Neue Theorie der Drehung der Körper,

von

Poinsot.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung der Körper.

§. 1.

Begriff der einfachen Drehung und der Winkel-Geschwindigkeit.

1) Die einzige drehende Bewegung, von der wir eine klare Vorstellung haben, ist die eines Körpers, welcher sich um eine unbewegliche Axe dreht, deren Richtung also sowohl im Körper als im Raume ungeändert bleibt; denn man kann fast mit dem Auge alle die verschiedenen Kreise verfolgen, welche die Punkte des Körpers in Ebenen beschreiben, auf denen diese Axe senkrecht steht. Auch ist einleuchtend, daß alle diese gleichzeitigen Bewegungen möglich sind, nämlich alle zugleich ausgeführt werden können ohne Störung ihrer gegenseitigen Lage, also ohne Aenderung der Gestalt des Körpers.

2) Auch die Größe oder das Maaß dieser Drehung läßt sich mit völliger Klarheit auffassen; denn da alle Punkte Kreisbogen beschreiben, die ihren Halbmessern proportional sind, so ist das Verhältniß der Geschwindigkeit eines Punktes zum Halbmesser des Kreises den er beschreibt für alle Punkte des Körpers dasselbe, und eben dieses unveränderliche Verhältniß oder die Winkel-Geschwindigkeit ist das Maaß der Drehung. Diese Winkel-Geschwindigkeit ist nichts anderes als die absolute Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers in der Entfernung Eins von der Drehungsaxe. Nennt man also Θ diese Geschwindigkeit, so ist Θr die absolute Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung r von dieser Axe.

§. 2.

Zusammensetzung der Drehungen.

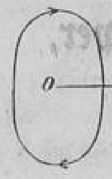
3) Die Theorie der Kräftepaare, die an einer homogenen Kugel wirken, lehrt, daß mehrere Drehungen, welche ein Körper um verschiedene durch einen Punkt gehende Axen in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Folge irgend welcher Ursachen zu machen strebt, sich ebenso wie einfache an diesem Punkte wirkende Kräfte zusammensetzen lassen.

4) Wir beschäftigen uns indessen hier nur mit der Bewegung an sich selbst, d. h. abgesehen von den Kräften welche sie erzeugen und von der Natur der Körper auf die sie wirken, daher muß hier Alles durch bloße geometrische Betrachtungen bewiesen werden.

Fig. 1.

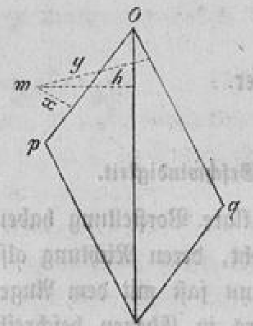


Im Folgenden stelle eine Linie $Op = p$ stets die Axe und die Größe einer Drehung p vor und zu gleicher Zeit auch den Sinn derselben, indem ein Auge in p die Drehung der Ebene des Fußpunkts O von der Linken zur Rechten erfolgen sieht.

§. 3.

Parallelogramm der Drehungen.

Fig. 2.



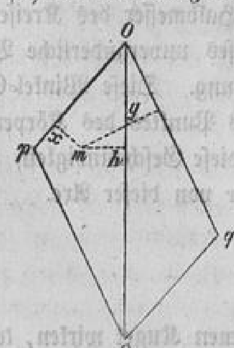
5) Wenn ein Körper zu gleicher Zeit zwei Drehungen p und q zu machen strebt, welche die Seiten Op und Oq eines Parallelogramms $Op\Theta q$ darstellen, so nimmt er eine Drehung Θ an, die durch die Diagonale $O\Theta$ dieses Parallelogramms versinnlicht wird.

Sind nämlich x, y, h die Entfernungen eines Punktes m in der Ebene des Parallelogramms von den Seiten und der Diagonale desselben, so lehrt eine einfache geometrische Betrachtung, daß stets

$$px + qy = \Theta h$$

ist. Nun erhält aber in Folge der Drehung p der Punkt m die Geschwindigkeit px und in Folge der Drehung q die Geschwindigkeit qy; die Richtungen dieser Geschwindigkeiten sind aber beide senkrecht auf der Ebene des Parallelogramms, daher nimmt er durch beide Anregungen zur Drehung die Geschwindigkeit $px + qy$ an, die er also auch erhalten würde, wenn er sich um die Diagonale mit der Winkelgeschwindigkeit Θ drehte.

Fig. 3.



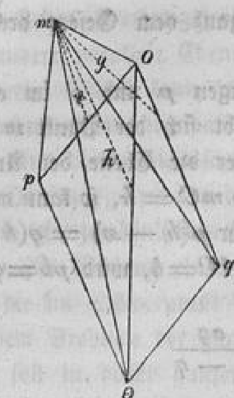
Liegt der Punkt m wie in Fig. 3., so wird x negativ, also

$$qy - px = \Theta h.$$

In der That erhebt sich auch jetzt der Punkt m mit der Geschwindigkeit qy über die Ebene der Figur und senkt sich mit der Geschwindigkeit px, daher steigt er nur noch mit der Geschwindigkeit $qy - px$ empor, welche ebenfalls der Geschwindigkeit eines Punktes m gleich ist, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit Θ um die Diagonale des Parallelogramms dreht. Dieser Betrachtung läßt sich jeder Punkt der Ebene unterwerfen und die Bewegung der Ebene zieht die des ganzen Körpers nach sich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 4.



6) Liegt der Punkt m des rotirenden Körpers nicht mehr in der Ebene der Figur und sind x, y, h die drei Entfernungen desselben von den Seiten und der Diagonale des Parallelogramms $Op\Theta q$, so sind px, qy, Θh die drei Geschwindigkeiten, welche die drei Drehungen p, q, Θ dem Punkte m ertheilen. Aber diese Geschwindigkeiten liegen nicht mehr in ein und derselben Ebene, sondern stehen senkrecht auf den Ebenen der Dreiecke pmO, qmO, ΘmO und sind diesen Dreiecken proportional; zugleich muß aber Θh die Resultante von px und qy sein. Errichtet man also in m auf den Ebenen der erwähnten Dreiecke die Lothe px, qy, Θh, so bilden diese zwei Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms, so daß man also, wenn die Größe der beiden Dreiecke pmO und qmO gegeben ist, den Inhalt des Dreiecks ΘmO auf dieselbe Weise finden kann, wie man die Resultante zweier Kräfte aus ihrer Größe und Richtung erhält.

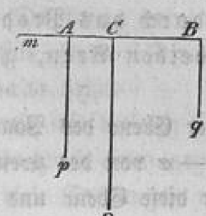
7) Es ist hierin ein hübscher geometrischer Satz ausgesprochen, den man auch leicht rein geometrisch beweisen kann; denn denkt man sich die drei Dreiecke pmO, qmO, ΘmO von einer Ebene durchschnitten, welche auf der Kante $m\Theta$ senkrecht steht und projicirt das Parallelogramm $Opq\Theta$ auf diese Ebene, so ist die Projection wieder ein Parallelogramm, dessen Seiten und Diagonale die Höhen der erwähnten Dreiecke darstellen, von denen mO die gemeinsame Basis ist. Diese Höhen verhalten sich daher wie die Flächeninhalte der Dreiecke und sind zugleich unter Winkeln gegen einander geneigt, welche die Neigungswinkel der Ebenen der Dreiecke darstellen.

8) Durch Zusammensetzung je zweier Drehungen vermittelst des Parallelogramms der Drehungen können beliebig viele, deren Axen durch einen festen Punkt gehen, in eine einzige zusammengesetzt werden.

§. 4.

Zusammensetzung zweier Drehungen, die um zwei parallele Axen stattfinden.

Fig. 5.



9) Um die Parallelen Ap und Bq mögen die beiden Drehungen p und q in demselben Sinne stattfinden. Steht ein Punkt m des Körpers, in der Ebene der Axen, von ihnen um die Strecken $mA = x$ und $mB = y$ ab, dann erhebt er sich mit der Geschwindigkeit $px + qy$. Diese Geschwindigkeit kann man sich auch dadurch hervorgebracht denken, daß der Punkt m mit der Winkelgeschwindigkeit $p + q$ um eine Axe $C\Theta$ rotirt, die in der Entfernung $mC = h$ parallel mit Ap und Bq liegt. Es muß dann sein

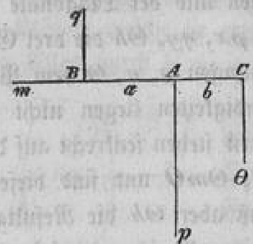
$$px + qy = (p + q)h$$

wonach also $p(h - x) = q(y - h)$ oder $p \cdot AC = q \cdot BC$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch diese Gleichung wird die Lage der neuen Axe, ganz dem Gesetze des Hebels gemäß, bestimmt.

Fig. 6.



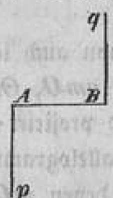
10) Finden die Drehungen p und q im entgegengesetzten Sinne statt, so erhebt sich der Punkt m mit der Geschwindigkeit $px - qy$ über die Ebene der Axen. Ist nun wieder $\Theta = p - q$ und $mC = h$, so kann man setzen $px - qy = (p-q)h$ oder $p(h-x) = q(h-y)$.

Aber, für $AB = a$ und $AC = b$, wird $pb = q(a+b)$ oder

$$b = \frac{aq}{p-q}$$

Man kann so die Entfernung der Axe $C\Theta$ von Ap angeben, um welche die Drehung des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit $p - q$ erfolgt, wenn er zu zwei entgegengesetzten Drehungen um zwei parallele Axen angeregt worden ist.

Fig. 7.

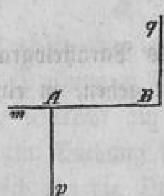


11) Wenn $p = q$ ist, so fällt die resultirende Drehungsaxe des Körpers, um welchen er sich mit der Geschwindigkeit Null dreht, ins Unendliche und die hier gelehrte Construction verliert ihre Bedeutung.

§. 5.

Von den Drehungs-Paaren.

Fig. 8.



12) Zwei gleiche und entgegengesetzte Drehungen p und $-p$ um parallele Axen, bilden ein **Drehungspaar.** Ein solches Drehungspaar kann nicht auf eine einfache Drehung um eine einzige Axe zurückgeführt werden. **Die Bewegung, welche aus einer solchen Drehung hervorgeht, ist eine bloße fortschreitende aller Punkte des Körpers nach Linien, die auf der Ebene des Paars senkrecht stehen, mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit, welche durch das Moment des Paars, nämlich durch das Product pa, einer der Drehungen p mit der Entfernung a der beiden Axen, gemessen wird.**

Denn, in der That, irgend ein Punkt m des Körpers in der Ebene des Paars in der Entfernung x von der ersten Axe p, also in der Entfernung $x - a$ von der zweiten $-p$, erhebt sich durch die Drehung p mit der Geschwindigkeit px über diese Ebene und senkt sich durch die Drehung $-p$ mit der Geschwindigkeit $p(x-a)$ unter dieselbe, so daß er sich also mit der Geschwindigkeit $px - p(x-a) = pa$ erhebt. Diese Größe ist von x unabhängig, also haben alle Punkte der Ebene oder des Körpers dieselbe Geschwindigkeit pa, welche senkrecht gegen die Ebene des Paars gerichtet ist.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

13) Jedes Drehungspaar kann also in seiner Ebene gedreht und verschoben oder auch in eine andere parallele Ebene verlegt werden, ohne daß sich dadurch die Bewegung des Körpers ändert. Ebenso kann auch das Paar durch ein anderes p' und $-p'$ mit dem Arme a' ersetzt werden, wenn nur das Moment $p'a'$ dem ersten pa gleich ist.

14) Aus dieser Eigenschaft und dem Parallelogramm der Drehungen schließt man leicht, daß sich Drehungspaare in verschiedenen Ebenen durch ein einziges ersetzen und überhaupt ebenso wie die gewöhnlichen Kräftepaare behandeln lassen.

15) Die Wirkung eines Drehungspaars kann offenbar durch eine einfache Kraft ersetzt werden, die im Schwerpunkt des Körpers senkrecht gegen die Ebene des Paars wirkt, wenn sie nur dem Producte der ganzen Masse des Körpers in das Moment des Paars gleich ist. Indessen soll in dieser ganzen Theorie der Drehungen die Mechanik nicht benutzt, sondern Alles aus der Geometrie geschöpft werden.

§. 6.

Allgemeine Zusammensetzung der Drehungen, die um beliebige im Raume vertheilte Axen stattfinden.

16) Es finde zunächst eine einfache Drehung p um die Axe Ap statt, welche durch den Punkt A des Körpers geht. Wenn man an irgend einem anderen Orte O zwei entgegengesetzte Drehungen p' und $-p'$ anbringt, welche der ersten p parallel und gleich sind, so wird dadurch die Bewegung des Körpers nicht geändert. Man hat dann aber erstens statt der einfachen Drehung p eine ihr gleiche und gleichgerichtete Drehung p' deren Axe durch O geht und zweitens ein Drehungspaar $(p, -p')$. Man kann daher eine Drehung, parallel mit sich selbst, in irgend einen Punkt des Raumes verlegen, wenn man nur noch das Drehungspaar berücksichtigt, welches durch diese Verlegung entsteht und dessen Maaß oder Moment erhalten wird, wenn man die gegebene Drehung mit dem Wege multiplicirt, welchen ihre Axe durchlaufen hat.

17) Hat man nun beliebig viele Drehungen p, q, r, ... um willkürlich liegende Axen Ap, Bq, Cr, ... und man verlegt alle parallel mit sich selbst in irgend einen Punkt O des Raumes, so lassen sie sich dort in eine einzige Θ zusammensetzen, welche man die resultirende Drehung nennen kann; und alle Drehungspaare, welche bei dieser Verlegung entstanden sind, setzen sich zu einem einzigen zusammen $(\varrho, -\varrho)$ welches das resultirende Drehungspaar heißt.

Ebenso wie beliebig viele Kräfte stets auf ein einziges Kräftepaar, und auf eine einzige Kraft, die durch einen gegebenen Punkt geht zurückgeführt werden können, so lassen sich auch beliebig viele Drehungen um verschiedene willkürlich im Raume liegende Axen stets auf ein einziges Drehungspaar und auf eine einzige Drehung, deren Axe durch einen beliebig gewählten Punkt geht, zurückführen.

Die resultirende Drehung Θ wird stets ungeändert bleiben, wo man auch den Punkt O annehmen mag, und sie verschiebt sich nur parallel mit sich selbst, wenn der Punkt O einen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

anderen Ort einnimmt, aber das Drehungspaar $(\varrho, -\varrho)$ ändert bei dieser Verschiebung seine Ebene und seine Größe.

18) Man kann den Punkt O stets so wählen, daß die Axe der resultirenden Drehung auf der Ebene des Drehungspaars senkrecht steht. Das resultirende Drehungspaar $(\varrho, -\varrho)$ läßt sich nämlich stets in zwei andere $(\varrho', -\varrho')$ und $(\varrho'', -\varrho'')$ zerlegen, von denen das erste in eine Ebene fällt, die senkrecht auf der Axe $O\Theta$ der resultirenden Drehung steht und das andere in eine Ebene, welche durch diese Axe selbst geht. Wählt man nun einen Punkt O' in dieser Ebene so, daß wenn man in ihm die Drehungen Θ und $-\Theta$ anbringt, das entstehende Drehungspaar $(\Theta, -\Theta)$ das Paar $(\varrho'', -\varrho'')$ vernichtet, so bleibt, außer dem Paare $(\varrho', -\varrho')$, nur noch die Drehung Θ um die Axe $O'\Theta$ übrig, welche auf der Ebene dieses Paares senkrecht steht. Diese Axe kann die Central-Axe der Drehungspaare genannt werden.

Also kann jedes System von Drehungen stets auf eine einzige Drehung um eine bestimmte Axe und auf ein Drehungspaar zurückgeführt werden, dessen Ebene auf dieser Axe senkrecht steht. Dieses Paar ist unter allen die erhalten werden können das kleinste, denn brächte man die Drehungen Θ und $-\Theta$ an einem anderen Punkte O'' an, so erhielte man in O'' eine Drehung Θ und ein Drehungspaar $(\Theta, -\Theta)$, welches auf dem Paare $(\varrho', -\varrho')$ senkrecht stände, also mit diesem in ein einziges aber größeres zusammengesetzt werden könnte.

19—21) Da ein Drehungspaar eine bloße Verschiebung senkrecht gegen seine Ebene hervorbringt, so kann jede Bewegung eines Körpers in Folge von beliebig vielen Drehungen nur einer Drehung um eine gewisse Axe und einer Verschiebung im Sinne dieser Axe gleichgelten.

§. 7.
Vorstellung einer Drehung um einen Punkt.

22) Diese Vorstellung läßt sich auf die einer Drehung um eine bloße Axe zurückführen. Denn betrachtet man zwei Punkte A und B des Körpers, welche mit dem Mittelpunkte O der Drehung das Dreieck OAB bilden, so wird nach Verlauf eines Zeitelements der Punkt A nach A' und B nach B' gekommen sein, also das Dreieck OAB die unendlich wenig von der ersten verschiedene Lage $OA'B'$ einnehmen. In diese Lage kann es aber durch zwei aufeinander folgende Drehungen gelangen; nämlich durch eine Drehung p um den gemeinschaftlichen Durchschnitt OS der beiden Dreiecksebenen, wodurch das Dreieck OAB bloß in die Ebene des Dreiecks $OA'B'$ geführt wird, und durch eine Drehung q um die Normale oder Axe OH dieser Ebene, wodurch der Punkt A nach A' also B nach B' gelangt. Aber zwei Drehungen p und q um zwei durch O gehende Axen lassen sich durch eine einzige Θ um eine Axe OJ ersetzen. Also, wie sich auch ein Körper um einen festen Punkt drehen mag, seine Bewegung in irgend einem Zeitelemente wird stets nur eine einfache Drehung um eine, während dieses Zeitelements, im Körper und im

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Raume feste Axe sein, die durch den festen Punkt geht. Man kann sich nun vorstellen, daß in den folgenden Zeitelementen die Drehungen um andere Axen geschehen, ähnlich wie sich die Bewegung eines Punktes in einer krummen Linie als ein Durchlaufen der unendlich kleinen Seiten eines Polypons auffassen läßt, dessen Grenze die krumme Linie ist. Man kann daher folgenden Satz aussprechen:

23) **Die Bewegung eines Körpers, welcher sich um einen festen Punkt dreht, ist die Bewegung dieses Körpers um eine durch diesen Punkt gehende Axe, deren Richtung sich jeden Augenblick ändert und die daher die augenblickliche Drehungsaxe genannt wird.**

Diese augenblickliche Drehungsaxe verhält sich ähnlich wie die Tangente einer Curve welche ein Punkt durchläuft.

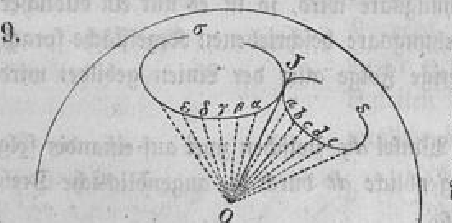
24) Diese augenblickliche Drehungsaxe ändert ihre Lage stets im Körper und im Raume zugleich. Der Winkel, den sie während eines Zeitelements im Raume beschreibt und der ihre absolute Bewegung ausmacht, ist derselbe den sie im Innern des Körpers beschreibt und der ihre relative Bewegung ist.

Dreht sich also ein Körper um eine in ihm selbst feste Axe, deren Lage sich aber im Raume ändert, so ist diese nicht die augenblickliche Drehungsaxe, um welche die Bewegung wirklich vor sich geht, denn die augenblickliche Drehungsaxe kann nicht unbeweglich im Körper bleiben, ohne zugleich unbeweglich im Raume zu verharren.

§. 8.

Anschauliches Bild dieser Drehung.

Fig. 9.



25) Die augenblickliche Drehungsaxe kann offenbar im Raume nur eine gewisse Kegelfläche beschreiben, deren Spitze der feste Mittelpunkt der Drehung ist und ebenso wird sie im Körper eine andere Kegelfläche mit derselben Spitze durchlaufen.

Es sei O der Mittelpunkt der Drehung und OJ die augenblickliche Drehungsaxe im gegenwärtigen Zeitelemente. Mit dem beliebigen Halbmesser OJ beschreibe man eine Kugel, welche die beiden Kegelflächen in zwei Curven schneidet, von denen die eine σ fest im Raume und die andere s fest im Körper ist, also beweglich mit ihm im Raume.

Man theile die Zeit t in gleiche unendlich kleine Theile dt oder Zeitelemente, welche auch Augenblicke heißen mögen; und auf der festen Curve σ bezeichne man die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zu denen der Pol J der augenblicklichen Drehungsaxe in den auf einander folgenden Augenblicken gelangt. Verbindet man diese Punkte durch Bogen größter Kreise, so entsteht ein sphärisches Polygon $J\alpha\beta\gamma\ldots$ von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Construirt man nun auf der Curve s, welche die Basis des beweglichen Kegels bildet, die

Bogen größter Kreise Ja, ab, bc, ... welche den ersteren entsprechend gleich sind, so ist klar, daß der Körper, welcher sich im ersten Augenblicke um OJ dreht, den Punkt a des Körpers auf den Punkt α des Raumes führt, im zweiten, wo die Drehung des Körpers um $O\alpha$ geschieht, gelangt der Punkt b des Körpers zum Punkte β des Raumes u. s. w., so daß die Elemente der Curve s sich allmälig an die gleichen Elemente der Curve σ anlegen, also der bewegliche Kegel, ohne zu gleiten, auf dem festen hinrollt.

26) Denkt man sich also den beweglichen Kegel im Körper befestigt, so daß er ihn, wenn er auf dem festen Kegel rollt, mit sich führt, so ist die Berührungslinie beider Kegel die augenblickliche Drehungsaxe und also zugleich beweglich im Körper und im Raume, indem sie im Raume den Mantel des festen Kegels beschreibt und im Körper den Mantel des beweglichen. Man wird nun deutlich die Wahrheit des Satzes einsehen, daß wie sich auch ein Körper um einen festen Punkt drehen mag, diese Bewegung immer nur die eines Kegels ist, dessen Spitze in dem festen Punkte liegt und der ohne zu gleiten, auf einem anderen festen Kegel, mit derselben Spitze, hinrollt.

27) Wäre die Drehung eines Körpers um einen Punkt O discontinuirlich, d. h. änderte die augenblickliche Drehungsaxe ihre Lage plötzlich um einen endlichen Winkel, statt daß sie, wie gewöhnlich, nur unendlich kleine Aenderungen erfährt, so ließe sich die ganze Bewegung des Körpers statt durch zwei Kegel mit Hülfe zweier Pyramiden, deren Spitzen in O liegen, vollständig nachahmen, indem nämlich die bewegliche ihre Seitenflächen auf die entsprechend gleichen Seitenflächen der festen auflegt und sich dabei stets um eine beiden gemeinschaftliche Kante herumdreht.

28—29) Da sich die augenblickliche Drehungsaxe selbst nicht bewegt, sondern immer nur im nächsten Augenblicke eine andere Linie Drehungsaxe wird, so ist es nur ein bildlicher Ausdruck, wenn man vorher von der durch die Drehungsaxe beschriebenen Kegelfläche sprach, statt sie die Fläche zu nennen, welche durch die stetige Folge aller der Linien gebildet wird, um deren jede einmal die Drehung stattfindet.

Mit gleichem Rechte kann man auch den Winkel $d\varphi$ zwischen zwei auf einander folgenden Erzeugungslinien dieser Fläche, als in dem Augenblicke dt durch die augenblickliche Drehungsaxe beschrieben ansehen, und also den Bruch $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit nennen, mit der diese Axe zu gleicher Zeit die beiden erwähnten Kegelflächen beschreibt. Eben so ist $\frac{ds}{dt}$, oder das ihm gleiche $\frac{d\sigma}{dt}$, die Geschwindigkeit, mit der sich der augenblickliche Pol J in den beiden Curven bewegt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 9.

Von den verschiedenen Größen, welche man naturgemäß beim Studium der Bewegung eines Körpers um einen Punkt zu beobachten hat und von der wechselseitigen Abhängigkeit dieser Größen von einander.

30) Wenn die beiden Curven s und σ mit der Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung um die augenblickliche Drehungsaxe OJ gegeben sind, so ist die Bewegung des Körpers völlig bestimmt.

Wenn außer der Winkelgeschwindigkeit Θ eine einzige dieser beiden Curven und die Geschwindigkeit des beschreibenden Pols gegeben ist, so ist schon die andere Curve nothwendiger Weise mit bestimmt. Denn es sei z. B. die Curve σ mit der Geschwindigkeit $\frac{d\sigma}{dt}$ des sie beschreibenden Pols J und die Winkelgeschwindigkeit Θ gegeben, so ist im Körper bereits der Punkt bestimmt, der nach Verlauf des Zeitelements dt während dessen sich der Körper um OJ dreht, auf die feste Curve σ fallen muß, um seiner Seits der neue Pol der Drehung zu werden. Ebenso sind dann auch schon die Punkte im Körper bestimmt, die in den folgenden Zeitelementen Drehungspole werden; daher bleibt über die Gestalt und Lage der Curve s keine Unsicherheit mehr.

Ebenso bestimmen die bewegliche Curve s, $\frac{ds}{dt}$ und Θ die im Raume feste Curve σ.

Fig. 10.

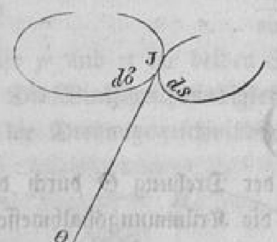
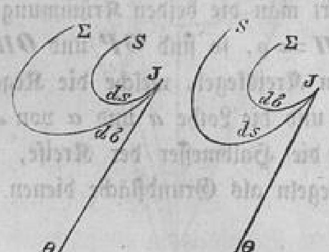


Fig. 11.



31) Außer der Winkelgeschwindigkeit Θ des Körpers um die augenblickliche Drehungsaxe OJ unterscheiden wir noch die Winkelgeschwindigkeit ω, mit welcher diese Axe die beiden Kegelflächen S und Σ gleichzeitig im Innern des Körpers und im Raume beschreibt; die Krümmungshalbmesser r und ϱ dieser beiden Flächen; die Winkelgeschwindigkeiten p und π des Pols um die Axe OP des die bewegliche Fläche S osculirenden Kegels und um die Axe $O\Pi$ des Kegels, der die feste Fläche osculirt; u. s. w. Wenn von diesen verschiedenen Größen irgend drei gegeben sind, so ist die Bewegung des Körpers bestimmt.

Man nehme auf der augenblicklichen Drehungsaxe stets $OJ = 1$ und betrachte die beiden Curven s und σ, welche der Pol J beschreibt, als sphärische Polygone von unendlich kleinen Seiten. Während des Augenblicks dt, wo der Pol J unbeweglich bleibt, beschreibt die Seite ds des beweglichen Polygons s, um sich an die ihr gleiche Seite $d\sigma$ des festen Polygons σ anlegen zu können, einen Winkel, der die Summe der Außenwinkel de und $d\varepsilon$ des beweglichen und festen Polygons ist, wenn die Polygone s und σ wie in Fig. 10. nach entgegengesetzten Seiten gekrümmt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sind, dagegen die Differenz dieser Winkel, wenn, wie in Fig. 11., ihre Krümmungen nach ein und derselben Seite hin liegen. Dieser Satz wird durch die Formel ausgedrückt

$$\Theta = \frac{de \pm d\varepsilon}{dt}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Curven s und σ im Berührungspunkte J nach entgegengesetzten oder gleichen Seiten gekrümmt sind.

Aber der Winkel de des Polygons s ist der Winkel, den die Verlängerung einer Seite der Pyramide, deren Spitze O und Basis das Polygon s ist, mit der folgenden Seite bildet, und dieser Winkel, welcher dem gleich ist, den die beiden Lothe auf den erwähnten Seiten mit einander machen, hat den Quotienten $\frac{ds}{r}$ zum Maaß, so daß also

$$de = \frac{ds}{r}$$

und ganz ebenso

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\varrho}$$

folglich

$$\Theta = \frac{ds}{rdt} \pm \frac{d\sigma}{\varrho dt}$$

ist. Aber $\frac{ds}{dt}$ oder $\frac{d\sigma}{dt}$ bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit mit der die augenblickliche Drehungsaxe OJ die beiden Kegelflächen beschreibt; setzt man also

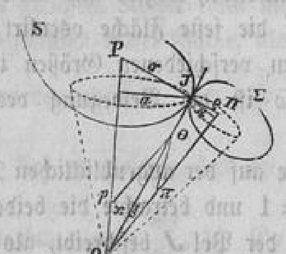
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \omega$$

so wird

$$\Theta = \omega\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\varrho}\right)$$

was ein sehr einfacher Ausdruck für die Geschwindigkeit der Drehung Θ durch die Winkelgeschwindigkeit ω der augenblicklichen Drehungsaxe und die Krümmungshalbmesser r und ϱ der von ihr beschriebenen konischen Flächen ist.

Fig. 12.



32) Construirt man die beiden Krümmungshalbmesser $JP = r$ und $J\Pi = \varrho$, so sind OP und $O\Pi$ die Axen der beiden geraden Kreiskegel, welche die Kegelflächen S und Σ osculiren, und die Lothe a und α von J auf diese beiden Axen sind die Halbmesser der Kreise, welche den beiden geraden Kegeln als Grundfläche dienen. Nach der Figur ist aber

$$r^2 = \frac{a^2}{1 - a^2} \text{ und } \varrho^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Durch diese Werthe für r und ϱ verwandelt sich der obige Ausdruck für Θ in

$$\Theta = \frac{\omega}{a}\sqrt{1 - a^2} \pm \frac{\omega}{\alpha}\sqrt{1 - \alpha^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aber ω ist die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehungsaxe auf der Fläche S oder auch auf der osculirenden Kegelfläche, also $\frac{\omega}{a}$ die Winkelgeschwindigkeit der Projection der Axe OJ auf dessen Basis oder die Winkelgeschwindigkeit dieses Pols J um die Axe OP dieses Kegels. Ebenso ist $\frac{\omega}{\alpha}$ die Winkelgeschwindigkeit dieses Pols um die Axe $O\Pi$ des andern Kegels. Diese Winkelgeschwindigkeiten wurden aber oben durch p und π bezeichnet, so daß also

$$\frac{\omega}{a} = p \text{ und } \frac{\omega}{\alpha} = \pi$$

und daher
$$\Theta = p\sqrt{1-a^2} \pm \pi\sqrt{1-\alpha^2}$$

Nennt man x den Winkel JOP und ξ den Winkel $JO\Pi$, so ist

$$a = \sin x \text{ und } \alpha = \sin \xi$$

und in dem Falle, den unsere Figur darstellt, ist

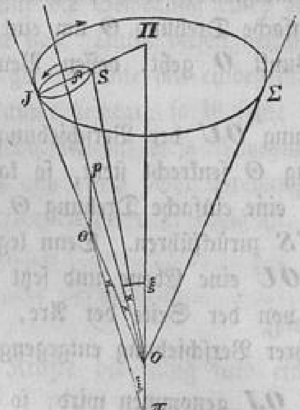
$$\Theta = \frac{\omega \sin(x+\xi)}{\sin x \sin \xi}$$

also
$$\omega = \frac{\Theta \sin x \sin \xi}{\sin(x+\xi)} = p \sin x = \pi \sin \xi$$

oder auch
$$\frac{p}{\sin \xi} = \frac{\pi}{\sin x} = \frac{\Theta}{\sin(x+\xi)}$$

so daß also p und π die beiden Seiten eines Parallelogramms sind, von dem Θ die Diagonale ist. Die Winkelgeschwindigkeiten des Pols J um die Axen der beiden osculirenden Kegel sind also die Drehungsgeschwindigkeit Θ nach diesen beiden Axen zerlegt.

Fig. 12a.



33) Kennt man drei der erwähnten Größen als Funktionen der Zeit, so kann man die übrigen finden. Sind diese drei gegebenen Größen constant, so sind es die übrigen auch und die Bewegung des Körpers ist die eines geraden Kreiskegels, welcher auf einem anderen solchen Kegel mit gleichförmiger Geschwindigkeit rollt.

Es stelle z. B. in Fig. 12a. die Linie $O\Pi$ die Axe der Ekliptik dar und OJ die augenblickliche Drehungsaxe der Erde, welche mit der Axe der Ekliptik einen Winkel von ohngefähr $23°27'30''$ macht. Dieser Winkel ist nicht derselbe, den die Erdaxe OP mit der Axe der Ekliptik bildet, wie gewöhnlich irriger Weise geglaubt wird, sondern etwas größer als der letztere. Er würde von diesem Winkel nur dann nicht zu unterscheiden sein, wenn die Erdaxe ihre Lage gegen die Ekliptik nicht änderte, aber sie beschreibt in der That in einem Zeitraume von 26000 Jahren eine Kegel-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fläche, deren Axe die Axe der Ekliptik ist. Die Winkelgeschwindigkeit π dieser Drehung ist also 26000 · 365,24 oder fast $9\frac{1}{2}$ Million mal kleiner als die Winkelgeschwindigkeit Θ mit der die Drehung um die augenblickliche Drehungsaxe OJ innerhalb eines Tages ausgeführt wird, oder es ist

$$\Theta = 9500000\,\pi.$$

Da die Drehung der Erdaxe um die Axe der Ekliptik der täglichen Bewegung entgegengesetzt ist, so erfolgt die Bewegung der Erde so, als ob der Kegel S mit seiner Spitze O in ihrem Mittelpunkte befestigt wäre, während seine Axe OP mit der Erdaxe zusammenfällt und dieser Kegel auf der inneren Fläche des festen Kegels Σ hinrollt.

Aus dem Parallelogramm der Drehungen $Op\Theta\pi$ ergiebt sich nun, wenn $Op = p$, $O\pi = \pi$ und $O\Theta = \Theta$ genommen wird,

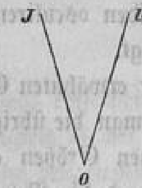
$$\operatorname{tg} x = \frac{\pi \sin \xi}{\Theta + \pi \cos \xi} = \frac{\sin 23^{\circ}\,27'\,30''}{9500000}$$

da $\cos \xi$ gegen 9500000 vernachlässigt werden kann. Hieraus findet man sogleich den Durchmesser der Basis des Kegels S an der Erdoberfläche 1,7 Fuß groß. Man kann also auch sagen: die augenblickliche Drehungsaxe beschreibt täglich um den Erdpol einen Kreis von diesem Durchmesser. Bei dieser Rechnung ist eine gleichförmige tägliche Präcession und Rotation vorausgesetzt worden.

§. 10.

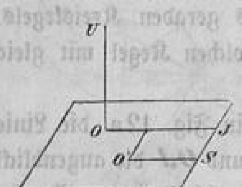
Vorstellung der allgemeinsten Bewegung, welche ein Körper im absoluten Raume haben kann.

Fig. 13.



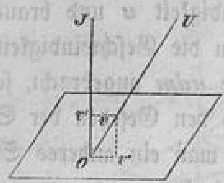
34) Jede Bewegung eines Körpers kann angesehen werden als hervorgebracht 1) durch eine einfache Verschiebung, welche alle Theile mit derselben Geschwindigkeit u nach parallelen Richtungen fortführt; 2) durch eine einfache Drehung Θ um eine gewisse Axe OJ, welche durch den Punkt O geht, dessen Bewegung man beobachtet.

Fig. 14.



Wenn die Richtung OU der Verschiebung u auf der Axe OJ der Drehung Θ senkrecht steht, so kann man die ganze Bewegung auf eine einfache Drehung Θ um eine der OJ parallele Axe $O'S$ zurückführen. Denn legt man durch OJ senkrecht gegen OU eine Ebene und setzt voraus, daß in dieser Ebene und von der Seite der Axe, wo die Geschwindigkeit der Drehung der Punkte des Körpers ihrer Verschiebung entgegengesetzt ist, ein Punkt O' in der Entfernung $x = \frac{u}{\Theta}$ von dieser Axe OJ genommen wird; so ist klar, daß dieser Punkt O' im Raume eine Geschwindigkeit $x\Theta - u = 0$ hat und daß alle Punkte auf $O'S$ dieselbe Geschwindigkeit haben. Also in dem besonderen Falle, wo OU senkrecht auf der augenblicklichen Drehungsaxe OJ steht, reducirt sich die doppelte Bewegung auf eine einfache Drehung um eine gewisse bestimmte Axe $O'S$, welche man die **freiwillige Drehungsaxe** nennt.

Fig. 15.



Wenn OU nicht senkrecht auf OJ steht, so zerlege man die Geschwindigkeit u der Verschiebung in eine v, senkrecht auf OJ, und eine v' parallel derselben Axe. Die erste v giebt, in Verbindung mit der Drehung Θ, eine **freiwillige Drehung** um eine gewisse mit OJ parallele Axe, und die zweite v' verschiebt alle Punkte des Körpers parallel dieser **freiwilligen Drehungsaxe.**

Also, jede Bewegung eines Körpers läßt sich auf eine Drehung um eine gewisse Axe und eine Verschiebung entlang dieser Axe zurückführen; so daß also die ganze Bewegung des Körpers die einer Schraube ist. Alle seine Punkte beschreiben also auf concentrischen Cylindern kleine Bogen von **Schraubenlinien**, deren Gänge alle gleiche Höhe haben. Im nächsten Augenblicke wird eine andere Schraube mit einer anderen Axe und einer anderen Höhe des Ganges beschrieben und so fort, woraus man deutlich sieht, wie sich die gleichzeitigen Curven bilden, welche alle Punkte des Körpers durchlaufen.

35) Bisweilen ist die Weite dieser Schraubenwindungen Null und die ganze Bewegung reducirt sich auf eine einfache Drehung um eine gewisse Axe, welche die **freiwillige Drehungsaxe** ist. Wenn es aber auch nicht immer im Körper eine Linie giebt, deren Punkte sämmtlich für einen Augenblick in Ruhe sind, so läßt sich in ihm doch stets eine Linie auffinden, deren Punkte während eines Augenblicks nur eine Verschiebung in ihr selbst erfahren, und diese Linie könnte man etwa die **gleitende freiwillige Drehungsaxe** nennen.

36) Wenn also ein Körper sich auf irgend eine Weise um einen festen Punkt dreht, so ist es stets nur die Bewegung eines Kegels der auf einem anderen festen rollt, der mit ihm gleiche Spitze hat. Unter diesen verschiedenen Kegelflächen muß man die Ebene, den Cylinder und die gerade Linie mit einbegriffen denken. Wenn aber ein Körper sich auf irgend eine Weise im Raume bewegt, so ist seine Bewegung in jedem Augenblicke nur eine Schraubenbewegung. Da sich auf diese Bewegung beliebige Drehungen zurückführen lassen (No. 19.), so kann man also durch bloße Drehungen um verschiedene Axen einem Körper die allgemeinste Bewegung ertheilen deren er fähig ist.

Zweites Kapitel.

Kräfte die fähig sind eine gegebene Bewegung hervorzubringen.

37) Eine **Kraft** ist jede Ursache, welche eine gleichförmige und gradlinige Bewegung einem **materiellen** Punkte zu ertheilen vermag. Die Richtung und der Sinn der Bewegung dieses Punktes machen die **Richtung** und den **Sinn** der Kraft aus. Die **Größe** dieser Kraft hat das Product der Masse in die mitgetheilte Geschwindigkeit zum Maaß.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

38) Welche Bewegung auch ein Körper annehmen mag, immer giebt es Kräfte welche, an dem ruhenden Körper angebracht, fähig sind, die beobachtete Bewegung hervorzubringen. Denn jedes Atom dm des Körpers hat eine gewisse Geschwindigkeit u und brauchte daher nur in der Ruhe von der Kraft udm ergriffen zu werden, um die Geschwindigkeit u anzunehmen. Denkt man sich an allen Atomen die ähnlichen Kräfte udm angebracht, so wird der Körper die beobachtete Bewegung erlangen. Führt man, nach den Gesetzen der Statik, die Elementarkräfte udm auf andere $P, Q, R, \ldots$ zurück, so hat man ein anderes System von Kräften, welches dem Körper ebenfalls seine Bewegung ertheilen kann.

39) Die Kräfte udm würden die Bewegung des Körpers hervorbringen, auch wenn die Atome, auf die sie wirken, nicht mit einander verbunden wären; würden also im ersten Augenblicke weder Spannungen noch Drucke in dem Systeme hervorrufen. Treten diese Spannungen aber im nächsten Augenblicke ein, so sind sie Folgen der Schwungkräfte, welche aus den krummlinigen Bewegungen der Atome in ihren Verbindungen entstehen.

Führt man aber statt der Elementarkräfte udm ihre Resultanten $P, Q, R, \ldots$ ein, so muß man gleich anfangs die Atome des Körpers mit einander verbunden denken, damit sich diese Resultanten wieder in die Kräfte udm zerlegen lassen.

40) Diese Unterscheidung zwischen den Kräften udm und $P, Q, R, \ldots$ ist nur nöthig zu machen, wenn man plötzliche Drucke, Stöße oder Spannungen untersucht, die der Körper durch seine Festigkeit zu überwinden hat, aber nicht mehr dann, wenn man bloß seine Bewegung im Auge hat, wo diese Kräfte z. B. sehr wohl durch eine einzige Kraft und ein Kräftepaar ersetzt werden können.

§. 1.

Kräfte die fähig sind eine bloß fortschreitende Bewegung hervorzubringen.

41) Wenn ein Körper nur eine fortschreitende Bewegung hat, sich also alle Atome in demselben Sinne und mit derselben Geschwindigkeit u nach parallelen Linien bewegen, so sind die Elementarkräfte udm, die auf die Atome wirken, ebenfalls parallel, gleichsinnig und den Massen dm dieser Atome bezüglich proportional. Aber aus der Statik weiß man, daß sich solche Kräfte stets auf eine einzige $R = \int udm$ zurückführen lassen, die ebenfalls in gleichem Sinne und in gleicher Richtung den Schwerpunkt des Körpers angreift.

Also, umgekehrt, wenn irgend eine Kraft R den Schwerpunkt eines Körpers angreift, so ist die Wirkung dieser Kraft, da sie sich in die angegebenen Elementarkräfte zerlegen läßt, die, alle Theile des Körpers nach ihrer eigenen Richtung und mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $u = R : m$ (wenn m die Masse des Körpers ist) fortzubewegen.

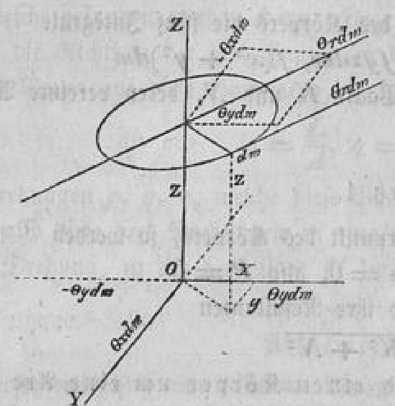
42) Wenn die Kraft R, stets den Schwerpunkt des Körpers angreifend, ihre Richtung und Größe auch jeden Augenblick änderte, so würde doch die Bewegung des Körpers nur eine fortschreitende sein, denn eine mit ihm fest verbundene Ebene würde sich stets parallel bleiben, auch wenn die einzelnen Punkte des Körpers Curven beschrieben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 2.

Kräfte die eine Drehung um eine gegebene Axe bewirken können.

Fig. 16.



43) Ein Körper drehe sich, im gegenwärtigen Augenblicke, um eine gegebene Axe OZ mit der Winkelgeschwindigkeit Θ; ein Atom dm in der Entfernung r von dieser Axe hat die Geschwindigkeit Θr nach der Tangente des Kreises gerichtet, den es zu beschreiben strebt, und die darauf wirkende Kraft ist $\Theta r dm$. Aehnliche Kräfte wirken auf alle Atome des Körpers in Richtungen, die zugleich senkrecht auf der Entfernung r und der Axe OZ stehen.

Reduction dieser Kräfte.

44) Die rechtwinkligen Coordinaten des Atoms dm mögen x, y, z sein. Man zerlege die Kraft $\Theta r dm$ nach den drei Coordinatenaxen in die Kräfte

$$X = \Theta y dm,\quad Y = -\Theta x dm,\quad Z = 0$$

Bringt man diese Kräfte, parallel mit sich selbst, in gleichem und entgegengesetztem Sinne wirkend, im Punkte O an, so erhält man in O zwei Kräfte

$$X = \Theta y dm \text{ und } Y = -\Theta x dm$$

und drei Kräftepaare L, M, N deren Axen die Coordinatenaxen sind. Die Momente dieser Paare sind $(Yz - Zy)$, $(Zx - Xz)$, $(Xy - Yx)$ oder, wenn man für X, Y, Z ihre Werthe setzt

$$L = -\Theta xz dm,\quad M = -\Theta yz dm,\quad N = \Theta(x^2 + y^2)dm = \Theta r^2 dm$$

Nimmt man diese Zerlegung an allen Atomen vor, so erhält man

1) Nach den Axen OX und OY zwei Kräfte

$$X = \Theta \int y dm,\quad Y = -\Theta \int x dm$$

die man in eine einzige P, senkrecht gegen OZ wirkend, zusammensetzen kann, so daß

$$P = \Theta \sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2}$$

oder, wenn man die Entfernung des Schwerpunkts von der Drehungsaxe D nennt,

$$P = \Theta m D$$

2) Zwei Kräftepaare um die Axen OX und OY

$$L = -\Theta \int xz dm,\quad M = -\Theta \int yz dm$$

die man in ein einziges K zusammensetzen kann, dessen Ebene durch OZ geht und dessen Moment ist

$$K = \Theta \sqrt{(\int xz dm)^2 + (\int yz dm)^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) Endlich hat man noch das Paar N dessen Moment

$$N = \Theta\int(x^2+y^2)dm = \Theta\int r^2 dm$$

ist und dessen Axe die Richtung OZ hat.

Berechnet man also für die ganze Masse des Körpers die fünf Integrale

$$\int xdm, \int ydm, \int xzdm, \int yzdm, \int(x^2+y^2)dm$$

so hat man vollständig die Kraft P und die Paare K und N, deren vereinte Wirkung die Drehung um die Axe OZ hervorbringen.

Zusatz 1.

45) Geht die Axe OZ durch den Schwerpunkt des Körpers, so werden

$$\int xdm = 0, \int ydm = 0, \text{ also } P = 0$$

und es bleiben nur die Paare K und N und ihre Resultanten

$$G = \sqrt{K^2+N^2}$$

Die Kräfte also, welche fähig sind einen Körper um eine Axe zu drehen die durch seinen Schwerpunkt geht, lassen sich stets auf ein Kräftepaar zurückführen.

Man beachte noch, daß dieses Paar G mit der Axe OZ einen Winkel macht, dessen Cosinus $\frac{K}{\sqrt{K^2+N^2}}$ ist, also OZ nie seine Axe werden kann, wenn nicht $K = a$ ist.

Zusatz 2.

46) Ist OZ eine der Hauptaxen des Körpers, also

$$\int xzdm = 0, \int yzdm = 0$$

so bleibt von allen Kräften nur das Paar $N = \Theta\int r^2 dm$ dessen Axe OZ parallel ist.

Also lassen sich Kräfte, welche einen Körper um eine seiner Hauptaxen drehen können, stets auf ein Paar zurückführen, dessen Axe dieser Hauptaxe parallel ist.

Umgekehrt läßt sich also auch ein Paar N, dessen Axe die Richtung einer Hauptaxe hat, stets in Elementarkräfte Θrdm zerlegen, welche den Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit $\Theta = N : \int r^2 dm$ um diese Axe drehen können; denn solche Kräfte Θrdm lassen sich auf ein einziges Paar $\Theta\int r^2 dm$ von gleicher Größe und Richtung mit dem Paare N zurückführen.

Wenn also ein Kräftepaar an einem freien Körper wirkt, dessen Axe die Richtung einer Hauptaxe des Körpers hat, so dreht es denselben um diese Hauptaxe mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich dem Momente dieses Paars dividirt durch das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Hauptaxe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusatz 3.

47) Die Wirkung eines Paars G, welches in irgend einer Ebene einen Körper angreift, kann nun leicht gefunden werden, denn zerlegt man das Paar G in drei andere L, M, N, deren Axen die Richtung der drei Hauptaxen haben und nennt A, B, C die drei Trägheitsmomente in Bezug auf diese Hauptaxen, so sind

$$p = \frac{L}{A},\ q = \frac{M}{B},\ r = \frac{N}{C}$$

die drei Drehungen p, q, r, welche diese Paare um die Hauptaxen hervorzubringen streben. Setzt man also diese drei Drehungen in eine einzige Θ zusammen, so hat man die Axe und Größe der Drehung, zu der das Paar G im ersten Augenblicke Veranlassung giebt.

Allgemeiner Zusatz.

Kräfte die erforderlich sind eine bestimmte Bewegung hervorzubringen und Bewegung eines Körpers in Folge der Einwirkung gegebener Kräfte.

48) Jede Bewegung kann in eine bloß fortschreitende zerlegt werden, welche der Bewegung des Schwerpunkts gleich und parallel ist, und in eine einfache Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Man hat also nur die Kraft R für die erste Art der Bewegung zu bestimmen und das Paar G für die zweite.

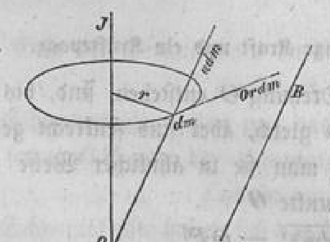
49) Ebenso, wenn beliebige Kräfte einen Körper angreifen, verlege man sie parallel mit sich selbst in den Schwerpunkt des Körpers. Alle Kräfte setzen sich dort zu einer einzigen R zusammen und alle Kräftepaare zu einem einzigen G.

Aber die Resultante R im Schwerpunkt des Körpers strebt allen Atomen eine gemeinsame Geschwindigkeit $u = \frac{R}{m}$ in der Richtung dieser Kraft zu ertheilen.

Das Paar G strebt dem Körper eine Drehung Θ um eine gewisse durch den Schwerpunkt gehende Axe OJ mitzutheilen, die auf die oben angegebene Weise gefunden wird.

Bemerkung.

Fig. 17.



50) Jedes Atom dm wird also von zwei Kräften getrieben, von udm parallel mit R und von Θrdm senkrecht gerichtet gegen die Axe OJ und gegen seine Entfernung r von derselben. Also beschreibt dieses Atom in jedem Augenblicke dt die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten udt und Θrdt sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 3.

Von den Schwungkräften, die aus der Drehung entstehen.

51) Wenn sich ein Körper mit der Winkelgeschwindigkeit Θ um eine Axe OZ dreht, so wird jedes Atom von der Kraft $\Theta r dm$ ergriffen, aber aus seiner Drehung entsteht eine unendlich kleine Kraft, welche es vom Mittelpunkt der Drehung zu entfernen strebt und die man Centrifugalkraft oder Schwungkraft nennt.

52) Ist u die Geschwindigkeit in der Tangente der Curve welche ein Atom beschreibt und r der Krümmungshalbmesser derselben, so ist bekanntlich

$$f = \frac{u^2}{r}$$

das Maaß für die Schwungkraft. Es ist aber $u = \Theta r$ also

$$f = \Theta^2 r$$

der Ausdruck der Schwungkraft eines Punktes, welcher mit der Winkelgeschwindigkeit Θ einen Kreis vom Radius r durchläuft.

53) Fügte man zu jeder Tangentialkraft $\Theta r dm$, welche jedes Atom des Körpers beherrscht, die entsprechende Schwungkraft $-dm\Theta r^2 dt$ (mit dem negativen Zeichen versehen, weil sie die Entfernung r von der Axe OZ zu vermindern strebt) so würde die Vereinigung dieser Atome, also der ganze Körper, sich um die Axe OZ mit der Winkelgeschwindigkeit Θ drehen, und zwar völlig frei, d. h. in dieser Weise, wenn auch die Atome nicht untereinander verbunden wären, und ohne daß dadurch der innere Zustand des Körpers gestört würde.

In dem Falle, der uns beschäftigt, wird freilich jedes Atom dm nur von der Tangentialkraft $\Theta r dm$ getrieben und es ist keine Schwungkraft vorhanden; aber man kann stets statt der Kraft $\Theta r dm$ die folgenden drei

$$\Theta r dm, \ -dm\Theta r^2 dt, \ +dm\Theta r^2 dt$$

einführen und die beiden ersten dazu benutzt denken, das Atom frei durch den Kreisbogen $\Theta r dt$ zu führen, während die dritte $+dm\Theta r^2 dt$ es in demselben Sinne forttreibt, in welchem es sich vom Mittelpunkte zu entfernen strebt; und dies ist die aus der Drehung entstandene Schwungkraft. Diese Kraft ist es, welche die Spannungen unter den Verbindungen der Atome hervorruft.

Zurückführung der Schwungkräfte auf eine einzige Kraft und ein Kräftepaar.

54) Die Schwungkräfte $dm\Theta^2 r dt$, die aus der Drehung Θ entstehen, sind, bis auf den Factor Θdt, den unmittelbar wirkenden Kräften $\Theta r dm$ gleich, aber sind senkrecht gegen diese Tangentialkräfte und die Axe OZ gerichtet. Zerlegt man sie in ähnlicher Weise wie diese (Nr. 44.), so erhält man für ihre Resultante π im Punkte O

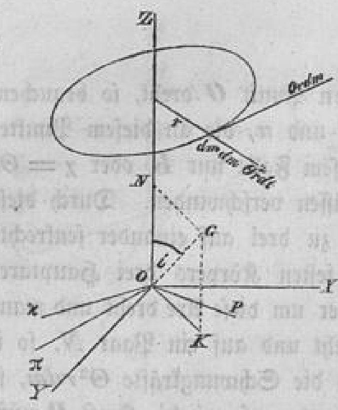
$$\pi = \Theta^2 \sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2} = \Theta P$$

und für das resultirende Paar χ, in dessen Ebene die Axe OZ fällt,

$$\chi = \Theta^2 \sqrt{(\int z dm)^2 + (\int y dm)^2} = \Theta K$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 18.



Ein dem Paar N in Nr. 44. entsprechendes Paar giebt es nicht, da die Richtung aller Schwungkräfte durch die Axe OZ geht.

55) So wie jede einzelne Schwungkraft der Tangentialkraft proportional ist und auf ihr senkrecht steht, so steht auch die Resultante π auf der Resultante P senkrecht.

Ebenso bildet auch die Axe des Paars χ mit der Axe des Paars K einen rechten Winkel und da sie auf OZ, der Axe des Paars N, senkrecht steht, so steht sie auch auf der Axe des Paars G, der Resultante von N und K, senkrecht. *Also ist die Axe des aus den Schwungkräften entstehenden Paars χ senkrecht auf der Drehungsaxe und auf dem Paar G der unmittelbar einwirkenden Kräfte.*

Bedeuten G und P zwei von O ausgehende Linien, welche die Richtung und Größe der Resultante P und der Axe des Paars G darstellen, deren Verein die Drehung Θ um die freie Axe OZ bewirkt, und i ist der Winkel den G mit der Drehungsaxe bildet, so hat man also für die Kraft π und das Paar χ, welche aus den Schwungkräften entstehen, die einfachen Ausdrücke

$$\pi = \Theta P, \; \chi = \Theta G \sin i$$

wo π senkrecht auf P und der Axe Θ steht, ebenso wie χ senkrecht auf G und der Axe Θ ist.

Bemerkung.

56) Wenn die Richtung jeder Schwungkraft eine viertel Umdrehung im Sinne der Drehung machte, so würde sie im Sinne der angreifenden Kräfte wirken; also müßten dann die Linien $O\pi$ und $O\chi$ auf OP und OK fallen. Hierdurch läßt sich die Lage von $O\pi$ und $O\chi$ bestimmen. Aendert sich Θ in Zeichen, so ändern auch P und K ihr Zeichen, aber π und χ bleiben ungeändert; wie es auch sein muß, da die Schwungkräfte nicht von dem Sinne der Drehung abhängen.

Zusatz.

57) Geht die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt, so ist

$$\int x dm = o, \; \int y dm = o \text{ also } \pi = o$$

und die Schwungkräfte geben nur das Paar χ.

Ist ferner OZ eine der Hauptaxen, so ist

$$\int xz dm = o, \; \int yz dm = o \text{ also } \chi = o$$

und alle Schwungkräfte halten sich das Gleichgewicht. Ebenso können umgekehrt sich die Schwungkräfte nur an einer Hauptaxe das Gleichgewicht halten, da π und χ zugleich Null sein müssen, was nur möglich ist, wenn $\int x dm$, $\int y dm$, $\int xz dm$, $\int yz dm$ sämmtlich zugleich Null sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bemerkung.

58 — 59) Wenn sich der Körper um einen festen Punkt O dreht, so brauchen $\int xdm$ und $\int ydm$ nicht zu verschwinden, denn die Kräfte P und π, die an diesem Punkte wirken, werden durch ihn aufgehoben. Es braucht also in diesem Falle nur K oder $\chi = \Theta K$ Null zu sein oder nur die Integrale $\int xdm$ und $\int ydm$ müssen verschwinden. Durch diese beiden Bedingungen erhält man zwei Gleichungen, die auch zu drei auf einander senkrechten Axen führen; so daß es also für jeden Punkt O eines festen Körpers drei Hauptaxen giebt, welche die Eigenschaft haben: 1) Wenn sich der Körper um diese Axe dreht und man reducirt alle Kräfte Θrdm auf eine einzige P die durch O geht und auf ein Paar N, so ist dieses Paar auf der Axe senkrecht. 2) Reducirt man ebenso die Schwungkräfte $\Theta^2 rdm$, so ist das resultirende Paar χ von selbst Null, aber die Resultante π so wie die Kraft P müssen durch den Widerstand des Punktes O aufgehoben werden.

60) In allen Fällen genügt es die drei Hauptaxen zu kennen, welche durch den Schwerpunkt gehen und natürliche Drehungsaxen heißen. Denn hat man diese Axen und die drei Trägheitsmomente A, B, C, welche sich auf sie beziehen, so kann man leicht das Trägheitsmoment des Körpers für eine beliebige andere durch den Schwerpunkt gehende Axe finden und dann auch für jede mit dieser parallele Axe.

§. 4.

Bewegung eines Körpers um eine feste Axe.

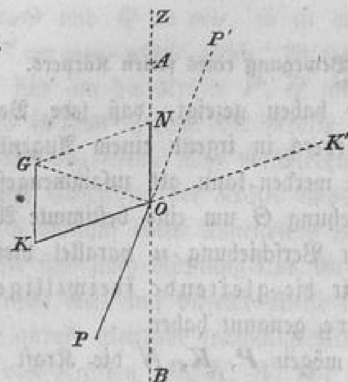
61) Alle Kräfte, welche den Körper angreifen, lassen sich auf eine einzige R, in einem Punkte O der festen Axe OZ wirkend, und auf ein Kräftepaar G zurückführen. Macht R mit OZ den Winkel α, so erfährt sie einen senkrechten Stoß $R \sin\alpha$ und einen zweiten $R \cos\alpha$ in ihrer eigenen Richtung. Macht ferner die Axe des Paars G mit OZ den Winkel ν, so kann G in zwei Paare $N = G \cos\nu$ und $N = G \sin\nu$ zerlegt werden, von denen die Axe des ersten mit OZ zusammenfällt und die des zweiten darauf senkrecht steht. Dieses letztere muß die Festigkeit der Axe OZ aufheben. Will man also einen Körper um eine Axe drehen und diese dabei schonen, so ist es nöthig die angreifenden Kräfte so zu wählen, daß die Resultante Null wird und die Axe des resultirenden Paars in die Drehungsaxe fällt. Aber auch das letztere Paar bewirkt noch eine Erschütterung dieser Axe.

Aufgabe.

62) **Ein ruhender Körper, um die feste Axe OZ beweglich, werde von einem Paare N, dessen Axe in OZ fällt, ergriffen, man verlangt zu wissen: 1) welche Winkelgeschwindigkeit Θ der Körper annimmt; 2) den Stoß, den die feste Axe im ersten Augenblicke zu ertragen hat; 3) den steten Druck, den sie in Folge der erstehenden Schwungkräfte erleidet.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 19.



Auf der Drehungsare OZ stelle ON die Größe der Are des angreifenden Paars N dar. In einer auf OZ senkrechten Ebene mögen OP und OK die Kraft P und das Paar K bedeuten, welche, mit N vereint, fähig sind den Körper um OZ in eine freie Drehung zu versetzen, durch welche die Are OZ nicht erschüttert wird.

Man bringe nun in O die Kräfte P und $-P$ und die Paare K und $-K$ an, wodurch der Zustand des Körpers zwar nicht geändert, er aber jetzt von drei Paaren N, K, $-K$ und zwei Kräften P und $-P$ angegriffen wird. Nach der Voraussetzung drehen aber die Paare N, K und die Kraft P den Körper um OZ mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Theta = \frac{N}{\int r^2 dm}$$

ohne die Are zu erschüttern. Endlich nimmt der Körper wirklich diese Drehung Θ an, denn $-P$ und $-K$, welche beide durch diese Are gehen, werden von ihrer Festigkeit aufgehoben. Also erfährt die Are wirklich eine Erschütterung durch die Kraft $-P$ und eine zweite durch das Paar $-K$. Man findet also

$$-P = -\Theta\sqrt{(\int xdm)^2 + (\int ydm)^2} = P'$$

$$-K = -\Theta\sqrt{(\int xzdm)^2 + (\int yzdm)^2} = K'$$

63) Werden nur zwei Punkte A und B der Are OZ festgehalten, so kann man leicht P' und K' so zerlegen, daß sich die Widerstände ergeben, welche diese Punkte dem angreifenden Paare N im ersten Augenblicke zu leisten haben.

64) Hat die Festigkeit der Are OZ die Kraft P' und das Paar K' beim ersten Angriff ausgehalten, dann wird der Körper nur von der Kraft P und den Paaren N, K angegriffen, und dieses System dreht ihn bekanntlich um OZ ohne diese Are zu erschüttern.

65) Aber von der bloßen Winkelgeschwindigkeit Θ der Drehung entstehen die Schwungkräfte $\Theta^2 rdm$ und diese Kräfte lassen sich zurückführen auf eine einzige

$$\pi = \Theta P = \Theta^2\sqrt{(\int xdm)^2 + (\int ydm)^2}$$

und ein Paar

$$\chi = \Theta K = \Theta^2\sqrt{(\int xzdm)^2 + (\int yzdm)^2}$$

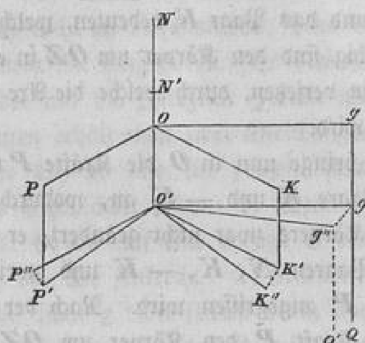
so daß also die Are, in jedem Augenblicke dt, einen Druck πdt in O und ein Paar χdt auszuhalten hat, die auch auf zwei Punkte A und B vertheilt werden können u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 5.

Erhaltung der Kräfte und Kräftepaare bei der Bewegung eines freien Körpers.

Fig. 20.



Wir haben gezeigt, daß jede Bewegung eines Körpers in irgend einem Augenblicke dt angesehen werden kann als zusammengesetzt aus einer Drehung Θ um eine bestimmte Are ON und einer Verschiebung u parallel dieser Are, welche wir die gleitende freiwillige Drehungsare genannt haben.

Es mögen P, K, N die Kraft und die beiden Paare sein, welche die Drehung Θ um die Are ON hervorzubringen vermögen, und Q die Kraft, welche, im Schwerpukt g angebracht, die Verschiebnng in der Richtung dieser Kraft verursacht.

Nennt man m die Masse des Körpers und macht $gO = a$, so ist

$$P = ma\Theta \text{ und } Q = mu$$

Am Ende der Zeit dt wird der Körper der Are ON entlang um $OO' = adt$ fortgerückt sein und sich um ON um einen Winkel Θdt gedreht haben. Bei der ersten dieser Bewegungen möge er die Linien OP, OK, ON, Og mit sich fortgenommen und in die Lagen $O'P'$, $O'K'$, $O'N'$, $O'g'$ gebracht haben und bei der zweiten sollen diese Linien, um den Winkel Θdt gedreht, in die Lagen $O'P''$, $O'K''$, $O'N''$, $O'g''$ gekommen sein. Die Punkte P', N', g' haben dann die Bogen

$$P'P'' = P\Theta dt,\ K'K'' = K\Theta dt,\ g'g'' = a\Theta dt$$

beschrieben.

Aber am Ende dieses Augenblicks ist aus den Schwungkräften entstanden: 1) eine Kraft $\pi dt = P\Theta dt$ senkrecht gegen P', welche in Verbindung mit P' diese Kraft in ihre frühere Lage $O'P'$ zurückführt; 2) ein Paar $\chi dt = K\Theta dt$ senkrecht gegen K', welche in Verbindung mit K'' das Paar in seine Stelle $O'K'$ zurückführt. Also am Ende eines Augenblicks werden die Kräfte und Paare, welche den Körper angreifen, durch die Linien $O'P'$, $O'K'$, $O'N'$ und $g'Q'$ dargestellt.

Aber dieses System von Kräften und Kräftepaaren ist ganz dasselbe, welches gleich anfangs wirkte; denn die beiden Paare $O'K'$, $O'N'$ wirken ganz ebenso wie die Paare OK, ON, die ihnen gleich und parallel sind. Ferner kann man in O die Kräfte P und $-P$ parallel und gleich der P' anbringen. Dadurch erhält man in O die Kraft P und das Paar $(P, -P)$ an dem Arme $OO' = udt$ wirkend. Ebenso bringt man in g' die Kräfte Q und $-Q$ parallel und gleich mit Q' an, so daß man in g' die Kraft Q und das Paar $(Q, -Q)$ erhält, welches an dem Arme $g'g'' = a\Theta dt$ wirkt. Diese beiden Paare, welche einander parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, haben gleiche Momente, denn da

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$P = ma\Theta$ und $Q = mu$, so ist das Moment $P \cdot OO' = ma\Theta \cdot udt$ dem Momente $Q \cdot g'g'' = mu \cdot a\Theta dt$ gleich. Also vernichten sich die beiden Paare und die beiden Kräfte P', Q' sind auf die Kräfte P, Q zurückgeführt.

Also ist das System der Kräfte und Paare, welche den Körper nach Verlauf eines Augenblicks angreifen, nicht verschieden von dem, welches anfangs auf ihn einwirkte; daher findet diese Erhaltung der Kräfte und Paare für alle Zeiten statt.

Nach Verlauf eines Augenblicks hat der Körper seine Stellung im Raume geändert und die Kräfte sind nach Richtung und Größe ungeändert geblieben, daher bietet sich ihnen der Körper nicht mehr auf dieselbe Weise dar, muß also seine Bewegung jetzt ändern oder sich um eine andere gleitende freiwillige Axe on drehen. Da aber diese Bewegung aus demselben System von Kräften (P, K, N, Q) entspringt, so läßt sich dieses nothwendiger Weise auf ein ähnliches System (p, k, n, q) zurückführen, welches die Bewegung um die neue Axe on hervorbringen kann. Aber auch dieses System wird sich während der nächsten Augenblicke erhalten; daher erhält sich auch das System (P, K, N, Q) und stellt die Kräfte und Paare, welche den Körper ergreifen, auch am Ende des zweiten Augenblicks, also für immer dar.

Drittes Kapitel.

Theorie der Trägheitsmomente.

§. 1.

Trägheitsmomente eines Körpers von beliebiger Gestalt und verschiedenen Axen, die durch ein und denselben Punkt gehen.

66) Man lege durch den Punkt drei rechtwinklige Axen X, Y, Z, auf welche man die Punkte des Körpers bezieht. Die Gerade h durch den Anfangspunkt der Coordinaten, für welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll, bilde mit den Axen die Winkel α, β, γ. Nennt man dm ein Atom des Körpers und r seine Entfernung von der Linie h, so hat man als Trägheitsmoment das Integral $\int r^2 dm$, welches sich über alle Atome des Körpers erstreckt. Sind x, y, z die Coordinaten eines Atoms dm und ϱ seine Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten, so ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und die Entfernung r dieses Atoms von der Axe h

$$r = \varrho \sin\varphi$$

wenn φ der Winkel zwischen ϱ und h ist. Läßt man nun von den Winkeln das Zeichen cos weg, was nie zu Verwechslungen Anlaß geben kann, so wird

$$r^2 = \varrho^2 \sin^2\varphi = \varrho^2(1 - \varphi^2)$$

Aber bekanntlich ist

$$\varphi = \frac{x}{\varrho}\alpha + \frac{y}{\varrho}\beta + \frac{z}{\varrho}\gamma \text{ und } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daher wird

$$r^2 = \alpha^2(y^2+z^2)+\beta^2(z^2+x^2)+\gamma^2(x^2+y^2)-2\beta\gamma yz-2\gamma\alpha zx-2\alpha\beta xy$$

also

$$\int r^2dm = \alpha^2\int(y^2+z^2)dm+\beta^2\int(z^2+x^2)dm+\gamma^2\int(x^2+y^2)dm$$
$$-2\beta\gamma\int yzdm-2\gamma\alpha\int zxdm-2\alpha\beta\int xydm$$

oder wenn man die Integrale durch Buchstaben bezeichnet

$$H = A\alpha^2+B\beta^2+C^2-2\beta\gamma l-2\gamma\alpha m-2\alpha\beta n$$

Diese Gleichung bestimmt das Trägheitsmoment H in Bezug auf die Axe h durch die Integrale l, m, n und die drei Trägheitsmomente A, B, C in Bezug auf die Coordinatenaxen und durch die Winkel, welche h mit diesen Axen bildet.

System der Axen h, für welches das Trägheitsmoment stets denselben Werth H hat.

67) Man bestimme auf der Axe h einen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, so daß

$$h^2 = x^2+y^2+z^2$$

dann ist offenbar

$$x = h\alpha,\ y = h\beta,\ z = h\gamma$$

und wenn man diese Werthe für α, β, γ in die Gleichung für H einsetzt, so wird

$$(H-A)x^2+(H-B)y^2+(H-C)z^2+2lyz+2mzy+2nxy = 0$$

68) Es giebt also in jedem Körper und für jeden Punkt desselben, oder des Raumes, eine stetige Folge von Axen, für welche das Trägheitsmoment denselben Werth hat; und diese stetige Folge von solchen Axen bildet eine Kegeloberfläche zweiten Grades.

Hauptaxen.

69) Eine solche Fläche zweiten Grades läßt sich stets, durch Coordinatenverwandlung, so umgestalten, daß in ihr die Producte yz, zx, xy nicht mehr erscheinen. Man muß sie dann bekanntlich auf ihre drei Axen beziehen. Hätte man also gleich diese drei Axen zu Coordinatenaxen gewählt, so wären die drei Integrale l, m, n verschwunden.

70) Solche Axen, für welche die drei Integrale $\int yzdm$, $\int zxdm$, $\int xydm$ verschwinden, heißen Hauptaxen; sie sind also die drei aufeinander rechtwinkligen Durchmesser derjenigen Kegelfläche zweiten Grades, deren Spitze im Anfang der Coordinaten liegt, und die der Ort aller geraden Linien ist in Bezug auf welche die Trägheitsmomente gleichen Werth haben.

Bestimmung der Hauptaxen.

71) Man nimmt die allgemeine Gleichung der No. 67. angegebenen Kegelfläche auf drei beliebige rechtwinkliche Axen bezogen und sucht die Werthe der sechs Integrale A, B, C, l, m, n in Bezug auf diese Axen. Dann giebt man H einen beliebigen Werth, den es erlangen kann, macht z. B. $H = A$ oder $= B$ oder $= C$. Durch Transformation der Coordinaten sucht man nun drei neue Axen, für welche die Gleichung der Kegelfläche die Gestalt annimmt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0$$

und diese drei rechtwinkligen Axen sind die drei Hauptaxen.

72) Die Bestimmung der drei Hauptaxen erfordert die Auflösung einer kubischen Gleichung.

73) Wenn man aber eine dieser Axen kennt, so kann man die beiden andern durch Auflösung einer quadratischen Gleichung finden. Denn es sei z eine Axe, für welche $\int yzdm$, $\int xzdm$ oder l, m Null sind, dann reducirt sich die Gleichung der Kegelfläche auf

$$(H - A)x^2 + (H - B)y^2 + (H - C)z^2 + 2nxy = 0$$

In der Ebene der x, y kann man aber zwei neue rechtwinklige Axen X' und Y' finden, für welche das Product xy verschwindet. Macht y' mit x den Winkel ω, so hat man

$$x = x' \cos\omega - y' \sin\omega \text{ und } y = x' \sin\omega + y' \cos\omega$$

Setzt man diese Werthe für x, y in die vorige Gleichung ein und will man, daß der Coefficient von $x'y'$ verschwinde, so erhält man

$$tg 2\omega = \frac{2n}{B - A}$$

Also in Bezug auf die drei rechtwinkligen Axen x', y' und z erhält die Gleichung der Kegelfläche die Form

$$Px'^2 + Qy'^2 + Rz^2 = 0$$

daher sind diese drei Axen die drei Hauptaxen des Körpers, für welche man findet

$$\int y'zdm = 0, \int x'zdm = 0, \int x'y'dm = 0$$

Die zwei ersten Gleichungen stimmen mit den beiden vorausgesetzten $\int yzdm = 0$ und $\int xzdm = 0$ überein, was sich auch aus den Transformationsformeln für x und y in x' und y' ergiebt, und zwar findet diese Uebereinstimmung statt unabhängig von dem Winkel ω.

Eigenschaften der drei Hauptaxen.

74—76) Bezieht man alle Punkte des Körpers auf die drei Hauptaxen, so hat man für das Trägheitsmoment H in Bezug auf eine durch den Anfangspunkt gezogene Gerade h, welche mit diesen Axen die Winkel α, β, γ bildet

$$H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

wo die Zeichen cos weggelassen sind und A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers für die drei Hauptaxen bedeuten.

77) Es ist jetzt leicht das Trägheitsmoment H' eines Körpers um eine Axe h' aus dem Trägheitsmoment H um eine ihr parallele Axe h zu finden, welche durch den Schwerpunkt geht. Denn sind r und r' die Entfernungen eines Atoms dm des Körpers von den Axen h und h' und ist D die gegenseitige Entfernung der beiden parallelen Axen, so giebt das Dreieck, aus den Linien r, r', D gebildet, wenn φ der Winkel zwischen r und D ist, die Gleichung

$$r'^2 = r^2 + D^2 - 2rD\cos\varphi$$

Daher wird

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + mD^2 - 2D\int r\cos\varphi\, dm$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aber $r\cos\varphi$ ist die Entfernung des Atoms dm von einer Ebene, die durch den Schwerpunkt senkrecht gegen die Linie D gelegt ist; es ist daher $\int r\cos dm = 0$ und folglich

$$H' = H + mD^2$$

oder man findet das Trägheitsmoment H' eines Körpers in Bezug auf irgend eine Axe h', wenn man zu dem Trägheitsmomente H, um eine durch den Schwerpunkt gelegte der h' parallelen Axe h, das Product der Masse m des Körpers in das Quadrat der Entfernung D des Schwerpunkts von der Axe h addirt.

78—79) Es sind also die Trägheitsmomente eines Körpers für alle Axen, die an der Oberfläche eines graden Kreiscylinders liegen, dessen Axe durch den Schwerpunkt geht, einander gleich

Läßt man die Axe irgend eines solchen Cylinders von constanter Basis so drehen, daß sie die Kegelfläche

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = H = \text{constans}$$

beschreibt, so sind auch alle Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die Erzeugungslinien der Cylinder einander gleich, aber man hat auf diese Weise noch nicht alle Axen im Körper gefunden, die gleiche Trägheitsmomente haben, da in der Gleichung $H' = H + m\,D$ sich H und D zugleich ändern können und doch H' ungeändert bleibt.

80) Für alle Axen, die durch den Mittelpunkt einer Kugel oder der regelmäßigen Körper gehen, sind die Trägheitsmomente sämmtlich einander gleich; man kann nun fragen, ob es in einem Körper einen Punkt O geben kann, für welchen auch alle Axen gleiche Trägheitsmomenet haben.

Es sei g der Schwerpunkt des Körpers und O ein Punkt der die verlangte Eigenschaft hat; man ziehe $gO = D$ und lege durch O eine Ebene E senkrecht auf D. Alle Axen durch O in E sind, nach der Voraussetzung, gleiche Axen, also sind auch alle Axen durch g in einer mit E parallelen Ebene, gleiche Axen, da sie von der ersten um die gleiche Größe D entfernt sind.

Also kann O nur existiren, wenn durch g zwei gleiche Axen gehen und O auf der dritten durch g gehenden Axe liegt. Nun sei A der gemeinschaftliche Werth der Trägheitsmomente um die beiden ersten Axen und C der Werth des Trägheitsmoments um die dritte Axe Og. Man hat also für H' folgende zwei Gleichungen:

$$H' = A + mD^2 \quad \text{und} \quad H' = C$$

folglich

$$D = \pm\sqrt{\frac{C-A}{m}}$$

Wenn also zwei der natürlichen Trägheitsaxen einander gleich sind und die dritte C größer ist als die beiden gleichen A, so giebt es auf dieser, in der durch den Werth für D bestimmten Entfernung vom Schwerpunkte, zwei Punkte O, für welche alle Trägheitsaxen einander gleich sind.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf