeichen stets positiv und kleiner als das Quadrat der vor der Wurzel stehenden positiven Größe ist, so hat z^2 stets zwei positive Werthe. Es ergeben sich also für z, und ebenso für x und y, vier, paarweise gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Werthe, und daraus folgt denn, daß jede durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie die Fläche in vier reellen Punkten trifft.

Setzt man in der Gleichung (3) nach einander y und $x = 0$, so erhält man beziehungsweise

$$x^2 \sin^2\varphi + z^2 = c^2,$$
$$y^2 \cos^2\varphi + z^2 = c^2.$$

Die Schnitte der xz und der yz-Ebene mit der Fläche (3) sind folglich Ellipsen, deren kleinere in die z-Axe fallenden Halbaxen den gleichen Werth c haben.

Wird nun ferner in der Gleichung (3) $z = 0$ angenommen, so zerfällt dieselbe in die beiden folgenden

$$x^2 \sin^2\varphi - c^2 = 0,$$
$$y^2 \cos^2\varphi - c^2 = 0,$$

deren jede zwei gerade Linien darstellt, die beziehungsweise mit der y- und der x-Axe parallel laufen. Die Fläche (3) durchsetzt also die xy-Ebene in 4 Geraden. Man wird hierdurch auf die Frage geführt, ob die Fläche noch andere gerade Linien enthalte, oder nicht? Um dieselbe zu erledigen, untersuche man, ob es solche Werthe von a, b, a_1, b_1 giebt, daß die Gleichungen der Linie

$$\begin{aligned} x &= az + b \\ y &= a_1 z + b_1 \end{aligned} \quad \ldots . \; (4)$$

der Gleichung (3) identisch Genüge leisten. Eliminirt man zu dem Zwecke zwischen (4) und (3) die Coordinaten x und y, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} & a^2 a_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, z^4 + 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, a a_1 (a b_1 + a_1 b) z^3 \\ & + \{(a^2 b_1^2 + 4 a a_1 b b_1 + a_1^2 b^2) \sin^2\varphi\cos^2\varphi - c^2 (a^2 \sin^2\varphi + a_1^2 \cos^2\varphi + 1)\} z^2 \\ & + 2\{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, b b_1 (a b_1 + a_1 b) - \sin^2\varphi\, a b c^2 - \cos^2\varphi\, a_1 b_1 c^2\} z \\ & + (b^2 \sin^2\varphi - c^2)(b_1^2 \cos^2\varphi - c^2) = 0. \end{aligned}$$

Soll nun diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von z Geltung haben, so müssen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von z und das von z freie Glied einzeln $= 0$ sein. Daraus ergeben sich für die Bestimmung von a, a_1, b, b_1 die Relationen

$$\begin{gathered} a a_1 = 0, \\ (a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2) \sin^2\varphi\cos^2\varphi - c^2 (a^2 \sin^2\varphi + a_1^2 \cos^2\varphi + 1) = 0, \\ \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, b b_1 (a b_1 + a_1 b) - \sin^2\varphi\, a b c^2 - \cos^2\varphi\, a_1 b_1 c^2 = 0, \\ (b^2 \sin^2\varphi - c^2)(b_1^2 \cos^2\varphi - c^2) = 0. \end{gathered}$$

Zufolge der ersten dieser Beziehungen muß nun entweder a oder $a_1 = 0$ werden. Wird der erstere Fall angenommen, so gehen die aufgestellten Bedingungen in die nachstehenden über

$$\begin{gathered} a = 0 \\ \cos^2\varphi (b^2 \sin^2\varphi - c^2) a_1^2 = c^2, \\ a_1 b_1 (b^2 \sin^2\varphi - c^2) = 0 \\ (b^2 \sin^2\varphi - c^2)(b_1^2 \cos^2\varphi - c^2) = 0. \end{gathered}$$

Die letzte Gleichung verlangt, daß entweder $b^2 \sin^2\varphi - c^2$ oder $b_1^2 \cos^2\varphi - c^2 = 0$ sei. Die zweite Relation zeigt, daß so lange a_1 einen endlichen Werth haben soll, man nicht $b^2 \sin^2\varphi - c^2 = 0$ annehmen dürfe. Setzt man nun für einen Augenblick $b_1^2 \cos^2\varphi - c^2 = 0$, so würde noch den Bedingungen

$$\begin{gathered} \cos^2\varphi (b^2 \sin^2\varphi - c^2) a_1^2 = c^2, \\ a_1 b_1 (b^2 \sin^2\varphi - c^2) = 0 \end{gathered}$$

zu genügen sein. Die erste lehrt, daß a_1 nicht $= 0$ werden darf; dann müßte aber nach der zweiten b_1 verschwinden. Dies würde aber, da angenommener maßen $b_1^2 \cos^2\varphi = c^2$ sein soll, zu der ferneren unzulässigen Annahme $c = 0$ hinführen. Es bleibt also nur übrig anzunehmen, daß

$$b^2 \sin^2\varphi - c^2 = 0$$

und das ist nur gestattet, wenn a_1 einen unendlich großen Werth hat. Nun ist aber, wie aus der zweiten der Gleichungen (4) hervorgeht, a_1 die Tangente des Winkels, welcher die Projection der in Rede stehenden Linie auf die yz-Ebene mit der Axe der z bildet. Dieser Winkel muß also ein rechter und die projecirende Ebene eine zur z-Axe senkrechte sein. Es würden hiernach die Gleichungen (4) in

$$x = b,$$
$$z = b_1$$

übergehen und die Gleichung der Fläche (3) würde durch Substitution dieser Werthe befriedigt werden müssen, d. h. es müßte

$$(b^2 \sin^2\varphi - c^2)(y^2 \cos^2\varphi - c^2) = c^2 b_1{}^2$$

sein. Da aber die linke Seite dieser Gleichung der obigen Bedingung gemäß $= 0$ ist, so muß es auch die rechte, also $b_1 = 0$, d. h. $z = 0$ sein. Man kommt somit auf das eine Paar der obigen Parallelen zurück. Durch die Annahme $a_1 = 0$ wird man auf das andere Paar der erwähnten Parallelen geführt. Es existiren also überhaupt nur diese Geraden auf der Fläche. Diese vier Linien begrenzen ein Rechteck. Nun geht aber aus der Gleichung (3) hervor, daß z nur so lange reelle Werthe besitzt, als absolut genommen entweder

$$x < \frac{c}{\sin\varphi} \text{ und zugleich } y < \frac{c}{\cos\varphi},$$

oder

$$x > \frac{c}{\sin\varphi} \text{ und zugleich } y > \frac{c}{\cos\varphi}$$

ist. Die Fußpunkte der z-Ordinate treffen also die xy-Ebene nur in solchen Punkten, die entweder innerhalb des gedachten Rechtecks oder in den Scheitelwinkelräumen des Rechtecks oder endlich auf den Schenkeln dieser Winkel liegen. Nun erhellt aber sehr leicht, daß für alle diejenigen Punkte der Oberfläche, bei denen die Fußpunkte der z-Ordinate in die Scheitelwinkelräume oder in deren Schenkel fallen, nicht die S u m m e der Abstände von den gegebenen geraden Linien, sondern deren D i f f e r e n z die constante Länge $2c$ hat, so daß also nur derjenige Theil der Oberfläche übrig bleibt, welcher oberhalb oder unterhalb des gedachten Rechtecks liegt. Die Ecken dieses Rechtecks liegen auf je einer der gegebenen Geraden, so z. B. die Ecke mit den Coordinaten

$$x = \frac{c}{\sin\varphi},\ y = \frac{c}{\cos\varphi}$$

auf der Geraden

$$y = \operatorname{tang}\varphi\, x.$$

Setzt man für den Augenblick $y = a \leqq \frac{c}{\cos\varphi}$, so erhält man für den in der Entfernung a vom Anfangspunkte mit der xz-Ebene parallel gelegten Schnitt der Fläche die Gleichung

$$\frac{x^2 \sin^2\varphi}{c^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2\cos^2\varphi} = 1.$$

Dieser Schnitt ist also eine Ellipse, deren Halbaxen die Länge $\frac{c}{\sin\varphi}$ und $\sqrt{c^2 - a^2\cos^2\varphi}$ besitzen. Der Werth der ersteren ist von a unabhängig, die zweite wird am größten für $a = 0$

und ist dann gleich c, während sie ihren kleinsten Werth 0 für $a \cos\varphi = c$ erhält. Alle mit der xz-Ebene parallelen Schnitte der Fläche sind also Ellipsen, deren große Halbaxe einen beständigen Werth hat, während die kleine Halbaxe von c bis 0 abnimmt. Die Ellipsenschnitte werden demnach, je weiter sie sich von der xz-Ebene entfernen, immer flacher und flacher und gehen endlich in eine gerade Linie über. Eine gleiche Bewandtniß hat es mit den der yz-Ebene parallel gelegten Schnitten.

Für den Rauminhalt **K** desjenigen Theiles der Fläche, welcher zu beiden Seiten des mehrfach erwähnten Rechtecks liegt, ergiebt sich ein einfacher Ausdruck. Da nemlich der Flächeninhalt eines in der Entfernung y gelegten Ellipsenschnittes

$$= \frac{c.\pi}{\sin\varphi}\sqrt{c^2 - y^2\cos^2\varphi}$$

ist, so erhält man für den Rauminhalt **K** des Körpers den Ausdruck

$$\frac{K}{2} = \frac{c.\pi}{\sin\varphi}\int_0^{\frac{c}{\cos\varphi}} dy\sqrt{c^2 - y^2\cos^2\varphi}$$

oder, wenn man

$$y\cos\varphi = c\sin\psi$$

setzt,

$$\frac{K}{2} = \frac{c^3\pi}{\sin\varphi\cos\varphi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\, d\psi = \frac{c^3.\pi^2}{2\sin 2\varphi},$$

also

$$K = \frac{c^3.\pi^2}{\sin 2\varphi}.$$

Von Interesse ist es noch die Gestalt eines Schnittes zu untersuchen, welchen eine durch die Axe der z und durch eine der beiden gegebenen Geraden, etwa die Linie (1), gelegte Ebene auf der Fläche bestimmt. Dreht man zu dem Zwecke das Coordinatensystem um den Winkel φ, so daß die Axe der neuen x in die Gerade (1) fällt, so hat man

$$x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi,$$
$$y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi$$

zu setzen wenn x_1 und y_1 die neuen Coordinaten bezeichnen. Der gesuchte Schnitt fällt also in die zx_1-Ebene und man erhält seine Gleichung, wenn man in die Gleichung (3) die Werthe

$$x = x_1\cos\varphi \text{ und } y = y_1\sin\varphi$$

substituirt. Dadurch ergiebt sich

$$(x_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - c^2)(x_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - c^2) = c^2 z^2$$

also

$$x_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - c^2 = \pm\, cz$$

oder

$$x_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = c\,(c \pm z).$$

Dies sind die Gleichungen von zwei congruenten, einander zugewendeten Parabeln, deren Hauptaxen in der z-Axe liegen und die sich in den Endpunkten der einen Diagonale des gedachten Rechtecks schneiden. Es giebt also im Ganzen vier solcher Parabeln, welche auf der Fläche liegen. —

Wir gehen nun zur Untersuchung der Krümmungslinien und der Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche über.

Setzt man wie üblich

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

so erhält man

$$p = \frac{x \sin^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)}{c^2 z}$$

$$q = \frac{y\cos^2\varphi\,(x^2\sin^2\varphi - c^2)}{c^2 z},$$

$$r = -\frac{\sin^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)}{z\,(x^2\sin^2\varphi - c^2)},$$

$$s = \frac{xy\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{c^2 z},$$

$$t = -\frac{\cos^2\varphi\,(x^2\sin^2\varphi - c^2)}{z\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)},$$

$$(1+q^2)s - pqt = \frac{xy\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\{\sin^2\varphi\cos^2\varphi(x^2y^2\cos^2\varphi + c^2x^2 + c^2y^2) - c^4(1+\cos^2\varphi)\}}{c^4 z\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)}$$

$$(1+p^2)s - pqr = \frac{xy\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\{\sin^2\varphi\cos^2\varphi(x^2y^2\sin^2\varphi + c^2x^2 + c^2y^2) - c^4(1+\sin^2\varphi)\}}{c^4 z\,(x^2\sin^2\varphi - c^2)}$$

$$(1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t =$$

$$\left\{\frac{\begin{matrix} x^2y^2\sin^4\varphi\cos^4\varphi\,(x^2\sin^2\varphi - y^2\cos^2\varphi) + c^2(x^4 - y^4)\sin^4\varphi\cos^4\varphi - c^4x^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(1+\cos^2\varphi) \\ + c^4y^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(1+\sin^2\varphi) + c^6(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\end{matrix}}{c^4 z^2}\right\}$$

Werden nun diese Werthe in die bekannte Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$+\{(1+q^2)s - pqt\}\frac{dy^2}{dx^2} + \{(1+q^2)\,r - (1+p^2)\,t\}\frac{dy}{dx} - \{(1+p^2)\,s - pqr\} = 0$$

eingesetzt, so erhält man

$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,xy(x^2\sin^2\varphi - c^2)\{\sin^2\varphi\cos^2\varphi(x^2y^2\cos^2\varphi + c^2x^2 + c^2y^2) - c^4(1+\cos^2\varphi)\}\frac{dy^2}{dx^2}$$

$$+\,c^2\left\{\begin{matrix}\sin^4\varphi\cos^4\varphi\,x^2y^2\,(x^2\sin^2\varphi - y^2\cos^2\varphi) + \sin^4\varphi\cos^4\varphi\,c^2\,(x^4 - y^4) \\ -\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(1+\cos^2\varphi)\,c^4x^2 + \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(1+\sin^2\varphi)\,c^4y^2 \\ +(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,c^6\end{matrix}\right\}\frac{dy}{dx}$$

$$-\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,xy(y^2\cos^2\varphi - c^2)\{\sin^2\varphi\cos^2\varphi(x^2y^2\sin^2\varphi + c^2x^2 + c^2y^2) - (1+\sin^2\varphi)c^4\} = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich bedeutend, wenn man, wie im Folgenden geschehen soll, sich auf den Fall beschränkt, daß die beiden gegebenen geraden Linien sich unter einem rechten Winkel schneiden. Setzt man nemlich dieser speciellen Annahme gemäß

$$\sin\varphi = \cos\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

so geht die vorstehende Gleichung in

$$xy\,(x^2 - 2c^2)\,\{x^2 y^2 + 2c^2\,(x^2 + y^2) - 12c^4\}\,\frac{dy^2}{dx^2}$$
$$+ 2c^2\,\{x^2 y^2\,(x^2 - y^2) + 2c^2\,(x^4 - y^4) - 12c^4\,(x^2 - y^2)\}\,\frac{dy}{dx}$$
$$- xy\,(y^2 - 2c^2)\,\{x^2 y^2 + 2c^2\,(x^2 + y^2) - 12c^4\} = 0$$

oder in

$$\{x^2y^2 + 2c(x^2+y^2) - 12c^4\}\,\{xy(x^2 - 2c^2)\frac{dy^2}{dx^2} + 2c^2(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - xy(y^2-2c^2)\} = 0$$

über. Nach Beseitigung des ersten Factors erhält man also

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{2c^2\,(x^2 - y^2)}{xy\,(x^2 - 2c^2)}\,\frac{dy}{dx} - \frac{y^2 - 2c^2}{x^2 - 2c^2} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c^2\,(x^2 - y^2) \pm \sqrt{c^4\,(x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2\,(x^2 - 2c^2)\,(y^2 - 2c^2)}}{xy\,(x^2 - 2c^2)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c^2\,(x^2 - y^2) \pm \{c^2\,(x^2 + y^2) - x^2 y^2\}}{xy\,(x^2 - 2c^2)}.$$

Der Projection der ersten Krümmungslinie entspricht demnach die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

aus der sich durch Integration

$$xy = a^2 \;\ldots .\; (5)$$

ergiebt. Die erste Krümmungslinie hat also zu ihrer Projection auf die xy-Ebene eine Hyperbel, deren Asymptoten mit den Axen der x und y zusammenfallen.

Der andere Werth von $\frac{dy}{dx}$ giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,(y^2 - 2c^2)}{y\,(x^2 - 2c^2)}$$

oder

$$\frac{y\,dy}{y^2 - 2c^2} = \frac{x\,dx}{x^2 - 2c^2}$$

und hieraus folgt durch Integration

$$y^2 - 2c^2 = b\,(x^2 - 2c^2) \;\ldots .\; (6)$$

Die Projection der zweiten Krümmungslinie auf der xy-Ebene ist also ebenfalls eine Linie zweiten Grades und zwar eine Ellipse oder eine Hyperbel je nachdem die Integrationsconstante b einen negativen oder positiven Werth hat. Welcher der beiden Fälle stattfindet, wird sich späterhin entscheiden. Dieser Kegelschnitt geht übrigens, was auch b sein möge, durch die vier Eckpunkte desjenigen Quadrates, in welches sich für unseren speciellen Fall das mehrfach erwähnte Rechteck verwandelt.

Untersuchen wir nun noch die Gleichungen für die Projection der Krümmungslinien auf eine andere der Coordinatenebenen, etwa die xz-Ebene und setzen diesem Zwecke gemäß

$$p = \frac{dy}{dx},\ q = \frac{dy}{dz},\ r = \frac{d^2y}{dx^2},\ s = \frac{d^2y}{dx\,dz},\ t = \frac{d^2y}{dz^2},$$

so erhalten wir

$$p = -\frac{x(y^2-2c^2)}{y(x^2-2c^2)} = -\frac{x(y^2-2c^2)^2}{4c^2yz^2},$$

$$q = \frac{4c^2z}{y(x^2-2c^2)},$$

$$r = \frac{2(y^2-2c^2)(x^2y^2+c^2x^2+c^2y^2)}{y^3(x^2-2c^2)^2},$$

$$s = -\frac{4c^2xz(y^2+2c^2)}{y^3(x^2-2c^2)^2},$$

$$t = \frac{8c^4}{y^3(x^2-2c^2)},$$

$$(1+q^2)s - pqt = -\frac{16c^4xz\{(x^2+2c^2)z^2+(x^2-2c^2)^2\}}{y^3(x^2-2c^2)^4},$$

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t =$$
$$\frac{16c^6\{(x^2+2c^2)z^2+(x^2-2c^2)^2\}\{8(c^2+x^2)z^4+2(x^2+4c^2)(x^2-2c^2)z^2-(x^2-2c^2)^3\}}{y^5(x^2-2c^2)^6}$$

$$= \frac{8c^4\{(x^2+2c^2)z^2+(x^2-2c^2)^2\}\{4(c^2+x^2)z^2-(x^2-2c^2)^2\}}{y^3(x^2-2c^2)^5},$$

$$(1+p^2)s - pqr = \frac{16c^4xz\{(x^2+2c^2)z^2+(x^2-2c^2)^2\}\{4c^2z^2-(x^2-2c^2)^2\}}{y^3(x^2-2c^2)^6}.$$

Substituiren wir diese Werthe in die allgemeine Differentialgleichung der Krümmungslinie, unterdrücken den Factor

$$(x^2+2c^2)z^2+(x^2-2c^2)^2$$

sowie die gemeinschaftlichen Zahlenfactoren, so ergiebt sich

$$\frac{dz^2}{dx^2} - \frac{4(c^2+x^2)z^2-(x^2-2c^2)^2}{2xz(x^2-2c^2)}\,\frac{dz}{dx} + \frac{4c^2z^2-(x^2-2c^2)^2}{(x^2-2c^2)^2} = 0,$$

also

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4(c^2+x^2)z^2-(x^2-2c^2)^2 \pm \{4(x^2-c^2)z^2+(x^2-2c^2)^2\}}{4xz(x^2-2c^2)}.$$

Wählt man hierin das obere Vorzeichen, so erhält man für die Projection der einen Krümmungslinie auf die xz-Ebene die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2 - 2c^2},$$

durch deren Integration sich

$$\log z + \log.\,\mathrm{const.} = \log(x^2 - 2c^2)$$

oder

$$Az = x^2 - 2c^2 \ldots (7)$$

ergiebt. Die Projection dieser Krümmungslinie ist demnach eine Parabel, deren Axe in die z-Axe fällt. Nimmt man $z = 0$ an, so wird, welchen Werth man auch der Integrationsconstanten A beilegen möge, $x = \pm c\sqrt{2}$. Alle diese Parabeln haben also die Eigenschaft, die Axe der x in zwei festen Punkten zu schneiden.

Wählt man dagegen in dem obigen Ausdrucke das untere Vorzeichen, so erhält man zur Bestimmung der Projection der zweiten Krümmungslinie die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4c^2 z^2 - (x^2 - 2c^2)^2}{2xz(x^2 - 2c^2)}.$$

Führt man neue Veränderliche x_1 und z_1 durch die Beziehungen

$$x_1 = x^2 \text{ und } z_1 = z^2$$

ein, so geht diese Gleichung in

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{4c^2 z_1 - (x_1 - 2c^2)^2}{2x_1(x_1 - 2c^2)},$$

oder in

$$dz_1 - \frac{2c^2 z_1 dx_1}{x_1(x_1 - 2c^2)} = -\frac{x_1 - 2c^2}{2x_1} dx_1$$

über, wofür wir noch

$$dz_1 + z_1 X dx_1 = X^1 dx_1$$

schreiben wollen.

Das Integral dieser linearen Differentialgleichung ist bekanntlich

$$z_1 = e^{-\int X dx_1}\left\{\mathrm{const} + \int e^{\int X dx_1} X dx_1\right\}.$$

Nun ist aber

$$\int X dx_1 = -2c^2 \int \frac{dx_1}{x_1(x_1 - 2c^2)} = \int \frac{dx_1}{x_1} - \int \frac{dx_1}{x_1 - 2c^2} = \log \frac{x_1}{x_1 - 2c^2},$$

$$e^{\int X dx_1} = \frac{x_1}{x_1 - 2c^2};\quad e^{-\int X dx_1} = \frac{x_1 - 2c^2}{x_1};\quad \int e^{\int X dx_1} X^1 dx_1 = -\tfrac{1}{2} x_1,$$

also wenn man diese Ausdrücke einsetzt

$$z_1 = \frac{(x_1 - 2c^2)(B^2 - x_1)}{2x_1}$$

oder

$$2x^2 z^2 = (x^2 - 2c^2)(B^2 - x^2) \quad \ldots . \; (8)$$

wenn B^2 die Integrationsconstante ist.

Die Projection der zweiten Krümmungslinie auf die xz-Ebene ist hiernach eine Linie des vierten Grades, welche, was auch **B** sein möge, die Axe der x in den beiden festen Punkten $x = \pm c\sqrt{2}$ schneidet.

Um nun zu entscheiden, welche zwei der vier gefundenen Gleichungen derselben Krümmungslinie angehören und zu erfahren, welche Beziehungen zwischen den Integrationsconstanten stattfinden, hat man einfach zu untersuchen, durch welche Zusammenstellung die Gleichung der Fläche befriedigt werden kann. Man erkennt nun leicht, daß dies nur möglich ist, wenn man einerseits (6) mit (7) und andrerseits (5) mit (8) combinirt. Eliminirt man aus der Gleichung

$$(x^2 - 2c^2)(y^2 - 2c^2) = 4c^2 z^2 \quad \ldots . \; (9)$$

und den Gleichungen (6) und (7) die Größen y und z, so ergiebt sich

$$b\,(x^2 - 2c^2)^2 = \frac{4c^2\,(x^2 - 2c^2)^2}{A^2}$$

also

$$b = \frac{4c^2}{A^2},$$

und man erkennt daraus, daß für reelle Werthe der Constanten **A** die durch die Gleichung (6) dargestellte Linie zweiten Grades eine Hyperbel ist.

Eliminirt man ferner dieselben Größen aus der Gleichung (9) und den Gleichungen (5) und (8); so hat man

$$(x^2 - 2c^2)\left(\frac{a^4}{x^2} - 2c^2\right) = \frac{2c^2\,(x^2 - 2c^2)(B^2 - x^2)}{x^2}$$

und daraus

$$a^4 = 2c^2 B^2.$$

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so hat man also für die eine der Krümmungslinie die Gleichungen

$$x_1\, y = a^2\,;\; 4c^2 x^2 z^2 = (x^2 - 2c^2)(a^4 - 2c^2 x^2) \quad \ldots . \; (10)$$

und für die andere:

$$A^2\,(y^2 - 2c^2) = 4c^2\,(x^2 - 2c^2)\,;\; Az = x^2 - 2c^2 \quad \ldots . \; (11)$$

Man hätte freilich die Gleichungen für die zweiten Projectionen der Krümmungslinien sofort aus den Gleichungen der ersten Projection und der Gleichung der Fläche erhalten können. Es kam uns aber darauf an, zu zeigen, wie sich dieselben auch durch Integration der bezüglichen Differentialgleichungen ohne Schwierigkeit herleiten lassen.

Die Hauptkrümmungshalbmesser **R** der Fläche (9) nehmen einen ziemlich einfachen Ausdruck an. Man findet dieselben durch die Gleichung

$$g.\, R^2 - k\,h\,R + k^4 = 0,$$

wenn der Kürze wegen

$$g = rt - s^2 = \frac{4c^4 - x^2 y^2}{16c^4 z^2},$$

$$h = (1+q^2)\,r - 2pq\,s + (1+p^2)\,t$$
$$= -\frac{x^4y^4 - c^2x^2y^2(x^2+y^2) + 2c^4(x^4+y^4) - 12c^6(x^2+y^2) + 32c^8}{32c^6z^3},$$
$$k^2 = 1 + p^2 + q^2 = \frac{(x^2+y^2-4c^2)(x^2y^2-4c^4)}{16c^4z^2}$$

gesetzt wird. Die obige Gleichung liefert die Werthe

$$R'' = \frac{k}{2g}\left(h + \sqrt{h^2 - 4gk^2}\right)$$

$$R' = \frac{k}{2g}\left(h - \sqrt{h^2 - 4gk^2}\right)$$

oder, da

$$h^2 - 4gk^2 = \frac{\{x^4y^4 + c^2x^2y^2(x^2+y^2) - 2c^4(x^4+8x^2y^2+y^4) + 12c^6(x^2+y^2)\}^2}{32^2.\,c^{12}.\,z^6}$$

$$h + \sqrt{h^2-4gk^2} = \frac{x^2y^2(x^2+y^2) - 2c^2(x^4+4x^2y^2+y^4) + 12c^4(x^2+y^2) - 16c^6}{16.\,c^4.\,z^3}$$

$$= \frac{\{x^2y^2 - 2c^2(x^2+y^2) + 4c^4\}(x^2+y^2-4c^2)}{16c^4z^3} = \frac{4c^2z^2(x^2+y^2-4c^2)}{16c^4z^3}$$

$$= \frac{x^2+y^2-4c^2}{4c^2z}$$

$$h - \sqrt{h^2-4gk^2} = -\frac{x^4y^4 - 8c^4x^2y^2 + 16c^8}{16c^6z^3} = -\frac{(x^2y^2-4c^4)^2}{16c^6z^3}$$

$$\frac{k}{2g} = -2c^2z\sqrt{\frac{x^2+y^2-4c^2}{x^2y^2-4c^2}}$$

ist;

$$R'' = -\tfrac{1}{2}\,\frac{(x^2+y^2-4c)^{\frac{3}{2}}}{(x^2y^2-4c^4)^{\frac{1}{2}}},$$

$$R' = \frac{(x^2+y^2-4c^2)^{\frac{1}{2}}(x^2y^2-4c^4)^{\frac{3}{2}}}{2c^2(x^2-2c^2)(y^2-2c^2)}.$$

Die Art der Krümmung einer Fläche in irgend einem ihrer Punkte hängt bekanntlich davon ab, ob der Ausdruck

$$g = rt - s^2$$

einen positiven oder negativen Werth hat. Nun fanden wir aber oben für die Fläche (9)

$$rt - s^2 = \frac{4c^4 - x^2y^2}{16c^4z^2}$$

und es ist folglich g positiv oder negativ je nachdem $4c^4$ größer oder kleiner als x^2y^2 ist, d. h. je nachdem die Summe oder die Differenz der Abstände eines Punktes der Fläche von den gegebenen Geraden gleich $2c$ ist. In dem ersten Falle ist mithin die Fläche von gleichartiger, in dem anderen von ungleichartiger Krümmung. — In denjenigen Punkten endlich, für welche $g = 0$, oder $x^2 y^2 = 4c^4$ ist, verschwindet die Krümmung. Diese Punkte liegen aber auf denjenigen vier Geraden, welche sich auf der Fläche finden.

Schließlich mag hier noch die Gleichung derjenigen developpabelen Fläche Platz finden, welche von denjenigen Normalen der Fläche gebildet wird, die längs der Krümmungslinie (10) liegen. Man gelangt zu derselben, wenn man aus den Gleichungen

$$x - x^1 + p(z - z^1) = 0; \; y - y^1 + q(z - z^1) = 0$$

$$xy = a^2$$

und der Gleichung der Fläche die Größen x, y und z eliminirt. —

Führt man diese Rechnung aus, so erhält man die Gleichung

$$a^4 M^4 - 2a^2 c^2 A . M^3 + 4c^4 BM^2 + 144 a^4 c^6 CM - 16a^2 a^8 D = 0,$$

wo der Kürze wegen und mit Weglassung der Accente

$$M = 16c^4 xy - 4a^2 c^2 z^2 + a^2 (a^4 + c^4),$$

$$A = (a^2 x + 2c^2 y)^2 + (2c^2 x + a^2 y)^2,$$

$$B = (a^2 x + 2c^2 y)^2 (2c^2 x + a^2 y)^2 - 20a^6 (a^2 x + 2c^2 y)(2c^2 x + a^2 y) - 8a^{12},$$

$$C = \{(a^2 x + 2c^2 y)^2 + (2c^2 x + a^2 y)^2\} \{(a^2 x + 2c^2 y)(2c^2 x + a^2 y) + 2a^6\},$$

$$D = 16 (a^2 x + 2c^2 y)^3 (2c^2 x + a^2 y)^3 + 27a^6 (a^2 x + 2c^2 y)^4 + 27a^6 (2c^2 x + a^2 y)^4$$
$$+ 6a^6 (a^2 x + 2c^2 y)^2 (2c^2 x + a^2 y)^2 + 48a^{12} (a^2 x + 2c^2 y)(2c^2 x + a^2 y) - 16a^{18}$$

gesetzt worden ist. Die entwickelbare Fläche ist also eine algebraische Fläche des achten Grades.

A. R. Luchterhandt.