Im Folgenden erlaube ich mir einige Untersuchungen vorzulegen, die ich beim Studium einer Reihe von unten näher bezeichneten Abhandlungen meines Vaters, die in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlicht sind, angestellt habe. Ich habe versucht, die Darstellung dieser Untersuchungen so zu geben, dass sie auch für solche Leser verständlich werden, welche sich nicht genauer mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen beschäftigt haben. Von diesem Bestreben geleitet, habe ich in *I* einige elementare Sätze aus dieser Theorie, welche für das Verständnis des Nachfolgenden von Wichtigkeit sind, ohne Beweis angeführt und dabei auf die betreffende Litteratur verwiesen. Diese Litteratur ist übrigens ausführlich behandelt in dem „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen" von Herrn Ludwig Schlesinger (Leipzig, B. G. Teubner, Bd. I 1895, Bd. II 1 1897, Bd. II 2 1898). Ich verweise ferner auch auf die „Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen" von Herrn Lothar Heffter (Leipzig, B. G. Teubner, 1894).

I.

Wir beschäftigen uns mit einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$(A.) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0;$$

die oberen Accente sollen hier wie im Folgenden stets Ableitungen nach der unabhängigen Variablen x — also $y^{(\alpha)} = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}$ — bedeuten.

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots, p_n$ eindeutige Functionen der einen unabhängigen Variablen x sind. In den Elementen der Theorie der linearen Differentialgleichungen*) wird gezeigt, dass sich stets n Integrale der Gleichung $(A.)$ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ finden lassen von der Art, dass zwischen ihnen keine Relation der Form

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0,$$

wo $c_1, c_2, \cdots, c_n$ von x unabhängig sind, besteht; oder, was dasselbe besagt, dass die Determinante

*) Vgl. die Abhandlung meines Vaters, Crelles Journal Bd. 66 (1866) No. 2, welche vorher im Wesentlichen im „Programm der städtischen Gewerbeschule in Berlin, Ostern 1865", erschienen ist.

$$(C.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch für jeden Wert von x verschwindet.

Ein solches System von Integralen der Gleichung $(A.)$ wird ein Fundamentalsystem genannt.

Wenn die unabhängige Variable x irgend einen geschlossenen Weg in ihrer Ebene beschreibt, so muss im allgemeinen angenommen werden, dass nach Vollendung dieses „Umlaufes" $y_1, y_2, \cdots, y_n$ nicht ihre ursprünglichen Werte wiedererhalten, sondern in andere Werte, die wir mit $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \cdots, \overline{y_n}$ bezeichnen wollen, übergehen. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen lehrt dann, dass dieses neue System aus dem alten durch eine lineare Substitution hervorgeht, d. h., dass ein System linearer Gleichungen besteht

$$(1.)\qquad \begin{cases} \overline{y_1} = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1n} y_n, \\ \overline{y_2} = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2n} y_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{y_n} = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \cdots + c_{nn} y_n, \end{cases}$$

wo die c_{ik} von x unabhängige Grössen, also Constanten bedeuten*). Die Gesamtheit der Substitutionen der Form $(1.)$ für alle Umläufe der Variablen x wird die Substitutionsgruppe der Gleichung $(A.)$ genannt.

Wir brauchen für das Folgende noch eine Betrachtung aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Bildet man in der Determinante Δ, Gleichung $(C.)$, zu jedem Gliede die Unterdeterminante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die sogenannte Adjuncte, d. h. die Ausdrücke

$$(D.)\qquad u_{\beta k} = \frac{(-1)^{\beta+k+1}}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots y_{k-1}' & y_{k+1}' & \cdots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ y_1^{(\beta-1)} & y_2^{(\beta-1)} & \cdots y_{k-1}^{(\beta-1)} & y_{k+1}^{(\beta-1)} & \cdots y_n^{(\beta-1)} \\ y_1^{(\beta+1)} & y_2^{(\beta+1)} & \cdots y_{k-1}^{(\beta+1)} & y_{k+1}^{(\beta+1)} & \cdots y_n^{(\beta+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_{k-1}^{(n-1)} & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \beta = 0, 1, \cdots, n-1 \\ k = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

*) Vgl. a. a. O. No. 3 Gleichungen (3).

so erleidet das System $u_{\beta 1}, u_{\beta 2}, \cdots, u_{\beta n}$ bei dem vorhin betrachteten Umlaufe von x ebenfalls eine lineare Substitution

$$(2.)\quad \begin{cases} \overline{u}_{\beta 1} = C_{11}\, u_{\beta 1} + C_{12}\, u_{\beta 2} + \cdots + C_{1n}\, u_{\beta n}, \\ \overline{u}_{\beta 2} = C_{21}\, u_{\beta 1} + C_{22}\, u_{\beta 2} + \cdots + C_{2n}\, u_{\beta n}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overline{u}_{\beta n} = C_{n1}\, u_{\beta 1} + C_{n2}\, u_{\beta 2} + \cdots + C_{nn}\, u_{\beta n}, \end{cases}$$

und zwar ist C_{ik} die Adjuncte von c_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Von besonderem Interesse sind die Grössen

$$z_1 = u_{n-1\,1},\ z_2 = u_{n-1\,2},\ \cdots,\ z_n = u_{n-1\,n},$$

welche ein Fundamentalsystem von Integralen der sogenannten adjungierten Differentialgleichung von $(A.)$

$$(A'.)\quad z^{(n)} - (p_1 z)^{(n-1)} + (p_2 z)^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n p_n z = 0$$

bilden*). Zwischen den Grössen $y_k^{(\lambda)}$ und $u_{\beta k}$ bestehen, wie die Theorie der Determinanten lehrt**), die Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} y_k^{(\lambda)}\, u_{\beta k} = 0, \text{ wenn } \lambda \neq \beta, \\ \sum_{k=1}^{n} y_k^{(\beta)}\, u_{\beta k} = 1; \end{cases}$$

und ebenso zwischen c_{ik} und C_{ik}:

$$(4.)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{n} c_{i\lambda}\, C_{k\lambda} = 0, \text{ wenn } i \neq k \\ \sum_{\lambda=1}^{n} c_{k\lambda}\, C_{k\lambda} = 1. \end{cases}$$

*) Vgl. Frobenius, Crelles Journal Bd. 77 1874 S. 245 ff.

**) Vgl. etwa Baltzer, Determinanten. Aufl. 5 § 3, 2.

Zur Erläuterung wollen wir als Beispiel die folgende lineare Differentialgleichung heranziehen

$$\psi y^{(4)} + 3\psi' y''' + \tfrac{25}{8}\psi'' y'' + \tfrac{5}{4}\psi''' y' + \tfrac{15}{128}\psi^{(4)} y = 0,$$

wo $\psi = (x-k_1)\,(x-k_2)\,(x-k_3)\,(x-k_4)$, ($k_1, k_2, k_3, k_4$ Constanten). Es ist dies diejenige Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln des hyperelliptischen Integrals

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

wo $\varphi(z) = (z-x)\,(z-k_1)\,(z-k_2)\,(z-k_3)\,(z-k_4)$ *), genügen.

Beschreibt die unabhängige Variable x zum Beispiel einen geschlossenen Weg, welcher den Punkt k_1 einschliesst, die Punkte $k_2\ k_3\ k_4$ aber nicht, so erleidet das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3, y_4, wo

$$y_i = \int_x^{k_i} \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

die folgende lineare Substitution**)

$$\begin{aligned} \overline{y_1} &= y_1 \\ \overline{y_2} &= 2y_1 + y_2, \\ \overline{y_3} &= 2y_1 + y_3, \\ \overline{y_4} &= 2y_1 + y_4. \end{aligned}$$

Hier ist z. B.

$$u_{31} = \frac{-1}{\Delta} \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2' & y_3' & y_4' \\ y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix}.$$

Die Gleichungen (*2.*) haben hier die Form

$$\begin{aligned} \overline{u_{\beta 1}} &= u_{\beta 1} - 2u_{\beta 2} - 2u_{\beta 3} - 2u_{\beta 4}, \\ \overline{u_{\beta 2}} &= u_{\beta 2}, \\ \overline{u_{\beta 3}} &= u_{\beta 3}, \\ \overline{u_{\beta 4}} &= u_{\beta 4}. \end{aligned}$$

Entsprechend den Gleichungen (*4.*) ist

$$c_{11}\,C_{11} + c_{12}\,C_{12} + c_{13}\,C_{13} + c_{14}\,C_{14} = 1,$$

da

$$c_{11} = 1,\ C_{11} = 1,\ c_{12} = c_{13} = c_{14} = 0,$$

aber z. B.

$$c_{11}\,C_{21} + c_{12}\,C_{22} + c_{13}\,C_{23} + c_{14}\,C_{24} = 0.$$

*) Vgl. die Abhandlung meines Vaters, Crelles Journal Bd. 71 S. 119, und Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1889 S. 113.

**) Vgl. die angegebene Arbeit meines Vaters, Sb. d. Ak. 1889 S. 714 Gleichungen (3).

II.

Wir wollen nunmehr annehmen, dass die Coefficienten der Differentialgleichung (*A.*) *I* ausser von x noch von einer anderen unabhängigen Variablen t, die wir den Parameter nennen wollen, eindeutig abhängen. In dem in *I* angegebenen Beispiel hängen die Coefficienten der Differentialgleichung z. B. alle von der Grösse k_1 ab; wir können uns also hier k_1 als variabel denken und k_1 als Parameter ansehen.

In einer Reihe von Abhandlungen, welche in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (1888 S. 1115 und S. 1273; 1889 S. 713; 1890 S. 21; 1892 S. 157; 1893 S. 975; 1894 S. 1117; 1895 S. 905; 1897 S. 608; 1898 S. 477) veröffentlicht sind, hat mein Vater untersucht, in welcher Weise die Integrale der Gleichung (*A.*) von einem solchen Parameter abhängen. Insbesondere hat er daselbst solche Differentialgleichungen untersucht, für die sich ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_n$ so finden lässt, dass die Coefficienten c_{ik} der Substitutionsgruppe *I* (*1.*) sämtlich von dem Parameter t unabhängig werden und hat die notwendige und hinreichende Bedingung für diese Unabhängigkeit aufgestellt. Wir wollen diese Bedingung zunächst auf etwas andere Weise noch einmal herleiten.

Wir definieren zu diesem Zwecke*), wenn $y_1, y_2, \cdots, y_n$ das Fundamentalsystem ist, für welches die Coefficienten c_{ik} der Substitutionsgruppe von t unabhängig sind, n Grössen $D_{01}, D_{02}, \cdots, D_{0\,n-1}$ durch das System von n Gleichungen

$$(1.)\qquad \frac{\partial y_i}{\partial t} = D_{00}\, y_i + D_{01}\, y_i' + \cdots + D_{0\,n-1}\, y_i^{(n-1)}\,; \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\,;$$

und bilden dann, indem wir die Gleichung (*1.*) $n-1$ mal nach x differentiieren und immer Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mittels (*A.*)

$$y^{(n)} = -p_1\, y^{(n-1)} - \cdots - p_n\, y$$

eliminieren, das folgende System

$$(2.)\qquad \frac{\partial y_i^{(\alpha)}}{\partial t} = D_{\alpha 0}\, y_i + D_{\alpha 1}\, y_i' + \cdots + D_{\alpha\, n-1}\, y_i^{(n-1)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \cdots, n-1 \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

Das Bildungsgesetz, nach welchem die Grössen $D_{\alpha+1\,\beta}$ aus den Grössen $D_{\alpha\beta}$ hervorgehen, drückt sich dann in dem folgenden System von Gleichungen aus

$$(3.)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial x} &= D_{\alpha+1\,\beta} - D_{\alpha\,\beta-1} + p_{n-\beta}\, D_{\alpha\, n-1}, \quad \text{für } \alpha \leqq n-2 \\ \frac{\partial D_{n-1\,\beta}}{\partial x} &= -D_{n-1\,\beta-1} + p_{n-\beta}\, D_{n-1\,n-1} - \sum_{\lambda=1}^{n} p_\lambda\, D_{n-\lambda\,\beta} - \frac{\partial p_{n-\beta}}{\partial t}, \end{aligned} \right.$$

wo die Grössen $D_{\alpha\beta}$ mit einem negativen Index durch Null zu ersetzen sind.**)

---

*) Vgl. Sb. 1888 S. 1278 No. 11 Gleichung (2).

**) Vgl. die Abhandlung L. Fuchs Sb. 1898 S. 224 Gleichungen F, F'.

Löst man die Gleichungen (*2.*) für $i=1, 2, \cdots, n$ nach $D_{\alpha 0}, D_{\alpha 1}, \cdots, D_{\alpha\, n-1}$ als Unbekannten mit Determinanten auf, so ergiebt sich mit Benutzung der in (*D.*) I eingeführten Bezeichnungsweise

$$(4.)\qquad D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i^{(\alpha)}}{\partial t} u_{\beta i}\,.$$

Wir wollen nun beweisen, dass die Grössen $D_{\alpha\beta}$ unter der über c_{ik} gemachten Voraussetzung eindeutige Functionen von t sein müssen.

Zufolge (*1.*) I ist, wenn man die α^{te} Ableitung nach x bildet, da die c_{ik} von x unabhängig sind,

$$\overline{y_i^{(\alpha)}} = c_{i1} y_1^{(\alpha)} + c_{i2} y_2^{(\alpha)} + \cdots + c_{in} y_n^{(\alpha)}\,,$$

also

$$(5.)\qquad \frac{\partial \overline{y_i^{(\alpha)}}}{\partial t} = c_{i1} \frac{\partial y_1^{(\alpha)}}{\partial t} + c_{i2} \frac{\partial y_2^{(\alpha)}}{\partial t} + \cdots + c_{in} \frac{\partial y_n^{(\alpha)}}{\partial t}$$

$$+ \frac{\partial c_{i1}}{\partial t} y_1^{(\alpha)} + \frac{\partial c_{i2}}{\partial t} y_2^{(\alpha)} + \cdots + \frac{\partial c_{in}}{\partial t} y_n^{(\alpha)}\,.$$

Benutzt man ferner die Gleichungen (*2.*) I, so ergiebt sich

$$\overline{D}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \left[c_{i1} \frac{\partial y_1^{(\alpha)}}{\partial t} + \cdots + c_{in} \frac{\partial y_n^{(\alpha)}}{\partial t} \right] \left[C_{i1} u_{\beta 1} + \cdots + C_{in} u_{\beta n} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial c_{i1}}{\partial t} y_1^{(\alpha)} + \cdots + \frac{\partial c_{in}}{\partial t} y_n^{(\alpha)} \right] \left[C_{i1} u_{\beta 1} + \cdots + C_{in} u_{\beta n} \right]$$

oder

$$\overline{D}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \varepsilon_{\lambda\mu} \frac{\partial y_\lambda^{(\alpha)}}{\partial t} u_{\beta\mu} + \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \gamma_{\lambda\mu} y_\lambda^{(\alpha)} u_{\beta\mu}\,.$$

Hierbei bedeutet $\varepsilon_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_{i\lambda} C_{i\mu}$ und $\gamma_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial c_{i\lambda}}{\partial t} C_{i\mu}$.

Nun ist aber zufolge (*4.*) I $\varepsilon_{\lambda\mu} = 0$, wenn $\lambda \neq \mu$ und $\varepsilon_{\lambda\lambda} = 1$. Also erhält man, wenn

$$(6.)\qquad E_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \gamma_{\lambda\mu} y_\lambda^{(\alpha)} u_{\beta\mu}$$

gesetzt wird,

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial y_\lambda^{(\alpha)}}{\partial t} u_{\beta\lambda} + E_{\alpha\beta},$$

also

(7.) $$\overline{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}.$$

Da nach unserer Annahme die c_{ik} von t unabhängig sind, also $\frac{\partial c_{ik}}{\partial t} = 0$ ist, so ergiebt sich $\gamma_{\lambda\mu} = 0$ und somit $E_{\alpha\beta} = 0$, d. h. für jeden Umlauf von x

(8.) $$\overline{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}.$$

Daraus folgt also, dass die $D_{\alpha\beta}$ eindeutige Functionen von x sind.

Umgekehrt ergiebt sich, wenn die $D_{\alpha\beta}$ eindeutige Functionen von x sind, aus (7.)

(9.) $$E_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Die Gleichungen (9) können, wenn man

(10.) $$\sum_{\mu=1}^{n} \gamma_{\lambda\mu} u_{\beta\mu} = v_{\beta\lambda}$$

setzt, geschrieben werden

$$\begin{aligned}
v_{\beta 1} y_1 &+ v_{\beta 2} y_2 + \cdots + v_{\beta n} y_n = 0, \\
v_{\beta 1} y_1' &+ v_{\beta 2} y_2' + \cdots + v_{\beta n} y_n' = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
v_{\beta 1} y_1^{(n-1)} &+ v_{\beta 2} y_2^{(n-1)} + \cdots + v_{\beta n} y_n^{(n-1)} = 0.
\end{aligned}$$

Da aber in diesem System linearer Gleichungen für $v_{\beta 1}, v_{\beta 2}, \cdots, v_{\beta n}$ als Unbekannte die Determinante Δ nicht verschwindet, weil ja $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ein Fundamentalsystem waren, so ergiebt sich aus der Theorie der linearen Gleichungen

$$v_{\beta 1} = v_{\beta 2} = \cdots = v_{\beta n} = 0 \qquad (\beta = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Wiederholt man mit Benutzung von (10.) die eben gemachte Schlussfolgerung noch einmal, so ergiebt sich $\gamma_{\lambda\mu} = 0$ und hieraus wieder $\frac{\partial c_{ik}}{\partial t} = 0$, $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ weil weder die Determinante $|u_{ik}|$ noch die Determinante $|c_{ik}|$ und also auch $|C_{ik}|$ gleich Null sein kann.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die lineare Differentialgleichung (A.) eine von dem Parameter t unabhängige Substitutionsgruppe besitzt, ist die, dass für ein Fundamentalsystem die Gleichungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = D_{00}\, y_i + D_{01}\, y_i' + \cdots + D_{0\,n-1}\, y_i^{(n-1)}, \quad (i = 1, 2, \cdots n),$$

wo D_{00}, D_{01}, $\cdots$, $D_{0\,n-1}$ eindeutige Functionen von x sind. (Vgl. die Abhandlung meines Vaters a. a. O. No. 11 und 12.)

Wenn die Coefficienten von (*A.*) rationale Functionen sind und die Integrale dieser Gleichung an keiner Stelle der x-Ebene von unendlicher hoher Ordnung unendlich werden, wenn die Gleichung (*A.*) also der sogenannten Fuchs'schen Classe angehört, werden die Grössen $D_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x. Unser Beispiel gehört (vgl. die Arbeit meines Vaters, Crelles Journal Bd. 71) dieser Klasse an. Die Substitutionsgruppe hat lauter ganzzahlige Coefficienten (1 oder ± 2), ist also vom Parameter k_1 unabhängig. In der That lassen sich hier vier rationale Functionen von x D_{00}, D_{01}, D_{02}, D_{03}, so angeben, dass die Gleichungen erfüllt sind

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = D_{00}\, y_i + D_{01}\, y_i' + D_{02}\, y_i'' + D_{03}\, y_i''' \quad (i = 1, 2, 3, 4)\ .$$

III.

Wir gehen nunmehr genauer auf die Bedeutung der Grössen

$$E_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \gamma_{\lambda\mu}\, y_\lambda^{(\alpha)}\, u_{\beta\mu},$$

die in (*7.*) *II* aufgetreten sind, ein.

Man differentiiert bekanntlich*) eine aus Functionen von x gebildete Determinante, indem man eine Zeile nach der anderen nach x differentiiert und dabei die übrigen Zeilen immer unverändert lässt. Wendet man dies auf die Determinante Δ der Functionen y_1, y_2, $\cdots$, y_n und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen an, so ergibt sich mit Benutzung von (*A.*) die bekannte Gleichung

$$(\Delta.) \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = -p_1\, \Delta\ .$$

Wendet man es ferner an auf die Gleichungen (*D.*) *I*, so ergibt sich**)

$$(2.) \qquad u_{\beta i}' = -u_{\beta-1\, i} + p_{n-\beta}\, u_{n-1\, i}\ .$$

Mit Benutzung dieser Gleichungen erhält man bei Differentiation von (*1.*) das System von Gleichungen***)

*) Vgl. z. B. Baltzer, Determinanten § 3, 15.

**) Vgl. meine Notiz Crelles Journal Bd. 123 (1901) S. 55 Gleichungen 2.

***) Vgl. L. Fuchs, Sb. 1898 S. 227 Gleichungen K und K'.

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial x} = E_{\alpha+1\,\beta} - E_{\alpha\,\beta-1} + p_{n-\beta}\, E_{\alpha\, n-1} & (\text{für } \alpha = 0, 1, \cdots, n-2) \\ \dfrac{\partial E_{n-1\,\beta}}{\partial x} = -E_{n-1\,\beta-1} + E_{n-1\,n-1}\, p_{n-\beta} - \sum\limits_{\lambda=1}^{n} p_\lambda\, E_{n-\lambda\,\beta}\,. \end{cases}$$

Bei der Herleitung dieser Gleichungen haben wir nur davon Gebrauch gemacht, dass die Grössen $\gamma_{\lambda\mu}$ von x unabhängig sind. Die Gleichungen (*3.*) werden daher auch durch die Ausdrücke

$$(1.')\qquad E_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, y_\lambda^{(\alpha)}\, u_{\beta\mu}\,,$$

wo $a_{\lambda\mu}$ ganz beliebige von x unabhängige Grössen sind, befriedigt.

Die Grössen (*1.'*) geben also zugleich die allgemeine Lösung von (*3.*).

Diese Grössen $E_{\alpha\beta}$ haben nun für die Differentialgleichung (*A.*) folgende Bedeutung:

Es sei $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ irgend ein anderes System von Integralen der Gleichung (*A.*), dann lässt sich dieses, wie die Theorie der linearen Differentialgleichungen lehrt, durch das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_n$ in der Form

$$(4.)\qquad \eta_i = b_{i1}\, y_1 + b_{i2}\, y_2 + \cdots + b_{in}\, y_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

darstellen, wo die b_{ik} von x unabhängig sind.

Bestimmen wir nun n Functionen $F_{00}, F_{01}, \cdots, F_{0\,n-1}$ so, dass die Gleichungen

$$(5.)\qquad \eta_i = F_{00}\, y_i + F_{01}\, y_i' + \cdots + F_{0\,n-1}\, y_i^{(n-1)}$$

erfüllt sind, so ergibt sich, wenn man die Gleichungen (*5.*) $(n-1)$ mal nach x differentiirt und wieder Ableitungen höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mittels $y_i^{(n)} = -p_1\, y_i^{(n-1)} - \cdots - p_n\, y_i$ eliminiert,

$$(6.)\qquad \eta_i^{(\alpha)} = F_{\alpha 0}\, y_i + F_{\alpha 1}\, y_i' + \cdots + F_{\alpha\, n-1}\, y_i^{(n-1)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \cdots, n-1 \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

Löst man die Gleichungen (*6.*) für $i = 1, 2, \cdots, n$ nach $F_{\alpha 0}, F_{\alpha 1}, \cdots, F_{\alpha\, n-1}$ als Unbekannten auf, so ergiebt sich

$$(7.)\qquad F_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(\alpha)}\, u_{\beta i} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu}\, y_\lambda^{(\alpha)}\, u_{\beta\mu}\,.$$

Die Grössen $F_{\alpha\beta}$ genügen also, da die $b_{\lambda\mu}$ von x unabhängig waren, ebenfalls den Gleichungen (*3.*).

Wenn umgekehrt $E_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, y_\lambda^{(\alpha)}\, u_{\beta\mu}$ ein Lösungssystem von (3.) ist, so setze man $\eta_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{in} y_n$. Man erhält dann

$$E_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(\alpha)}\, u_{\beta i}\,,$$

d. h. aber

$$\eta_i^{(\alpha)} = E_{\alpha 0}\, y_i + E_{\alpha 1}\, y_i' \cdots + E_{\alpha\, n-1}\, y_i^{(n-1)}\,.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen zwei Lösungssystemen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ und $y_1, y_2, \cdots, y_n$ Relationen der Form

$$\eta_i = E_{00}\, y_i + E_{01} \cdot y_i' + \cdots + E_{0\,n-1}\, y_i^{(n-1)}\,,$$

wo $E_{00}, \cdots, E_{0\,n-1}$ eindeutige Functionen von x sind, ist die, dass das System von Differentialgleichungen (3.) ein eindeutiges Lösungssystem besitzt.

IV.

Man sagt bekanntlich von einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,,$$

wo $a_1, \cdots, a_n$ rationale Zahlen sind, sie sei reducibel, wenn sie mit einer algebraischen Gleichung niedrigeren Grades

$$x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m = 0\,, \qquad (m < n)\,,$$

wo $b_1, \cdots, b_m$ rationale Zahlen sind, Lösungen gemeinsam hat.

Ebenso sagt man von einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit eindeutigen Coefficienten (vgl. die Abhandl. des Herrn Frobenius, Crelles Journal Bd. 76 (1873) S. 236 ff.), sie sei reducibel, wenn sie mit einer linearen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten gleichfalls eindeutig sind, Integrale gemeinsam hat.

In seiner eben angegebenen Abhandlung hat Herr Frobenius gezeigt, dass eine lineare Differentialgleichung (A.) mit eindeutigen Coefficienten notwendig reducibel sein muss, wenn zwischen zwei Integralen η und y eine Relation besteht

$$\eta = A_0\, y + A_1\, y' + \cdots + A_{n-1}\, y^{(n-1)}\,,$$

wo $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ eindeutige Functionen von x sind*).

*) Der angegebene Satz erscheint dort als Verallgemeinerung des von Herrn Brassine (Anhang von Sturm, Cours d'analyse t. II Note III) bewiesenen Satzes, dass das Bestehen der Gleichung $\eta = xy$ die Reducibilität zur Folge hat. Vgl. auch L. Fuchs, Sitzungsberichte 1888 S. 1277, und den Beweis, den Herr Hamburger (Crelles Journal Bd. 111) für obiges Theorem gegeben hat.

Wenden wir diesen Satz auf die Ergebnisse von *III* an, so folgt, dass die Differentialgleichung (*A.*) reducibel sein muss, wenn die Gleichungen (*3.*) *III* ein eindeutiges Lösungssystem besitzen.

Zu diesem Satze muss jedoch die folgende Bemerkung gemacht werden. Wenn zwischen zwei Integralen η und y die Gleichung besteht $\eta = c\,y$, so folgt daraus natürlich nicht, dass die Gleichung (*A.*) reducibel ist; vielmehr können solche Paare von Integralen stets in beliebiger Anzahl angegeben werden. Aus $\eta = c\,y$ folgt

$$\eta^{(a)} = c\,y^{(a)}\,. \tag{1.}$$

In der That besitzt das System (*3*) *III* stets die Lösung

$$\begin{cases} E_{\alpha\beta} = 0, \text{ wenn } \alpha \neq \beta \\ E_{\alpha\alpha} = c\,, \end{cases} \tag{2.}$$

wo c von x unabhängig ist. Dieses System lässt sich in der folgenden Form darstellen (vgl. (*3.*) *I*)

$$\begin{cases} E_{\alpha\beta} = \sum\limits_{k=1}^{n} c\,y_k^{(a)}\,u_{\beta k} = 0, \text{ wenn } \alpha \neq \beta, \\ E_{\alpha\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} c\,y_k^{(a)}\,u_{\alpha k} = c\,. \end{cases} \tag{3.}$$

V.

Wir gehen jetzt dazu über, den folgenden Satz abzuleiten:

Wenn die Differentialgleichung (*A.*) für ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_n$ eine von dem Parameter t unabhängige Substitutionsgruppe besitzt, so genügen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ als Functionen von t aufgefasst, ebenfalls einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^n y}{\partial t^n} + q_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + \cdots + q_n\,y = 0\,, \tag{B.}$$

wo $q_1, q_2, \cdots, q_n$ eindeutige Functionen von t und x sind. Für die Differentialgleichung (*B.*) spielt dann x die Rolle des Parameters.

Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst, dass die Grössen $D_{\alpha\beta}$, wenn sie eindeutige Functionen von x sind, auch eindeutige Functionen des Parameters t sein müssen*).

Es werde also vorausgesetzt, dass die Grössen $D_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, \cdots, n-1$) eindeutige Functionen von x sind.

*) Vgl. hierzu die Abhandlung meines Vaters (Sb. 1892 S. 164), wo dieser Satz ohne Beweis angegeben ist.

Lassen wir den Parameter t irgend einen Umlauf in seiner Ebene beschreiben, so mögen die Grössen $D_{\alpha\beta}$ dabei in $\varDelta_{\alpha\beta}$ übergehen. Die Grössen $\varDelta_{\alpha\beta}$ müssen dann, da ja $p_1, p_2, \cdots, p_n$ und also auch $\frac{\partial p_1}{\partial t}, \frac{\partial p_2}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial p_n}{\partial t}$ nicht nur eindeutige Functionen von x, sondern auch von t sind, ebenfalls den Gleichungen (*3.*) *II* genügen.

Ferner ist klar, dass auch $\varDelta_{\alpha\beta}$ eindeutige Functionen von x sein müssen, wenn dasselbe von $D_{\alpha\beta}$ gilt. Wenn die $\varDelta_{\alpha\beta}$ von den $D_{\alpha\beta}$ verschieden sind, so haben wir also zwei in x eindeutige Lösungssysteme der Gleichungen (*3.*) *II*.

Schreiben wir uns nun das System (*3.*) *II* sowohl in $D_{\alpha\beta}$ als auch in $\varDelta_{\alpha\beta}$ hin und subtrahieren immer zwei entsprechende Gleichungen von einander, so erkennt man, dass sich das inhomogene Glied $\frac{\partial p_{n-\beta}}{\partial t}$, durch welches sich (*3.*) *II* von (*3.*) *III* unterscheidet, weghebt. Folglich genügt die Differenz $\varDelta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta}$ dem System (*3.*) *III*. Nun war aber das einzige eindeutige Lösungssystem dieser Gleichungen, welches existieren kann, ohne dass die Differentialgleichung (*A.*) reducibel wird, $E_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\alpha \neq \beta$, $E_{\alpha\alpha} = c$. Soll also (*A.*) irreducibel sein, so muss

$$\varDelta_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}, \text{ wenn } \alpha \neq \beta$$
$$\varDelta_{\alpha\alpha} = D_{\alpha\alpha} + c$$

sein, wo c eine von x unabhängige Grösse bedeutet.

Wir zeigen nun, dass man es stets so einrichten kann, dass diese Constante $c = 0$ ist. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass der Coefficient p_1 der Gleichung (*A.*) $= 0$ ist. Formt man die Differentialgleichung (*A.*) mittels der Transformation $y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx} u$ in eine Differentialgleichung für u um, so fehlt, wie eine leichte Rechnung zeigt, in dieser Differentialgleichung der Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung und die übrigen Coefficienten sind gleichfalls eindeutige Functionen von x.

Wenn

$$(1.) \qquad \frac{\partial y_i^{(\alpha)}}{\partial t} = D_{\alpha 0}\, y_i + D_{\alpha 1}\, y_i' + \cdots + D_{\alpha\, n-1}\, y_i^{(n-1)},$$

so ergibt sich für $\eta_i = \varphi(t)\, y_i$, wo φ irgend eine von x unabhängige Function von t bedeutet*),

$$(2.) \qquad \frac{\partial \eta_i^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\varphi\, \partial y_i^{(\alpha)}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} y_i^{(\alpha)}$$
$$= D_{\alpha 0}\varphi\, y_i + D_{\alpha 1}\varphi\, y_i' + \cdots + D_{\alpha\,\alpha-1}\varphi\, y_i^{(\alpha-1)} + \left(\varphi D_{\alpha\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) y_i^{(\alpha)}$$
$$+ D_{\alpha\,\alpha+1}\varphi\, y_i^{(\alpha+1)} + \cdots + D_{\alpha\, n-1}\varphi\, \eta_i^{(n-1)}$$

---

*) Vgl. L. Fuchs, Sb. 1888 S. 1283 Gleichungen (6).

$$(3.)\qquad \frac{\partial \eta_i^{(a)}}{\partial t} = D_{a0}\,\eta_i + D_{a1}\,\eta_i' + \cdots + D_{a\,a-1}\,\eta_i^{(a-1)} + \left(D_{aa} + \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\eta_i^{(a)}$$
$$+ D_{a\,a+1}\,\eta_i^{(a+1)} + \cdots + D_{a\,n-1}\,\eta_i^{(n-1)}$$

d. h. aber: die η_i genügen einem eben solchen System wie die y_i, man hat nur an Stelle von D_{aa} zu setzen $D_{aa} + \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Wenn also die zu $y_1, y_2, \cdots, y_n$ gehörige Substitutionsgruppe vom Parameter t unabhängig war, so wird man dasselbe auch von der zu $\varphi y_1, \varphi y_2, \cdots, \varphi y_n$ gehörigen sagen können, wo φ eine beliebige von x unabhängige Function von t bedeutet.

Nun folgt aus (Δ.) *III*, wenn $p_1 = 0$ ist

$$(4.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \gamma,$$

wo γ von x unabhängig ist; sollte diese Grösse von t abhängig sein, so wähle man an Stelle von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ das Fundamentalsystem $\frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}y_1, \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}y_2, \cdots, \frac{1}{\sqrt[n]{\gamma}}y_n$, dann wird für dieses die Determinante Δ den Wert 1 erhalten, und für dieses Fundamentalsystem wird nach dem eben bewiesenen Satze die Substitutionsgruppe ebenfalls von dem Parameter t unabhängig sein.

Wir können also von vornherein annehmen, dass die Determinante Δ den Wert 1 hat.

Nun erhält man bei reihenweiser Differentiation nach t

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \left(D_{00} + D_{11} + \cdots + D_{n-1\,n-1}\right)\Delta;$$

also ergiebt sich nach einem Umlauf von t

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \left(D_{00} + \cdots + D_{n-1\,n-1} + nc\right)\Delta,$$

da ja D_{aa} in $D_{aa} + c$ übergeht, Δ aber ungeändert bleibt.

Hieraus folgt aber

$$nc = 0 \text{ und somit } c = 0.$$

Wir gelangen also zu dem Resultat:

Wenn die Grössen $D_{\alpha\beta}$ eindeutige Functionen von x sind, so kann man es stets so einrichten, dass sie auch eindeutige Functionen von t werden.

VI.

Es sei wieder $y_1, y_2, \cdots, y_n$ dasjenige Fundamentalsystem, für welches die Substitutionsgruppe von dem Parameter t unabhängig ist, und für welches die zugehörigen $D_{\alpha\beta}$ eindeutige Functionen sowohl von x als auch von t sind. Wenn der Parameter t einen geschlossenen Umlauf beschreibt, so mögen dabei $y_1, y_2, \cdots, y_n$ bezw. in $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ übergehen. Da die Coefficienten von (*A.*) eindeutige Functionen von x und t waren, müssen auch $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ Lösungen von (*A.*) sein, die sich also linear und homogen durch $y_1, y_2, \cdots, y_n$ darstellen lassen müssen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + a_{1n}\, y_n \\ \eta_2 = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \cdots + a_{2n}\, y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_n = a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \cdots + a_{nn}\, y_n \end{cases}$$

Die Grössen a_{ik} sind dabei von x unabhängig; wir wollen jetzt zeigen, dass sie auch von t unabhängig sind.

Aus der Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{\partial y_i}{\partial t} = D_{00}\, y_i + \cdots + D_{0\,n-1}\, y_i^{(n-1)}$$

folgt nach einem Umlauf von t

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} y_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial t} = D_{00} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, y_k + \cdots + D_{0\,n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, y_k^{(n-1)},$$

also wegen (*2.*)

$$(3.)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} y_k = 0\ .$$

Daraus folgt aber, weil $y_1, y_2, \cdots, y_n$ ein Fundamentalsystem ist, für welches eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten nicht bestehen kann,

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} = 0\ .$$

Die Grössen a_{ik} sind also für jeden Umlauf von t nicht nur von x sondern auch von t unabhängig.

Wir bilden nun die folgende lineare Differentialgleichung mit der unabhängigen Variablen t:

$$
(4.) \qquad \begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_n \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial t} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^n y}{\partial t^n} & \frac{\partial^n y_1}{\partial t^n} & \cdots & \frac{\partial^n y_n}{\partial t^n} \end{vmatrix} = 0 .
$$

Diese Differentialgleichung wird offenbar erfüllt für

$$y = y_1,\ y = y_2,\ \cdots,\ y = y_n .$$

Schreiben wir sie in der Form

$$r_0 \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + r_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + \cdots + r_n y = 0 ,$$

indem wir die Determinante in (4.) nach den in der ersten Colonne stehenden Elementen entwickeln, so ist

$$
(5.) \qquad r_\alpha = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial y_2}{\partial t} & \frac{\partial y_3}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^{\alpha-1} y_1}{\partial t^{\alpha-1}} & \frac{\partial^{\alpha-1} y_2}{\partial t^{\alpha-1}} & \frac{\partial^{\alpha-1} y_3}{\partial t^{\alpha-1}} & \cdots & \frac{\partial^{\alpha-1} y_n}{\partial t^{\alpha-1}} \\ \frac{\partial^{\alpha+1} y_1}{\partial t^{\alpha+1}} & \frac{\partial^{\alpha+1} y_2}{\partial t^{\alpha+1}} & \frac{\partial^{\alpha+1} y_3}{\partial t^{\alpha+1}} & \cdots & \frac{\partial^{\alpha+1} y_n}{\partial t^{\alpha+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^n y_1}{\partial t^n} & \frac{\partial^n y_2}{\partial t^n} & \frac{\partial^n y_3}{\partial t^n} & \cdots & \frac{\partial^n y_n}{\partial t^n} \end{vmatrix} . \quad (\alpha = 0, 1, \cdots, n) .
$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Grössen

$$q_1 = \frac{r_1}{r_0},\ q_2 = \frac{r_2}{r_0},\ \cdots,\ q_n = \frac{r_n}{r_0}$$

eindeutige Functionen von x und t sind.

Nach einem Umlauf von x oder von t möge y_i übergehen in $\overline{y}_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \cdots + c_{in} y_n$, wo die c_{ik} von x und t unabhängig sind. Dann geht r_α bei diesem Umlauf über in

$$\overline{r}_\alpha = \begin{vmatrix} c_{11}\, y_1 + c_{12}\, y_2 + \cdots + c_{1n}\, y_n & \cdots & c_{n1}\, y_1 + c_{n2}\, y_2 + \cdots + c_{nn}\, y_n \\ c_{11} \frac{\partial y_1}{\partial t} + c_{12} \frac{\partial y_2}{\partial t} + \cdots + c_{1n} \frac{\partial y_n}{\partial t} & \cdots & c_{n1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + c_{n2} \frac{\partial y_2}{\partial t} + \cdots + c_{nn} \frac{\partial y_n}{\partial t} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{11} \frac{\partial^{\alpha-1} y_1}{\partial t^{\alpha-1}} + c_{12} \frac{\partial^{\alpha-1} y_2}{\partial t^{\alpha-1}} + \cdots + c_{1n} \frac{\partial^{\alpha-1} y_n}{\partial t^{\alpha-1}} & \cdots & c_{n1} \frac{\partial^{\alpha-1} y_1}{\partial t^{\alpha-1}} + c_{n2} \frac{\partial^{\alpha-1} y_2}{\partial t^{\alpha-1}} + \cdots + c_{nn} \frac{\partial^{\alpha-1} y_n}{\partial t^{\alpha-1}} \\ c_{11} \frac{\partial^{\alpha+1} y_1}{\partial t^{\alpha+1}} + c_{12} \frac{\partial^{\alpha+1} y_2}{\partial t^{\alpha+1}} + \cdots + c_{1n} \frac{\partial^{\alpha+1} y_n}{\partial t^{\alpha+1}} & \cdots & c_{n1} \frac{\partial^{\alpha+1} y_1}{\partial t^{\alpha+1}} + c_{n2} \frac{\partial^{\alpha+1} y_2}{\partial t^{\alpha+1}} + \cdots + c_{nn} \frac{\partial^{\alpha+1} y_n}{\partial t^{\alpha+1}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{11} \frac{\partial^{n} y_1}{\partial t^{n}} + c_{12} \frac{\partial^{n} y_2}{\partial t^{n}} + \cdots + c_{1n} \frac{\partial^{n} y_n}{\partial t^{n}} & \cdots & c_{n1} \frac{\partial^{n} y_1}{\partial t^{n}} + c_{n2} \frac{\partial^{n} y_2}{\partial t^{n}} + \cdots + c_{nn} \frac{\partial^{n} y_n}{\partial t^{n}} \end{vmatrix}.$$

Nach dem Multiplicationssatz der Determinanten, welcher sich in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{12} + \cdots + a_{1n}\, b_{1n} & \cdots & a_{n1}\, b_{11} + a_{n2}\, b_{12} + \cdots + a_{nn}\, b_{1n} \\ a_{11}\, b_{21} + a_{12}\, b_{22} + \cdots + a_{1n}\, b_{2n} & \cdots & a_{n1}\, b_{21} + a_{n2}\, b_{22} + \cdots + a_{nn}\, b_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdots & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{11}\, b_{n1} + a_{12}\, b_{n2} + \cdots + a_{1n}\, b_{nn} & \cdots & a_{n1}\, b_{n1} + a_{n2}\, b_{n2} + \cdots + a_{nn}\, b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ausspricht, zerfällt die Determinante für $\overline{r}_\alpha$ in

$$\overline{r}_\alpha = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} r_\alpha .$$

Mithin erhält man für $q_\alpha = \dfrac{r_\alpha}{r_0}$

$$\overline{q}_\alpha = \frac{\overline{r}_\alpha}{\overline{r}_0} = \frac{|c_{ik}|\, r_\alpha}{|c_{ik}|\, r_0} = \frac{r_\alpha}{r_0} = q_\alpha .$$

Das heisst aber: q_a bleibt bei allen Umläufen von x und t ungeändert, ist also eine eindeutige Function von x und t. Die Grössen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ genügen also als Functionen von t der linearen homogenen Differentialgleichung

$$(B.)\qquad \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + q_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + \cdots + q_n y,$$

womit der zu Beginn von V ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Für das am Schlusse von I angeführte Beispiel besteht, wie schon in II angegeben, die Substitutionsgruppe aus lauter ganzen Zahlen, ist also vom Parameter k_1 unabhängig. Auf die Differentialgleichung

$$(6.)\qquad \psi y^{(4)} + 3\psi' y''' + \frac{25}{8}\psi'' y'' + \frac{5}{4}\psi''' y' + \frac{15}{128}\psi^{(4)} y = 0,$$

wo

$$\psi = (x-k_1)\,(x-k_2)\,(x-k_3)\,(x-k_4),$$

wird daher der eben bewiesene Satz anwendbar sein, da diese Differentialgleichung irreducibel ist. In der That befriedigen die der Gleichung (6.) genügenden Ausdrücke

$$y_i = \int_x^{k_i} \frac{dz}{\varphi(z)},$$

wo

$$\varphi(z) = (z-x)\,(z-k_1)\,(z-k_2)\,(z-k_3)\,(z-k_4),$$

aufgefasst als Functionen von k_1, wie aus der Symmetrie ersichtlich ist, der Differentialgleichung

$$(7.)\qquad \chi(k_1)\frac{\partial^4 y}{\partial k_1^4} + 3\frac{\partial \chi(k_1)}{\partial k_1}\frac{\partial^3 y}{\partial k_1^3} + \frac{25}{8}\frac{\partial^2 \chi(k_1)}{\partial k_1^2}\frac{\partial^2 y}{\partial k_1^2} + \frac{5}{4}\frac{\partial^3 \chi(k_1)}{\partial k_1^3}\frac{\partial y}{\partial k_1} + \frac{15}{128}\frac{\partial^3 \chi(k_1)}{\partial k_1^4} y = 0,$$

wo

$$\chi(k_1) = (k_1 - x)\,(k_1 - k_2)\,(k_1 - k_3)\,(k_1 - k_4).$$

VII.

Der im Anfang von V ausgesprochene und in V und VI bewiesene Satz lässt eine Umkehrung zu. In seiner Abhandlung: „Über die Abhängigkeit der Lösungen einer linearen Differentialgleichung von den in den Coefficienten auftretenden Parametern" (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1895, S. 105) hat mein Vater untersucht, was aus dem gleichzeitigen Bestehen zweier linearer Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + g\frac{\partial z}{\partial x} + hz = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + p_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + p_2\frac{\partial z}{\partial y} + p_3 z = 0,$$

deren Coefficienten rational von x und y abhängen, geschlossen werden kann. In diesen Untersuchungen ist die Umkehrung des in V ausgesprochenen Satzes enthalten. Es sei mir aber gestattet in dem Falle, dass die zweite Differentialgleichung auch von zweiter Ordnung ist und die Coefficienten eindeutige Functionen der beiden Variablen sind, die Untersuchung auf andere Weise mittels derselben Methoden, die wir im Vorhergehenden angewandt haben, noch einmal durchzuführen.

Wir setzen also, bei unserer bisherigen Bezeichnungsweise bleibend, voraus, dass die Elemente y_1, y_2 eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung

$$(A.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = py,$$

wo p eine eindeutige Function der beiden Variablen x und t ist, als Functionen von t aufgefasst der Differentialgleichung

$$(B.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q_1\frac{\partial y}{\partial t} + q_2 y = 0$$

genügen, wo q_1, q_2 gleichfalls eindeutige Functionen von x und t sind.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass y_1, y_2 auch für $(B.)$ ein Fundamentalsystem sein muss. Wäre y_1, y_2 kein Fundamentalsystem für $(B.)$, so müsste die Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial y_2}{\partial t} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden. Bilden wir nun

$$(1.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} = D_{00}\, y_1 + D_{01}\frac{\partial y_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} = D_{00}\, y_2 + D_{01}\frac{\partial y_2}{\partial x}, \end{cases}$$

so folgt, wenn wieder $\Delta = y_1\frac{\partial y_2}{\partial x} - y_2\frac{\partial y_1}{\partial x}$ gesetzt wird,

$$(2.)\qquad \Delta D_{01} = y_1\frac{\partial y_2}{\partial t} - y_2\frac{\partial y_1}{\partial t} = \Delta' = 0,$$

mithin, da $\Delta \neq 0$,

$$(3.)\qquad D_{01} = 0.$$

Nun lauten die Gleichungen (*3.*) *II* in diesem Falle

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D_{00}}{\partial x} = D_{10} - p\, D_{01}, \\[2mm] \dfrac{\partial D_{01}}{\partial x} = D_{11} - D_{00}, \\[2mm] \dfrac{\partial D_{10}}{\partial x} = - p\, D_{11} + p\, D_{00} + \dfrac{\partial p}{\partial t}, \\[2mm] \dfrac{\partial D_{11}}{\partial x} = - D_{10} + p\, D_{01}. \end{cases}$$

Multipliciert man die zweite dieser Gleichungen mit p und addiert sie dann zur dritten, so ergibt sich mit Benutzung der ersten

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 D_{00}}{\partial x^2} + 2p \frac{\partial D_{01}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} D_{01} = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Aus der ersten, zweiten und vierten folgt leicht

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 D_{01}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial D_{00}}{\partial x} = 0. ^{*)}$$

Wäre also $D_{01} = 0$, so hätte man zufolge von (*6.*) $\dfrac{\partial D_{00}}{\partial x} = 0$ und somit aus (*5.*) $\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0$. Das würde aber heissen, dass der Parameter t in (*A.*) garnicht vorkommt, was natürlich nicht vorausgesetzt ist. Es müssen also y_1, y_2 auch für (*B.*) ein Fundamentalsystem sein.

Aus (*1.*) folgt leicht:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = {} & \left(\frac{\partial D_{00}}{\partial t} + D_{00}^2 + D_{01}\, D'_{00} + p\, D_{01}^2 \right) y_i \\ & + \left(\frac{\partial D_{01}}{\partial t} + 2\, D_{00} D_{01} + D_{01} D'_{01} \right) y'_i. \end{aligned}$$

Setzt man (*3.*) und (*7.*) in (*B.*) ein, so ergibt sich für y_1, y_2 eine Gleichung erster Ordnung

$$(8.)\qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{\partial y_1}{\partial x} + \mu\, y_1 = 0, \\[2mm] \lambda \dfrac{\partial y_2}{\partial x} + \mu\, y_2 = 0, \end{cases}$$

*) Vgl. zu (*5.*) und (*6.*) L. Fuchs, Sitzungsber. 1892 S. 163, Gleichungen (*3a*).

wo

$$\lambda = \frac{\partial D_{01}}{\partial t} + 2 D_{00} D_{01} + D_{01} D'_{01} + q_1 D_{01},$$

$$\mu = \frac{\partial D_{00}}{\partial t} + D_{00}^2 + p D_{01}^2 + D_{01} D'_{00} + q_1 D_{00} + q_2 .$$

Da aber die Determinante $\Delta = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$ nicht gleich Null ist, so folgt aus der Theorie der linearen Gleichungen $\lambda = 0$, $\mu = 0$, d. h.

$$\frac{\partial D_{01}}{\partial t} + 2 D_{00} D_{01} + D_{01} D'_{01} + q_1 D_{01} = 0, \tag{9.}$$

$$\frac{\partial D_{00}}{\partial t} + D_{00}^2 + p D_{01}^2 + D_{01} D'_{00} + q_1 D_{00} + q_2 = 0. \tag{10.}$$

Aus (*6.*) folgt

$$D'_{01} + 2 D_{00} = c, \tag{6'.}$$

wo c von x unabhängig ist. Also folgt aus (*9.*)

$$\frac{\partial D_{01}}{\partial t} + c D_{01} + \dot{q}_1 D_{01} = 0. \tag{9'.}$$

Differentiiert man (*10.*) nach x und berücksichtigt (*6'.*) und (*5.*), so folgt

$$\frac{\partial^2 D_{00}}{\partial x \, \partial t} + c \frac{\partial D_{00}}{\partial x} + \dot{D}_{01} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q_1 D_{00}) + q'_2 = 0. \tag{10'.}$$

Differentiiert man (*9'.*) zweimal nach x und benutzt (*6'.*), so ergibt sich

$$-2 \frac{\partial^2 D_{00}}{\partial x \, \partial t} + c D''_{01} + (q_1 D_{01})'' = 0, \text{ also}$$

in Verbindung mit (*10'.*)

$$q'_1 D'_{01} + D_{01}\left(q''_1 + 2 \frac{\partial p}{\partial t}\right) + c q'_1 + 2 q'_2 = 0. \tag{11.}$$

Bezeichnet man wieder das, was aus $D_{\alpha\beta}$ bei einem Umlauf von x wird, mit $\overline{D}_{\alpha\beta}$ und setzt $\overline{D}_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}$, so folgt für E_{01} aus (*11.*), da ja die Coefficienten dieser Gleichung eindeutig in x sind,

$$q'_1 E'_{01} + E_{01}\left(q''_1 + 2 \frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0. \tag{12.}$$

Aus (*5.*) und (*6.*) dagegen ergibt sich

$$E'''_{01} - 4 p E'_{01} - 2 p' E_{01} = 0. \tag{13.}$$

Nun ist für unsere Differentialgleichung zweiter Ordnung entsprechend (*6.*) *II*

$$E_{01} = \gamma_{11} y_1 u_{11} + \gamma_{12} y_1 u_{12} + \gamma_{21} y_2 u_{11} + \gamma_{22} y_2 u_{12}, \tag{14.}$$

und es ist (*D.*) *1*

$$u_{11} = \frac{-1}{\Delta} y_2,$$

$$u_{12} = \frac{1}{\Delta} y_1.$$

Oder, da hier ((*4.*) *V*) $\Delta = \gamma$ von x unabhängig ist,

$$E_{01} = \delta_{11} y_1^2 + \delta_{12} y_1 y_2 + \delta_{22} y_2^2, \tag{14.}$$

wo δ_{ik} von x unabhängig ist. In der That ist das allgemeine Integral von (*13.*) in (*14.*) enthalten, wenn man die Constanten δ_{ik} willkürlich lässt. Diese Differentialgleichung (*13.*), der die Quadrate der Integrale von (*A.*) genügen, wird aber nur unter ganz besonderen Voraussetzungen über p reducibel. Das Bestehen der Gleichung (*12.*) hat also zur Folge, dass entweder die Coefficienten von (*12.*) verschwinden oder $E_{01} = 0$ ist. Das erstere ist unmöglich, denn

$$q_1' = 0 \text{ und } q_1'' + 2 \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

hätten $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ zur Folge. Also bleibt nur die Möglichkeit $E_{01} = 0$.

Daraus ergibt sich aber, da zufolge von (*6.'*)

$$E_{01}' + 2 E_{00} = 0, \tag{15.}$$

auch $E_{00} = 0$, d. h. aber für beliebige Umläufe von x

$$\overline{D}_{00} = D_{00}, \quad \overline{D}_{01} = D_{01}. \tag{16.}$$

Wir kommen also zu dem Resultat: D_{00} und D_{01} sind eindeutige Functionen von x, die Substitutionsgruppe von (*A.*), die zu y_1, y_2 gehört, ist also von dem Parameter t unabhängig.