Die Mathematik gilt von jeher als die gewisseste und unbezweifeltste aller Wissenschaften; sie stellt ein in sich gefestigtes Lehrgebäude dar, weil sie in logisch unanfechtbarer Weise ihre Sätze aufbaut, indem sie diese aus Definitionen und Prämissen folgerichtig entwickelt. Aber gerade diese Grundbegriffe und Voraussetzungen sind noch vielfach dem Streite und der Kritik ausgesetzt. Die Mathematiker kümmerten sich früher wenig um sie, denn sie betrachteten es stets als ihre vornehmste Aufgabe, die Methodik ihrer Wissenschaft zu vervollkommnen und zu verfeinern, und das Ergebnis ihrer Untersuchungen war für sie der Maßstab, nach dem sie die Richtigkeit der Grundlagen, von denen sie ausgingen, beurteilten. Die Philosophen, denen die logische und erkenntnistheoretische Untersuchung der mathematischen Voraussetzungen lange Zeit allein überlassen blieb, mußten zu verschiedenen Ansichten kommen, weil sie von verschiedenen Standpunkten aus an diese Untersuchung herantraten. Erst im vorigen Jahrhundert beschäftigten sich auch Mathematiker mit der ihnen mehr als den Philosophen zukommenden Aufgabe, die logische Bedeutung und den erkenntnistheoretischen Wert der Grundlagen der Mathematik festzustellen; dadurch erhielten viele mathematische Entwicklungen erst die Sicherheit, die ihnen stillschweigend schon lange zugesprochen war.

Besonders weit gingen die Anschauungen über die Natur des Zahlbegriffs auseinander. Es liegt dies in diesem Grundbegriff der Arithmetik selbst begründet; denn kein mathematischer Begriff hat außerhalb der eigentlichen Wissenschaft eine so allgemeine Bedeutung gewonnen wie der Zahlbegriff. Die weitverbreitete Verwendung, die er im praktischen Leben hat, ließ seinen Ursprung und seine logische Bedeutung verdunkeln, und als die Mathematiker durch formale Erweiterung der Methoden ihrer Wissenschaft aus ihm die Begriffe der gebrochenen, negativen und irrationalen Zahlen entwickelten, da war es schwer, die neuen Begriffe mit dem lange vertrauten Zahlbegriff in Einklang zu bringen. Nun hat allerdings auch ihn die mathematische Kritik vor ihr Forum gezogen, um seine Existenzberechtigung zu sichern. Es ist das Verdienst von Weierstraß, Dedekind, Cantor und Kronecker, die mathematische Untersuchung diesem Begriffe zugeführt zu haben, dem die Philosophie seit alten Zeiten ihr Interesse entgegengebracht hat. Wenn nun trotz — oder vielmehr infolge dieser neueren Kritik eine gewisse Unsicherheit bei der Anwendung des Zahlbegriffs und besonders eine Verschiedenheit der Ansichten über seine Natur unverkennbar ist, so erklärt sich dies damit, daß jene formal entwickelten Begriffe eine Übertragung und Darstellung in der Anschauung, wie sie vom Begriff der ganzen Zahl so geläufig ist, nur schwer gestatten. Indem so jede Spekulation über den Zahlbegriff dem Boden der Erfahrung entzogen ist, kann sie zu verschiedenen Anschauungen über sein Wesen führen, die nicht immer von ungleichem Werte zu sein brauchen.

Bei dieser Sachlage ist es nun interessant und für die Klärung der Meinungen von Wichtigkeit, die Ansichten von solchen Männern zu kennen, die mit der philosophischen Einsicht eine hervorragende mathematische Begabung verbinden und in beiden Wissenschaften durch ihre schöpferische Tätigkeit zu den maßgebenden Autoren gehören. Gerade die Ansichten

Leibniz' über die Grundbegriffe der Mathematik sind in dieser Beziehung von Wert. Eine Darstellung derselben ist um so mehr angebracht, da dieser Teil seiner systematischen Arbeit bei den Zeitgenossen weniger Beachtung fand als seine philosophischen und allgemeinen Bestrebungen. Im folgenden sollen seine Anschauungen über den Ursprung und das Wesen des Zahlbegriffs, sowie die logische Bedeutung und Anwendung desselben in der Mathematik dargestellt werden.

I.

Ursprung und Wesen der Zahlvorstellung.

Was ist die Zahl? Ist sie eine Tatsache der Erfahrung oder ist sie ein Verstandesbegriff? Verdanken wir die Kenntnis der Zahlen einer Abstraktion aus Beobachtungen, oder liegen die Zahlen den Beobachtungen im Bewußtsein schon zu Grunde? Diese Fragen sind die Grundprobleme einer jeden Erörterung über den Zahlbegriff. Beide Fragen sind in der geschichtlichen Entwicklung bejahend beantwortet und mit gewichtigen Gründen belegt worden. Es sind die beiden von Wundt[1]) mit „Realismus“ und „Nominalismus“ bezeichneten Grundanschauungen, die sich hier gegenüberstehen. Die eine sieht die Zahlen — wie überhaupt alle mathematischen Begriffe — als einen ursprünglichen Besitzstand des menschlichen Geistes an, die durch ihre logische Evidenz und Allgemeingültigkeit reale Existenz im Geiste haben; die andere leugnet diese Realität: jene Begriffe sind empirisch erworben und erhalten ihre Konstanz durch die für sie durch subjektive Willkür eingeführten Namen oder Symbole.

Bei Leibniz finden sich schon in den frühesten Schriften Gedanken über den Zahlbegriff; sind doch überhaupt Logik und Arithmetik die Ausgangspunkte seiner wissenschaftlichen Entdeckungen gewesen. Eine eingehendere Darstellung über den Ursprung der Zahl kann aber erst den „Nouveaux essais“ entnommen werden. Die Zahl erscheint hier als eine intellektuelle Vorstellung, die nicht von den Dingen der Außenwelt herrührt, sondern von dem denkenden Subjekte selbst hervorgebracht wird. Die Zahlen stammen wie alle Vorstellungen nicht von den Sinnen ab; sie entstehen vielmehr allmählich im Geiste selbst und zwar auf Anregung durch die Sinne, aber ihre Quelle ist das Innere der Seele. Es ist der alte Streit um die „eingeborenen Ideen“, in den Leibniz zu Gunsten derselben im Gegensatz zu Locke eingreift. Den Beweis für die Annahme eines eingeborenen Seeleninhaltes findet er in der Tatsache,[2]) daß es Erkenntnisse gibt, die wegen ihres allgemeingültigen und notwendigen Charakters unmöglich aus der Erfahrung stammen können. Die Quelle dieser Erkenntnisse muß daher der Verstand selbst sein, und da er aus diesem Grunde nicht leer und inhaltlos sein kann, so müssen gewisse Ideen apriori in ihm aller Erkenntnis zu Grunde liegen. Diese sind nun nicht etwa als schon fertige Begriffe aufzufassen, deren sich der Verstand von Anfang an deutlich bewußt ist, sondern es sind virtuelle Kenntnisse, präformierte Anlagen und Neigungen des Geistes, die zu den unbewußten, gleichsam instinktartigen Erkenntnissen gehören. Sollen diese unbewußten Vorstellungen (petites perceptions) zu bewußten werden, so muß ihr Inhalt durch den denkenden Geist apperzipiert werden. Nur durch die Erfahrung, also durch sinnliche Wahrnehmung können die keimartig eingeborenen Anlagen geweckt und zur Entwicklung gebracht werden.

---

[1]) Logik II (1894) S. 101.

[2]) Nouv. ess. I. Erdm. 204 ff. (Erdmann, Leibnitii Opera philosophica, Berolini 1840).

Zu diesen eingeborenen Vorstellungen gehören auch die Zahlen,[1]) die demnach als ein unbewußter Besitz der Seele allen unseren Beobachtungen zu Grunde liegen. Um auf die Höhe des Bewußtseins gebracht zu werden, bedürfen sie einer Mehrheit von Dingen, die „gezählt“ werden. Diese Dinge brauchen keineswegs gleichartig zu sein; sie sind auch nicht daran gebunden, extensive Größen zu sein; ja selbst unkörperliche Dinge können gezählt werden. So liefern z. B. die Vorstellungen Gott, Engel, Mensch, Bewegung in ihrer Gesamtheit die Zahl „vier“.[2]) Die Erfahrung ist also bei der Erwerbung der Zahlvorstellung nicht ausgeschlossen, aber ihr Anteil reicht nicht weiter, als daß sie die Veranlassung ist zur Apperzeption der schon vorhandenen, aber noch unbewußten Vorstellungen; die Weiterentwicklung der Vorstellung findet unabhängig von der Erfahrung durch die Selbstbetätigung des Geistes statt. Die sinnlichen Vorstellungen enthalten nämlich die Wahrheiten zwar schon in bewußter, aber noch verworrener Gestalt. Erst eine zweite und höhere Apperzeption macht diese zunächst noch verworrenen Vorstellungen zu klaren und deutlichen Zahlbegriffen, die nun, nachdem sie ihre verworrenen Formen der Sinnlichkeit verloren haben, vom Selbstbewußtsein aufgenommen werden.

Die Zahlen stammen also nicht aus der Außenwelt — dieses Ergebnis steht vorläufig fest — und ebensowenig aus den sinnlichen Elementen der Vorstellungstätigkeit; sie bilden vielmehr einen ursprünglich dunklen und unbewußten Inhalt des Geistes, dessen sich dieser in der Apperzeption durch Vermittlung der Sinne bewußt wird. Mit dieser Erkenntnis, die zunächst nur den Vorgang der Erwerbung von Zahlvorstellungen erklärt, ist nun noch keine hinreichende Kenntnis über das Wesen dieser Vorstellungen gewonnen. — Mit Locke unterscheidet Leibniz[3]) Vorstellungen, denen ein Korrelat der Außenwelt entspricht, von solchen, die dieses Korrelat nicht haben. Die ersteren sind Vorstellungen von Substanzen und deren Modifikationen; die anderen sind Relationsvorstellungen, welche die gegenseitigen Beziehungen mehrerer einfacher, vom Verstande zusammengefaßter Ideen enthalten. Diese bezeichnen keinen gegenständlichen Inhalt; sie haben vielmehr „etwas vom Gedankenwesen an sich“.[4]) In prägnanterer Weise kennzeichnet Leibniz diesen Unterschied durch die Bezeichnungen des Konkreten und des Abstrakten. Die Substanzen gelten in diesem Sinne als konkrete Vorstellungen, wohingegen mit abstrakt diejenigen Vorstellungen bezeichnet werden, die nicht von einer vorhandenen Wirklichkeit abgeleitet, von den Sinnen und der Erfahrung abstrahiert, sondern aus der Vernunft allein erschaffen worden sind.[5])

Diese Unterscheidung in den Vorstellungen veranlaßt die Frage: zu welcher Art gehören die Zahlen? Dem naiven Realismus, der an die Übereinstimmung unserer Vorstellungen mit der Wirklichkeit glaubte und demgemäß die Zahlen mit dem Gezählten verwechselte, ist durch Lockes kritische Untersuchungen ein Ende gemacht, indem er zwischen Eigenschaften, welche den Dingen zukommen, und solchen, die im reflektierenden Geiste hervorgebracht werden, unterschied. Während aber sein Empirismus die Zahlen als einfache Modi,[6]) also als Eigenschaften von Substanzen gelten läßt, erklärt der Rationalismus Leibniz' diese für Relationen,

---

[1]) Nouv. ess. I, 3. Erdm. 219.

[2]) De arte combinatoria, Erdm. 8. Vgl. dagegen die Ansicht J. St. Mills.

[3]) Erdm. 238.

[4]) Nouv. ess. II, 25. Erdm. 276: Les relations et les ordres ont quelque chose de l'être de raison.

[5]) Erdm. 63: Nam concreta vere res sunt, abstracta non sunt res sed rerum modi; modi autem nihil aliud sunt quam relationes rei ad intellectum, seu apparendi facultates.

[6]) Vgl. Locke, Über den menschlichen Verstand (Reclam-Ausgabe) I, 249.

die nur im denkenden Subjekte ihre Existenz haben. „Peut-être que douzaine ou vingtaine ne sont que les Relations et ne sont constituées que par le rapport à l'entendement. Les unités sont à part et l'entendement les prend ensemble, quelques dispersées qu'elles soient."[1]) Und noch bestimmter heißt es in einem Briefe an Des Bosses aus dem Jahre 1706 „Numeri unitates, fractiones naturam habent relationum."[2])

Es scheint nun aber, als ob Leibniz diese Ansicht erst auf der Höhe der philosophischen Entwicklung zum klaren Bewußtsein gekommen ist; denn noch im Jahre 1684 erklärt er die Zahlen als Objekte aller Sinne: „Tales (i. e. notiones distinctas) habere solemus circa notiones pluribus sensibus communes, ut numeri, magnitudinis, figurae".[3]) Die Zahlvorstellung soll also wie die der Größe und der Gestalt in unserem Geiste in ähnlicher Weise entstehen, wie die der primären Qualitäten Lockes. Leibniz zeigt sich in dieser Auffassung in seinem Denken noch von Aristoteles abhängig, dem die Begriffe Abstraktionen von vorhandenen Wirklichkeiten waren. Nach der eigenen Aussage unseres Philosophen ist es die Tendenz seiner Philosophie, Aristoteles mit Platon zu vereinen.[4]) Diese Tendenz ist auf der Stufe der philosophischen Entwicklung, in der die Nouveaux essais entstanden, erreicht; das Denken hat wie bei Platon die Kraft, den Inhalt der Begriffe auf Anregung durch die Sinne selbst hervorzubringen. Daher sind jene Vorstellungen, welche aus mehreren Sinnen stammen sollen, als Gebilde des reinen Verstandes aufzufassen: „Ces idées qu'on dit venir de plus d'un sens, comme celle de l'espace, figure, mouvement, nous sont plutôt du sens commun, c'est-à-dire de l'esprit même; car ce sont des idées de l'entendement pur, mais qui ont du rapport à l'extérieur et que les sens font apercevoir; aussi sont elles capables de définitions et de démonstrations."[5])

Das Ergebnis dieser Ausführungen ist die Tatsache, daß die Zahlen — wie überhaupt alle mathematischen Begriffe — nicht nur apriorischen Ursprungs sind, sondern auch rein begriffliche Existenz haben. Sie bestehen nur im Geiste und haben infolge ihrer logischen Evidenz selbständige Realität. Will man diese Auffassung in die anfangs gekennzeichneten Richtungen einordnen, so muß man sie ohne Zweifel dem „mathematischen Realismus" zuweisen. Diese Zuordnung erhält ihre Rechtfertigung durch das Verhältnis, in dem die Begriffe (idées) zu den sinnlichen Bildern (images) stehen. Beide sind grundverschieden und voneinander völlig unabhängig.[6]) Die sinnliche Anschauung kann nur einzelne Bilder liefern, aber keinen allen diesen Bildern gemeinsamen Begriff; dieser ist ein Produkt des Verstandes, wozu freilich die Erfahrung die Gelegenheitsursache bildet. „Les connaissances des figures non plus que celles des nombres ne dépendent pas de l'imagination, quoiqu'elle y serve; et un Mathématicien peut connaître exactement la nature d'un ennéagone et d'un décagone parcequ'il a le moyen de les fabriquer et de les examiner, quoiqu'il ne puisse point les discerner à la vue."[7])

Wenn nun auch die Zahlen auf Veranlassung durch die Sinneswahrnehmung erst zum Bewußtsein gebracht werden, so ist diese Mitwirkung der Erfahrung keineswegs als eine Wieder-

---

[1]) Nouv. ess. II, 12. Erdm. 238.
[2]) Erdm. 435.
[3]) Meditationes de cognitione, veritate et ideis; Erdm. 79.
[4]) Nouv. ess., avant-propos u. I, 1.
[5]) Nouv. ess. II, 5. Erdm. 230.
[6]) Nouv. ess. I, 1 u. IV, 2.
[7]) Nouv. ess. II, 29. Erdm. 291.

erinnerung aufzufassen, wie bei Platon, dem die Zahlen nur die Auffrischung von verblaßten Resten eines präexistentialen Wissens sind. Andererseits erhebt sich Leibniz' Auffassung auch weit über die nahe verwandte Ansicht Descartes', welcher die Zahlen auch als einen ursprünglichen Besitz des menschlichen Geistes erklärt. Wie alle mathematischen Begriffe so sind auch die Zahlen bei diesem Philosophen und Mathematiker die ewigen Wahrheiten, die primären Voraussetzungen des Seins und als solche von der Beschaffenheit desselben klar geschieden.[1]) Diese Auffassung läßt aber eine konsequente Durchführung vermissen. Indem Descartes in den „Prinzipien" die Zahlen mit den anschaulichen Größen identifiziert, kehrt er jenes ursprüngliche Verhältnis um; die Zahlen erscheinen als Abstraktionen von gegebenen Dingen und werden mit den gezählten Dingen gleichgesetzt und damit zu einem „Modus" der Dinge erklärt.[2]) Dieselbe Unsicherheit zeigt das Verhältnis der Zahlen zu den sinnlichen Bildern in den Responsionen an Gassendi,[3]) in denen die Zahlen bald rein begriffliche Existenz haben sollen, bald Anschauungen sind, denen Dinge der realen Welt vorgebildet sind.

Lehrreich ist nun ein Vergleich der Ansicht Leibniz' mit den entgegengesetzten Auffassungen, wie sie im mathematischen Nominalismus, den außer Mathematikern wie Cardan und Stifel, besonders Philosophen des Empirismus wie Locke, Hume, J. St. Mill und in neuerer Zeit Dühring vertreten, zum Ausdruck kommen.[4]) Wie die geometrischen Grundbegriffe im Sinne dieser Betrachtungsweise als Resultate von Abstraktionen aus der Erfahrung erscheinen, die zu konstanten Begriffen durch eine willkürliche Definition und durch Elimination der veränderlichen empirischen Elemente werden, so gelten auch die Zahlen als solche Abstraktionsprodukte. Nun lassen sich für die ganzen positiven Zahlen ebenso wie für die geometrischen Grundbegriffe die Objekte, an denen jener Abstraktionsprozeß vorgenommen wurde, leicht angeben. Die Mathematik kennt aber auch negative, irrationale und imaginäre Zahlen, denen solche Dinge der Wirklichkeit nicht entsprechen. Diese Zahlen können also nicht durch Abstraktion gewonnen sein, sondern stellen sich als inhaltlose Nominaldefinitionen dar. An dieser Tatsache ändert auch die anschauliche Zuordnung der Zahlen zu den Punkten der sog. Zahlenaxe bezw. Zahlenebene nichts, denn diese Darstellung hat nur den Wert einer nachträglichen Veranschaulichung von Begriffen, die durch formale Erweiterung arithmetischer Operationen gewonnen sind. Um nun auch diesen Zahlen ihren erkenntnistheoretischen Platz anzuweisen, werden diese Formen des Zahlbegriffs vielfach als Funktionen des anschaulichen Begriffs der positiven ganzen Zahl aufgefaßt oder — wie von den beiden Dühring[5]) — sogar als mathematische Begriffe ganz verworfen und in das Gebiet der phantastischen Spielereien verwiesen. Im Sinne des Nominalismus ist also „$-a$" oder „$\sqrt{-a}$" nicht ein neuer Zahlbegriff, sondern ein Funktionszeichen, nach welchem mit der positiven ganzen Zahl a die durch das Vorzeichen angedeutete Rechenoperation vorgenommen werden soll. Zu dieser aus erkenntnistheoretischen Motiven erfolgten Trennung der positiven Zahl von den anderen Formen des Zahlbegriffs hat nun der Realismus Leibniz' keine Veranlassung; da die Zahlen rein begriffliche Existenz haben und auf ihre Veranschaulichung von vornherein verzichtet wird, so können die

---

[1]) Vgl. Cassirer, Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen. Marburg 1902 (fortan zitiert als Cassirer) S. 69.

[2]) Cass. a. a. O.

[3]) Oeuvres, publ. par Cousin II, 290.

[4]) Vgl. Brix, Der math. Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen. Wundts phil. Studien VI, S. 104 ff.

[5]) E. und U. Dühring, Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis etc. Leipzig 1884.

negativen, irrationalen und imaginären Formen ebensogut als Zahlen gelten wie die positive ganze Zahl; sie unterliegen nur der Bedingung, daß sie keinen logischen Widerspruch enthalten dürfen. Denselben von jeder Begründung durch die Veranschaulichung unabhängigen Charakter hat die ganze Arithmetik, wie sie von Leibniz in der „Mathesis universalis" entwickelt worden ist.

Es ist nun im folgenden dieses im einzelnen zu entwickeln und die logische Begründung aufzuzeigen. Dabei wird sich eine auffallende Hinneigung zum Nominalismus bei der Deutung der negativen und imaginären Zahlen zeigen.

II.

Die logischen Grundlagen der Mathematik.

Im Vorhergehenden ist die Bildung des Zahlbegriffs und sein Verhältnis zur realen Welt, wie es sich in Leibniz' Auffassung darstellt, erörtert worden. Damit ist aber noch keine hinreichende Aufklärung über die logischen Bestandteile des fertigen Zahlbegriffs und über seine Verwendung in der Arithmetik gewonnen; der subjektive Erwerbungsprozeß einer Vorstellung kann über den logischen Wert der zum Begriff gewordenen Vorstellung nicht allein entscheiden. Es bleibt also die Aufgabe zu erledigen, Leibniz' Definitionen der Zahl und die Stellung dieser im Systeme der Arithmetik zu erörtern. Da nun Logik und Mathematik bei Leibniz in engem Zusammenhange und befruchtendem Wechselverhältnis stehen, so ist eine kurze Darstellung der Logik in den mathematischen Grundbegriffen eine notwendige Ergänzung des eigentlichen Themas.

Für die Ausbildung der Leibnizischen Logik ist jenes bekannte Suchen nach den höchsten Wahrheiten, die unmittelbar und intuitiv gewiß sich dem Geiste als selbstverständlich aufdrängen und durch deren Verknüpfungen alle abgeleiteten Erkenntnisse begründet werden, von Wichtigkeit. Schon Descartes hatte dieses Streben und fand in dem „cogito sum" diese Forderung erfüllt. Leibniz aber unterscheidet — wie schon Aristoteles — zwei Arten dieser intuitiven Wahrheiten: die geometrischen oder metaphysischen und die tatsächlichen.[1]) Die ersteren leuchten der Vernunft von selbst ein und haben ewige Geltung; die andern aber hängen von der Erfahrung ab und haben einmalige Geltung. Seine charakteristische Ausprägung erhält dieser Gegensatz in der Lehre vom Urteil. Die Wahrheiten der ersten Art sind analytische Sätze, die sich durch eine Zergliederung der in ihnen verknüpften Begriffe und der logischen Operationen feststellen lassen. Alle Erfahrungssätze aber gelten als synthetisch, weil sie die Naturerscheinungen nach dem Gesetze der Kausalität erklären, d. h. mit anderen Naturerscheinungen verknüpfen. Im Gegensatz zu den ersteren lassen sich diese nicht in ihre Elemente durch eine logische Analyse zerlegen; die Verknüpfung derselben kann nur tatsächlich konstatiert werden.

In diesem Sinne gelten nun alle mathematischen Sätze als analytische Urteile; die Wahrheiten, die sie ausdrücken, sind in sich selber klar und unbedingt notwendig; eine Leugnung derselben würde einen Widerspruch in sich schließen. Ihre intuitive Gewißheit beruht auf dem Satze der Identität und des Widerspruchs, der somit die Grundvoraussetzung für alle mathematischen Urteile ist: „Le grand fondement des Mathématiques est le principe de la contradiction, ou de l'identité, c'est-à-dire, qu'une énonciation ne saurait être vraie et fausse en même temps;

[1]) Nouv. ess. I, 1, u. IV, 2. Erdm. 207 u. 338; Monadologie, Erdm. 707; vgl. Windelband, Geschichte der neueren Philosophie. Leipzig 1899. S. 460ff.

et qu'ainsi A est A, et ne saurait être non-A. Et ce seul principe suffit pour démontrer toute l'Arithmétique et toute la Géométrie, c'est-à-dire tous les Principes Mathématiques." [1])

Da nun in den analytischen Urteilen das Prädikat nur aussagt, was im Subjekt enthalten ist, so kann diesen Sätzen ein gewisser hypothetischer Charakter nicht abgesprochen werden: sie gelten uneingeschränkt von allen Dingen, auf die sie sich beziehen; aber sie geben nicht die Gewißheit, daß es solche Dinge gibt. Es ist also noch die Aufgabe zu erledigen, die Erkenntnisbedingungen und den Geltungswert für jene Dinge, zwischen denen die Urteilsverknüpfung statt hat, aufzustellen. Die Lösung dieses Problems zeigt die Abhängigkeit der Leibnizischen Erkenntnistheorie von seiner Metaphysik. Die Monadenlehre und die daraus folgende „prästabilierte Harmonie" kann den Prinzipien nur ein wirkliches Sein im „göttlichen Verstande" zusprechen. Gott ist der letzte Grund aller Dinge; er allein kann die Wirklichkeit alles Seins erkennen.[2]) Der menschliche Verstand ist auf die Erkenntnis der „Möglichkeit" beschränkt. Die „Möglichkeit" ist das Kriterium der Realität und Wahrheit [3]) eines Begriffes und kann auf zweifache Art [4]) bewiesen werden: entweder a posteriori durch die Erfahrung, denn was schon tatsächlich ist, muß auch auf alle Fälle möglich sein, oder a priori durch Zurückführung auf andere, nicht weiter beweisbare Begriffe. Die letztere Methode bedarf noch einer Erläuterung. Die Möglichkeit eines Begriffes — heißt es in der Theodicée [5]) — ist gesichert, wenn der Begriff keinen Widerspruch enthält. Die Widerspruchslosigkeit der in ihm vereinten Merkmale gibt also dem Begriff Realität und Wahrheit. Damit hat das Prinzip der Identität nicht allein die Aufgabe — wie vorher angegeben —, die logischen Operationen in den Urteilen zu rechtfertigen, sondern auch die Realität der verknüpften Begriffe zu begründen. — Den identischen Sätzen treten die Definitionen an Geltung gleichwertig [6]) zur Seite; sie liefern mit dem Identitätsprinzip zusammen das Kriterium der Gewißheit der mathematischen Voraussetzungen: „Omnium demonstrationum a priori duo sunt principia ultima: definitiones et propositiones identicae." [7])

Die Auffassung vom Werte der Definition als Erkenntnisbedingung ist geschichtlich von Hobbes vorbereitet, zu dem sich Leibniz in Gegensatz [8]) stellt. Da bei jenem Denker die Definitionen der Mathematik ihre Unveränderlichkeit nur der Konstanz der Namen verdanken, mit denen wir die willkürlich gebildeten Begriffe festhalten, so können sie nur den Wert von Willkürprodukten des menschlichen Geistes beanspruchen. Es sind Nominaldefinitionen,[8]) von denen die Wahrheiten der Mathematik abhängen sollen; demnach gelten alle mathematischen Entwicklungen als willkürliche Operationen des Geistes mit seinen eigenen Bildungen. Weil diese Definition keine Bestimmung für die Möglichkeit der Begriffe enthält, so kann sie auch die Gewißheit und Realität derselben nicht verbürgen. Dazu ist aber nach Leibniz' Ansicht die „Realdefinition" geeignet, aus der sich die Möglichkeit der Sache ergibt: „Ce qu'on suppose

---

[1]) Lettre II de Leibniz à Clarke, Erdm. 749.

[2]) Monadologie, Erdm. 708.

[3]) Erdm. 80; ferner Erdm. 137, 293, 294, 305.

[4]) Meditationes de cognitione etc. Erdm. 80; ferner Erdm. 137.

[5]) Erdm. 573: „Tout ce qui n'implique point de contradiction est possible." Vgl. Leibnizens math. Schriften, herausgegeben von Gerhardt, III, 574: „Possibilia sunt quae non implicant contradictionem."

[6]) Cassirer (a. a. O. 109) ordnet die identischen Sätze den Definitionen unter mit Berufung auf Nouv. ess. IV, 12.

[7]) Leibnizens math. Schriften, herausgegeben von Gerhardt (Halle 1863; fortan zitiert als Gerhardt) III. Bd., S. 322. Erdm. 81, Anm. Vgl. ferner Gerhardt V, 395, VII, 20; und Nouv. ess. IV, 2, 8, 12.

[8]) Meditationes de cognitione usw. Erdm. 80.

possible est exprimé par la définition, mais cette définition n'est que nominale, quand elle n'exprime point en même temps la possibilité, car alors on peut douter, si cette définition exprime quelque chose de réel, c'est-à-dire de possible." [1]) Wenn die Realdefinition ihren Zweck erfüllen soll, so muß sie zugleich angeben,[2]) wie der Begriff entstanden ist. Dazu ist eine Auflösung des Begriffes in seine Bestandteile oder in andere Begriffe, deren Möglichkeit schon bewiesen ist,[3]) notwendig. Hat man auf diese Weise eine adäquate[3]) Erkenntnis des Begriffes, d. h. eine vollständige Kenntnis aller Merkmale und eine deutliche Erkenntnis jedes einzelnen derselben gewonnen, so ist damit die apriorische Möglichkeit des Begriffes verbürgt. Da nun eine solche Zurückführung des Begriffes auf seine letzten Bestandteile meistens nicht ausführbar ist, so begnügt man sich mit einer aposteriorischen Feststellung seiner Möglichkeit durch Bestätigung in der Erfahrung.[4]) Nur die Erkenntnis der geometrischen Begriffe[5]) und die der Zahlen[6]) hält Leibniz in diesem Sinne für adäquat oder beinahe adäquat; für diese Begriffe ist also die Möglichkeit einer Zerlegung in die letzten Bestandteile vorhanden. Das Ergebnis dieses analytischen Prozesses findet seinen sprachlichen Ausdruck in der Definition, die in diesem Falle zu einer „causalen" Definition wird und als solche den Beweis für die Möglichkeit und damit auch für die Wahrheit des Begriffs liefert. Die Ausführung einer solchen Analyse am Zahlbegriff hat Leibniz nun freilich nirgends gegeben, aber seine Definition der Zahl läßt das Bestreben danach erkennen.

Für die Fortsetzung der Untersuchung ergibt sich nunmehr die Aufgabe, die Definitionen der Zahl logisch zu untersuchen, sodann die Grundlagen der Arithmetik zu entwickeln, und zu prüfen, inwieweit die allgemeinen, soeben dargestellten Bedingungen in ihnen zur Geltung kommen. Als diese Bedingungen ergaben sich — um es noch einmal kurz zusammenzufassen — die Ableitung der Axiome und Theoreme mit Hilfe von Definitionen und identischen Sätzen aus einfachen Begriffen und an sich einleuchtenden Wahrheiten.

III.

Die diskrete Zahlgröße.

Bekanntlich war es die Logik, die Leibniz zu seinen ersten selbständigen philosophischen Versuchen anregte. Es ist daher natürlich, daß Erörterungen über die Zahl, die von jeher das Interesse aller Logiker besonders erregte, sich schon in seinen frühesten, akademischen Schriften finden. Aber diese erste Auffassung läßt noch kein selbständiges Gepräge erkennen; es kommt ihm auf die Einordnung dieses logisch interessanten Begriffs in die Gesamtheit der sein Denken gerade beherrschenden naturphilosophischen Ansichten an.[7]) Auch die erste mathematische Schrift „de arte combinatoria" zeigt noch hauptsächlich diesen Charakter. In den Mittelpunkt des Interesses ist die Aristotelische Philosophie getreten, und von dem dadurch gewonnenen Standpunkt aus wird auch die Zahl aufgefaßt. Sie erscheint daher als ein der Meta-

---

[1]) Nouv. ess. III, 3. Erdm. 305.
[2]) Meditationes de cognitione usw. Erdm. 80.
[3]) Erdm. 79ff.
[4]) Erdm. 80.
[5]) Nouv. ess. II, 31. Erdm. 294.
[6]) Erdm. 79.
[7]) De principio individui: „Essentiae rerum sicut sunt numeri". Erdm. 5.

physik angehöriger Begriff, weil sie einen allgemeinen Inhalt darstellt.[1]) Dennoch lassen sich auch hier schon Anzeichen für die spätere charakteristische Auffassung erkennen. Die Zahl wird als die Gesamtheit der Einheiten definiert und steht in engster Verbindung mit dem Begriff der Quantität, mit dem „sie in der Sache selbst zusammenfällt.“[2]) Von besonderem Werte ist die Auffassung, daß die Zahl schon hier von den besonderen Dingen unabhängig ist und daher „gleichsam als eine unkörperliche Figur“ erklärt wird.[3]) — Die erste mathematische Definition findet sich in dem Briefe an Thomasius aus dem Jahre 1669. „Numerum definio unum, et unum etc. seu unitates.“[4]) Zahl und Größe sind hier gesondert definiert; die Größe ist als „die Zahl der Teile“ erklärt, während die Zahl als ein Aggregat von Einheiten aufgefaßt wird. Dieselbe Auffassung beherrscht auch die späteren mathematischen Schriften[5]); sie wird also zunächst als die Grundauffassung anzusehen sein und erfordert eine eingehendere Betrachtung.

Trotz der verschiedenen Definitionen sind die Begriffe der Zahl und der Größe eng mit einander verbunden. Die methodische Behandlung in den mathematischen Schriften zeigt, daß die Zahl ihrem ganzen Umfange nach dem Gebiet der Quantität angehört und denselben Erkenntnisbedingungen unterliegt, die für die Quantitätsbegriffe geltend sind. „Numerus est, cujus ad unitatem relatio est quae inter partem et totum vel totum et partem.“[6]) — Für das Verständnis der Zahl als eine Zusammensetzung von Einheiten ist eine Bestimmung des Verhältnisses des „Ganzen“ zum „Teil“ nötig. „Equidem manifestum est partem toti inesse seu toto posito eo ipso partem immediate poni, seu parte posita cum quibusdam aliis partibus eo ipso totum poni, ita ut partes una cum sua positione sumtae tantum nomine tenus a toto differant.“[7]) Das Ganze besteht also aus Teilen, und jeder Teil ist im Ganzen enthalten. Hierin ist zunächst die psychologische Bedingung ausgedrückt, daß die Teile in e i n e m Bewußtsein enthalten sein müssen, und daß jeder als „Teil“ bezeichnete Denkinhalt für sich bemerkbar sein muß. Sodann ist darin noch eine logische Bedingung enthalten. Dieses „Innesein (inesse)“ nämlich ist nicht als ein anschauliches Umgebensein aufzufassen. So ist der Durchmesser zwar in der Kreisfläche enthalten, und dennoch kein Teil des Kreises. Wohl aber ist das dem Kreise einbeschriebene Quadrat ein Teil des Kreises.[8]) Für das „Ganze“ und den „Teil“ wird also vorausgesetzt, daß beide — mathematisch ausgedrückt — dieselbe Dimension haben oder — nach der Leibnizischen Bezeichnung — „homogen“[9]) sind. Die Erkenntnis der „Homogeneität“ wird aber im letzten Grunde durch den Identitätssatz gewonnen[10]); dieser ist somit das logische Fundament für das in der Definition ausgedrückte Verhältnis des Teils zum Ganzen und damit auch für die Begriffe der

---

[1]) „Cum igitur numerus sit quiddam Universalissimum, merito ad Metaphysicam pertinet.“ Erdm. 8.

[2]) „Quantitas est numerus partium. Hinc manifestum est, in re ipsa Quantitatem et Numerum coincidere.“ Erdm. 8.

[3]) „Est enim numerus quasi figura quaedam incorporea, orta ex Unione Entium quorumcunque, v. g. Dei, Angeli, Hominis, Motus, qui simul sunt quatuor.“ Erdm. 8.

[4]) Erdm. 53.

[5]) In Betracht kommen: Initia mathematica, Mathesis universalis, Gerh. VII und Characteristica geometrica, Gerh. V.

[6]) Gerh. V, 152.

[7]) Gerh. VII, 274; vgl. Gerh. V, 151.

[8]) Erdm. 94; ferner Gerh. VII, 274.

[9]) Gerh. VII. 274: „Pars debet esse Homogenea toti.“

[10]) Vgl. die Erklärungen: „Homogenea sunt, quae aut similia sunt aut similia transformatione reddi possunt“ und „Similia sunt, in quibus per se singulatim consideratis inveniri non potest quo discernantur.“ Gerh. VII, 30). Dieses „discernere“ erfordert offenbar ein Urteil, das aus dem Identitätssatz hergeleitet ist.

„Größe“ und der „Zahl“, in denen ja, wie erwähnt, dieselben logischen Relationen auftreten, wie zwischen dem Ganzen und den Teilen. Die Größe[1]) ist eine Zusammensetzung von Maßeinheiten, und die Zahl dient dazu, die Beziehungen zwischen der Größe und ihren Teilen begrifflich zum Ausdruck zu bringen; daher ist auch sie als ein Aggregat von Einheiten definiert.[2])

Was ist nun die Einheit? — Es ist bekannt, welche Bedeutung dieser Begriff in der Monadenlehre gewonnen hat; hier interessiert uns hauptsächlich sein arithmetischer Sinn. Ähnlich wie Locke[3]) faßt Leibniz die Einheit als die allgemeinste Idee, welche uns von jedem Gegenstande unseres Denkens gebracht werden kann. Er unterscheidet zwischen den Begriffen „Eins“ und „Einheit“. Die Einheit ist das Abstraktum von Eins; und Eins ist das, was wir in einem einzigen Denkakt oder als zugleich bestehend auffassen können.[4]) Indem so die Wurzel des Begriffs der Einheit in unser Bewußtsein verlegt wird, folgt daraus, daß die Einheit und die Zahl keine objektive Eigenschaft der Dinge sein kann. Jedes Vorstellungsobjekt kann als Einheit aufgefaßt und mit beliebigen anderen zu einem Begriffe vereinigt werden; auf die besondere Natur des Objektes kommt es dabei nicht an. Hieraus ergibt sich für die quantitative Größe die Möglichkeit, sie als eine Zusammenfassung beliebiger, völlig willkürlicher Maßeinheiten anzusehen.[5]) Damit tritt allerdings in dem Ergebnis einer Messung eine Unbestimmtheit auf, die aber in der Unabhängigkeit der Maßeinheit von den empirisch gegebenen Dingen ihre Erklärung und Rechtfertigung findet. — Diese Betrachtungen lassen erkennen, daß bei Leibniz die Zahl ein subjektiver Begriff ist, der seine logische Bestimmtheit in der Eigenschaft hat, daß er in Teile aufgelöst werden kann, über deren Zusammengehörigkeit der Satz der Identität entscheidet.

Diese Auffassung beherrscht die ganze elementare Arithmetik, wie sie von Leibniz in der „Mathesis universalis“ und in den „Initia mathematica“ dargestellt ist. Die Arithmetik[6]) ist die Lehre von der Verknüpfung der Zahlen, und zwar der bestimmten Zahlen, während die Algebra sich mit den allgemeinen, durch Buchstaben bezeichneten Zahlen beschäftigt. Beide Disziplinen sind der allgemeinen Mathematik oder „der Wissenschaft von den Größen im allgemeinen“ untergeordnet. Wegen ihres abstrakten Charakters können sie nach der Methode der Logik behandelt werden. Nach diesem Verfahren sind die in ihnen geltenden Grundbegriffe und Axiome festzustellen und zu begründen. Die Durchführung dieser Aufgabe ist um so vollkommener, je mehr sie von der Erfahrung und der Anschauung unabhängig ist; die Mittel zur Lösung dieses Problems sind die Definitionen und die identischen Sätze.

Zuerst zeigt die Behandlung des Begriffs der Gleichheit die charakteristischen Merkmale dieses Verfahrens: „Aequalia possunt definiri, quae resolvi possunt in suas partes diversas singulas singulis alterius congruentes.“[7]) Die Feststellung der Gleichheit erfordert also die Auflösung der Größen in ihre Teile, und die Gleichheit ist erwiesen, wenn die Teile der einen denen der anderen kongruent sind. Damit ist auch für das Gleichheitsverhältnis der Identitätssatz

[1]) Gerh. VII, 35: Magnitudo est, quod in re exprimitur per numerum partium, congruentium rei datae, quae Mensura appellatur.

[2]) Gerh. VII, 31: Numerus est homogeneum Unitatis adeoque comparari cum unitate eique addi adimique potest.

[3]) Essay concerning human understanding, II, 16.

[4]) Gerh. V, 12: Unum autem esse intelligitur, quicquid uno actu intellectus seu simul cogitamus ... Abstractum autem ab uno est Unitas.

[5]) Gerh. VII, 30; ferner VII, 77.

[6]) Vgl. die Ausführungen in der „Mathesis universalis“, Gerh. VII, 49.

[7]) Gerh. VII, 30.

zum logischen Fundament gemacht, denn der Nachweis der Kongruenz erfordert identische Sätze zur endgültigen Begründung.[1]) Dies ergibt sich auch aus den vielen anderen Definitionen der Gleichheit.[2]) — Ferner werden die anderen Begriffe der Größenvergleichung, die Begriffe des „Größer" und „Kleiner" auf den Gleichheitsbegriff und das Grundverhältnis des Ganzen zum Teil zurückgeführt: „Minus est quod alterius (Maioris) parti aequale est."[3]) Es ist dabei immer zu beachten, daß wir im Gebiete der elementaren, der Euklidischen Geometrie sind; für die Probleme der höheren Mathematik erfährt der Gleichheitsbegriff — wie gezeigt werden wird — eine Erweiterung. — Auch an der Behandlung der Euklidischen Axiome kann man Leibniz' eigentümliche Methode der logischen Begründung der mathematischen Wahrheiten erkennen. In ihrem abstrakten Charakter sieht er den größten Vorzug; dennoch versucht er mehrfach, ihre Anzahl noch zu verringern und sie durch einfachere und abstraktere Axiome zu begründen. Ein Beispiel möge dieses Verfahren kennzeichnen; der Satz, daß der Teil kleiner ist als das Ganze, wird in folgender Schlußkette bewiesen:[4])

„Quidquid est aequale parti totius, id toto minus est (per definitionem Minoris);
Pars totius est aequalis parti totius (nempe sibi ipsi per Axioma identicum);
Ergo pars totius toto minor est, q. e. d."

Definitionen und identische Sätze sind die Mittel für die Begründung der Mathematik; das zeigt sich schließlich auch in der Art, wie Leibniz die einfachsten arithmetischen Sätze zu beweisen sucht. Daß $1+1=2$ ist, ist die Definition von 2, nicht eine evidente Wahrheit,[5]) allerdings — das betont er dem Nominalismus gegenüber — die Definition eines Möglichen; aber daß $2+2=4$, ist eine Wahrheit, die er mit Hilfe der Definition der Zahl als einer Zusammensetzung von Einheiten und des Gleichheitsbegriffs beweist.[6])

Aus diesen Beispielen ist hinlänglich ersichtlich, daß die Arithmetik nach Leibniz' Ansicht eine begriffliche Wissenschaft ist, deren Sätze aus den Definitionen und den identischen Wahrheiten bewiesen werden können und müssen. Dieses Ergebnis pflegt in der Diskussion über Leibniz' Philosophie allgemein zugestanden zu werden; jedoch in der Schätzung des relativen Wertes der einzelnen Momente dieser Forderung macht sich in den neueren Untersuchungen dieser Philosophie eine erhebliche Meinungsverschiedenheit[7]) bemerkbar. Wenn Cassirer[8]) der Ansicht ist, daß Leibniz die mathematischen Sätze wie Kant zu den synthetischen Urteilen rechnet, so geht er m. E. von einer zu hohen Schätzung der Lehre von der Definition bei Leibniz aus. Freilich hat Leibniz die kausale Definition zum Möglichkeitsbeweis machen wollen, aber diese Forderung nie völlig durchgeführt. Kann doch auch die genetische Definition allein die Realität eines Begriffs nicht verbürgen; sie kann immer nur als das Ergebnis einer nachträglich an einem Gegebenen vorgenommenen Analyse aufgefaßt werden. Nach unserer Meinung ist der Identitätssatz die Grundlage in der Leibnizischen Mathematik, nicht allein, weil er zum Beweise der Wahrheiten dient, sondern weil er

---

[1]) Gerh. VII 29: „Congrua sunt, quae si diversa sunt, non nisi respectu ad externa discerni possunt."
[2]) Gerh. VII, 77. „Aequalia sunt, quorum unum alteri substitui potest salva magnitudine." Ferner VII, 274. V, 206, 153. Erdm. 94.
[3]) Gerh. VII, 30; ferner VII, 273; V, 153 u. a.
[4]) Gerh. VII 274 (auch Erdm. 81); Gerh. V, 206 u. f.
[5]) Erdm. 361.
[6]) Erdm. 363.
[7]) Siehe die neueren Darstellungen der Leibnizischen Philosophie von Cassirer, Couturat und Russell.
[8]) A. a. O. Kap. I.

die ursprünglichste und unmittelbarste, nicht weiter beweisbare, dem Geiste evidente Wahrheit ist, dem auch die Definitionen unterworfen sind, insofern Leibniz nur Definitionen eines Möglichen zuläßt.

Nachdem so der analytische Charakter der Arithmetik erwiesen ist und festgestellt ist, daß sie mit den Mitteln des Denkens allein, frei von jeder Erfahrung dargestellt werden kann, werden wir zu der Frage nach der Realität des Zahlbegriffs zurückgeführt. Als Realitätsbedingung hatte sich früher das Kriterium der Möglichkeit ergeben, die durch die klare und deutliche Erkenntnis der Begriffselemente gewährleistet wird. Für die Realität des Zahlbegriffs, wie der quantitativen Größe im allgemeinen, ist also eine klare und deutliche Erkenntnis der Teileinheiten Bedingung. Nun ist aber die Erkenntnis dieser Teileinheiten nur durch Sinneswahrnehmung möglich und durch das Denken allein nicht zu begründen und somit auch durch eine Definition nicht zum Ausdruck zu bringen: „Etsi enim alius possit esse circulus pedalis, alius semipedalis etc., tamen pedis nulla dari potest definitio, sed opus est typo aliquo fixo et permanente, unde mensurae rerum ex durabili materia fieri solent.“[1]) Alle Vorstellungen der Sinne gehören aber zu den verworrenen Vorstellungen, und die ihnen entsprechenden Begriffe können nicht als Grundlagen für Beweise und Definitionen gelten. Da aber der begriffliche Charakter der Arithmetik feststeht, so liegt hierin die Aufforderung, die logische und erkenntnistheoretische Natur des Zahlbegriffs zu berichtigen.

Die Motive, welche zu dieser veränderten Auffassung führen, sind hauptsächlich in der Entwicklung von Leibniz' metaphysischen Ansichten zu suchen. Allerdings werden diese Beweggründe bei einem so vielseitigen Manne wie Leibniz nicht einseitiger Natur sein. Wie die Philosophie aus seinen zahlreichen Einzelstudien hervorgegangen ist, so hat sie auch andererseits auf die Gestaltung der Grundbegriffe der Einzelwissenschaften ihren Einfluß ausgeübt. Die Leibnizische Metaphysik ist das Ergebnis der Spekulation über die überlieferten Systeme; sie hat die Vertiefung der Logik, Erkenntnistheorie und Psychologie in demselben Maße gefördert, wie sie selbst sich entwickelte.

Dieser Entwicklungsgang hat naturgemäß auch auf die Auffassung der logischen und erkenntnistheoretischen Natur des Zahlbegriffs eingewirkt. Leibniz' Denken der Jugendzeit ist charakterisiert durch das Streben, die Natur mathematisch, d. h. aus Größe, Gestalt und Bewegung zu erklären. Der Einfluß der Atomistik bestimmt seine naturphilosophischen Ansichten; in ihr wurzelt auch jene Auffassung von der Zahl als einem Aggregat von Teilen. Die metaphysische Entwicklung veranlaßt dann jenes Streben, die Erscheinungen von der quantitativen Bestimmbarkeit hinüber zu der Auflösung in qualitativ bestimmte Kräfte zu führen. Nicht mehr die Lehre von der Quantität steht im Vordergrunde des Interesses, sondern die allgemeine Wissenschaft von der Qualität tritt an ihre Stelle und wird jener übergeordnet. In der Mathematik macht sich diese Umwandlung bemerkbar in dem Vorherrschen der Geometrie gegenüber der Algebra und in der Unterordnung der Algebra unter die allgemeinere Wissenschaft, die in der „Ars combinatoria“ oder „Scientia generalis de qualitate“ ihren Ausdruck findet.[2])

Hiermit ist zugleich eine Änderung in der Auffassung über die Natur des Zahlbegriffs verbunden; die Zahl erscheint nicht mehr als ein Aggregat von Teilen, sondern wird zu einem Relationsbegriff, der das Verhältnis zweier Größen ausdrückt: „Ex his manifestum est, Numerum in genere integrum, fractum, rationalem, surdum, ordinalium, transcendentem generali notione definiri posse, ut sit id quod homogeneum est Unitati, seu quod se habet ad Unitatem ut recta

[1]) Gerh. VII, 276; vgl. V, 154 u. 180. [2]) Gerh. VII, 61, 24 u. a.

ad rectam."[1]) Nur für die ganzen Zahlen läßt Leibniz die Auffassung der Zusammensetzung noch gelten. — In dieser neuen Auffassung hat die Zahl den konkreten Charakter, der ihr vordem anhaftete, verloren; sie ist nicht mehr bloß der Ausdruck zur Bezeichnung einer diskreten Menge, einer multitudo, sondern allgemeiner und abstrakter der Ausdruck für das Ergebnis der Vergleichung zweier Dinge in Bezug auf ihre Größe; sie bezeichnet eine magnitudo. Hierin liegt zugleich ein Fortschritt gegenüber der Auffassung der Alten, die nur die ganzen Zahlen als Bezeichnung einer Menge kannten. Und nicht nur ihre logische, auch ihre erkenntnistheoretische Natur erleidet eine Umwandlung. Sie wird von dem Begriff der absoluten Größe, mit dem sie vordem verbunden war, losgelöst und denjenigen Eigenschaften der Dinge zugeordnet, die Produkte des reinen Denkens sind.[2]) Dieser Übergang ist in den Schriften der „Analysis situs" vollendet; hier wird der Unterschied in den Erkenntnismethoden der quantitativen und qualitativen Eigenschaften der Dinge deutlich gekennzeichnet.[3]) Die Quantität ist nur durch die unmittelbare Gegenwart (compraesentia) einer Maßeinheit erkennbar und gehört zu den sinnlichen Eigenschaften; die Qualität erfordert eine solche Vergegenwärtigung der Maßeinheit nicht und ist vom Denken allein zu erfassen. Zu diesen qualitativen Eigenschaften gehören — das hebt Leibniz ausdrücklich hervor — die Zahlen, die Proportionen und die Winkel. Da somit die Erkenntnis der Zahlen von der Erfahrung unabhängig ist und ihr Ursprung in den Intellekt selbst verlegt wird, so gehören die Zahlen zu den „eingeborenen Ideen" und werden als solche, wie früher gezeigt ist, in dem reifsten erkenntnistheoretischen Werk, in den „Nouveaux essais" erwähnt.

Nun wird auch die noch offene Frage nach der Realität der Zahl erledigt. Zwar das in der Lehre von der Definition gewonnene Kriterium der Möglichkeit führt Leibniz niemals aus; die Zurückführung auf die einfachsten, nicht weiter beweisbaren Urbegriffe findet sich nirgends durchgeführt; er begnügt sich damit, diese Analyse für möglich zu halten. Dennoch ist die Realität des Zahlbegriffs gesichert; denn die primitiven Ideen sind mit den „ewigen Wahrheiten" identisch; sie existieren in Gott, durch den sie realisiert werden; aus ihnen entspringen die abgeleiteten Begriffe (idées dérivatives), die wie jene klar und deutlich erkennbar, somit möglich und real sind. — Gerade in diesem Punkte zeigt sich die Abhängigkeit der Leibnizischen Erkenntnistheorie von seiner Metaphysik. Nur wenn diese Abhängigkeit geleugnet wird, kann zwischen der Lehre von der kausalen Definition und der metaphysischen Realitätsbegründung ein Widerspruch entdeckt werden.[4])

Die Definition der Zahl erfordert noch eine Erörterung von mathematischen Gesichtspunkten aus. Die Auffassung der Zahl als einer Vielheit von Einheiten findet sich schon bei Euklid und ist seitdem oft wiederholt worden. Als unmittelbarer Vorgänger Leibniz' ist Hobbes anzusehen, auf den sich Leibniz in den ersten Schriften häufig beruft. Auch dieser Philosoph definiert die Zahl in dem Euklidischen Sinne. Diese Definition erschöpft aber den Begriff der Zahl nicht; besonders neuere Untersuchungen von Helmholtz, Kronecker und Dedekind haben

---

[1]) Gerh. VII, 24; vgl. Erdm. 243. [2]) Vgl. oben S. 6.

[3]) Gerh. V, 180; ferner VII, 18: Quantitas est, quod in rebus sola compraesentia (seu perceptione simultanea) cognosci potest.

[4]) Vgl. Russell; dagegen kann Cassirer einen Widerspruch nicht finden; er sucht — anschließend an einen Gedanken von Cohen — nachzuweisen, daß bei Leibniz die Realität eine Art Kategorie, eine Voraussetzung des Denkens ist; demgemäß hat nach seiner Ansicht die genetische Definition die Kraft, die Realität zu begründen, und ist den identischen Sätzen übergeordnet.

diesen Mangel der Euklidischen Definition aufgedeckt. Durch diese Erklärung wird nicht eine bestimmte Zahl, sondern eine gemeinsame Eigenschaft aller Zahlen angegeben; sie ist zu weit. Ferner fehlt ihr das charakteristische Merkmal, daß die Zahlen eine und nur eine fortlaufende Reihe bilden. Schließlich kann sich jene Definition nur auf die natürlichen Zahlen beziehen, während die Erweiterungen des Zahlbegriffs nicht unter dieselbe fallen. Allerdings hat Leibniz — wie wir sahen — die Definition erweitert; daß ihn hierzu nicht allein erkenntnistheoretische oder metaphysische Gründe veranlaßten, sondern auch mathematische, ist als gewiß anzunehmen; hat doch gerade jene Erweiterung der Zahldefinition und ihre logische Begründung in der neu erfundenen Infinitesimalmethode ihren Ursprung. — Nur die ganzen Zahlen können als eine Komposition von Einheiten aufgefaßt werden.[1] Auch für die Brüche gelingt dies noch, weil man die konkrete Einheit noch weiter teilen kann;[2] für die abstrakte gebrochene Zahl jedoch ist dies nicht mehr möglich; sie ist eine einfache Beziehung (rapport), die nicht als eine Zusammenfassung von Einheiten aufgefaßt werden darf.[3] Die irrationalen Zahlen schließlich erfordern, wenn sie überhaupt noch als Zahlen gelten sollen, eine Erweiterung der ersten Definition. Wir haben diese Erweiterung kennen gelernt; über ihren Wert wird bei der Erörterung der kontinuierlichen Zahlgröße zu sprechen sein.

Eine eigentümliche, widerspruchsvolle Auffassung macht sich in der Ansicht über das Wesen der negativen und imaginären Zahlen bemerkbar. Während man die apriori-reale, begriffliche Natur, welche die Zahl bei Leibniz hat, als einen Vorzug und Fortschritt bezeichnen kann, den der Philosoph gegenüber früheren, empiristisch-nominalistischen Ansichten gewinnt, weil sie gestattet, die Arithmetik unabhängig von jeder Erfahrung aus den Elementen des Denkens aufzubauen, und dem Zahlbegriff eine Geschmeidigkeit und Entwicklungsfähigkeit gibt, die notwendig allen Erfahrungsbegriffen fehlt, muß gerade seine Ansicht von den negativen und imaginären Zahlen Verwunderung erregen. Weil diese Zahlen eine Interpretation durch konkrete Größenverhältnisse nicht gestatten, so spricht er ihnen jede reale Existenz ab. Zwar das Negative läßt sich noch in der bekannten Weise durch Schulden oder — nach Descartes — durch die entgegengesetzte Richtung einer Geraden deuten;[4] aber die imaginären Zahlen haben das Wunderbare, daß ihr Auftreten in der Rechnung zwar keinen Widerspruch involviert, daß sie aber in der Erfahrung nicht vorgefunden werden können.[5] Sie haben somit nur begriffliche Bedeutung; ihr Erscheinen in einer Rechnung zeigt an, daß die Frage der Aufgabe etwas Unmögliches verlangt; sie geben aber zugleich den Weg an, wie die Frage zu stellen ist, um eine einwandfreie Lösung zu erhalten.[4] Ein Beispiel möge dies erläutern. Liefert die Aufgabe: von einer Zahl a eine andere Zahl b zu substrahieren, das Ergebnis $x = -c$, so zeigt dieses Resultat an, daß die Aufgabe in dieser Form unmöglich ist, weil zu der Zahl a erst noch c Einheiten hinzugefügt werden müssen, um sie gleich der Zahl b zu machen. Soll die Aufgabe ein positives Resultat liefern, so muß sie umgekehrt lauten: von einer Zahl b eine Zahl a zu substrahieren. Leibniz nähert sich hier dem Nominalismus, der in der Mathematik auch wohl allein die Schwierigkeiten der Begriffsdeutungen zu vermeiden gestattet.[6]

---

[1]) Erdm. 243. [2]) Gerh. VII, 31.

[3]) Leibnizens phil. Schriften, herausgeg. v. Gerhardt IV, 491.

[4]) Gerh. VII, 70.

[5]) Gerh. VII, 73: Hae expressiones id habent mirabile, quod in calculo nihil involvunt absurdi vel contradictorii, et tamen exhiberi non possunt in natura rerum seu in concretis.

[6]) Besonders Dühring vertritt die Ansicht, daß die negativen und imaginären Zahlen lediglich Nominaldefinitionen sind.

IV.

Die stetige Zahlgröße.

Die Mathematik verdankt dem praktischen Bedürfnis nach Zählung von Wertgegenständen und Messung von Größen ihren Ursprung. Die erste Aufgabe kann naturgemäß über den Begriff der diskreten Zahl nicht hinausführen; wohl aber erfordert die zweite Aufgabe eine Erweiterung des Zahlbegriffs. Alle Größenvergleichungen beruhen auf dem Begriff der Gleichheit; zur Feststellung derselben ist ein gemeinsames Maß erforderlich, das in der bekannten Weise durch eine Kettendivision ermittelt werden kann. Haben zwei Größen ein gemeinsames Maß, so kann das Verhältnis derselben durch einfaches Abzählen zahlenmäßig angegeben werden: das Ergebnis ist eine rationale Zahl. Nun können zwei Größen aber in einem solchen Verhältnis zu einander stehen, daß jene Kettendivision unbegrenzt fortgesetzt werden kann; sie haben dann — wie in der Elementarmathematik gesagt wird — kein gemeinschaftliches Maß, oder sie sind inkommensurabel. Die Abzählung der Teildivisionen führt dann zu einem unbegrenzten System von Rationalzahlen, das man eine Irrationalzahl nennt. Beispiele solcher Größen waren den Griechen in großer Zahl bekannt, und gerade die Erkenntnis der Verschiedenartigkeit der diskreten und der stetigen Größen, die sie damit gewannen, war die Veranlassung zu der scharfen Trennung von Arithmetik und Geometrie, die den Charakter der griechischen Mathematik ausmacht. Wollten sie solche Größen miteinander vergleichen, so diente ihnen dazu die sog. Exhaustionsmethode, welche auch heute noch die einzige Möglichkeit der Auswertung von Irrationalitäten bietet. Die auf diese Weise gewonnenen irrationalen Verhältnisse galten bei den Griechen — und noch lange nach ihnen — nicht als Zahlenverhältnisse, und die Zahl war nur der Ausdruck für eine diskrete Menge. Erst die von Descartes eingeführte Vereinigung von Algebra und Geometrie gab die Veranlassung, die Natur des Irrationalen festzustellen und die Ansichten über diese Zahlen zu berichtigen. Dabei war die den Griechen noch unbekannte Methode der neueren Mathematik, mit Buchstaben, also mit unbestimmten Zahlengrößen zu rechnen und damit den Problemen eine umfassendere und übersichtlichere Gestalt zu geben, von großem Vorteil. — Schon Descartes pflegte in seiner „Geometrie“ beliebige Streckenverhältnisse mit einfachen Buchstaben zu bezeichnen und damit wie mit Zahlen zu rechnen. Bei Leibniz finden wir dann die Zahl als das Verhältnis zweier Strecken definiert. Auch Newton[1]) definiert die Zahl in ähnlicher Weise; während er jedoch ganz allgemein von irgendwelchen Quantitäten spricht, bleibt Leibniz noch an dem speziellen Begriff der meßbaren Strecken haften und erklärt die Zahl als Ausdruck für das Resultat der Messung einer Strecke durch eine andere, die als Einheit gilt. Jeder Strecke bez. jedem Punkte auf einer Geraden entspricht eine Zahl, und zwar eine rationale oder eine irrationale, je nachdem die gegebene Strecke und die als Maßeinheit gewählte Strecke kommensurabel oder inkommensurabel sind. Mit Hülfe der Euklidischen Kettendivision läßt sich das Verhältnis jener Strecken als ein endlicher oder unbegrenzt fortsetzbarer Algorithmus von Rationalzahlen, als Kettenbruch oder auch als Dezimalbruch, darstellen.[2])

Hier erhebt sich die Frage, mit welchem Rechte ein solcher unbegrenzter Algorithmus als eine einzige bestimmte Zahl gelten darf. Diese Frage, welche in dieser Betonung erst von der neueren Kritik des Zahlbegriffs gestellt worden ist, wird von Leibniz und seinen Zeitgenossen als

---

[1]) „Numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quae pro unitate habetur rationem intelligimus.“ Arith. univ. I.

[2]) Vgl. Gerh. VII, 23; 43 ff.

erledigt oder als unnötig betrachtet, weil ja das Irrationale mit Hilfe derselben Messungsmethode dargestellt werden kann, wie die rationale Zahl. Das Bestreben richtet sich hauptsächlich darauf, auch unmeßbare Größen, die kein gemeinsames Maß haben, auszumessen, und das Mittel hierzu bildet die neu erfundene Infinitesimalmethode, deren Grundlage das von Leibniz zuerst formulierte Stetigkeitsgesetz ist.[1]) In der neuen Auffassung haben alle gleichartigen Größen ausnahmslos ein gemeinsames Maß miteinander, und dieses ist die unendlich-kleine Größe, das Differential.[2])

Der Begriff des Differentials hat seinen Ursprung sowohl in der Arithmetik, in der Lehre von den Reihen, wie in der Geometrie, in der bekannten Aufgabe, die Kurve aus der Richtung ihrer Tangente zu bestimmen; seine charakteristische Ausprägung erhielt er aber hauptsächlich in der Lösung der geometrischen Aufgabe. Hier bezeichnet das Differential zunächst die Seite des „triangulum characteristicum", die im Vergleich mit jeder gegebenen Größe verschwinden kann, aber doch niemals gleich Null wird. Der geometrische Ausgangspunkt läßt das Differential als eine konstante, gegebene Größe erscheinen, die den Charakter des Unmeßbar-Kleinen an sich trägt.[3]) Indem Leibniz dieses so gekennzeichnete Differential zum gemeinsamen Maß aller Quantitäten macht, gewinnt seine Ausmessungsmethode die Natur der früheren Exhaustion. Daran wird auch nichts geändert, wenn er mehrfach das dx als den Unterschied zwischen „zwei nächsten Werten x", als das letzte unteilbare Element einer Größe auffaßt. Diese Annäherungsmethode steht aber im Widerspruch mit dem von ihm oft betonten Stetigkeitsgesetz, dem Gesetz von dem ununterbrochenen, lückenlosen Zusammenhange alles Seins und Geschehens. Um diesem Widerspruch zu entgehen, macht der Differentialbegriff eine ähnliche Entwicklung von der absoluten zu einer relativen Bedeutung[4]) durch, wie wir sie am Zahlbegriff kennen gelernt haben. Auch hier sind die letzten Beweggründe für den Umwandlungsprozeß in den vielseitigen Einzelstudien zu suchen, die in der Gestaltung der Metaphysik ihren Niederschlag finden. Metaphysische und erkenntnistheoretische Erwägungen sind es, die Leibniz veranlassen, die infinitesimalen Größen als „fictions utiles" zu bezeichnen, die in den Rechnungen denselben Vorteil bieten wie beispielsweise die imaginären Wurzelgrößen,[5]) für die aber ein Substrat in der Außenwelt, eine Existenz in den Teilen der Materie nicht nachzuweisen ist. Besonders an dem aus der Infinitesimalrechnung gewonnenen Begriff der Gleichheit zeigt sich die neue Auffassung des Infinitesimalen. Leibniz kleidet den neuen Gleichheitsbegriff in die Paradoxa: Ruhe ist Bewegung und Bewegung ist Ruhe, Gleichheit ist Ungleichheit und Ungleichheit ist Gleichheit; mit anderen Worten: Ruhe ist unendlich kleine Bewegung, und Bewegung ist von der Ruhe nur der Größe nach, nicht der Art nach verschieden. Und: gleiche Größen unterscheiden sich immer noch durch unendlich-kleine Größen, und umgekehrt: Größen, die sich nur um Unendlichkleines unterscheiden, sind als gleich zu betrachten. Dem möglichen Einwand, daß seinen Fiktionen überhaupt jede Realität abzusprechen sei, begegnet er mit der Behauptung, daß sie „fictions bien fondées"[6]) „fondées en realité"[7]) sind; es sind nicht willkürliche Fiktionen, sondern sie haben ihr „fundamentum in re", in dem Verhältnis, in dem unser subjektives Denken, das nur in distinkten Begriffen fortschreitet, das anschaulich gegebene Kontinuum erfaßt. Diese Fiktionen haben also begriffliche Existenz; sie gehören zu den ewigen Wahrheiten und haben als solche

[1]) Z. B. Gerh. VII, 25 u. a.
[2]) Gerh. VII, 39.
[3]) Vgl. Wundt, Logik II, 232.
[4]) Wundt a. a. O.
[5]) Erdm. 436; Gerh. VI, 629.
[6]) Gerh. IV, 110.
[7]) Gerh. IV, 98.

Realität. So sehen wir auch am Problem des Infinitesimalen bestätigt, daß Leibniz' Auffassung von den Grundlagen der Mathematik dem von Wundt charakterisierten „Realismus" angehört; freilich nähert er sich mehrfach — bei den negativen, imaginären und infinitesimalen Größen — dem „Nominalismus". In dieser realistischen Auffassung erscheint also das Infinitesimale als ein fertiger Begriff, der von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, das den endlichen Größen zukommt, nicht hat; das Infinitesimale ist — nach der von G. Cantor eingeführten Terminologie — eine transfinit unendlich-kleine Größe.

Diese so gekennzeichneten Infinitesimalgrößen sind nun das Mittel zur Ausmessung inkommensurabler Größen, und die Methode ist das Exhaustionsverfahren, in dem die endliche Annäherung in eine unendliche umgewandelt ist. Durch Addition der unendlich-kleinen, der Null gleichzusetzenden Größen soll das Irrationale ausgemessen werden können. Daher kann ein unbegrenzter Algorithmus von Rationalzahlen mit demselben Rechte als eine Zahl gelten wie ein begrenzter. Mit diesem Schlusse glaubt Leibniz den Zahlcharakter des Irrationalen nachgewiesen zu haben. — Die logischen Mängel dieses Verfahrens sind erst in neuerer Zeit durch die Untersuchungen von Dedekind, Cantor u. a. aufgedeckt worden. Die anschauliche Stetigkeit der Linie war die Veranlassung zu der Annahme, daß jener Annäherungsprozeß, der in Wirklichkeit nie zu vollenden ist, doch durch die Festsetzung für vollendet erklärt wird, daß jenem Algorithmus eine bestimmte irrationale Zahl entsprechen soll. Und nicht nur diese gewaltsam herbeigeführte Vollendung jenes Annäherungsprozesses ist als logischer Fehler anzusehen: die anschauliche Stetigkeit führte dazu, die Existenz eines unendlich-kleinen Maßes, das die die Irrationalzahl repräsentierende Strecke erzeugen soll, als selbstverständlich anzunehmen. Nun ist aber gerade durch G. Cantor nachgewiesen, daß diese Annahme nicht als selbstverständlich vorausgesetzt werden darf, ja noch mehr, daß sie auch nicht beweisbar ist. Vielmehr ist diese Annahme als ein Axiom anzusehen, das wegen seines geometrischen Ursprunges eigentlich nicht zur Definition arithmetischer Gebilde benutzt werden darf. Als drittes Moment kommt hinzu, daß die Definition der Irrationalzahl, wie sie Leibniz gibt, nicht für alle mathematischen Irrationalitäten gilt. Sie umfaßt nur die geometrisch konstruierbaren Irrationalzahlen, während Leibniz selbst auch die sog. transcendenten Zahlen in den Begriff der Zahl einschließt.[1]) Alle diese Mängel haben in letzter Linie ihren Grund in der engen Verschmelzung des Zahlbegriffs mit dem Begriff der meßbaren Größe, einer Verbindung, die Leibniz aufrecht erhält, obwohl er die Begriffe mehrfach in gesonderter Definition zu trennen scheint. Die Zahl ist ihrer Natur nach ein diskretes Gebilde und darf mit den stetig veränderlichen Größen nicht identifiziert werden. Auch die Tatsache, daß man jedem Punkte einer Geraden eine Zahl zuordnen kann, liefert nicht den Begriff einer kontinuierlichen Zahl. Soll die Zahl als eine Größe gelten, so müssen ihr durch neue Definitionen Eigenschaften erteilt werden, die ihrem ersten Sinne fremd sind; das ist in den neueren Definitionen der Zahl durch Weierstraß, Dedekind u. a. geschehen.

* * *

Der Wert der Leibnizischen Auffassung liegt in der Betonung der apriori-realen Natur, der rein begrifflichen Existenz der Zahlen, die es ermöglicht, die Arithmetik, wie überhaupt die Mathematik, unabhängig von jeder Erfahrung und Anschaulichkeit zu begründen und zu entwickeln. Allerdings liegt hierin auch seine Schwäche. Die scharfe Trennung von Begriff und Bild, im besonderen von Zahl und gezählten Dingen veranlaßt ihn, hinter die Welt der Vor-

[1]) Gerh. VII, 24 u. 208.

stellungen eine unvorstellbare Welt der Ideen zu setzen. Wie beide in Verbindung zu bringen sind, das kann nicht einmal durch die „prästabilierte Harmonie" entschieden werden; gibt es doch auch Zahlen, denen ein Korrelat der Außenwelt nicht entspricht. Es ist bekannt, wie Kant hier der Zahl ihre anschauliche Natur wiedergeben will, indem er sie als die Anwendung der Kategorie der Quantität auf die Zeitanschauung auffaßt. Aber auch diese Ansicht wird der Natur des Zahlbegriffs nicht gerecht, weil sie die Mitwirkung der Induktion an der Erwerbung unserer mathematischen Vorstellungen ausschaltet. Alle mathematischen Wahrheiten werden aber — darin stimmen wir Wundt bei — durch Induktion und Abstraktion gewonnen, und zwar durch die mathematischen Formen dieser Methoden, die sich von den gleichnamigen Methoden der Erfahrungswissenschaften dadurch unterscheiden, daß sie sich nicht auf die Objekte der Außenwelt, sondern auf die durch Abstraktion von allen Erfahrungselementen erhaltenen subjektiven Denkakte beziehen.

Was speziell die Erwerbung des Zahlbegriffs betrifft, so wird man dem Realismus zugeben, daß die Zahlen zu dem ältesten Besitz unseres Geistes gehören und nicht erst durch lange Reflexion erworben sind. Sie entstehen gleichsam spontan auf Anregung der Sinne; daraus braucht man aber nicht zu schließen, daß sie dem Geiste eingeboren sind, und daß alle arithmetischen Sätze intuitive Wahrheiten sind. Ebensowenig folgt daraus, daß die Zahlen Eigenschaften der Dinge und die Axiome die elementarsten Erfahrungen sind, was z. B. Mill behauptet. Die Wahrnehmung eines diskreten Systems von nacheinander oder nebeneinander gegebenen Bewußtseinsinhalten, von deren besonderer Beschaffenheit abstrahiert wird, liefert die Vorstellung einer „diskreten Mannigfaltigkeit".[1]) Diese Mannigfaltigkeiten sind an Zahl der Bewußtseinsinhalte verschieden und können in Bezug auf diese Anzahl miteinander verglichen werden. Ordnet man jeder Anzahl ein bestimmtes Zeichen zu, so erhält man die Zahlen, die also willkürliche Namen für die diskreten Mannigfaltigkeiten sind. Nach dieser Auffassung haben die Zahlen — ähnlich wie bei Leibniz — nur in dem Geiste eines denkenden Wesens ein Sein; sie bilden ein System von apriorischen Begriffen, aber nicht in dem Leibnizischen Sinne, indem diese Begriffe in der Seele für die Möglichkeit der Erfahrung von Anfang an bereit liegen, sondern in dem Sinne, daß sie allmählich auf Anregung durch die Erfahrung vom Denken erworben werden.

Dieser so gewonnene Begriff der Anzahl erhält nun in der Mathematik seine weitere Ausbildung. Zunächst werden aus ihm durch die mathematische Induktion die arithmetischen Grundgesetze abgeleitet. Indem dann diese Grundgesetze zu Definitionen gemacht werden, gewinnt die Mathematik durch die formalen Erweiterungen ihrer Methoden nach dem sog. Prinzip der Permanenz der Gesetze die Begriffe der ganzen und gebrochenen, positiven und negativen, rationalen, irrationalen und transzendenten Zahlen.[2]) Diese Formen des Zahlbegriffs sind also nur durch formale Eigenschaften definiert und können daher auf eine Bestätigung in der Erfahrung keinen Anspruch machen. Damit sind aber die Schwierigkeiten, die — wie wir sahen — Leibniz bei der Deutung dieser Formen des Zahlbegriffs fand, gehoben.

---

[1]) Vgl. Lipps, Die logischen Grundlagen des math. Funktionsbegriffs, Leipzig 1888, S. 12.

[2]) Das Nähere s. bei Brix, Der math. Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen: Wundts phil. Studien VI, 261 ff.

stellungen eine unvorstellbare de in Verbindung zu bringen
sind, das kann nicht einmal entschieden werden; gibt es
doch auch Zahlen, denen ei pricht. Es ist bekannt, wie
Kant hier der Zahl ihre ansc m er sie als die Anwendung
der Kategorie der Quantität ber auch diese Ansicht wird
der Natur des Zahlbegriffs nic Induktion an der Erwerbung
unserer mathematischen Vor atischen Wahrheiten werden
aber — darin stimmen wir Abstraktion gewonnen, und
zwar durch die mathematisc sich von den gleichnamigen
Methoden der Erfahrungswis daß sie sich nicht auf die
Objekte der Außenwelt, son allen Erfahrungselementen
erhaltenen subjektiven Denka

Was speziell die Er wird man dem Realismus zu-
geben, daß die Zahlen zu d ehören und nicht erst durch
lange Reflexion erworben sind Anregung der Sinne; daraus
braucht man aber nicht zu s ren sind, und daß alle arith-
metischen Sätze intuitive W raus, daß die Zahlen Eigen-
schaften der Dinge und die A sind, was z. B. Mill behauptet.
Die Wahrnehmung eines dis ler nebeneinander gegebenen
Bewußtseinsinhalten, von dere t wird, liefert die Vorstellung
einer „diskreten Mannigfaltig d an Zahl der Bewußtseins-
inhalte verschieden und kön teinander verglichen werden.
Ordnet man jeder Anzahl ei an die Zahlen, die also will-
kürliche Namen für die disk dieser Auffassung haben die
Zahlen — ähnlich wie bei I denkenden Wesens ein Sein;
sie bilden ein System von ap m Leibnizischen Sinne, indem
diese Begriffe in der Seele on Anfang an bereit liegen,
sondern in dem Sinne, daß die Erfahrung vom Denken
erworben werden.

Dieser so gewonnen der Mathematik seine weitere
Ausbildung. Zunächst werde Induktion die arithmetischen
Grundgesetze abgeleitet. I Definitionen gemacht werden,
gewinnt die Mathematik du er Methoden nach dem sog.
Prinzip der Permanenz der l gebrochenen, positiven und
negativen, rationalen, irratio Diese Formen des Zahlbegriffs
sind also nur durch formale daher auf eine Bestätigung in
der Erfahrung keinen Anspr hwierigkeiten, die — wie wir
sahen — Leibniz bei der D s fand, gehoben.

[1]) Vgl. Lipps, Die logis s, Leipzig 1888, S. 12.
[2]) Das Nähere s. bei Entwicklungsformen: Wundts phil. Studien VI, 261 ff.