Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht
des Reform-Realgymnasiums und der Realschule zu Dt.-Wilmersdorf
bei Berlin. Ostern 1904.

Über das Gleichgewicht der Atmosphären der Himmelskörper.

Von

Dr. H. Lemke.

Druck von W. Pormetter in Berlin.
1904.

1904. Programm Nr. 125.

Die Untersuchungen, die bisher über das Gleichgewicht der Erdatmosphäre angestellt worden sind, gehen von der bekannten barometrischen Höhenformel aus, welche eine Beziehung zwischen der Gröfse des Luftdrucks und der Höhe über der Erdoberfläche liefert. Zur Erklärung der Druckverteilung in den unteren Schichten der Atmosphäre reicht diese Formel zweifellos aus; da sie jedoch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit die Abnahme der Schwerkraft bei wachsender Entfernung vom Mittelpunkte der Erde berücksichtigt, so geht ihre Gültigkeit über eine gewisse Grenze nicht hinaus; sie gibt infolgedessen keine Antwort auf die Frage, ob wir uns unsere Atmosphäre als begrenzt vorzustellen haben, oder ob sie sich allmählich in den Raum verliert.

Aus den Erscheinungen der Dämmerung und der Polarlichter, aus den Beobachtungen der leuchtenden Nachtwolken, welche dem Ausbruche des Krakatau in der Sundastrafse ihre Entstehung verdankten, besonders aber aus dem Aufleuchten der Sternschnuppen läfst sich der Schlufs ziehen, dafs die Lufthülle weit über jene Gebiete hinausreicht, innerhalb deren die gewöhnlichen meteorologischen Vorgänge beobachtet werden. Für die äufsersten, aber noch zuverlässig bestimmten Höhen des ersten Aufleuchtens der Sternschnuppen kann man etwa 300 km annehmen; jenseits dieser Grenze liegen keine sicheren Beobachtungen vor, welche Anhaltspunkte für die daselbst vorhandene Druckverteilung liefern könnten.

Es ist gelegentlich die Ansicht ausgesprochen worden, die Lufthülle reiche nur bis in jene Entfernung, wo die bei der täglichen Drehung auftretende Schwungkraft der Anziehungskraft der Erde das Gleichgewicht hält. Für die Höhe der Atmosphäre über den Äquatorgegenden würden sich auf diese Weise 5,6 Erdradien ergeben. Die Rechnung hat aber nur dann ihre Richtigkeit, wenn man annimmt, dafs die Atmosphäre bis zu dieser Grenze in allen ihren Teilen dieselbe Winkelgeschwindigkeit hat wie die Erde, oder mit anderen Worten, dafs sie wie ein starrer Körper rotiert. Eine solche Voraussetzung ist aber durch nichts bewiesen; vielmehr ist es weit wahrscheinlicher, dafs die Winkelgeschwindigkeit der Rotation mit wachsender Höhe beständig abnimmt.

Für die anderen Himmelskörper bestehen dieselben Schwierigkeiten. Zwar sind auf einigen Planeten mittels des Teleskops Atmosphären nachgewiesen worden, aufserdem hat die moderne Himmelsphotographie zur Entdeckung zahlloser kosmischer Gasnebel geführt, welche überall zwischen den Sternen den Raum erfüllen; aber welcher Art die Druckverteilung in ihnen ist, in welchem Zusammenhange diese Gebilde untereinander stehen, ob sie scharf abgegrenzt sind, — über dies alles läſst sich vor der Hand keine befriedigende Auskunft geben.

Welchen Bedingungen ist ein Gasteilchen unterworfen, das sich im Zustande des Gleichgewichts oder der Bewegung befindet? Zunächst wird man voraussetzen, daſs Druck, Dichtigkeit und Temperatur dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetze genügen. Freilich gilt dieses Gesetz nur für ideale Gase; es ist nicht mehr verwendbar, sobald die Dichtigkeit eine gewisse Grenze überschreitet. In diesem Falle benutzt man besser die van der Waalssche Formel. Zweitens hat man zu berücksichtigen, daſs die in der Gasmasse verteilten festen Körper erstere nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, während gleichzeitig alle Gasteilchen nach demselben Gesetze gegeneinander gravitieren. Drittens wäre die Möglichkeit zuzulassen, daſs innerhalb des Gases die Energie zu verschiedenen Zeiten verschiedene Formen annimmt; so wird sich z. B. bei einer Kompression mechanische Energie in Wärme umsetzen. Ferner ist auf Wärmeleitung und Wärmestrahlung Rücksicht zu nehmen und endlich der Einfluſs der Reibung in Rechnung zu ziehen.

Man könnte noch andere Naturerscheinungen anführen, welche auf die Druckverteilung der Gase im Raume von Einfluſs sind; aber die mitgeteilten Beispiele werden genügen, um eine Vorstellung von den Schwierigkeiten zu geben, welche sich der mathematischen Behandlung entgegenstellen würden, wenn man den Versuch machen wollte, das Problem in der Allgemeinheit, wie es die Natur stellt, zu lösen. Es wird sich daher rechtfertigen lassen, wenn man unter den in betracht kommenden Erscheinungen zunächst nur die wichtigsten auswählt und von den übrigen vorläufig absieht. Man muſs vor allem, ehe man an die Untersuchung der verwickelten Bewegungsvorgänge herangeht, die Frage des Gleichgewichts kosmischer Gasmassen erledigen, da man erst auf dieser Basis weiter in die Natur der Erscheinungen einzudringen vermag. Diese Gesichtspunkte waren für mich maſsgebend, in einer Abhandlung, welche ich im Journal für die reine und angewandte Mathematik[1]) veröffentlicht habe, die folgende Aufgabe zu formulieren:

Im dreidimensionalen Raume sollen im Endlichen eine Anzahl fester Körper von unveränderlicher Lage und endlicher Gesamtmasse gegeben sein. Zwischen diesen Körpern breitet sich ein homogenes Gas von überall gleicher Temperatur aus, welches dem Mariotteschen Gesetze genügt, und dessen Teile gegeneinander und gegen die festen Körper nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren. Es ist festzustellen, ob es möglich ist, den Druck p des Gases als Funktion der Koordinaten so zu bestimmen, daſs die Gasmasse sich im Gleichgewichte befindet.

Einen besonderen Fall der hier gestellten Aufgabe hat zuerst Zöllner[2]) behandelt. Er setzt voraus, daſs sich die Gasmasse zentrisch um einen Punkt herum anordnet, so daſs der Druck p nur eine Funktion der Entfernung r von jenem Punkte ist. Er findet für p eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, für die er ein partikuläres Integral angibt, welches besagt, daſs der Druck dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Zu weiteren Ergebnissen ist Herr Thiesen[3]) gelangt. In einer Abhandlung, die sich u. a. auch mit dem Zöllnerschen Problem beschäftigt, stellt er für das allgemeine Integral

---

1) a. a. O. Band 124. S. 143—151.
2) Über die Natur der Kometen. S. 101 u. fgd.
3) Über die Verbreitung der Atmosphäre. Berlin. 1878.

Näherungswerte auf, welche es gestatten, die Druckverteilung in grofsen Entfernungen mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit zu berechnen.

Wenn man das oben formulierte allgemeine Gleichgewichtsproblem erledigen will, geht man von den hydrostatischen Gleichgewichtsbedingungen aus und sucht diese so zu transformieren, dafs sich daraus eine partielle Differentialgleichung für den Druck p ergibt. Bezeichnet man mit ε die Dichtigkeit an der Stelle (x, y, z) des Raumes und mit Φ das Potential sämtlicher Kräfte, welche auf den Punkt einwirken, so erhält man die Gleichgewichtsbedingung

$$dp = \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz\right).$$

Die Kraftkomponenten setzen sich aus zwei Teilen zusammen: erstens aus den Attraktionswirkungen der im Raume verteilten festen Körper und zweitens aus der Anziehung der gesamten Gasmasse. Nennt man U und V die Potentiale der betreffenden Kräfte, so findet man zunächst die Gleichung

$$dp = \varepsilon \cdot (dU + dV).$$

Nach dem Mariotteschen Gesetze besteht aber zwischen dem Druck und der Dichtigkeit die Beziehung $p = a^2 \cdot \varepsilon$, wo a^2 eine positive Konstante bedeutet. Daraus folgt:

$$a^2 \cdot d \log p = dU + dV.$$

Der Punkt (x, y, z) ist für die festen Körper ein äufserer, für die Gasmasse dagegen ein innerer. Demnach wird auf Grund bekannter Sätze aus der Theorie des Newtonschen Potentials: $\triangle U = 0$, $\triangle V = -4\pi f \cdot \varepsilon$, wo f die Gravitationskonstante ist. Differentiiert man $\log p$ zweimal nach x bez. y und z und addiert die so entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \log p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \log p}{\partial z^2}\right) = -4\pi f \cdot \varepsilon.$$

Für ε setzt man wiederum seinen Wert $\frac{p}{a^2}$, für $\log p$ die Abkürzung u, endlich für $\frac{2\pi f}{a^4}$ die Bezeichnung λ ein und gelangt auf diese Weise schliefslich zu der gesuchten partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\lambda e^u. \tag{1}$$

In der oben zitierten Abhandlung im Crelleschen Journal habe ich nachgewiesen, dafs die Integrale dieser Gleichung im Unendlichen wie $-2 \log r$ unendlich werden und dafs jedes Integral, welches auf einer Anzahl geschlossener Flächen vorgeschriebene Werte annimmt, die Druckverteilung einer im Gleichgewichte befindlichen Gasmasse bestimmt. Dagegen ist die Aufgabe, diese Integrale wirklich herzustellen, unerledigt geblieben. Dies soll nun im folgenden für endliche Bereiche geschehen. Dabei ist es aber zweckmäfsig, die partielle Differentialgleichung für u durch die Transformation $u = -2 \log r + v$ in die Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{2(1-\lambda e^v)}{r^2} \tag{1a}$$

zu bringen, so dafs man sich je nach Umständen bald der einen, bald der anderen Gleichung bedienen kann.

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{2(1-\lambda e^v)}{r^2}.$$

1. Wenn man sich die Aufgabe stellt, Integrale der partiellen Differentialgleichung zu ermitteln, welche auf gegebenen Flächen vorgeschriebene Werte annehmen und in ihrem Innern eindeutig und stetig sind, so wird man von der Methode der successiven Annäherungen, welche Herr Picard in einer Reihe von Abhandlungen[1]) entwickelt hat, Gebrauch machen können. Diese Untersuchungen beziehen sich zunächst nur auf Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln; sie lassen sich aber zum grofsen Teil auch auf Gleichungen mit drei Veränderlichen ausdehnen. Zuerst wird man also den Nachweis führen müssen, dafs die Integrale, vorausgesetzt dafs sie überhaupt existieren, durch Angabe der Grenzbedingungen eindeutig bestimmt sind; alsdann ist zu zeigen, wie man diese Funktionen mit Hülfe der Methode der successiven Annäherungen herstellen kann.

Der erste der beiden zuletzt genannten Sätze läfst sich auch in folgende Form bringen: Wenn zwei Integrale v_1 und v_2 der partiellen Differentialgleichung auf der Begrenzung eines geschlossenen Bereiches dieselben Werte annehmen und im Innern nebst ihren Ableitungen eindeutig und stetig sind, so verschwindet die Funktion $w = v_1 - v_2$ für alle Stellen des Gebietes. Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bilden die beiden Raumintegrale

$$J_1=\iiint w\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{2\lambda(e^{v_1}-e^{v_2})}{r^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$J_2=\iiint\left(\frac{\partial(B\cdot w^2)}{\partial x}+\frac{\partial(B'\cdot w^2)}{\partial y}+\frac{\partial(B''\cdot w^2)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

welche sich über das Innere des Gebietes erstrecken, und in denen B, B', B'' vorläufig noch unbestimmte Funktionen von x, y, z bedeuten. Der Wert des ersten ist gleich Null, da sämtliche Integralelemente vermöge der gegebenen partiellen Differentialgleichung verschwinden. Dasselbe gilt auch von J_2, welches sich in das Oberflächenintegral

$$J_2=-\iint(B w^2\cos(n,x)+B' w^2\cos(n,y)+B'' w^2\cos(n,z))\,d\sigma$$

verwandeln läfst. Da nämlich der Voraussetzung gemäfs $w = v_1 - v_2$ auf der Begrenzung des Bereiches überall verschwindet, so ist auch jedes Integralelement in J_2 gleich Null. Man entwickelt nun $e^{v_1} - e^{v_2}$ nach Potenzen von v_1 und v_2 und erhält leicht die Gleichung

$$e^{v_1}-e^{v_2}=(v_1-v_2)\cdot f(v_1, v_2),$$

[1]) Journal de Mathématiques 1890, 1893, 1896.

wo $f(v_1, v_2)$ durch die Reihe

$$f(v_1, v_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)!} (v_1{}^{\nu} + v_1{}^{\nu-1} \cdot v_2 + \ldots + v_1 \cdot v_2{}^{\nu-1} + v_2{}^{\nu}) \tag{2}$$

definiert ist. Unter Benutzung dieser Entwickelung kann man nunmehr die Differenz $J_1 - J_2$ durch den Ausdruck

$$J_1 - J_2 = \iiint \left\{ w \cdot \left(\triangle w + \frac{2\lambda \cdot w \cdot f(v_1, v_2)}{r^2} \right) - \frac{\partial (B w^2)}{\partial x} - \frac{\partial (B' w^2)}{\partial y} - \frac{\partial (B'' w^2)}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz$$

darstellen, der sich aber auf Grund bekannter Sätze über die Transformation der Raumintegrale in den folgenden verwandeln läſst:

$$\begin{aligned} J_1 - J_2 = \iiint \Big\{ & - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{d z}\right)^2 + \frac{2\lambda w^2 f(v_1, v_2)}{r^2} \\ & - w^2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial B''}{\partial z} \right) - 2 B w \frac{\partial w}{\partial x} - 2 B' w \frac{\partial w}{d y} - 2 B'' w \frac{\partial w}{\partial z} \Big\} dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Diese Funktion, welche, wie oben gezeigt wurde, verschwinden muſs, enthält unter dem Integralzeichen eine quadratische Form der vier Variabeln $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$. Angenommen, die Form wäre eine definite, so lieſse sich daraus der Schluſs ziehen, daſs für das ganze Gebiet w nebst seinen ersten Abteilungen gleich Null ist, oder mit anderen Worten, daſs es nur ein Integral der partiellen Differentialgleichung gibt, welches auf der Begrenzung des Bereiches vorgeschriebene Werte annimmt und im Innern eindeutig und stetig ist.

Soll die quadratische Form

$$\left(\frac{\partial w}{d x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 2 B w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + 2 B' w \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + 2 B'' w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + w^2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial B''}{\partial z} - \frac{2\lambda \cdot f}{r^2} \right)$$

definit sein, so müssen sich die unbestimmten Funktionen B, B′, B″ so wählen lassen, daſs die Ungleichung

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial B''}{\partial z} - B^2 - B'^2 - B''^2 - \frac{2\lambda \cdot f}{r^2} > 0 \tag{3}$$

besteht. Zunächst ist klar, daſs $f(v_1, v_2)$ für alle endlichen Werte der Variabeln endlich bleibt. Infolgedessen muſs sich eine positive Zahl M angeben lassen, welche für irgend eine Stelle des Gebietes die Bedingung

$$\frac{2\lambda \cdot f(v_1, v_2)}{r^2} < M$$

erfüllt, wobei allerdings vorauszusetzen ist, daſs der Punkt $x = y = z = 0$ dem Bereiche nicht angehört. Man bestimmt B, B′, B″ aus den Differentialgleichungen

$$\frac{dB}{dx} - B^2 = \beta,$$

$$\frac{dB'}{dy} - B'^2 = \beta',$$

$$\frac{dB''}{dz} - B''^2 = \beta'',$$

in welchen β, β' und β'' Konstanten sind, über die noch in zweckentsprechender Weise verfügt werden soll. Die Integrale heifsen

$$B = \sqrt{\beta} \cdot \operatorname{cotg}((c - x)\sqrt{\beta}),$$

$$B' = \sqrt{\beta'} \cdot \operatorname{cotg}((c' - y)\sqrt{\beta'}),$$

$$B'' = \sqrt{\beta''} \cdot \operatorname{cotg}((c'' - z)\sqrt{\beta''}),$$

und c, c′, c″ bedeuten darin willkürliche Konstanten. Hat man die Funktionen B, B′, B″ in der angegebenen Weise definiert, so unterwirft man die Gröfsen β, β', β'' der Bedingung

$$\beta + \beta' + \beta'' > M,$$

die, wenn sie besteht, die Ungleichung (3) nach sich zieht.

Der hier mitgeteilte Beweis beruht auf zwei Voraussetzungen; einerseits darf in dem betrachteten Gebiete keine der Variabeln v_1 und v_2 unendlich werden, andererseits war angenommen worden, dafs der Punkt $r = 0$ aufserhalb des Bereiches liegt. Die zweite Annahme ist nicht unbedingt nötig; läfst man sie fallen, so geht man am besten auf die Gleichung $\triangle u = -2\lambda e^u$ zurück und wendet auf letztere dieselben Betrachtungen wie oben an.

2. Es soll jetzt die Aufgabe gelöst werden, durch successive Annäherungen dasjenige Integral der partiellen Differentialgleichung herzustellen, welches auf der Begrenzung eines im Endlichen gelegenen Gebietes vorgeschriebene Werte annimmt. Man kann annehmen, dafs die Grenzwerte der Funktion überall gleich Null sind; ist dies nicht der Fall, so modifizieren sich die folgenden Untersuchungen nur in unerheblicher Weise. Es seien alsdann unter Voraussetzung dieser Grenzbedingungen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ Integrale der partiellen Differentialgleichungen

$$\triangle v_1 = \frac{2(1 - \lambda e)}{r^2}, \quad \triangle v_2 = \frac{2(1 - \lambda e^{v_1})}{r^2}, \quad \triangle v_3 = \frac{2(1 - \lambda e^{v_1})}{r^2}, \ldots,$$

so dafs allgemein

$$v_k = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1 - \lambda e^{v_{k-1}}}{r^2} \cdot G(\xi, \eta, \zeta;\; x, y, z) \cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{4}$$

ist, wenn man unter G (ξ, η, ζ; x, y, z) die zu dem betrachteten Bereiche gehörige Greensche Funktion versteht. Zunächst soll bewiesen werden, dafs jede der Funktionen $v_1, v_2, v_3, \ldots$, so weit man die Reihe auch fortsetzen mag, ihrem absoluten Betrage nach kleiner als Eins gemacht werden kann.

Es ist klar, daſs eine positive Zahl M vorhanden sein muſs, welche gröſser ist als der Wert, den das Raumintegral

$$F = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{G(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)}{r^2}\cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

an irgend einer Stelle des Bereiches annimmt. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daſs F mit abnehmender Gröſse des Gebietes gegen Null konvergiert. Vorauszusetzen ist dabei freilich, daſs der Punkt $r = 0$ nicht in das Innere des Bereiches fällt. Der absolute Betrag von v_1 ist alsdann kleiner als $M\cdot|\lambda e - 1|$ und infolge dessen kleiner als Eins, da ja M hinreichend klein angenommen werden kann.

Da $|v_1| < 1$ ist, wird auch $|\lambda e^{v_1} - 1| < |\lambda e - 1|$ und daher v_2 dem absoluten Betrage nach kleiner als $M\cdot|\lambda e - 1| < 1$. Dasselbe gilt für die absoluten Beträge der Funktionen $v_3, v_4, \cdots\cdots$.

Man bildet nunmehr die Differenz

$$(5) \qquad v_k - v_{k-1} = \frac{\lambda}{2\pi}\iiint \frac{e^{v_{k-2}} - e^{v_{k-1}}}{r^2}\cdot G(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

indem man dem Index k die Werte 2, 3, 4, ... beilegt und $v_0 = 1$ setzt.

Die Funktion $\lambda\cdot(e^{v_{k-1}} - e^{v_{k-2}})$, welche unter dem Integralzeichen auftritt, läſst sich in die Form $(v_{k-1} - v_{k-2})\cdot f(v_{k-1}, v_{k-2})$ überführen, wo $f(v_{k-1}, v_{k-2})$, wie die Gleichung (2) zeigt, eine unendliche Reihe ist, die nach steigenden Potenzen von v_{k-1} und v_{k-2} fortschreitet. Da der Bereich so klein gewählt werden kann, daſs für irgend welche Werte des Index k die Veränderlichen v_k dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins sind, so ist es möglich, eine positive Zahl H anzugeben, welche gröſser ist als der absolute Betrag der Funktion $f(v_{k-1}, v_{k-2})$. Daraus folgt: $|\lambda(e^{v_1} - e)| < H$, und da

$$v_2 - v_1 = \frac{\lambda}{2\pi}\iiint \frac{e^{v_1} - e}{r^2}\cdot G(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

ist, $|v_2 - v_1| < M\cdot H$. Ferner wird aus demselben Grunde $|\lambda(e^{v_2} - e^{v_1})| < M\cdot H^2$ und $|v_3 - v_2| < M^2\cdot H^2$. Es ist also allgemein $|v_k - v_{k-1}| < M^{k-1}\cdot H^{k-1}$ für $k = 2, 3, 4, \cdots$.

Diese Vorbereitungen waren nötig, um die Konvergenz der Reihe

$$(6) \qquad v = v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \ldots\ldots$$

nachzuweisen, in welcher $v_0 = 1$ zu setzen ist. Die Konvergenz findet statt, wenn $M\cdot H < 1$ ist, was sich stets durch hinreichende Verkleinerung des Gebietes erreichen läſst.

Es läſst sich nun zeigen, daſs der Grenzwert der unendlichen Reihe (6) der partiellen Differentialgleichung $\triangle v = \frac{2(1 - \lambda e^v)}{r^2}$ genügt. Zu dem Zwecke geht man von der Funktion

$$v_{k+1} = v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots\cdots + (v_{k+1} - v_k)$$

aus, welche, wie oben angegeben wurde, der Differentialgleichung $\triangle v_{k+1} = \frac{2(1 - \lambda e^{v_k})}{r^2}$ genügt. Geht man auf beiden Seiten zur Grenze über und setzt $\lim_{k=\infty} v_{k+1} = \lim_{k=\infty} v_k = v$, so ergibt sich ohne weiteres die letzte Behauptung.

3. Will man die eben durchgeführte Untersuchung auch auf Gebiete in der Umgebung des unendlich fernen Punktes ausdehnen, so mufs man sich zunächst eine Vorstellung davon zu machen suchen, welche Gestalt das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{2(1-\lambda \cdot e^v)}{r^2}$$

für grofse Werte von r annimmt. Führt man an Stelle von x, y, z die Koordinaten ϱ, ϑ, φ vermittels der Gleichungen

$$x = \frac{1}{\varrho} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi, \quad y = \frac{1}{\varrho} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \quad z = \frac{1}{\varrho} \cdot \cos\vartheta$$

ein, so erhält man

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\left(\operatorname{cotg}\vartheta \cdot \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{2(1-e^v)}{\varrho^2},$$

wo die Konstante λ gleich 1 gesetzt wurde. Man überzeugt sich nun durch eine einfache Rechnung, dafs, wenn man von Gliedern höherer Ordnung absieht, d. h. in diesem Falle von solchen, welche $\varrho^{\frac{k}{2}}$, $k > 1$, zum Faktor haben, die Integralfunktion v durch den Ausdruck

$$(8) \qquad v = f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho}$$

wiedergegeben werden kann. Darin ist $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ zu setzen, und f bez g sind lediglich Funktionen von ϑ und φ, also von ϱ unabhängig. Setzt man den angegebenen Wert für v in die partielle Differentialgleichung (7) ein, entwickelt auf beiden Seiten nach steigenden Potenzen von $\sqrt{\varrho}$ und vernachlässigt die Glieder höherer Ordnung, so erkennt man, dafs sowohl f als auch g derselben Gleichung

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = 0$$

Genüge leisten. Durch eine zweckmäfsige Transformation kann man (9) in eine für die Integration bequemere Form überführen. Zunächst definiert man zwei neue unabhängige Variabeln durch die Gleichungen

$$\xi = \operatorname{tg}\vartheta \cdot \sin\varphi, \quad \eta = \operatorname{tg}\vartheta \cdot \cos\varphi$$

und erhält dadurch die partielle Differentialgleichung

$$(1+\xi^2)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2 h}{\partial \xi\,\partial \eta} + (1+\eta^2)\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + 2\xi\frac{\partial h}{\partial \xi} + 2\eta\frac{\partial h}{\partial \eta} = 0,$$

welche sich für $\mu = \frac{\xi \cdot \eta}{1+\eta^2}$, $\nu = \frac{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}{1+\eta^2}$ in die folgende verwandelt:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \nu^2} = 0.$$

Aus letzterer lassen sich die Funktionen $f(\vartheta, \varphi)$ und $g(\vartheta, \varphi)$ nach bekannten Methoden bestimmen.

4. Da durch die Untersuchungen des vorigen Abschnitts der Charakter der Integralfunktion v in der Umgebung des unendlich fernen Punktes festgestellt worden ist, so kann man jetzt dazu übergehen, dasjenige Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{2(1 - e^v)}{r^2} \tag{1a}$$

zu bestimmen, welches für große Werte von r beliebig wenig von

$$f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log r) \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log r) \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

verschieden ist, auf der Oberfläche eines in der Umgebung des unendlich fernen Punktes gelegenen Bereiches verschwindet und im Innern desselben eindeutig und stetig ist. Es ist aber zweckmäßig, vorher die Transformation mittels reziproker Radien anzuwenden. Setzt man nämlich

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

so geht aus (1a) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{v}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{v}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{v}{\varrho}\right) = \frac{2(1 - e^v)}{\varrho^3} \tag{10}$$

hervor. Gleichzeitig verwandelt sich der Punkt $r = \infty$ in den Punkt $\xi = \eta = \zeta = 0$, und das angegebene Gebiet geht in ein anderes über, welches ganz in der Umgebung des Nullpunktes verläuft. Die gestellte Aufgabe wird demnach unter den veränderten Bedingungen die folgende Form annehmen: Es ist dasjenige Integral der Gleichung (10) aufzusuchen, welches auf der Oberfläche eines in der Umgebung des Nullpunktes gelegenen Bereiches vorgeschriebene Werte, z. B. die Werte Null, annimmt, im Innern eindeutig und stetig ist und für kleine Werte von ϱ gegen

$$v_0 = f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho}$$

konvergiert.

Man bestimmt zu diesem Zwecke die Funktionen $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots$ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{v_\lambda}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{v_\lambda}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{v_\lambda}{\varrho}\right) = \frac{2(1 - e^{v_{\lambda-1}})}{\varrho^3}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots,$$

indem man für v_0 den mitgeteilten Wert einsetzt. Dann ergibt sich allgemein

$$v_\lambda = -\frac{\varrho}{2\pi} \cdot \iiint \frac{1 - e^{v_{\lambda-1}}}{\varrho^3} \cdot G(\xi, \eta, \zeta;\ a, b, c) \cdot da\, db\, dc, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

wo sich die Integration über das Innere des Gebietes erstreckt, und $G(\xi, \eta, \zeta;\ a, b, c)$ die zu dem Bereiche gehörige Greensche Funktion bedeutet. Dabei sind die Grenzwerte

Null vorausgesetzt; anderenfalls mufs man dem Raumintegral noch eine Funktion ψ hinzufügen, welche der Gleichung $\triangle \psi = 0$ genügt und auf der Begrenzung die gegebenen Werte annimmt.

Es soll nun bewiesen werden, dafs die sämtlichen Funktionen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ für $\varrho = 0$ wie

$$f_\lambda(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + g_\lambda(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho}$$

verschwinden. Zu diesem Zwecke schreibt man

$$\xi = \varrho \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad \eta = \varrho \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad \zeta = \varrho \cdot \cos \vartheta,$$

woraus sich für v_λ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\left(\operatorname{cotg} \vartheta \cdot \frac{\partial v_\lambda}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{2(1 - e^{v_{\lambda-1}})}{\varrho^2}$$

ergibt. Substituiert man hierin auf der rechten Seite den oben angegebenen Wert von v_0 und setzt links versuchsweise für v_1 einen Ausdruck von der Form

$$f_1(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + g_1(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho}$$

ein, entwickelt man ferner auf beiden Seiten nach Potenzen von $\sqrt{\varrho}$ und vernachlässigt die Glieder zweiter und höherer Ordnung, so findet man

$$\begin{aligned}
&-\frac{f_1}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) - \frac{g_1}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \\
&+ \frac{1}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\operatorname{cotg} \vartheta \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi^2}\right) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \\
&+ \frac{1}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\operatorname{cotg} \vartheta \cdot \frac{\partial g_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial \varphi^2}\right) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \\
&= -\frac{2 f_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \cdot \cos(\alpha \log \varrho) - \frac{2 g_0}{\varrho^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin(\alpha \log \varrho).
\end{aligned}$$

Man kann dieser Gleichung für $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ genügen, wenn man $f_1(\vartheta, \varphi) = f_0(\vartheta, \varphi)$, $g_1(\vartheta, \varphi) = g_0(\vartheta, \varphi)$ setzt, und man erhält durch ähnliche Betrachtungen allgemein $f_\lambda = f_{\lambda-1}$, $g_\lambda = g_{\lambda-1}$, d. h. alle Funktionen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ nähern sich für abnehmendes ϱ demselben Werte

$$f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho},$$

in welchem f und g die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \frac{\partial h}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = 0$$

befriedigen.

Es läfst sich weiter eine Zahl P angeben, welche die Eigenschaft hat, dafs bei hinreichender Verkleinerung des Bereiches die sämtlichen Funktionen $\varrho^{-\frac{1}{2}} \cdot v_\lambda$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als P sind. Zu diesem Zwecke erinnert man sich, dafs für v_λ die Darstellung

$$v_\lambda = f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + V_\lambda$$

gilt, wo V_λ von höherer Ordnung als der erste Teil, welcher mit $\sqrt{\varrho}$ multipliziert ist, verschwindet. Es wird infolgedessen möglich sein, durch Verkleinerung des Bereiches den Wert von $\varrho^{-\frac{1}{2}} \cdot V_\lambda$ unter jede Grenze sinken zu lassen, sodafs der absolute Betrag von $\varrho^{-\frac{1}{2}} \cdot v_\lambda$ von demjenigen des Ausdruckes

$$f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho)$$

beliebig wenig verschieden ist. Letzterer hat aber eine obere Grenze, vorausgesetzt dafs die Funktionen $f(\vartheta, \varphi)$ und $g(\vartheta, \varphi)$ für bestimmte Werte des Arguments nicht unendlich werden. Man mufs jedoch diesen Fall ausschliefsen; denn er widerspräche der Bedingung, dafs das Integral v im ganzen unendlichen Raume eindeutig, endlich und stetig sein soll. Aus dieser Überlegung ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der zuletzt angegebenen Behauptung.

Es ist nunmehr die Konvergenz der Reihe

$$v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_\lambda - v_{\lambda-1}) + \ldots$$

nachzuweisen, in welcher das allgemeine Glied durch das Raumintegral

$$v_\lambda - v_{\lambda-1} = \frac{\varrho}{2\pi} \cdot \iiint \frac{e^{v_{\lambda-1}} - e^{v_{\lambda-2}}}{\varrho^3} \cdot G(\xi, \eta, \zeta;\ a, b, c) \cdot da\, db\, dc \tag{12}$$

definiert wird. Man entwickelt zunächst die Differenz $e^{v_{\lambda-1}} - e^{v_{\lambda-2}}$ nach steigenden Potenzen von $v_{\lambda-1}$ und $v_{\lambda-2}$, so wie es bereits an einer früheren Stelle geschehen ist; man setzt also

$$e^{v_{\lambda-1}} - e^{v_{\lambda-2}} = (v_{\lambda-1} - v_{\lambda-2}) \cdot \chi(v_{\lambda-1}, v_{\lambda-2})$$

und erkennt, dafs der absolute Betrag der Funktion $\chi(v_{\lambda-1}, v_{\lambda-2})$ stets kleiner ist als eine endliche, positive Zahl Q, wenn die Veränderlichen $v_{\lambda-1}$, $v_{\lambda-2}$ hinreichend klein angenommen werden.

Will man der Frage näher treten, wie weit sich der Konvergenzbereich der Reihe innerhalb des (ξ, η, ζ)-Raumes gegen den Nullpunkt hin erstreckt, so ist es nötig, den Wert des Integrales

$$J = \frac{\varrho}{2\pi} \cdot \iiint \frac{G(\xi, \eta, \zeta;\ a, b, c)}{\{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\}^3}\, da\, db\, dc$$

in der Umgebung jener Stelle zu ermitteln. Zu diesem Zwecke führt man die Polarkoordinaten

$$a = q \cdot \sin\omega \cdot \cos\psi, \quad b = q \cdot \sin\omega \cdot \sin\psi, \quad c = q \cdot \cos\omega$$

ein und nimmt der Einfachheit halber den Punkt (ξ, η, ζ) auf der ζ-Achse in der Entfernung p vom Koordinatenanfangspunkte an. Berücksichtigt man, dafs die Greensche Funktion G im Pole (ξ, η, ζ) wie

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}}$$

unendlich wird, integriert man ferner in bezug auf q zwischen den Grenzen A_0 und A, in bezug auf ω zwischen den Grenzen 0 und π und endlich in bezug auf ψ zwischen 0 und 2π, so nimmt der in betracht kommende Teil des Raumintegrals die folgende Gestalt an:

$$\frac{\varrho}{2\pi}\int_{A_0}^{A}\frac{dq}{q}\int_0^{\pi}\frac{\sin\omega\cdot d\omega}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\omega}}\int_0^{2\pi}d\psi.$$

Die Integration läſst sich nach bekannten Methoden ausführen; man erhält zunächst:

$$\frac{\varrho}{p}\cdot\int_{A_0}^{A}\frac{dq}{q^2}\{\sqrt{p^2+q^2+2pq}-\sqrt{p^2+q^2-2pq}\},$$

einen Ausdruck, in welchem den Quadratwurzeln ein wohlbestimmtes Vorzeichen beizulegen ist. Denn da sie die Entfernung zweier Raumpunkte darstellen, so müssen sie notwendig positiv sein. Daraus folgt, daſs die erste stets gleich $p+q$ ist, die zweite aber gleich $p-q$ für $p\geqq q$ und gleich $q-p$ für $p\leqq q$.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich, daſs der Integrationsbereich in zwei Teile zerlegt werden muſs, je nachdem q kleiner oder gröſser als p ist; man findet demnach für das Raumintegral den Wert

$$2\varrho\cdot\int_{A_0}^{p}\frac{dq}{q^2}+\frac{2\varrho}{p}\cdot\int_p^{A}\frac{dq}{q}$$

oder, wenn man noch berücksichtigt, daſs $\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ in diesem Falle gleich p ist,

$$2\left(\frac{p}{A_0}-1\right)+2\log\left(\frac{A}{p}\right).$$

Sind nun die Differenzen $\frac{p}{A_0}-1$ und $\frac{A}{p}-1$ hinreichend klein, so kann der Betrag des Raumintegrals J beliebig verkleinert werden. Man erreicht dies einfach dadurch, daſs man A nur wenig gröſser als A_0 annimmt. Dabei darf aber, wie hier ausdrücklich hervorgehoben werden soll, A_0 unter keinen Umständen verschwinden; d. h. die Verkleinerung des Raumintegrals J ist in der Umgebung der Stelle $\xi=\eta=\zeta=0$ nur in einem Gebiete möglich, welches den Koordinatenanfangspunkt selbst nicht enthält. Allerdings steht nichts im Wege, die Grenze des Bereiches dem Nullpunkt beliebig nahe zu rücken.

Nach diesen Vorbereitungen wird man im stande sein, den Konvergenzbeweis zu führen. Bezeichnet man den gröſsten Wert, den das Integral J innerhalb des Bereiches annimmt, mit M, so ergibt sich aus der Formel (12), daſs der absolute Betrag von v_2-v_1 kleiner als $\sqrt{\varrho}\cdot P\cdot Q\cdot M$ und der von $e^{v_2}-e^{v_1}$ kleiner als $\sqrt{\varrho}\cdot P\cdot Q^2\cdot M$ ist. Aus derselben Gleichung folgt aber weiter $|v_3-v_2|<\sqrt{\varrho}\cdot P\cdot Q^2\cdot M^2$ und allgemein

$$(13)\qquad |v_\lambda-v_{\lambda-1}|<\sqrt{\varrho}\cdot P\cdot Q^{\lambda-1}\cdot M^{\lambda-1}.$$

Die Reihe konvergiert, wenn $M < \frac{1}{Q}$ ist, wo Q eine Zahl bedeutet, die, wie man leicht einsieht, für abnehmendes ϱ gegen Eins konvergiert. Da nun M beliebig klein gemacht werden kann, so ist es möglich, der Ungleichung $MQ < 1$ zu genügen, vorausgesetzt, dafs der Punkt (ξ, η, ζ) nicht mit dem Nullpunkte zusammenfällt.

Es bleibt zum Schlufs noch der Nachweis übrig, dafs der Grenzwert v der Reihe

$$v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + (v_\lambda - v_{\lambda-1}) + \cdots$$

auch wirklich der partiellen Differentialgleichung (10) genügt. Die Summe der $\lambda + 1$ ersten Glieder, welche gleich v_λ ist, befriedigt die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{v_\lambda}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{v_\lambda}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{v_\lambda}{\varrho}\right) = \frac{2\,(1 - e^{v_{\lambda-1}})}{\varrho^3}.$$

Nun ist $\lim\limits_{\lambda=\infty} v_\lambda = \lim\limits_{\lambda=\infty} v_{\lambda-1} = v$; daraus ergiebt sich sofort

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{v}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{v}{\varrho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{v}{\varrho}\right) = \frac{2\,(1 - e^{v})}{\varrho^3}.$$

5. Es dürfte von Interesse sein, den Charakter der Funktion v in der Umgebung des unendlich fernen Punktes einer genaueren Untersuchung zu unterziehen. Es wurde oben gezeigt, dafs, abgesehen von Gliedern höherer Ordnung, v in der Form

$$\{f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho)\} \cdot \sqrt{\varrho}$$

darstellbar ist. Beschränkt man sich zunächst der Einfachheit halber auf

$$f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho},$$

— für den zweiten Teil gelten genau dieselben Betrachtungen — so ergibt sich, dafs dieser Ausdruck als eine Schwingung aufgefafst werden kann, deren Amplitude $f(\vartheta, \varphi) \cdot \sqrt{\varrho}$ mit abnehmendem ϱ beliebig klein wird. Die Werte der Funktion $f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho}$ sind bald positiv bald negativ. Zur Bestimmung der dazwischen liegenden Nullstellen berücksichtigt man, dafs der Kosinus verschwindet, wenn das Argument ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Die zugehörigen Werte von ϱ ergeben sich aus der Formel

$$\varrho_n = e^{-\frac{2n+1}{2\alpha} \cdot \pi},$$

wenn man darin für n irgend eine positive oder negative ganze Zahl einsetzt. Da es sich um kleine Werte von ϱ handelt, so werden in diesem Falle allerdings hauptsächlich die positiven ganzen Zahlen in betracht kommen.

Auch der allgemeine Ausdruck für v läfst sich in der Umgebung des Nullpunktes ähnlich behandeln. Man führt zwei Funktionen σ und ε durch die Gleichungen

$$f(\vartheta, \varphi) \cdot \sqrt{\varrho} = \sigma \cdot \cos \varepsilon, \quad g(\vartheta, \varphi) \cdot \sqrt{\varrho} = \sigma \cdot \sin \varepsilon$$

ein, aus denen sich σ und ε in der Form

$$\sigma = \sqrt{\varrho \cdot (f^2(\vartheta, \varphi) + g^2(\vartheta, \varphi))}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{g(\vartheta, \varphi)}{f(\vartheta, \varphi)}$$

berechnen lassen. Dann erhält man

$$f(\vartheta, \varphi) \cdot \cos(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} + g(\vartheta, \varphi) \cdot \sin(\alpha \log \varrho) \cdot \sqrt{\varrho} = \sigma \cdot \cos(\alpha \log \varrho - \varepsilon),$$

und die Nullstellen von v werden aus der Gleichung

$$\varrho_n = e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{g(\vartheta, \varphi)}{f(\vartheta, \varphi)}}$$

gefunden. Bildet man der Reihe nach ϱ_k, ϱ_{k+1}, ϱ_{k+2}, ..., so sieht man, dafs diese Zahlen eine geometrische Progression repräsentieren, deren Quotient gleich $e^{-\frac{\pi}{\alpha}}$ ist, und man erhält als Abstand zweier benachbarter Nullstellen

$$\varrho_k - \varrho_{k+1} = \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\alpha}}\right) \cdot e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{g(\vartheta, \varphi)}{f(\vartheta, \varphi)}},$$

einen Wert, welcher gegen Null konvergiert, wenn k unbegrenzt zunimmt. Die Funktion v oszilliert demnach bei abnehmendem ϱ in immer kleineren Intervallen, welche in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes unter jede Grenze hinabgehen, fortwährend zwischen positiven und negativen Werten hin und her, während gleichzeitig ihre Amplitude dem Werte Null zustrebt.

6. Im Vorhergehenden ist die Aufgabe gelöst worden, dasjenige Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{2(1 - e^v)}{r^2}$$

innerhalb eines hinreichend kleinen Gebietes zu bestimmen, welches auf der Begrenzung vorgeschriebene Werte annimmt. Es wurde dabei besonders ausführlich der Fall untersucht, dafs der Bereich in der Nachbarschaft des unendlich fernen Punktes gelegen ist. Es wird sich nun weiter darum handeln, den Gültigkeitsbereich jener Funktion auszudehnen, also ein Integral v zu vermitteln, welches nicht allein in einem beschränkten Gebiete sondern im ganzen Raume mit Ausschlufs des unendlich fernen Punktes den gestellten Anforderungen genügt. Dies kann man mittels des alternierenden Verfahrens erreichen. Vorher soll jedoch an einen Satz aus der Lehre vom Newtonschen Potential erinnert werden, von welchem bei den folgenden Untersuchungen Gebrauch gemacht werden wird.

Um den Koordinatenanfangspunkt seien zwei konzentrische Kugeln mit den Radien r_1 und r_0 konstruiert, welche einen schalenförmigen Bereich B einschliefsen. Auf der einen Begrenzungsfläche, z. B. auf der äufseren mit dem Radius r_1, möge das Integral v' der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} = 0$$

verschwinden, während es auf der anderen Begrenzung beliebige Werte annimmt, welche zwischen den Grenzen A und a liegen, wo A im algebraischen Sinne die obere und a die untere Grenze ist. Es läfst sich dann zeigen, dafs für alle Punkte im Innern des schalenförmigen Gebietes die Bedingung

(14) $$a \cdot q \leqq v' \leqq A \cdot q$$

erfüllt ist, wenn man mit q einen positiven echten Bruch bezeichnet. Zunächst beweist man, dafs, wenn für zwei Integrale v und $\bar{v}$ der Gleichung $\triangle v = 0$ auf der Begrenzung die Ungleichung $\bar{v} \leqq v$ besteht, für kein dreifach ausgedehntes Gebiet im Innern $\bar{v} > v$ sein kann. Denn angenommen, es wäre daselbst $\bar{v} > v$, so müfste eine geschlossene Fläche vorhanden sein, auf welcher die Differenz $\bar{v} - v$ verschwindet. Da letztere aber der Differentialgleichung $\triangle (\bar{v} - v) = 0$ genüge leistet, so würde nach einem bekannten Satze aus der Theorie dieser Gleichung $\bar{v} - v$ für alle Punkte im Innern der genannten Fläche gleich Null sein, was der Annahme widerspricht.

Es seien nun v', v'', v''' Integrale der Gleichung $\triangle v = 0$ von folgender Beschaffenheit: Alle drei mögen auf der Kugel mit dem Radius r_1 verschwinden; auf der anderen Begrenzungsfläche soll v' Werte annehmen, die zwischen den Grenzen A und a liegen, v'' soll ebendaselbst gleich A, v''' gleich a sein. Man überzeugt sich leicht, dafs dann für alle Punkte des schalenförmigen Bereiches

$$v'' = A \cdot \frac{\frac{r_1}{r} - 1}{\frac{r_1}{r_0} - 1}, \quad v''' = a \cdot \frac{\frac{r_1}{r} - 1}{\frac{r_1}{r_0} - 1}$$

ist, wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gesetzt wurde. Der Faktor

$$q = \frac{\frac{r_1}{r} - 1}{\frac{r_1}{r_0} - 1},$$

welcher in diesen Formeln auftritt, ist für alle Werte von r zwischen r_0 und r_1 kleiner als Eins. Andererseits ist nach dem vorhin bewiesenen Satze im Innern des Bereiches $v''' \leqq v' \leqq v''$, woraus sich alsbald die Richtigkeit der Ungleichungen $aq \leqq v' \leqq Aq$ ergibt. Nennt man C den gröfseren der absoluten Beträge von A und a, so findet man schliefslich $|v'| \leqq Cq$.

7. Bei der Anwendung des alternierenden Verfahrens ist es zweckmäfsig, auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\lambda e^u \tag{1}$$

zurückzugehen, aus welcher, wie an einer früheren Stelle gezeigt wurde, die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{2(1 - \lambda e^v)}{r^2} \tag{1a}$$

vermittels der Substitution $u = -2\log r + v$ hervorging.

Die beiden zur Verschmelzung gelangenden Bereiche B_1 und B_2 sollen von schalenförmiger Gestalt sein; jeder von ihnen würde also im einfachsten Falle von zwei konzentrischen Kugelflächen begrenzt werden. Die Begrenzungsflächen von B_1 seien (r_1) und (R_1), die von B_2 bez. (r_2) und (R_2). Beide Bereiche mögen ein räumliches Gebiet G, welches von den Flächen (r_2) und (R_1) begrenzt wird, gemeinsam haben. Endlich sollen

B_1 und B_2 hinreichend klein gewählt werden, d. h. so klein, daſs es möglich ist, mittels der Methode der successiven Annäherungen Integrale der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = -2\lambda e^{u_{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

zu ermitteln, welche auf der Begrenzung vorgeschriebene Werte annehmen und im Innern eindeutig und stetig sind. Man setzt $u_0 = 0$ und bestimmt zunächst aus der Differentialgleichung $\triangle u_1 = -2\lambda$ eine Funktion u_{11}, welche auf der Begrenzung von B_1 verschwindet. Man erhält

$$u_{11} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \iiint G(x, y, z;\; a, b, c) \cdot da\, db\, dc,$$

wo sich die Integration über das Innere von B_1 erstreckt. Ist der Bereich hinreichend klein, so gibt es eine beliebig kleine Zahl M_1, so daſs

$$u_{11} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \iiint G(x, y, z;\; a, b, c) \cdot da\, db\, dc \leqq M_1$$

ist. Es sei ferner $\bar{u}_{11}$ ein Integral derselben Differentialgleichung, welches im Innern von B_2 eindeutig und stetig ist, auf (R_2) verschwindet und auf (r_2) dieselben Werte annimmt wie u_{11}. Man findet

$$\bar{u}_{11} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \iiint G(x, y, z;\; a, b, c) \cdot da\, db\, dc + \bar{w}_{11},$$

wo die Integration sich auf das Innere des Bereiches B_2 bezieht und $\bar{w}_{11}$ dasjenige Integral der Gleichung $\triangle w = 0$ ist, welches auf (R_2) verschwindet und auf (r_2) dieselben Werte wie u_{11} annimmt. Nun ist, wie aus einem früheren Satze folgt, $\bar{w}_{11} \leqq M_1 \cdot q$, $q < 1$, und infolge dessen $\bar{u}_{11} \leqq M_2 + M_1 \cdot q$, wenn man mit M_2 eine Gröſse bezeichnet, die für den Bereich B_2 dieselbe Bedeutung hat wie M_1 für B_1. Nennt man M die gröſsere der beiden Zahlen M_1 und M_2, so hat man a potiori $\bar{u}_{11} \leqq M(1+q)$.

Es sei u_{12} dasjenige Integral der Differentialgleichung $\triangle u_1 = -2\lambda$, welches im Innern von B_1 eindeutig und stetig ist, auf (r_1) verschwindet und auf (R_1) dieselben Werte wie $\bar{u}_{11}$ annimmt. Dann ist

$$u_{12} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \iiint G(x, y, z;\; a, b, c) \cdot da\, db\, dc + w_{12},$$

wo die Integration sich über das Innere von B_1 erstreckt und w_{12} dasjenige Integral der Gleichung $\triangle w = 0$ ist, welches auf (r_1) verschwindet und auf (R_1) dieselben Werte wie $\bar{u}_{11}$ annimmt. Es ist demnach im Innern des Gebietes B_1 die Funktion w_{12} kleiner als $M(1+q) \cdot q$ und $u_{12} \leqq M(1+q+q^2)$.

Ferner sei $\bar{u}_{12}$ ein Integral derselben Gleichung, welches auf (R_2) verschwindet, auf (r_2) dieselben Werte annimmt wie u_{12} und im Innern von B_2 eindeutig und stetig ist. Diese Funktion läſst sich in der Form

$$\bar{u}_{12} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \iiint G(x, y, z;\; a, b, c) \cdot da\, db\, dc + \bar{w}_{12}$$

darstellen, wo das Raumintegral sich auf den Bereich B_2 bezieht und $\overline{w}_{12}$ ein Integral der Gleichung $\triangle w = 0$ mit denselben Grenzbedingungen wie $\overline{u}_{12}$ ist. Da im Innern von B_2 die Funktion $\overline{w}_{12} \leq M(1+q+q^2)\cdot q$ ist, mufs ebendaselbst $\overline{u}_{12} \leq M(1+q+q^2+q^3)$ sein.

Setzt man dies Verfahren weiter fort, so erhält man zwei Reihen von Funktionen, u_{1k} und $\overline{u}_{1k}$, welche, wie aus ihrer Darstellung unmittelbar folgt, sämtlich positiv sind und überdies den Ungleichungen

$$(15)\qquad \begin{aligned} \overline{u}_{1k} &\leqq M\cdot(1+q+q^2+\cdots+q^{2k-2}) \leqq \frac{M}{1-q}, \\ \overline{u}_{1k} &\leqq M\cdot(1+q+q^2+\cdots+q^{2k-1}) \leqq \frac{M}{1-q} \end{aligned}$$

unterworfen sind.

Von den Funktionen u_{1k} und $\overline{u}_{1k}$ läfst sich beweisen, dafs sie mit wachsenden Werten des Index k beständig gröfser werden. Auf der Begrenzung von B_1 war u_{11} gleich Null, $\overline{u}_{11}$ im Innern von B_2 und damit auf (R_1) positiv, u_{12} auf der Begrenzung von B_1 gröfser oder gleich u_{11}. Daraus folgt, dafs für das Innere dieses Bereiches $u_{12} > u_{11}$ ist. Diese Ungleichung hat aber zur Folge, dafs auf (r_2) die Funktion $\overline{u}_{12} > \overline{u}_{11}$ ist, während auf (R_2) beide verschwinden. Daraus ergibt sich für das Innere von B_2 die Bedingung $\overline{u}_{12} > \overline{u}_{11}$. Führt man die angegebenen Betrachtungen fort, so findet man allgemein $u_{1k} > u_{1k-1}$, $\overline{u}_{1k} > \overline{u}_{1k-1}$.

Da die positiven Funktionen u_{1k} und $\overline{u}_{1k}$ beständig wachsen und dabei kleiner als eine endliche Zahl $\frac{M}{1-q}$ bleiben, so müssen sie gegen zwei bestimmte Grenzwerte u_1 und $\overline{u}_1$ konvergieren. Letztere haben folgende Eigenschaften: Sie genügen derselben Differentialgleichung $\triangle u_1 = -2\lambda$ und sind im Innern von B_1 bez. B_2 eindeutig und stetig. Auf (r_1) verschwindet u_1 und nimmt auf (R_1) dieselben Werte wie $\overline{u}_1$ an; auf (R_2) verschwindet $\overline{u}_1$ und stimmt auf (r_2) mit u_1 überein. In dem von den Flächen (r_2) und (R_1) begrenzten schalenförmigen Gebiete sind also u_1 und $\overline{u}_1$ identisch, da sie ja auf der Begrenzung einander gleich sind. Da ferner M mit abnehmender Gröfse des Bereiches gegen Null konvergiert, so kann man u_1 und $\overline{u}_1$ kleiner als Eins wählen.

Die soeben gefundenen Grenzfunktionen setzt man in die Differentialgleichung $\triangle u_2 = -2\lambda e^{u_1}$ rechter Hand ein und ermittelt für die Bereiche B_1 und B_2 zwei Reihen von Funktionen u_{2k} und $\overline{u}_{2k}$ genau ebenso wie vorher u_{1k} und $\overline{u}_{1k}$. Da u_1 und $\overline{u}_1$ zwischen Null und Eins liegen, so wird e^{u_1} bez. $e^{\overline{u}_1}$ zwischen 1 und e gelegen sein. Man erhält daher allgemein

$$(16)\qquad u_{2k} \leqq \frac{M\cdot e}{1-q}, \quad \overline{u}_{2k} \leqq \frac{M\cdot e}{1-q}.$$

Da ferner die genannten Funktionen mit wachsenden Werten des Index k gröfser und gröfser werden, so müssen sie gegen zwei bestimmte Grenzwerte u_2 und $\overline{u}_2$ konvergieren, welche überdies in dem von den Flächen (r_2) und (R_1) begrenzten Gebiete mit einander übereinstimmen. Durch zweckmäfsige Verkleinerung der Bereiche läfst sich alsdann noch jede von ihnen kleiner als Eins machen.

Das Verfahren kann weiter fortgesetzt werden, und man gelangt ganz allgemein zu zwei Grenzfunktionen u_m und $\bar{u}_m$, welche die Differentialgleichung $\triangle u_m = -2\lambda e^{u_{m-1}}$ befriedigen und im übrigen ähnliche Eigenschaften haben wie u_1 und $\bar{u}_1$. Alsdann bildet man die unendlichen Reihen

$$(17)\qquad \begin{aligned} u &= u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_m - u_{m-1}) + \dots, \\ \bar{u} &= \bar{u}_1 + (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) + (\bar{u}_3 - \bar{u}_2) + \dots + (\bar{u}_m - \bar{u}_{m-1}) + \dots \end{aligned}$$

und beweist ihre Konvergenz genau ebenso, wie es auf Seite 9 für die daselbst aufgestellten Reihen geschehen ist. Die Funktionen u und $\bar{u}$ genügen der Differentialgleichung $\triangle u = -2\lambda e^u$, sie sind im Innern von B_1 bez. B_2 eindeutig und stetig und stimmen innerhalb des Bereiches, welcher beiden Gebieten gemeinsam ist, mit einander überein.

Es bietet keine Schwierigkeiten, das alternierende Verfahren auf mehr als zwei zur Verschmelzung gelangende Bereiche anzuwenden, vorausgesetzt, dafs jeder von ihnen hinreichend klein in dem oben angegebenen Sinne ist. Auf diese Weise gelingt es, den Existenzbeweis für die Integrale der partiellen Differentialgleichung $\triangle u = -2\lambda e^u$, in einem beliebig weit ausgedehnten, aber ganz im Endlichen gelegenen Gebiete zu führen. Der unendlich ferne Punkt selbst bleibt, wie die Erörterungen der Nr. (4) zeigten, ausgeschlossen.

Das Verfahren ka … an gelangt ganz allgemein
zu zwei Grenzfunktionen u … chung $\triangle u_m = -2\lambda e^{u_{m-1}}$
befriedigen und im übrige … u_1 und $\bar{u}_1$. Alsdann bildet
man die unendlichen Reih …

(17) $u = u_1 + \ldots {}_1) + \ldots,$
$\bar{u} = \bar{u}_1 + \ldots {}_1) + \ldots$

und beweist ihre Konverg … 9 für die daselbst auf-
gestellten Reihen gescheh … genügen der Differential-
gleichung $\triangle u = -2\lambda e^u$, … eindeutig und stetig und
stimmen innerhalb des Be … meinsam ist, mit einander
überein.

Es bietet keine Sc … rfahren auf mehr als zwei
zur Verschmelzung gelange … etzt, daſs jeder von ihnen
hinreichend klein in dem … se Weise gelingt es, den
Existenzbeweis für die Int … chung $\triangle u = -2\lambda e^u$, in
einem beliebig weit ausged … genen Gebiete zu führen.
Der unendlich ferne Punk … der Nr. (4) zeigten, aus-
geschlossen.