I.

Welche Gestalt muß ein Körper haben, wenn er auf einen Punkt seiner Oberfläche die stärkste Anziehung ausüben soll?

In dem rechtwinkligen Dreiecke ABD (Fig. 1.) stelle die Hypotenuse AD die Kraft dar, mit welcher der Punkt C den Punkt A anzieht. Die beiden Katheten AB und BD können dann, der Größe nach, als die Componenten dieser Kraft betrachtet werden. Ist nun das Gesetz bekannt, nach welchem die Kraft der Anziehung wächst, wenn die Entfernung des anziehenden Punktes abnimmt, so lassen sich sogleich alle Punkte C, C′, C″, ... bestimmen, deren Kräfte AD, AD′, AD″, ... sind, und deren horizontale Componente also bei allen gleich AB sein wird. Auf diese Weise kann eine Curve BCC′A gebildet werden, welche alle diejenigen Punkte der Ebene der Figur, deren nach B gerichtete Seitenkraft größer als AB ist, von denen sondert, bei welchen diese Componente einen kleinern Werth hat. Die erstern Punkte liegen innerhalb BCC′A, die letztern außerhalb. Dreht sich nun die Curve BCC′A um AB, als Axe, einmal herum, so beschreibt sie eine krumme Fläche BCAG. Denkt man sich alle Punkte des Raumes mit anziehenden Kräften begabt, so liegen innerhalb dieser abgeschlossenen Oberfläche diejenigen Punkte, für welche die nach B gerichtete Componente größer ist als für die außerhalb liegenden. Da sich innerhalb des Körpers BCAG stets zwei diametral gegenüberstehende Punkte finden, deren senkrecht gegen AB gerichtete Componenten gleich und entgegengesetzt sind, sich also einander aufheben, so fällt die Richtung der Resultante mit AB zusammen.

Eine gegebene Quantität nach irgend einem Gesetz anziehender Materie muß also die Gestalt des Körpers BCAG annehmen, wenn sie den Punkt A ihrer Oberfläche mit der größten Kraft nach B hin ziehen soll; denn brächte man einen Theil derselben außerhalb der Oberfläche BCAG an, so würde jetzt der Punkt A weniger stark nach B gezogen als vorher.

Dieselbe Betrachtungsweise lehrt, daß auch der Körper BCHLGB, welcher durch die Umdrehung der Kurve BCH und der ganz beliebigen Linie HL um die Axe BL erzeugt wird, die stärkste Anziehung auf den außerhalb liegenden Punkt A ausübt, welche eine jenseits HLG angebrachte Masse bewirken kann. Diese Wirkungsweise auf den Punkt A hat aber auch der Theil HLGAH der anziehenden Materie.

Es ist übrigens auffallend genug, daß sich eine auf den ersten Blick schwierige Aufgabe durch so einfache geometrische Betrachtungen lösen läßt. Selbst wenn die anziehende Masse nicht homogen wäre, oder einige ihrer Theile nach andern Gesetzen anzögen als die übrigen, so ließe sie sich offenbar nach den angegebenen Prinzipien noch immer so vertheilen, daß ihre Wirkung auf den Punkt A ein Maximum wird.

Die nächste Veranlassung, über dieses Problem nachzudenken, gab folgende Note von Gauß in seiner Abhandlung über die Erscheinungen der Kapillarität:

Constat, maximam attractionem, quam massa homogenea data in punctum datum secundum illam legem exercere potest, esse ad attractionem, quam eadem massa in figuram sphaericam redacta exercet in punctum in superficie positum, ut 3 ad $\sqrt[3]{25}$.

Zu den hier angegebenen numerischen Resultaten gelangt man leicht auf folgende Weise: In Fig. 2. stelle der Quadrant CFGD einen Querschnitt des Körpers vor, der in der Entfernung AD $= x$ senkrecht gegen die Axe AB geführt ist. Der Radius DF desselben bilde mit dem horizontalen Radius den Winkel FDG $= \theta$; ferner sei der Radius FD $= \eta$, ED $= y$, AE $= \varrho$, AF $= r$. Wächst η um $d\eta$, θ um $d\theta$ und x um dx, so entsteht das Körperelement $\eta d\theta dx d\eta$. Wird die Kraft der Anziehung, welche dieses Element auf den Punkt A ausübt, durch $f(\varrho)$ bezeichnet, so ist die nach B gerichtete Componente derselben $\frac{x}{\varrho} f(\varrho)\eta d\theta dx d\eta$, und wenn man AB durch a bezeichnet, so ist die Anziehung A, welche der Punkt A vom ganzen Körper erfährt

$$A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dx \int_0^y \frac{x\eta f(\varrho)}{\varrho} d\eta$$

da

$$x^2 + \eta^2 = \varrho^2$$

und bei der Integration nach η das x constant ist, so ist $\eta d\eta = \varrho d\varrho$ zu setzen und daher

$$A = 2\pi \int_0^a x dx \int_x^r f(\varrho) d\varrho$$

Ist die Anziehung umgekehrt proportional irgend einer Potenz der Entfernung, so ist

$$f(\varrho) = \frac{k}{\varrho^n}$$

wo k die Kraft der Anziehung in der Einheit der Entfernung vorstellt. Durch diesen Werth verwandelt sich A in

$$A = \frac{2\pi k}{n-1} \int_0^a x dx \left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{p^{n-1}} \right)$$

Bei dem hier angenommenen Gesetze der Anziehung ist, wenn in Fig. 1. $AB = a$, $AC = r$ und der Winkel $CAB = \varphi$ gesetzt wird, offenbar

$$\frac{k}{a^n} = \frac{k}{r^n} \cos \varphi$$

oder

$$r = a \cos \varphi^{\frac{1}{n}}$$

die Polargleichung der Curve BCAG. Da die Abscisse $AM = x$ des Punktes C gleich $r \cos \varphi$ ist, so ist

$$\frac{x}{r^{n-1}} = \frac{\cos \varphi^{\frac{2}{n}}}{a^{n-2}}.$$

Setzt man $\cos \varphi = z$, so findet man

$$\int_0^a \frac{x dx}{r^{n-1}} = \frac{n+1}{n} a^{3-n} \int_0^1 z^{\frac{3}{n}} dz = \frac{n+1}{n+3} a^{3-n}$$

Ferner ist

$$\int_0^a \frac{dx}{x^{n-2}} = \frac{a^{3-n}}{3-n}$$

wenn n stets kleiner als 3 bleibt; denn da das Integral für $n = 3$ oder größer als 3 unendlich wird, so wird der Punkt A mit unendlicher Kraft nach B gezogen. Unsere Aufgabe hat also nur einen Sinn, so lange n zwischen 0 und 3 liegt, und in diesem Falle ergiebt sich die Anziehung

$$A = \frac{2n\pi k a^{3-n}}{9-n^2}$$

Es ist jetzt nur noch nöthig, den Inhalt des Körpers BCAG zu finden. Eine ganz einfache Rechnung giebt diesen Inhalt

$$B = \frac{2n\pi a}{3(3+n)} \quad \text{also} \quad A = \frac{3kB}{(3-n)a^n}$$

Für $n = 1$ verwandelt sich die Polargleichung der Curve in die Gleichung des Kreises. Wüchse also die Kraft der Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung, so müßte die Masse in die Form einer Kugel gebracht werden, wenn sie einen Punkt ihrer Oberfläche mit der größten Gewalt anziehen sollte. Die Größe der Anziehung und der Inhalt des Körpers sind dann

$$A = \frac{3kB}{2a} \text{ und } B = \frac{\pi a^3}{6} \text{ wie bekannt.}$$

Für $n = 2$ oder das Newtonsche Attractionsgesetz stellt in Fig. 1. BCA nach einer genauen Zeichnung die Erzeugungs-Curve dar. Ihre Construction geschieht einfach so, daß man aus A, als Mittelpunkt, mit AB, einen Kreisquadranten beschreibt, für jeden Punkt E desselben die Ordinate zieht, welche den Halbkreis BFA in F schneidet, und dann AC gleich AF macht. Die Größe der Anziehung und der Inhalt des Körpers sind

$$A = \frac{3kB}{a^2} \text{ und } B = \frac{4\pi a^3}{15}$$

Für eine Kugel vom Radius r und derselben Masse B ist die Anziehung

$$A' = \frac{kB}{r^2} \text{ und } B = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Denn bekanntlich zieht in diesem Falle eine Kugel einen Punkt so an, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Die Gleichstellung der Werthe von B giebt

$$r = \frac{a}{\sqrt[3]{5}} \text{ und } A' = \frac{kB\sqrt[3]{25}}{a^2}$$

also $\quad A : A' = 3 : \sqrt[3]{25}$

oder $\quad A = A' \cdot 1{,}02598.$

Bei dem bekannten Versuche von Cavendish, um das specifische Gewicht der Erde zu bestimmen, ließen sich diese Resultate vielleicht benutzen. Denn obgleich durch diese Abweichung von der Kugelgestalt die Kraft nur um $\frac{1}{39}$ ihres ganzen Werthes vermehrt wird, so würde doch dieser Werth bedeutend vergrößert werden, wenn man bedenkt, daß die kleinen Kugeln nicht unmittelbar an der Oberfläche der großen schwingen können, also hier sehr bequem ein durch eine Ebene begrenztes Segment des bestimmten Körpers angewandt werden könnte, wie oben schon bemerkt wurde.

II.

Ueber die Bewegung eines Punktes.

Wenn $$x = \alpha r$$
so ist $$d^2x = \alpha d^2r + 2d\alpha dr + rd^2\alpha$$
und wenn man mit $2r^3d\alpha$ multiplicirt
$$2r^3d\alpha d^2x = r^3d^2rd\cdot\alpha^2 + d\alpha d\cdot r^4 + r^4d\cdot d\alpha^2$$
$$= r^3d^2rd\cdot\alpha^2 + d(r^2d\alpha)^2 \qquad (1)$$

Des bequemern Druckes wegen werde ich in dem Folgenden die Nenner der Differenzialquotienten weglassen, also gewöhnlich dx, d^2x statt $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ schreiben.

Multiplicirt man nun die Differenzialgleichung
$$d^2x + \alpha R = 0 \qquad (2)$$
mit $2r^3d\alpha$ und wendet (1) an, so erhält man sogleich die Transformation
$$r^3(d^2r + R)\,d\cdot\alpha^2 + d(r^2d\alpha)^2 = 0 \qquad (3)$$
Diese Gleichung läßt sich nun unmittelbar für das Folgende benutzen.

Ist z. B. die Bewegung eines Punktes zu bestimmen, der in der Entfernung r von einem festen Punkte mit der Kraft R angezogen wird, die eine beliebige Function der Entfernung r sein kann, und man nimmt die Ebene, in welcher r und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit liegen, als Ebene der rechtwinkligen Coordinatien x und y an, so finden folgende zwei Gleichungen statt:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\cos\varphi = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + R\sin\varphi = 0 \qquad (4)$$
wenn r mit der Axe der x den Winkel φ bildet. Da hier
$$x = r\cos\varphi \text{ und } y = r\sin\varphi$$
so hat man aus (3) auf der Stelle, wenn $\cos\varphi$ und dann $\sin\varphi$ statt α gesetzt werden,
$$\left.\begin{aligned} r^3(d^2r + R)\,d\cdot\cos^2\varphi + d(r^2d\varphi\sin\varphi)^2 = 0 \\ r^3(d^2r + R)\,d\cdot\sin^2\varphi + d(r^2d\varphi\cos\varphi)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$
Die Addition beider Gleichungen liefert sogleich
$$d(r^2d\varphi)^2 = 0$$
also $$r^2d\varphi = c \qquad (6)$$
Setzt man die Constante c statt $r^2d\varphi$ in eine der beiden Gleichungen (5) ein und schreibt $1 - \cos^2\varphi$ statt $\sin^2\varphi$, so wird

$$r^3(d^2r + R) = c^2$$

oder

$$d^2r + R = \frac{c^2}{r^3}$$

Durch Multiplication mit 2dr und Integration erhält man hieraus

$$dr^2 + 2\int Rdr = -\frac{c^2}{r^2} + c'$$

also

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{c' - 2\int Rdr - \frac{c^2}{r^2}}$$

Aus (6) ist aber

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$$

Durch Elimination von dt aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$d\varphi = \frac{cdr}{r^2\sqrt{c' - 2\int Rdr - \frac{c^2}{r^2}}}$$

Die übrigen Rechnungen können als bekannt vorausgesetzt werden.

Behandelt man dieselbe Aufgabe im Raume, so hat man für

$$x = r\cos\alpha;\quad y = r\cos\beta;\quad z = r\cos\gamma$$

die drei Gleichungen zu integriren

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\cos\alpha = 0;\ \frac{d^2y}{dt^2} + R\cos\beta = 0;\ \frac{d^2z}{dt^2} + R\cos\gamma = 0 \qquad (7)$$

Stellen in Fig. 3. SX, SY, SZ die drei auf einander senkrechten Coordinatenaxen vor, P den angezogenen Punkt und die übrigen krummen Linien Bogen größter Kreise, welche auf einer mit dem Radius SP construirten Kugel liegen, ferner PSA die Ebene der Bahn des Punktes P und P′ einen in dieser Ebene um 90° von P abstehenden Punkt, so geben die sphärischen Dreiecke APX, APY, APB und die drei entsprechenden mit der gemeinschaftlichen Seite AP′ die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}\cos\alpha = \cos\nu\cos\theta - \sin\nu\sin\theta\cos i & \cos\alpha' = \sin\nu\cos\theta + \cos\nu\sin\theta\cos i\\ \cos\beta = \cos\nu\sin\theta + \sin\nu\cos\theta\cos i & \cos\beta' = \sin\nu\sin\theta - \cos\nu\cos\theta\cos i\\ \cos\gamma = \sin\nu\sin i & \cos\gamma' = -\cos\nu\sin i\end{array}\right\}\ (8)$$

so daß also

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' = 1 - \sin^2\theta\sin^2 i\\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' = 1 - \cos^2\theta\sin^2 i\\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' = \sin^2 i\end{array}\right\}\ (9)$$

Ferner findet man sogleich aus (8) und (9)

$$\left.\begin{array}{l}d\cos\alpha = -\cos\alpha' d\nu;\ d\cos\beta = -\cos\beta' d\nu;\ d\cos\gamma = -\cos\gamma' d\nu\\ d\cos^2\alpha = -d\cos^2\alpha';\ d\cos^2\beta = -d\cos^2\beta';\ d\cos^2\gamma = -d\cos^2\gamma'\end{array}\right\}\ (10)$$

Die Gleichungen (7) geben also vermöge der Transformation (3)

$$r^3 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\alpha + d\,(r^2 d \cos\alpha)^2 = 0$$
$$r^3 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\beta + d\,(r^2 d \cos\beta)^2 = 0$$
$$r^3 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\gamma + d\,(r^2 d \cos\gamma)^2 = 0$$

oder durch Anwendung von (10)

$$r^3 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\alpha' = d\,(r^2 d\nu \cos\alpha')^2$$
$$r^3 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\beta' = d\,(r^2 d\nu \cos\beta')^2$$
$$r^3 (d^2r + R)\, d\cdot\cos{}^2\gamma' = d\,(r^2 d\nu \cos\gamma')^2$$

Da $\cos{}^2\alpha' + \cos{}^2\beta' + \cos{}^2\gamma' = 1$, so liefert die Addition der drei letzten Gleichungen ganz wie oben $d\,(r^2 d\nu)^2 = 0$, also $r^2 d\nu = c$
und durch Einführung dieses Werthes in eine dieser Gleichungen

$$r^3 (d^2r + R) = c^2$$

Eine ähnliche Anwendung findet die Transformation (3) auch noch bei folgender Aufgabe, welche Jakobi im 24sten Bande des Crelle'schen Journals Seite 15 auf eine besondere Weise behandelt: Ein Punkt A in Fig. 4. sei gezwungen, sich auf einer Umdrehungsfläche zu bewegen, von welcher ZAB eine Meridiancurve ist. Die Kraft, welche ihn angreift, möge nur in der Meridianebene wirken; ihre Componente AE, welche senkrecht gegen die Umdrehungsaxe OZ wirkt, sei X, die andere AF, parallel dieser Axe, heiße Y. Beide mögen Functionen der Entfernung AE oder CO = x von der Axe OZ sein.

Die Coordinaten des Punktes A sind, wie sie die Figur angiebt,

$$OD = \xi; \quad CD = \eta; \quad CA = y$$

Die Richtung des Widerstandes λ, welchen die Fläche zu leisten hat, fällt ebenfalls ganz in die Meridianebene und ist der Richtung der Kraft entgegengesetzt.

Stellt ds das Bogenelement der Meridiancurve vor, so ist die senkrecht gegen die Axe gerichtete Componente des Widerstandes $\lambda \frac{dy}{ds}$ und die mit ihr parallele $-\lambda \frac{dx}{ds}$. Es ist hier $\frac{dy}{ds}$ mit negativen Zeichen genommen worden, da wir voraussetzen, daß der Bogen wächst, wenn y abnimmt. Bildet nun die Meridianebene mit der festen Ebene ZOX den Winkel φ, so sind die Gleichungen der Bewegung offenbar folgende

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(X + \lambda \frac{dy}{ds}\right) \cos\varphi \qquad (11)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \left(X + \lambda \frac{dy}{ds}\right) \sin\varphi \qquad (12)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - \lambda \frac{dx}{ds} \qquad (13)$$

Es ist aber $\xi = x \cos\varphi$ und $\eta = x \sin\varphi$
daher giebt die Gleichung (3) statt (11) und (12) die beiden Gleichungen

$$x^3\left(d^2x - X - \lambda\frac{dy}{ds}\right) d\cdot\cos{}^2\varphi + d\,(x^2 d\varphi \sin\varphi)^2 = 0$$

$$x^3\left(d^2x - X - \lambda\frac{dy}{ds}\right) d\cdot\sin{}^2\varphi + d\,(x^2 d\varphi \cos\varphi)^2 = 0$$

durch deren Addition man

$$d\,(x^2 d\varphi)^2 = 0 \text{ und daraus } x^2 d\varphi = c$$

erhält. Durch Einführung dieser Constanten c in eine der letzten beiden Gleichungen kommt dann

$$x^3\left(d^2x - X - \lambda\frac{dy}{ds}\right) = c^2$$

Stellt man diese Gleichung mit (13) zusammen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{c^2}{x^3} + \lambda\frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - \lambda\frac{dx}{ds}\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Diese Gleichungen spricht Jakobi am angeführten Orte in folgendem Satze aus:

Punctum, quod in data superficie revolutione genita moveri debet, vi sollicitetur in plano Meridiani directa et a sola positione puncti in ipso Meridiano pendente: revocari potest motus propositus ad motum puncti in curva meridiana, accedente ad vim sollicitantem alia quae axi perpendicularis et cubo distantiae puncti ab axe inverse proportionalis est.

Das Auftreten des Gliedes $\frac{c^2}{x^2}$ in der ersten der Gleichungen (14) erscheint hier in etwas größerem Zusammenhange als dort.

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy und addirt beide Producte, so erhält man

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = X dx + Y dy + \frac{c^2 dx}{x^3}$$

Ist u die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, also $u = \frac{ds}{dt}$, und man integrirt die letzte Gleichung, nachdem sie mit 2 multiplicirt worden ist, so kommt

$$\frac{ds^2}{dt^2} = u^2 = 2\int(X dx + Y dy) - \frac{c^2}{x^2}$$

wenn die zweite Constante nach der Integration hinzugefügt wird. Wenn der Bogen mit der Zeit wächst, so folgt hieraus

$$t = \int \frac{\frac{ds}{dx}\,dx}{\left\{2\int\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)dx - \frac{c^2}{x^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Da
$$d\varphi = \frac{cdt}{x^2}$$
so erhält man endlich
$$\varphi = c\int \frac{\frac{ds}{dx}\,dx}{x^2\left\{2\int\left(X + Y\frac{dy}{dx}\right)dx - \frac{c^2}{x^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Aus der Gleichung $f(x, y) = 0$ der Meridiancurve werden die Werthe $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{ds}{dx}$ bestimmt. Das Uebrige ist bei Jakobi a. a. O. nachzulesen.

III.

Ueber die Drehung eines festen Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte.

Die folgenden Rechnungen haben nur den Zweck, schneller und mit größerer Klarheit zu den bekannten Formeln zu führen, welche dieses Problem lösen.

Der feste Punkt O, um welchen sich der Körper dreht, sei Anfangspunkt der drei auf einander senkrechten und im Raume festen Coordinatenaxen OX, OY, OZ. Die Coordinaten eines Punktes des Körpers auf dieses Coordinatensystem bezogen, mögen x, y, z heißen. Sie werden während der Drehung des Körpers ihre Werthe ändern, oder Functionen der Zeit t sein. Durch den festen Punkt O lege man ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem OX, OY, OZ, welches im Körper fest und mit ihm im Raume beweglich ist. Die Coordinaten eines Punktes des Körpers in Bezug auf dieses Coordinatensystem sollen ξ, η, ζ genannt werden. Diese Größen sind von der Zeit unabhängig und ändern sich nur, wenn man von einem Punkte des Körpers zu einem andern übergeht. Die Winkel, welche die beweglichen Coordinatenaxen mit den festen bilden, mögen auf folgende Weise benannt werden:

$$\begin{array}{lll} XOX=\alpha & YOX=\beta & ZOX=\gamma \\ XOY=\alpha_1 & YOY=\beta_1 & ZOY=\gamma_1 \\ XOZ=\alpha_2 & YOZ=\beta_2 & ZOZ=\gamma_2 \end{array}$$

Diese Winkel sind Functionen der Zeit. Vor allen diesen Winkeln wird im Folgenden das Zeichen cos weggelassen, so daß z. B. unter α stets $\cos\alpha$ zu verstehen ist. Ebenso werden wir fast immer, wie in No. II., die Differenzialquotienten ohne Nenner schreiben, was zu keinem Irrthum Veranlassung geben kann, da nur nach der Zeit t differenzirt wird.

Die neun Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma;\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1;\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$ sind folgenden zwölf Gleichungen unterworfen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1 \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1 \\ \beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2=1 \\ \gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1 \end{array}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta\gamma+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2=0 \\ \gamma\alpha+\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2=0 \\ \alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0 \end{array}\right\} (3) \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \\ \alpha_2\alpha+\beta_2\beta+\gamma_2\gamma=0 \\ \alpha\,\alpha_1+\beta\,\beta_1+\gamma\,\gamma_1=0 \end{array}\right\} (4)$$

die aber bekanntlich nur als sechs von einander verschiedene zu betrachten sind. Die Coordinaten x y z werden durch $\xi\ \eta\ \zeta$ und diese neun Winkel nach den gewöhnlichen Transformationsformeln so bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha\,\xi+\beta\,\eta+\gamma\,\zeta \\ y=\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta \\ z=\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta \end{array}\right\} (5)$$

Die Componenten der Geschwindigkeit irgend eines Punktes nach den festen Axen sind hiernach, da $\xi\ \eta\ \zeta$ von t unabhängig sind,

$$\left.\begin{array}{l} dx=\xi d\alpha+\eta d\beta+\zeta d\gamma \\ dy=\xi d\alpha_1+\eta d\beta_1+\zeta d\gamma_1 \\ dz=\xi d\alpha_2+\eta d\beta_2+\zeta d\gamma_2 \end{array}\right\} (6)$$

Man untersuche nun, ob jetzt, zur Zeit t, während der Bewegung des Körpers außer dem Punkte O, noch ein anderer Punkt im Körper ruht. Die Coordinaten dieses Punktes mögen $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ heißen. Man findet sie aus (6), wenn man die Componenten seiner Geschwindigkeiten Null setzt, also durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \xi' d\alpha+\eta' d\beta+\zeta' d\gamma=0 \\ \xi' d\alpha_1+\eta' d\beta_1+\zeta' d\gamma_1=0 \\ \xi' d\alpha_2+\eta' d\beta_2+\zeta' d\gamma_2=0 \end{array}\right\} (7)$$

Man sieht schon, daß durch diese drei Gleichungen ξ', η', ζ' nicht bestimmt werden können, oder daß es einen einzelnen solchen Punkt nicht giebt; aber es läßt sich doch eine einfachere Beziehung zwischen den Coordinaten ξ', η', ζ' nachweisen. Um die Resultate der Elimination symmetrisch zu machen, muß man die Differenziale der Gleichungen (1), (2), (3) benutzen, die indessen so einfach sind, daß sie nicht brauchen besonders niedergeschrieben zu werden. Man multiplicire nun die Gleichungen der Reihe nach mit α, α_1, α_2 und addire die Producte, so kommt, wenn man das Differenzial der ersten der Gleichungen (2) benutzt,

$$\eta'(\alpha d\beta + \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2) + \zeta'(\alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2) = 0$$

Durch Hülfe des Differenzials der letzten der Gleichungen (3) verwandelt sich dieses Resultat in

$$-\eta'(\beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2) + \zeta'(\alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2) = 0$$

Man erhält auf ganz ähnliche Weise durch Multiplication mit β, β_1, β_2 und Addition, ferner durch Multiplication mit γ, γ_1, γ_2 und Addition und gehörige Benutzung der Differenziale der übrigen Gleichungen (2) und (3), noch zwei ähnliche Gleichungen. Die Zusammenstellung aller drei liefert folgende Gleichung

$$\frac{\xi'}{\gamma d\beta + \gamma_1 d\beta_1 + \gamma_2 d\beta_2} = \frac{\eta'}{\alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2} = \frac{\zeta'}{\beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2} \quad (8)$$

Die Differenziale der Gleichungen (2) und (3) sind also nur benutzt worden, um ein symmetrisches Resultat zu erhalten. Die Gleichung (8) stellt eine gerade Linie dar, welche durch den Punkt O geht, wenn man sich unter ξ', η', ζ' die laufenden Coordinaten denkt. Es giebt also außer O nicht nur noch einen Punkt, welcher zur Zeit t ruht, sondern eine ganze Linie ist für diesen Augenblick im Körper in Ruhe. Diese Linie ist die augenblickliche Drehungsaxe genannt worden, denn sie ändert im Allgemeinen ihre Lage sowohl im Körper als im Raume jeden Augenblick. Daß aber die Drehung auch wirklich um diese Axe geschieht, geht noch deutlicher aus den spätern Formeln hervor.

Wir wollen nun in dieser Drehungsaxe einen einzelnen Punkt so wählen, daß ξ' seinem Divisor in (8) gleich wird; dann werden η' und ζ' ebenfalls ihren Divisoren gleich und man erhält für die drei Coordinaten dieses Punktes folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \gamma d\beta + \gamma_1 d\beta_1 + \gamma_2 d\beta_2 = -\beta d\gamma - \beta_1 d\gamma_1 - \beta_2 d\gamma_2 \\ \eta' &= \alpha d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2 = -\gamma d\alpha - \gamma_1 d\alpha_1 - \gamma_2 d\alpha_2 \\ \zeta' &= \beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 = -\alpha d\beta - \alpha_1 g\beta_1 - \alpha_2 d\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

bei denen die Differenziale der Gleichungen (3) benutzt worden sind.

Mit Hülfe dieser Gleichungen (9) lassen sich nun leicht folgende Formeln bilden:

$$\beta\zeta' - \gamma\eta' = \beta^2 d\alpha + \beta\beta_1 d\alpha_1 + \beta\beta_2 d\alpha_2 + \gamma^2 d\alpha + \gamma\gamma_1 d\alpha_1 + \gamma\gamma_2 d\alpha_2 =$$
$$(\beta^2 + \gamma^2)\, d\alpha + (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\, d\alpha_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)\, d\alpha_2 =$$
$$(1 - \alpha^2)\, d\alpha - \alpha\alpha_1 d\alpha_1 - \alpha\alpha_2 d\alpha_2 = d\alpha - \alpha\,(\alpha d\alpha + \alpha_1 d\alpha_1 + \alpha_2 d\alpha_2) = d\alpha$$

Hierbei ist die erste der Gleichungen (1) benutzt worden, ferner die zweite und dritte Gleichung der No. (4) und das Differenzial der ersten der Gleichungen (2). Ganz durch dieselben Hülfsmittel findet man nun allgemein

$$\left.\begin{array}{lll} d\alpha = \beta\,\zeta' - \gamma\,\eta' & d\beta = \gamma\,\xi' - \alpha\,\zeta' & d\gamma = \alpha\,\eta' - \beta\,\xi' \\ d\alpha_1 = \beta_1\zeta' - \gamma_1\eta' & d\beta_1 = \gamma_1\xi' - \alpha_1\zeta' & d\gamma_1 = \alpha_1\eta' - \beta_1\xi' \\ d\alpha_2 = \beta_2\zeta' - \gamma_2\eta' & d\beta_2 = \gamma_2\xi' - \alpha_2\zeta' & d\gamma_2 = \alpha_2\eta' - \beta_2\xi' \end{array}\right\} \quad (10)$$

Aus der ersten dieser drei Gruppen von Gleichungen folgt durch Multiplication mit $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ und Addition, wenn man (9) berücksichtigt und dann ähnlich mit den beiden anderen Gruppen verfährt

$$\left.\begin{array}{r} d\alpha^2 + d\alpha_1^2 + d\alpha_2^2 = \eta'^2 + \zeta'^2 \\ d\beta^2 + d\beta_1^2 + d\beta_2^2 = \zeta'^2 + \xi'^2 \\ d\gamma^2 + d\gamma_1^2 + d\gamma_2^2 = \xi'^2 + \eta'^2 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Man multiplicire nun die letzte der drei Gruppen mit $d\beta$, $d\beta_1$, $d\beta_2$, addire die Producte und benutze wieder das Differenzial der zweiten der Gleichungen (2) und die letzte der Gleichungen (9), verfahre dann ähnlich mit den zwei andern Gruppen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{r} d\beta d\gamma + d\beta_1 d\gamma_1 + d\beta_2 d\gamma_2 = -\,\eta'\zeta' \\ d\gamma d\alpha + d\gamma_1 d\alpha_1 + d\gamma_2 d\alpha_2 = -\,\zeta'\xi' \\ d\alpha d\beta + d\alpha_1 d\beta_1 + d\alpha_2 d\beta_2 = -\,\xi'\eta' \end{array}\right\} \quad (12)$$

Nun ist es leicht, das Quadrat der Geschwindigkeit irgend eines Punktes xyz des Körpers durch die entsprechenden Coordinaten $\xi\eta\zeta$ und $\xi'\eta'\zeta'$ auszudrücken. Man erhält nämlich aus (6), mit Benutzung von (11) und (12), wenn ds das Element des durchlaufenen Bogens darstellt:

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ = \xi^2(\eta'^2 + \zeta'^2) + \eta^2(\zeta'^2 + \xi'^2) + \zeta^2(\xi'^2 + \eta'^2) - 2\eta\zeta\eta'\zeta' - 2\zeta\xi\zeta'\xi' - 2\xi\eta\xi'\eta' \\ = \xi'^2(\eta^2 + \zeta^2) + \eta'^2(\zeta^2 + \xi^2) + \zeta'^2(\xi^2 + \eta^2) - 2\eta'\zeta'\eta\zeta - 2\zeta'\xi'\zeta\xi - 2\xi'\eta'\xi\eta \\ = (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2 \\ = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2 \end{array}\right\} \quad (13)$$

Die Coordinaten $\xi'\eta'\zeta'$ des vorher in der augenblicklichen Drehungsaxe bestimmten festen Punktes mögen in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem x'y'z' heißen; es ist dann bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha\,\xi' + \beta\,\eta' + \gamma\,\zeta' \\ y' &= \alpha_1\xi' + \beta_1\eta' + \gamma_1\zeta' \\ z' &= \alpha_2\xi' + \beta_1\eta' + \gamma_2\zeta' \end{aligned}\right\} \quad (14) \qquad \left.\begin{aligned} \xi' &= \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z' \\ \eta' &= \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z' \\ \zeta' &= \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z' \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Setzt man nun $x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2$ (16)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \varrho'^2 \quad (17)$$

und nennt den Winkel, welchen ϱ und ϱ' mit einander bilden, δ, so ergiebt sich

$$xx' + yy' + zz' = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \varrho\varrho' \cos\delta = \theta \quad (18)$$

Dieser Ausdruck ist der Kürze wegen durch θ bezeichnet worden; seine Richtigkeit ergiebt sich, wenn man mit $\varrho\varrho'$ dividirt, wodurch sich die beiden ersten Ausdrücke als Cosinus des Winkels δ darstellen. Aus (14) und (6) findet man mit Hülfe der schon oft benutzten Ausdrücke $x'dx + y'dy + z'dz = 0$ (19)

so daß also $xdx' + ydy' + zdz' = d\theta$ (20)

Aus dem letzten Ausdrucke in (13) sieht man, daß das Quadrat der Geschwindigkeit

$$ds^2 = \varrho^2\varrho'^2 - \varrho^2\varrho'^2 \cos^2\delta = \varrho^2\varrho'^2 \sin^2\delta$$

Es ist aber $\varrho \sin\delta$ die Entfernung r des Punktes xyz von der augenblicklichen Drehungsaxe, daher ist $ds = r'\varrho$ (21)

also ist ϱ' die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, denn es ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Punkt in der Entfernung 1 um die augenblickliche Drehungsaxe bewegt.

Man bilde nun die identische Gleichung

$$(\varrho^2 x' - \theta x)\,x + (\varrho^2 y' - \theta y)\,y + (\varrho^2 z' - \theta z)\,z = 0 \quad (22)$$

Ihr Differenzial ist

$$(\varrho^2 x' - \theta x)\,dx + (\varrho^2 y' - \theta y)\,dy + (\varrho^2 z' - \theta z)\,dz = 0 \quad (23)$$

wie sich sehr leicht ergiebt, da ϱ von der Zeit t unabhängig ist. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{ydz - zdy}{\varrho^2 x' - \theta x} = \frac{zdx - xdz}{\varrho^2 y' - \theta y} = \frac{xdy - ydx}{\varrho^2 z' - \theta z} \quad (24)$$

Da aber

$$(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2 =$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx + ydy + zdz)^2 = \varrho^2 ds^2$$

und

$$(\varrho^2 x' - \theta x)^2 + (\varrho^2 y' - \theta y)^2 + (\varrho^2 z' - \theta z)^2 =$$
$$\varrho^4(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2\varrho^2\theta(xx' + yy' + zz') + \theta^2(x^2 + y^2 + z^2) = \varrho^4\varrho'^2 - \varrho^2\theta^2 = \varrho^2 ds^2$$

so sind die numerischen Werthe der Zähler und Nenner der drei Brüche in (24) einander gleich. Man kann daher setzen

$$ydz - zdy = \varrho^2 x' - \theta x = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta') - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)$$
$$= \alpha(\varrho^2\xi' - \theta\xi) + \beta(\varrho^2\eta' - \theta\eta) + \gamma(\varrho^2\zeta' - \theta\zeta)$$

Der Kürze wegen schreibe man

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2\xi' - \theta\xi &= \xi'(\eta^2 + \zeta^2) - \xi(\eta\eta' + \zeta\zeta') = P \\ \varrho^2\eta' - \theta\eta &= \eta'(\zeta^2 + \xi^2) - \eta(\zeta\zeta' + \xi\xi') = Q \\ \varrho^2\zeta' - \theta\zeta &= \zeta'(\xi^2 + \eta^2) - \zeta(\xi\xi' + \eta\eta') = R \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

dann wird also

$$\left.\begin{aligned} ydz - zdy &= \varrho^2 x' - \theta x = \alpha\, P + \beta\, Q + \gamma\, R \\ zdx - xdz &= \varrho^2 y' - \theta y = \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R \\ xdy - ydx &= \varrho^2 z' - \theta z = \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Sind nun die im Körper festen Axen sogenannte Trägheitsaxen, so daß

$$\int \eta\zeta dm = 0; \quad \int \zeta\xi dm = 0; \quad \int \xi\eta dm = 0$$

und man setzt

$$\int(\eta^2 + \zeta^2)\, dm = A; \quad \int(\zeta^2 + \xi^2)\, dm = B; \quad \int(\xi^2 + \eta^2)\, dm = C$$
$$\int(ydz - zdy)\, dm = L; \quad \int(zdx - xdz)\, dm = M; \quad \int(xdy - ydx)\, dm = N$$

wo L, M, N bekanntlich constante Größen sind, da keine Kräfte auf den Körper wirken, so erhält man aus (26), wenn man alle Gleichungen mit dem Massenelemente dm multiplicirt und dann integrirt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, A\xi' + \beta\, B\eta' + \gamma\, C\zeta' &= L \\ \alpha_1 A\xi' + \beta_1 B\eta' + \gamma_1 C\zeta' &= M \\ \alpha_2 A\xi' + \beta_2 B\eta' + \gamma_2 C\zeta' &= N \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Hieraus folgt sehr leicht

$$A^2\xi'^2 + B^2\eta'^2 + C^2\zeta'^2 = L^2 + M^2 + N^2 = E^2 \qquad (28)$$

wo E das aus den drei Paaren L, M, N resultirende Kräftepaar ist.

Ferner folgt aus (27)

$$\left.\begin{aligned} A\xi' &= \alpha L + \alpha_1 M + \alpha_2 N \\ B\eta' &= \beta L + \beta_1 M + \beta_2 N \\ C\zeta' &= \gamma L + \gamma_1 M + \gamma_2 N \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} Ad\xi' &= d\alpha L + d\alpha_1 M + d\alpha_2 N = \eta'\zeta'(B - C) \\ Bd\eta' &= d\beta L + d\beta_1 M + d\beta_2 N = \zeta'\xi'(C - A) \\ Cd\zeta' &= d\gamma L + d\gamma_1 M + d\gamma_2 N = \xi'\eta'(A - B) \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

wobei die rechten Seiten dieser Gleichungen die Bildungsweisen angeben. Die letzten Theile der Gleichungen (30) sind mit Hülfe von (10) aus (29) gebildet worden. Multiplicirt man den ersten und dritten Theil der Gleichungen (30) der Reihe nach mit ξ', η', ζ' und addirt die Producte, so findet man

$$A\xi' d\xi' + B\eta' d\eta' + C\zeta' d\zeta' = 0$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$A\xi'^2 + B\eta'^2 + C\zeta'^2 = D^2 \qquad (31)$$

Aus den Gleichungen (28) und (31) kann man nun etwa ξ' und η' durch ζ' ausdrücken. Man findet so

$$\xi' = \pm \frac{\sqrt{E^2 - BD^2 + C(B-C)\zeta'^2}}{\sqrt{A(A-B)}} \qquad \eta' = \pm \frac{\sqrt{AD^2 - E^2 - C(A-C)\zeta'^2}}{\sqrt{B(A-B)}} \qquad (32)$$

also

$$\xi'\eta'(A-B)\sqrt{AB} = \pm \sqrt{AD^2 - E^2 - C(A-C)\zeta'^2}\sqrt{E^2 - BD^2 + C(B-C)\zeta'^2}$$

Setzt man nun diesen Werth in die dritte Gleichung (30) ein, so erhält man

$$dt = \pm \frac{C\sqrt{AB}\, d\zeta'}{\sqrt{AD^2 - E^2 - C(A-C)\zeta'^2}\sqrt{E^2 - BD^2 + C(B-C)\zeta'^2}} \qquad (33)$$

Das Integral dieser Gleichung giebt ζ' durch t; daher erhält man aus (32) auch η' und ξ' durch t. Aus (29) ergiebt sich aber sogleich mit Bezug auf (5)

$$A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta' = Lx + My + Nz \qquad (34)$$

Multiplicirt man die Gleichungen (26) entsprechend mit L, M, N, addirt dann die drei Producte und nimmt auf (29) Rücksicht, so gelangt man zu der Gleichung

$$(ydz - zdy)L + (zdx - xdz)M + (xdy - ydx)N = PA\xi' + QB\eta' + RC\zeta' \quad (35)$$

Aus den Gleichungen (16), (34), (35) lassen sich nun x, y, z berechnen, da ξ', η', ζ' durch die Zeit t ausgedrückt worden sind.

Diese Rechnung hat keine Schwierigkeit, wenn L und M Null wären, denn dann hätte man, wenn in (34) und (35)

$$A\xi\xi' + B\eta\eta' + C\zeta\zeta' = p \text{ und } PA\xi' + QB\eta' + RC\zeta' = q$$

gesetzt werden, aus (34)

$$z = \frac{p}{N} \text{ und } x^2 + y^2 = \varrho^2 - \frac{p^2}{N^2} \qquad (36)$$

und aus (35)

$$xdy - ydx = \frac{q\,dt}{N} \qquad (37)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{d\cdot\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{qNdt}{\varrho^2 N^2 - p^2} \qquad (38)$$

und hieraus durch Integration

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\int\frac{qNdt}{\varrho^2N^2-p^2}=T \qquad (39)$$

In diesem Integrale sind ϱ und N Constante, dagegen p und q Functionen von t. Es ist also

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}T$$

und, vermöge (36),

$$x=\frac{\sqrt{\varrho^2N^2-p^2}}{N}\cos T \text{ und } y=\frac{\sqrt{\varrho^2N^2-p^2}}{N}\sin T \qquad (40)$$

Es können also in diesem Falle die Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes des Körpers, der durch die Coordinaten ξ, η, ζ gegeben ist, zu jeder Zeit gefunden werden. Auf diesen besondern Fall läßt sich aber der allgemeine zurückführen. Denn man lege durch den Anfangspunkt O ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, bei welchem die neun Winkel $abc;\ a_1b_1c_1;\ a_2b_2c_2$ das bedeuten, was vorher durch $\alpha\beta\gamma;\ \alpha_1\beta_1\gamma_1;\ \alpha_2\beta_2\gamma_2$ bezeichnet wurde. Dieses Coordinatensystem sei aber im Raume fest. Die Coordinaten eines Punktes des Körpers in Bezug auf dieses feste System mögen x_1, y_1, z_1 sein; es ist dann

$$\left.\begin{aligned} x_1&=ax+a_1y+a_2z\\ y_1&=bx+b_1y+b_2z\\ z_1&=cx+c_1y+c_1z \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

und auch

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=\varrho^2 \qquad (42)$$

Man setze nun

$$\cos c=\frac{L}{E};\quad \cos c_1=\frac{M}{E};\quad \cos c_2=\frac{N}{E} \qquad (43)$$

was offenbar nach (28) erlaubt ist. Nach der letzten Gleichung (41) ist dann

$$Lx+My+Nz=Ez_1=p \qquad (44)$$

Aus (41) erhält man aber

$$\left.\begin{aligned} dx_1&=adx+a_1dy+a_2dz\\ dy_1&=bdx+b_1dy+b_2dz\\ dz_1&=cdx+c_1dy+c_2dz \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Da nun aus der analytischen Geometrie folgende Gleichungen bekannt sind:

$$\left.\begin{aligned} a&=b_1c_2-c_1b_2 &\quad b&=c_1a_2-a_1c_2 &\quad c&=a_1b_2-b_1a_2\\ a_1&=b_2c-c_2b &\quad b_1&=c_2a-a_2c &\quad c_1&=a_2b-b_2a\\ a_2&=b\,c_1-c\,b_1 &\quad b_2&=c\,a_1-a\,c_1 &\quad c_2&=a\,b_1-b\,a_1 \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

so wird man sich aus (41) und (45) leicht den Ausdruck bilden können

$$y_1 dx_1 - x_1 dy_1 = -c(ydz - zdy) - c_1(zdx - xdz) - c_2(xdy - ydx)$$
$$= -\frac{(ydz - zdy)L + (zdx - xdz)M + (xdy - ydx)N}{E} = -\frac{qdt}{E}$$

Man hat also jetzt die Gleichungen zu integriren

$$z_1 = \frac{p}{E};\quad y_1 dx_1 - x_1 dy_1 = -\frac{qdt}{E};\quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho^2$$

statt daß man vorher integrirte

$$z = \frac{p}{N};\quad ydx - xdy = \frac{qdt}{N};\quad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$$

Setzt man also E statt N und $-q$ statt q, so können die gefundenen Formeln benutzt werden. Man erhält auf diese Weise

$$x_1 = \frac{\sqrt{\varrho^2 E^2 - p^2}}{E}\cos T;\quad y_1 = -\frac{\sqrt{\varrho^2 E^2 - p^2}}{E}\sin T;\quad z_1 = \frac{p}{E} \qquad (47)$$

Die Coordinaten $x\ y\ z$ findet man aus $x_1\ y_1\ z_1$ durch die bekannten Formeln

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 \\ y &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 \\ z &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

IV.

Inhaltsbestimmung des durch die Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Körpers

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} = 1.$$

Betrachtet man, wie hier geschehen soll, die Exponenten α, β, γ nur als gerade Zahlen oder Brüche mit geraden Zählern, dann kann Fig. 5. einen Octanten dieses Körpers darstellen. Man theile $OX = a$ in λ gleicher Theile; ein solcher Theil sei $AA' = \frac{a}{\lambda}$. Die Linie OA umfasse l solcher Theile, so daß $OA = \frac{la}{\lambda}$. Die Linien AF und $A'F'$ sind der

Axe OY parallel und YFX ist ein Schnitt des Körpers durch die Ebene xy; es ist dann

$$AF = b\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Diese Linie denke man sich in μ gleiche Theile getheilt; einer dieser Theile sei BC, also gleich $\frac{b}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ und AB möge m solcher Theile betragen, so daß

$$AB = \frac{mb}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Für die Ordinate z findet man dann

$$\left(\frac{z}{c}\right)^\gamma = 1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right) = \left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)$$

also

$$CD = z = c\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Der Inhalt der ganzen Säule von der Höhe CD ist, wie die Figur lehrt,

$$\frac{a}{\lambda}\cdot\frac{b}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot c\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Will man nun den Inhalt J des Octanten haben, so muß man in diesem Ausdrucke offenbar dem l nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... $\lambda - 1$ beilegen, während das m die Werthe 0, 1, 2, 3, ... $\mu - 1$ erhält. Nun ist aber bekanntlich

$$\int_a^b fx\,dx = \delta\left\{fa + f(n+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+(n-1)\delta)\right\}$$

wenn $\delta = \frac{b-a}{n}$ und n unendlich groß genommen wird; daher ist auch

$$J = abc\int_0^1 dx\int_0^1 dy\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} = abc\left\{\int_0^1 dx\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}\right\}\left\{\int_0^1 dy\,(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}$$

Wer mit den Eigenschaften der Function Γ vertraut ist, kann diese Integrale leicht auf einfachere zurückführen; es ist nämlich

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1}x^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

und daher

$$\int_0^1 dx\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}$$

und

$$\int_0^1 dy\,(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}$$

also

$$J = abc\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}$$

Gauß bezeichnet $\Gamma(a+1)$ durch $\Pi(a)$, daher wäre nach seiner Bezeichnung

$$J = abc\,\frac{\Pi\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Pi\left(\frac{1}{\beta}\right)\Pi\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Es ist dies ein specieller Fall der so berühmt gewordenen Dirichlet'schen Formel.

Für den Inhalt E des ganzen Ellipsoids findet man z. B.

$$E = abc\,\frac{(\Gamma\tfrac{1}{2})^3}{\Gamma(2+\tfrac{1}{2})} = abc\,\frac{(\Gamma\tfrac{1}{2})^3}{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})} = \tfrac{4}{3}abc\,(\Gamma\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{4}{3}abc\pi$$

Um ferner das Trägheitsmoment dieses Körpers in Bezug auf irgend eine Axe zu berechnen, muß man die Integrale bestimmen

$$\int x^2 dm;\quad \int y^2 dm;\quad \int z^2 dm$$

wenn dm das Massenelement ist. Theilt man die Ordinate CD in ν gleiche Theile, so wird, wenn die Dichte der Einheit gleich gesetzt wird,

$$dm = \frac{a}{\lambda}\cdot\frac{b}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\frac{c}{\nu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

3*

und daher das erste Integral, da $\frac{l^2 a^2}{\lambda^2}$ statt x^2 zu setzen ist und α, β, γ gerade sind,

$$a^3bc\int\int\int_{-1}^{+1} dx\,dy\,dz\,x^2\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}(1-y)^{\frac{1}{\gamma}} = 8a^3bc\int_0^1 x^2\,(1-x^\alpha)^{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}\,dx\int_0^1 dy\,(1-y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$= \frac{8a^3bc}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+1\right)}$$

Für das Ellipsoid erhält man

$$\int x^2 dm = a^3bc\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,(\Gamma\frac{1}{2})^2}{\Gamma(3+\frac{1}{2})} = a^3bc\,\frac{\pi\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} = \tfrac{4}{15}a^3bc\pi = \frac{a^2}{5}E$$

Ebenso findet man natürlich

$$\int y^2 dm = \frac{b^2}{5}E \text{ und } \int z^2 dm = \frac{c^2}{5}E$$

Ueberhaupt sieht man aus dieser Darstellung, daß sich alle Integrale von der Form

$$\int x^p y^q z^r dm$$

mit derselben Leichtigkeit berechnen lassen, wie diese einfacheren, wenn an die Stelle von x, y, z die Ausdrücke treten

$$\frac{la}{\lambda};\ \frac{mb}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}};\ \frac{nc}{\nu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

und, im Falle sich das Integral über den ganzen Octanten ausdehnen soll, die l, m, n entsprechend alle ganze Werthe von 0 bis $\lambda-1$, 0 bis $\mu-1$ und 0 bis $\nu-1$ erhalten. Das Massen- oder Volumenelement behält den oben angegebenen Werth.

Sollte die Oberfläche des Octanten berechnet werden, so bildet man sich zunächst das Oberflächenelement, indem man dxdy oder hier

$$\frac{a}{\lambda}\cdot\frac{b}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

durch den Cosinus des Winkels dividirt, den die Normale des Punktes xyz mit der Axe der z bildet. Dieser Cosinus ist bekanntlich

$$\frac{\frac{\gamma}{c}\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma-1}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{2\alpha-2}+\frac{\beta^2}{b^2}\left(\frac{y}{b}\right)^{2\beta-2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{z}{c}\right)^{2\gamma-2}}}$$

und in unserem Falle treten

$$\frac{l}{\lambda};\ \frac{m}{\mu}\left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}};\ \left(1-\frac{l^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(1-\frac{m^\beta}{\mu^\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

an die Stelle von

$$\frac{x}{a},\ \frac{y}{b},\ \frac{z}{c}$$

Der Inhalt Q des Octanten wird auf diese Weise

$$Q=\frac{abc}{\gamma}\int_0^1\!\!\int_0^1 dx\,dy\,\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}x^{2\alpha-2}+\frac{\beta^2}{b^2}y^{2\beta-2}(1-x^\alpha)^{2-\frac{2}{\beta}}+\frac{\gamma^2}{c^2}(1-x^\alpha)^{2-\frac{2}{\gamma}}(1-y^\beta)^{2-\frac{2}{\gamma}}}}{(1-x^\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}(1-y^\beta)^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

Für $x^\alpha=\sin^2\varphi$ und $y^\beta=\sin^2\psi$ ergiebt sich

$$Q=\frac{4abc}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\,\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}\sin\varphi^{4-\frac{4}{\alpha}}+\frac{\beta^2}{b^2}(\cos\varphi\sin\psi)^{4-\frac{4}{\beta}}+\frac{\gamma^2}{c^2}(\cos\varphi\cos\psi)^{4-\frac{4}{\gamma}}}}{\sin\varphi^{1-\frac{2}{\alpha}}\cos\varphi^{1-\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\gamma}}\sin\psi^{1-\frac{2}{\beta}}\cos\psi^{1-\frac{2}{\gamma}}}$$

Für das Ellipsoid erhält man die bekannte Formel

$$Q=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\cos\varphi\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi\cos^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\psi\cos^2\varphi}{c^2}}$$

Drückt man nach dieser Zerlegungsweise die Anziehung aus, welche eine Kugel nach dem Newtonschen Gesetze auf einen Punkt ausübt, so gelangt man durch Vergleichung mit dem bekannten Resultate zu dem Doppelintegrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\pi}d\psi\,\frac{\cos\psi\cos^2\varphi}{\sqrt{1+n^2-2n\cos\varphi\cos\psi}}$$

welches, für $n>1$, gleich $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$ und für $n<1$, gleich $\frac{\pi}{3}\cdot n$ ist. Der letzte Werth ergiebt sich sogleich aus dem ersten, wenn man $\frac{1}{n}$ statt n setzt.

V.

Die einfachsten periodischen Functionen.

§. 1.

Bezeichnet man das Product von Functionen

$$f(x-n)f(x-n+1)f(x-n+2\ldots f(x-1)f(x)f(x+1)\ldots f(x+n-2)f(x+n-1)f(x+n)$$

durch das leicht verständliche Zeichen

$$\prod_{-n}^{n} f(x+\lambda)$$

so ist offenbar, wenn μ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet,

$$\prod_{-n}^{n} f(x+\lambda) = \prod_{-n-\mu}^{n-\mu} f(x+\mu+\lambda)$$

und daher, wenn μ nicht selbst unendlich groß ist,

$$\prod_{-\infty}^{\infty} f(x+\lambda) = \prod_{-\infty}^{\infty} f(x+\mu+\lambda) \qquad (1)$$

oder kurz

$$F(x) = F(x+\mu)$$

Es ist also $F(x)$ eine Function, welche ihren Werth nicht ändert, wenn x um irgend eine ganze Zahl zu- oder abnimmt. Unter dieser Zahl denken wir uns am bequemsten die Einheit. Man kennt also die Function $F(x)$ vollständig, sobald nur alle die Aenderungen bekannt sind, die sie erfährt, während x von 0 bis 1 wächst. Eine Function von dieser Beschaffenheit wird ganz passend eine periodische Function genannt. Zu jedem bestimmten Werthe von x gehört nur ein bestimmter Werth der Function, aber ein gegebener Werth der Function wird durch unendlich viele von einander verschiedene Werthe von x hervorgebracht.

Durch ähnliche Betrachtungen überzeugt man sich, daß auch

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+s)$$

eine periodische Function ist und ebenfalls

$$a^x$$

eine solche sein würde, wenn $a^n = 1$ wäre, für irgend einen für x erreichbaren Werth von n, ohne daß a deswegen der Einheit gleich sein müßte. Der Gedanke an die letzte Function liegt weniger nah, aber sie selbst, so wie die vorhergehende, lassen sich auf die erste zurückführen.

Die einfachste periodische Function würde man aus (1) für $f(x) = x$ erhalten, aber ein solches Product

$$\prod_{-\infty}^{\infty}(x+\lambda)$$

ist seiner Natur nach unendlich groß, sobald x keine ganze Zahl ist, und kann daher keiner Untersuchung unterworfen werden. Die einfachste Form, welche einer solchen Untersuchung fähig ist, ist

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = F(x)$$

wo a eine Constante ist, die offenbar keine ganze Zahl sein darf. Wir setzen hier voraus, daß man bei einem solchen unendlichen Producte das mittelste Glied zuerst nimmt und dann zur weitern Berechnung eine gleiche Anzahl gleich weit von beiden Seiten abstehender Factoren anwendet.

Es ist nun

$$\prod_{-n}^{n}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \prod_{-n-1}^{n-1}\frac{x+1+\lambda}{a+1+\lambda} = \frac{a-n-1}{a+n}\prod_{-n-1}^{n-1}\frac{x+1+\lambda}{a+\lambda}$$

also

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = -\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1+\lambda}{a+\lambda}$$

oder

$$F(x+1) = -F(x)$$

Setzt man hier $x+1$ statt x, so erhält man

$$F(x+2) = -F(x+1) = F(x)$$

Ferner ist

$$F(x) = \prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \prod_{-\infty}^{-1}\frac{x+\lambda}{a+\lambda}\cdot\frac{x}{a}\prod_{1}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x}{a}\prod_{\infty}^{1}\frac{x-\lambda}{a-\lambda}\prod_{1}^{\infty}\frac{x+\lambda}{a+\lambda} = \frac{x}{a}\prod_{1}^{\infty}\frac{x^2-\lambda^2}{a^2-\lambda^2}$$

für $-x$ statt x ergiebt sich also

$$F(-x) = -F(x)$$

Endlich wird hiernach für $x-\frac{1}{2}$ statt x aus der vorletzten Gleichung

$$F(\tfrac{1}{2}+x) = -F(x-\tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}-x)$$

Es ist also $F(x)$ eine periodische Function von x, welche alle mögliche Werthen durchläuft, während x von 0 bis 2 wächst, aber nach der letzten Formel braucht man diese Function nur von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ zu kennen, denn während x von $\frac{1}{2}$ bis 1 wächst, nimmt sie dieselben Werthe an, welche sie erhält, während x von $\frac{1}{2}$ bis 0 abnimmt. Da aber $F(x+1) = -F(x)$, so wiederholen sich jetzt, während x von 1 bis 2 wächst, alle die Werthe der Function, welche sie angenommen hatte, während x von 0 bis 1 wuchs.

Offenbar ist
$$F(0) = 0$$
Der Werth von $F(\frac{1}{2})$ kann willkürlich angenommen werden; am einfachsten setzt man ihn der Einheit gleich, so daß
$$F(\tfrac{1}{2}) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}+\lambda}{a+\lambda} = 1$$
wodurch sich die Constante a als $\frac{1}{2}$ ergiebt.

Diese Function wollen wir nun durch $\varphi(x)$ bezeichnen, so daß
$$\varphi(x) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{x+\lambda}{\frac{1}{2}+\lambda} = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+2\lambda}{1+2\lambda}$$
und $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$; $\varphi(-x) = -\varphi(x)$; $\varphi(x \pm 1) = -\varphi(x)$; und allgemeiner $\varphi(2n \pm x) = \pm\varphi(x)$; $\varphi(2n+1 \pm x) = \mp\varphi(x)$, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

§. 2.

Von der Function $\varphi(x)$ läßt sich ein constanter Factor absondern, da
$$\varphi(x) = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+2\lambda}{1+2\lambda} = \prod_{-\infty}^{-1} \frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda} \cdot 2x \prod_{1}^{\infty} \frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda} = 2x \prod_{1}^{\infty} \frac{2(\lambda-x)}{2\lambda-1} \cdot \frac{2(\lambda+x)}{2\lambda+1}$$
$$= 2x \prod_{1}^{\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right) = 2 \prod_{1}^{\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1} \cdot x \prod_{1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$
Der auf diese Weise hervorgetretene Coefficient soll der Kürze wegen durch den Buchstaben π bezeichnet werden, so daß
$$\pi = 2 \prod_{1}^{\infty} \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}$$
Die Zahl π ist also offenbar größer als 2. Man kann aber auch die Factoren anders gruppiren und schreiben

$$\pi = 2\prod_{1}^{\infty}\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\prod_{1}^{\infty}\frac{2\lambda}{2\lambda+1} = 4\prod_{1}^{\infty}\frac{2(\lambda+1)}{2\lambda+1}\prod_{1}^{\infty}\frac{2\lambda}{2\lambda+1} = 4\prod_{1}^{\infty}\frac{4\lambda^2+4\lambda}{4\lambda^2+4\lambda+1}$$

woraus erhellt, daß π kleiner als 4 ist. Auf diese Weise hat man π zwischen die beiden Grenzen 2 und 4 eingeschlossen. Schreibt man die beiden für π gefundenen Producte nieder, so erhält man

$$\pi = 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{63}\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{144}{143}\cdots$$

$$\pi = 4\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{40}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{120}{121}\cdot\frac{168}{169}\cdots$$

Werden beide Producte mit einander multiplicirt, indem man von beiden eine gleiche Anzahl Factoren anwendet, so giebt die Quadratwurzel aus diesem Producte für π den Werth

$$\pi = 2\sqrt{(2n+1)(2n+2)}\left\{\prod_{1}^{n}\frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right\}^2 \quad \text{für } n = \infty$$

Nimmt man hier $n = 15$, so findet man

$$\pi = 3{,}1408$$

ein Werth, der nur um 0,0007 zu klein ist. Die Function $\varphi(x)$ läßt sich nun so darstellen:

$$\varphi(x) = \pi x\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)$$

§. 3.

Das Complement der Function $\varphi(x)$ soll durch $\psi(x)$ bezeichnet werden, d. h. man setze

$$\varphi(\tfrac{1}{2}-x) = \psi(x)$$

Dann ist also

$$\psi(x) = \prod_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda+\frac{1}{2}-x}{\lambda+\frac{1}{2}} = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right) = \prod_{-\infty}^{-1}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right)\prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{2x}{2\lambda+1}\right)$$

$$= \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{2x}{2\lambda-1}\right)\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{2x}{2\lambda-1}\right)$$

oder

$$\psi(x) = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2x}{2\lambda-1}\right) = \prod_{1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{2x}{2\lambda-1}\right)^2\right)$$

Hiernach hat die Function $\psi(x)$ folgende Eigenschaften:

$$\psi(0)=1;\ \psi(\tfrac{1}{2})=0;\ \psi(-x)=\psi(x);\ \psi(x)=\varphi(\tfrac{1}{2}\pm x);\ \psi(2n\pm x)=\psi(x);$$
$$\psi(2n+1\pm x)=-\psi(x)$$

Vergleicht man beide Functionen

$$\varphi(x)=\pi x\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)\ \text{und}\ \psi(x)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2\lambda-1)^2}\right)$$

so erhellt, daß $\varphi(x)$ einen Factor mehr hat als $\psi(x)$.

§. 4.

Da $\varphi(x)=\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda}$ und $\varphi(x-a)=\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{2(x+a+\lambda)}{1+2\lambda}$ so ist

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)}=\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+a+\lambda}{x+\lambda}$$

Wenn nun in einem solchen Producte für λ zwar alle ganze Zahlen gesetzt werden sollen, welche die Grenzen des Productzeichens angeben, nur die ganze Zahl z nicht, so wollen wir dieß durch

$$\lambda\,!\,z$$

bezeichnen, so daß also

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)}=(x+a)\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+a+\lambda\,!\,0}{x+\lambda}$$

Das hier angedeutete Product enthält also im Nenner einen Factor mehr als im Zähler, kann daher in Partialbrüche aufgelöst werden, indem man setzt

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{x+a+\lambda\,!\,0}{x+\lambda}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_s}{x-s}$$

und die verschiedenen Zähler α_s bestimmt. Zu dem Zwecke denken wir uns beide Seiten der Gleichung mit irgend einem der Nenner der Partialbrüche multiplicirt, also etwa mit $x-s$, und dann $x=s$ gesetzt, so erhalten wir offenbar

$$\alpha_s=\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{s+a+\lambda\,!\,0}{s+\lambda\,!-s}=\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{a+\lambda\,!\,s}{\lambda\,!\,0}=\frac{1}{a+s}\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{a+\lambda}{\lambda\,!\,0}=\frac{1}{a+s}\prod_{-\infty}^{-1}\frac{a+\lambda}{\lambda}\cdot a\prod_{1}^{\infty}\frac{a+\lambda}{\lambda}$$

$$=\frac{a}{a+s}\prod_{1}^{\infty}\frac{\lambda^2-a^2}{\lambda^2}=\frac{\pi a}{\pi(a+s)}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{\lambda^2}\right)=\frac{\varphi(a)}{\pi(a+s)}$$

Durch diesen Werth von α_s erhält man

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)} = (x+a)\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(a)}{\pi(a+s)(x-s)} = \frac{\varphi(a)}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{a+s}+\frac{1}{x-s}\right\}$$

Für $a=\frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+s} = \sum_{-\infty}^{-1}\frac{2}{1+2s}+\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{1+2s} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{2s-1}+\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{2s+1} = -\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{2s+1}+\sum_{0}^{\infty}\frac{2}{2s+1}=0$$

also

$$\frac{\varphi(x+\frac{1}{2})}{\varphi x} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(\frac{1}{2})}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-s} = \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+s}$$

Eben so ist

$$\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+s} = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$$

daher wird

$$\frac{\varphi(x+a)}{\varphi(x)} = \varphi(a)\left\{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}+\frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\right\}$$

oder

$$\varphi(x+a) = \varphi(a)\,\psi(x)+\varphi(x)\,\psi(a)$$

§. 5.

Setzt man in der zuletzt gefundenen Gleichung erst $-a$ statt a, dann, in der so gebildeten, $\frac{1}{2}-x$ statt x und endlich in der letzten ebenfalls $-a$ statt a, so hat man im Ganzen folgende vier Formeln gewonnen

$$\begin{aligned}
\varphi(x+a) &= \varphi(x)\,\psi(a)+\varphi(a)\,\psi(x)\\
\varphi(x-a) &= \varphi(x)\,\psi(a)-\varphi(a)\,\psi(x)\\
\psi(x+a) &= \psi(x)\,\psi(a)-\varphi(a)\,\varphi(x)\\
\psi(x-a) &= \psi(x)\,\psi(a)+\varphi(a)\,\varphi(x)
\end{aligned}$$

§. 6.

Aus der letzten dieser Formeln erhält man, für $a=x$,

$$(\psi x)^2+(\varphi x)^2=1$$

und durch ganz leichte Transformationen noch folgende vier Ausdrücke

$$\varphi(x)+\varphi(y)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\varphi(x)-\varphi(y)=2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\psi(x)+\psi(y)=2\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\psi(x)-\psi(y)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

Da nach §. 2.

$$\frac{\varphi(0)}{0}=\pi$$

so ergiebt sich aus der zweiten dieser Gleichungen, wenn man $x=y+dy$ setzt,

$$\frac{\varphi(y+dy)-\varphi(y)}{dy}=\frac{\varphi\left(\frac{dy}{2}\right)}{\frac{dy}{2}}\psi\left(y+\frac{dy}{2}\right)$$

oder
$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=\pi\psi(y)$$

Nimmt man hier y gleich $\frac{1}{2}-x$ an, so erhält man zugleich

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=-\pi\varphi(x)$$

Durch Hülfe dieser Differenzialquotienten lassen sich nun die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach dem Taylorschen Satze in Reihen entwickeln, die nach steigenden Potenzen von x fortschreiten. Diese Entwicklung setzt aber bekanntlich die Kenntniß der Differenzialrechnung nicht nothwendig voraus wie, der Vollständigkeit wegen, im folgenden § gezeigt werden soll.

§. 7.

Da nach §. 2. $\varphi(x)$ nur ungerade Potenzen von x in seiner Entwicklung enthalten kann, so setzen wir

$$\varphi(x)=\sum_0^\infty a_s x^{2s+1}$$

also
$$\varphi(y)=\sum_0^\infty a_s y^{2s+1}$$

daher
$$\varphi(x)-\varphi y)=2\,\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_0^\infty a_s(x^{2s+1}-y^{2s+1})$$

oder
$$\frac{\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}}\,\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_0^\infty a_s\frac{x^{2s+1}-y^{2s+1}}{x-y}$$

Für $x=y$ erhält man hieraus
$$\pi\psi(x)=\sum_0^\infty a_s(2s+1)x^{2s}$$

folglich
$$\pi\psi(y)=\sum_0^\infty a_s(2s+1)y^{2s}$$

und daher
$$\pi\left(\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y}\right)=-\pi\frac{\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}}\,\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sum_0^\infty a_s(2s+1)\,\frac{x^{2s}-y^{2s}}{x-y}$$

Für $x=y$ ergiebt sich hieraus
$$\pi^2\varphi(x)=-\sum_0^\infty a_s 2s(2s+1)\,x^{2s-1}=-\sum_0^\infty a_{s+1}(2s+2)\,(2s+3)x^{2s+1}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit dem zuerst angenommenen liefert die Gleichung
$$a_{s+1}(2s+2)\,(2s+3)=-\pi^2 a_s$$
oder auch
$$2s\,(2s+1)\,a_s=-\pi^2 a_{s-1}$$
Ferner ist hiernach
$$(2s-2)\,(2s-1)\,a_{s-1}=-\pi^2 a_{s-2}$$
$$(2s-4)\,(2s-3)\,a_{s-2}=-\pi^2 a_{s-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\cdot 3\,a_1=-\pi^2 a_0=-\pi^2\pi$$

Bezeichnet man nun
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n \text{ durch } (1,+1)^n$$
so giebt die Multiplication aller dieser Gleichungen
$$a_s=\frac{(-1)^s\,\pi^{2s+1}}{(1,+1)^{2s+1}}$$
also
$$\varphi(x)=\sum_0^\infty\frac{(-1)^s(\pi x)^{2s+1}}{(1,+1)^{2s+1}} \text{ und } \psi(x)=\sum_0^\infty\frac{(-1)^s\,(\pi x)^{2s}}{(1,+1)^{2s}}$$

Diese Reihen nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man x statt πx setzt, denn man erhält dann

$$\varphi\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^s \, x^{2s+1}}{(1,+1)^{2s+1}} = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots$$

$$\psi\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^s \, x^{2s}}{(1,+1)^{2s}} = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots$$

§. 8.

Die Functionen $\varphi\left(\frac{x}{\pi}\right)$ und $\psi\left(\frac{x}{\pi}\right)$ sind bekanntlich durch $\sin x$ und $\cos x$ bezeichnet worden, so daß also

$$\varphi(x) = \sin \pi x \text{ und } \psi(x) = \cos \pi x$$

gesetzt werden müssen. Benutzt man jetzt diese Zeichen, so erhält man

$$\sin \pi x = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x+\lambda)}{1+2\lambda} \text{ und } \cos \pi x = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2(\frac{1}{2} - x + \lambda)}{1+2\lambda} = \prod \frac{1 - 2x + 2\lambda}{1+2\lambda}$$

also $$\frac{\cos \pi x(1-a)}{\sin \pi x} = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - 2x + 2ax + 2\lambda}{2x + 2\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^s}{x+s}$$

Da nach §. 3 $\sin \pi x$ einen Factor mehr enthält als $\cos \pi x$ so brauchte hier nicht, wie in §. 4 geschah, im Zähler ein Factor abgesondert zu werden, um das Product in Partialbrüche zerlegen zu können. Ganz wie in §. 4 ergiebt sich auch hier

$$\alpha_s = \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - 2s + 2as + 2\lambda}{2s + 2\lambda \,!\, -s} = \tfrac{1}{2} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + 2as + 2\lambda}{2\lambda \,!\, 0} = \tfrac{1}{2} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + 2as + 2\lambda}{2\lambda + 1} \cdot \frac{2\lambda + 1}{2\lambda \,!\, 0}$$

Nun ist $$\pi = 2 \prod_{1}^{\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda - 1} \prod_{1}^{\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda + 1} = 2 \prod_{-1}^{-\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda + 1} \prod_{1}^{\infty} \frac{2\lambda}{2\lambda + 1} = 2 \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda \,!\, 0}{2\lambda + 1}$$

daher wird $$\alpha_s = \frac{1}{\pi} \prod_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + 2as + 2\lambda}{2\lambda + 1} = \frac{1}{\pi} \cos \pi as$$

Es ist also $$\frac{\cos \pi x(1-a)}{\sin \pi x}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s\pi a}{x - s} = \frac{1}{\pi} \left\{ \ldots \frac{\cos 3\pi a}{x-3} + \frac{\cos 2\pi a}{x-2} + \frac{\cos \pi a}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{\cos \pi a}{x+1} + \frac{\cos 2\pi a}{x+2} + \frac{\cos 3\pi a}{x+3} + \ldots \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{2\cos \pi a}{x^2 - 1} + \frac{2\cos 2\pi a}{x^2 - 4} + \frac{2\cos 3\pi a}{x^2 - 9} + \ldots \right\}$$

Diese Reihe läßt sich besser so schreiben:

$$\frac{\cos \pi x\,(1-a)}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi x} - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos \pi a}{1-x^2} + \frac{\cos 2\pi a}{4-x^2} + \frac{\cos 3\pi a}{9-x^2} + \ldots\right\}$$

und gilt offenbar nur für positive a und nur so lange als x kleiner als 1 ist. Uebrigens ergeben sich diese Reihen durch keine der bekannten Entwicklungsweisen mit derselben Leichtigkeit. Auch die Formeln des §. 4, welche zur Entwicklung des Hauptsatzes in der Theorie dieser Functionen benutzt wurden, bilden an und für sich schon sehr nützliche und bekannte Reihen.

§. 9.

Nachdem in §. 5. die Formeln gefunden worden sind

$$\varphi(x+a) = \varphi(x)\,\psi(a) + \varphi(a)\,\psi(x)$$
$$\psi(x+a) - \psi(x)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\varphi(x)$$

muß sogleich beachtet werden, daß sich beide in eine einzige zusammenziehen lassen, nämlich, wenn man $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet, in

$$\psi(x+a) + i\varphi(x+a) = (\psi(x) + i\varphi(x))\,(\psi(a) + i\varphi(a))$$

oder wenn wir lieber die bekannten Zeichen benutzt

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\,(\cos\beta + i\sin\beta)$$

woraus dann sogleich für positive ganze n folgt

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \qquad (1)$$

Da $\qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

so ist $\qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \dfrac{\cos^2 n\alpha + \sin^2 n\alpha}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha} = \dfrac{1}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha}$

also $\qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n} = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$

so daß also (1) auch für negative ganze n gilt. Endlich erhält man noch aus (1)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)^{\frac{m}{n}} = \cos m\alpha + i\sin m\alpha$$

Für $\alpha = \dfrac{\beta}{n}$ ist hiernach

$$(\cos\beta + i\sin\beta)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\beta + i\sin\frac{m}{n}\beta$$

so daß also (1) für positive und negative, ganze und gebrochene n gilt.

Setzt man nun $n\alpha = 2\pi$, so folgt aus (1)

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

Man ist also zu einer Function gelangt, welche die merkwürdige Eigenschaft hat, daß ihre nte Potenz die Einheit giebt.

Setzt man jetzt lieber $\dfrac{2\pi}{n} = x$, so wird

$$(\cos x + i \sin x)^{\frac{2\pi}{x}} = 1$$

oder wenn man $\frac{x}{i}$ statt x einführt, und für $\cos\frac{x}{i}$ und $\sin\frac{x}{i}$ die entsprechenden Reihen setzt,

$$\left(\cos\frac{x}{i} + i \sin\frac{x}{i}\right)^{\frac{2\pi i}{x}} = \left(1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\right)^{\frac{2\pi i}{x}} = 1$$

Die Klammer ist eine bestimmte Function von x, welche durch $\chi(x)$ bezeichnet werden mag, so daß

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots = \chi(x)$$

und
$$(\chi(x))^{\frac{2\pi i}{x}} = 1$$

für $x = 1$ findet man

$$\chi(1) = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = 2{,}71828\ldots = e \text{ d. K. w.}$$

Es ist also
$$e^{2\pi i} = 1 \text{ oder } e^{\frac{x\, 2\pi i}{x}} = 1 = (\chi(x))^{\frac{2\pi i}{x}}$$

daher
$$\chi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = e^x$$

für ein positives oder negatives ganzes n ist folglich

$$e^{2n\pi i} = 1$$

Wir sind auf diese Weise zu einer neuen periodischen Function gelangt, deren Existenz in §. 1. schon angedeutet wurde; aber diese Function hat eine imaginäre Periode, denn es ist
$$e^{x+2n\pi i} = e^x e^{2n\pi i} = e^x$$

Setzt man aber lieber
$$f(x) = e^{2\pi i x}$$

so ist
$$f(x+n) = e^{2\pi i(x+n)} = e^{2\pi i x} = f(x)$$

Da offenbar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \text{ für } m = \infty$$

so kann auch
$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

als periodische Function betrachtet werden, denn es ist

$$f(x + 2n\pi i) = \left(1 + \frac{x + 2n\pi i}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = f(x)$$

Den hier benutzten Methoden der Entwicklung hätte leicht eine strengere Form gegeben werden können, wenn man nicht gleich eine unendliche Anzahl von Factoren in die Rechnung eingeführt hätte, sondern von einer endlichen Zahl auf eine beliebig große übergegangen wäre.

Prof. Schellbach.

Fig 1

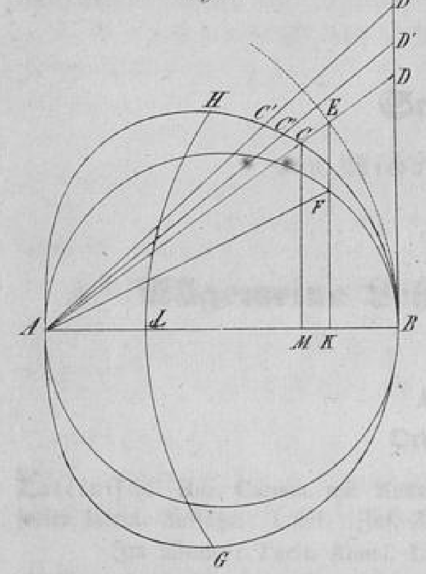

Fig 3

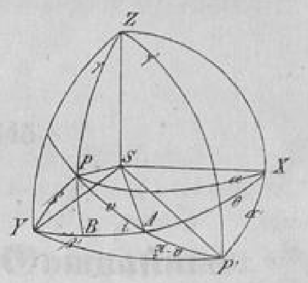

Fig 4

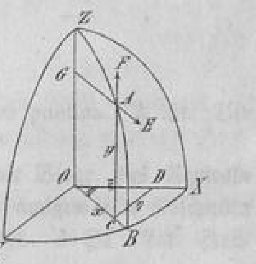

Fig 2

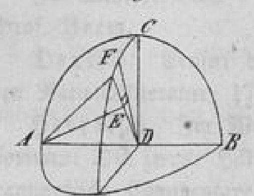

Fig 5