Algebra.

I.	Rechnen mit benannten Zahlen.	Benennung	veränderlich:
II.	„ „ unbenannten „	Wert	„ :
III.	„ „ unbestimmten Größen: Algebra.	Glieder	„ :
IV.	„ „ Funktionen: Höhere Mathematik.		

Rechen-Operationen.

a, x jede Größe; in derselben Rechnung eine und dieselbe.

1. Addieren: $\underset{\text{Summand}}{a} + \underset{\text{Summand}}{b} = \underset{\text{Summe.}}{c} = b + a$

$$(a+b)+c = a+b+c = (b+c)+a = (c+a)+b$$

2. Subtrahieren: $(c-b)+b=c$

$$\left\{\begin{array}{l} c-b=a \\ c-a=b \end{array}\right. \Bigg| \text{ Minuend} - \text{Subtrahend} = \begin{array}{c}\text{Differenz.}\\ \text{Rest.}\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} c-c=0 \\ c-(>c)=-, \text{ negative Größe.} \end{array}\right.$$

Mit Vorzeichen: Algebraische Größe. Algebraische Summe.

zusammen mit 1.

$$\left\{\begin{array}{ll} (a+b)-c & =a+b-c \\ (a-b)+c & =a-(b-c) \\ (a-b)-c & =a-(b+c) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a-(b+c) & =a-b-c \\ a+(b-c) & =a+b-c \\ a-(b-c) & =a-b+c \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a+b)\pm(c+d)=a+b\pm c\pm d \\ (a+b)\pm(c-d)=a+b\pm c\mp d \\ (a-b)\pm(c+d)=a-b\pm c\pm d \\ (a-b)\pm(c-d)=a-b\pm c\mp d \end{array}\right.$$

Auflösen und Zufügen von Klammern:

$$\left.\begin{array}{l} +(a\pm b)=+a\pm b, \text{ ohne Zeichenänderung.} \\ -(a\pm b)=-a\mp b, \text{ mit Zeichenänderung.} \end{array}\right\}$$

für $a=0$ und $c=0$ Zeichenregel: Algebraische Addition, Zeichen der größeren.

3. Multiplicieren: $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b}=ba$

$$\underset{\text{Faktor}}{a} \cdot \underset{\text{Faktor}}{b} = \underset{\text{Produkt.}}{c} = b \cdot a$$

(Faktor × Faktor = Produkt.)

$$\left\{\begin{array}{l} a\cdot 0 \;=0 \\ a\cdot\infty=\infty \\ 0\cdot\infty \text{ unbestimmt.} \end{array}\right.$$

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot b\cdot c = (b\cdot c)\cdot a = (c\cdot a)\cdot b$$

zusammen mit 1. und 2.

$$\left\{\begin{array}{l} (a\pm b)c = ac\pm bc \\ a(b\pm c) = ab\pm ac \end{array}\right. \Bigg| \text{ Ausklammern.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a+b)\cdot(c\pm d) = ac+bc\pm ad\pm bd \\ (a-b)\cdot(c\pm d) = ac-bc\pm ad\mp bd \end{array}\right. \Bigg| \text{ jedes Glied mit jedem Glied.}$$

für $a=0$ und $c=0$ Zeichenregel: Gleiche Zeichen geben $+$, ungleiche $-$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Dividieren: $(c:b)\cdot b = c$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c}{b}=a\\[2ex]\dfrac{c}{a}=b\end{array}\right. \quad \left|\quad \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}=\text{Quotient},\ \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}=\text{Bruch.}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\pm c}{\pm c}=1 \quad \text{heben, erweitern.}\\[2ex]\dfrac{c}{\gtrless c}=\text{gebrochene Zahl.}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{0}=\infty\\[2ex]\dfrac{c}{\infty}=0\end{array}\right| \quad 0 \text{ und } \infty \text{ reciprok.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{0}{0}\\[2ex]\dfrac{\infty}{\infty}\end{array}\right\} \text{unbestimmt.}$$

zusammen mit 1. und 2.

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c} \quad \text{Partial-Division.}$$

$$\frac{a}{b\pm c}=\frac{a}{b\pm c}$$

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c\pm d}\pm\frac{b}{c\pm d}=\frac{a}{c\pm d}\pm\frac{-b}{-c\mp d}$$

für $a=0$ und $c=0$ Zeichenregel: Gleiche Zeichen geben $+$, ungleiche $-$.

zusammen mit 3.

$$\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}\cdot b=a\cdot\frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{bc}=\frac{a}{bc}$$

zusammen mit 4.

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c}=\frac{a}{c}:b$$

$$a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}=a\cdot\frac{c}{b}$$

zusammen mit 1. bis 4.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}\\[2ex]\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-bc}{bd}\end{array}\right| \quad \text{Hauptnenner.}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Potenzieren.

$$\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{b} = a^b = c$$

Exponent; Basis = Potenz.

Quadrate:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144 ...
Kuben:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000 ...		

$$\begin{cases} (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b) \\ (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\ (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab \end{cases}$$

$$(-1)^{2n} = +1 \qquad (-1)^{2n\pm 1} = -1$$

Vereinigen und Trennen.

Exponent gleich, Rechnen mit Basis.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$
$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

Basis gleich, Rechnen mit Exponent.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\begin{cases} m > n & a^m : a^n = a^{m-n} \\ m = n & 1 = a^0 \\ m < n & \dfrac{1}{a^{+p}} = a^{-p} \end{cases}$$

Exponent: 0, —

Basis und Exponent gleich.

$$a^m \cdot a^m = a^{2m} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$$
$$a^m : a^m = 1$$

6. Radizieren.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$$

$$\sqrt[b]{c} = a \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Exponent; Radikand = Wurzel. Bruch.

$\sqrt[(2)]{2}$ { nicht Bruch; denn: Bruch ^{2} nicht $= 2$; irrationale Zahl. | rational: periodischer Dezimalbruch. irrational: nicht periodischer Dezimalbruch.

$$\sqrt[(2)]{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$$

$$\begin{cases} \sqrt[2n\pm 1]{+1} = +1 & \sqrt[2]{+1} = \pm 1 \\ \sqrt[2n\pm 1]{-1} = -1 & \sqrt[2]{-1} = i \end{cases}$$

Rationalmachen:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a}\sqrt{a}$$

Vereinigen und Trennen.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

7. Logarithmieren.

$$\left(\text{Definition durch 2 Gleichungen: } a^b = c \qquad b = \frac{\rceil c}{a}\right)$$

Definition durch 1 Gleichung: $a^{\frac{\rceil c}{a}} = c$

Logarithmus

Basis = Numerus.

Logarithmus = Exponent als Funktion von Basis und Numerus.

Vereinigen und Trennen.

$$\underline{\rceil m \cdot n} = \underline{\rceil m} + \underline{\rceil n}$$

$$\underline{\rceil m : n} = \underline{\rceil m} - \underline{\rceil n}$$

$$\underline{\rceil m^n} = n \cdot \underline{\rceil m}$$

$$\underline{\rceil \sqrt[n]{m}} = \frac{1}{n} \cdot \underline{\rceil m}$$

		=		
Summe	Differenz		—	—
Produkt	Quotient		Summe	Differenz
Potenz	Wurzel		Produkt	Quotient

N	1 2 . 4 . . . 8 . .	geometrische	Reihe.
$\frac{\rceil}{2}$	0 1 . 2 . . . 3 . .	arithmetische	

Rechenstab.

Erniedrigung um 1 Rechenstufe:

Numerische Rechnung.

Für die Basis 10 gemeines Logarithmen-System. Briggs.

Berechnung der Tafel.

$10^x = 2$	$1 < 2 < 10$	$0 < x < 1$	$0 < x < 1$
$10^{2x} = 4$	$1 < 4 < 10$	$0 < 2x < 1$	$0 < x < 0{,}5$
$10^{4x} = 16$	$10 < 16 < 100$	$1 < 4x < 2$	$0{,}25 < x < 0{,}5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^{256x} = 115(75)$	$1(77) < 115(75) < 1(78)$	$77 < 256x < 78$	$0.300.. < x < 0{,}304..$
x	$= \log 2$		$= 0{,}30\ldots$

$\log 2 = 0{,}30103$

$\log 3 = 0{,}47712$

$$\left.\begin{array}{l} \log \infty = +\infty \\ \log 1 = \pm 0 \\ \log 0 = -\infty \end{array}\right\} \text{alle reellen Zahlen.}$$

$\log^{(10)}$ (Prim-)Zahl = Charakteristik + Mantisse.
(Kennziffer) (Zugabe)

Für einen Numerus ist die Charakteristik des Logarithmus die höchste Ordnungszahl, Einer 0[te] Ordnung.

Für alle Numeri mit gleichen Ziffern ist die Mantisse des Logarithmus dieselbe.

Numeri und Logarithmen wachsen (annähernd) gleichmäßig:

P(artes) p(roportionales), Interpolation. s. S. 15.

Zu vermeiden: $\begin{cases} \text{Negative Mantisse.} \\ \text{Gebrochene (negative) Charakteristik.} \end{cases}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Rechen-Stufen.

Rechnen: Aus 2 Zahlen 1 Zahl bilden.

I. 1. Addieren. vertauschbar.	Umkehrung: 2. Subtrahieren.	(4 Species.)
Besonderer Fall:		
II. 3. Multiplizieren. vertauschbar.	Umkehrung: 4. Dividieren.	
Besonderer Fall:		

III. 5. Potenzieren. nicht vertauschbar. Umkehrungen: $\begin{cases} \text{6. Radizieren.} \\ \text{7. Logarithmieren.} \end{cases}$

Besonderer Fall:

IV. ?

$\begin{cases} \text{Umkehrung: ein Glied abhängig von den andern. (Probe.)} \\ \text{Besonderer Fall: gleiche Glieder.} \end{cases}$

Die höhere Stufe vor der niederen ausgerechnet; Abweichungen: Klammern.

Zahlen-Arten.

Neue Zahlen-Arten nur aus den Umkehrungen:
Zulassung in dem Sinne, daß das Zeichen der Rechen-Operation seine Bedeutung behält.

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\text{1. positiv. 2. negativ.}}_{\text{ganz.}}\ \text{4. gebrochen.}}_{\text{rational.}}\ \begin{cases}6.\\7.\end{cases}\text{irrational.}}_{\text{reell.}}\ \begin{cases}6.\\7.\end{cases}\text{kombiniert mit 2. imaginär.}}_{\text{(Komplexe) Zahl.}}$

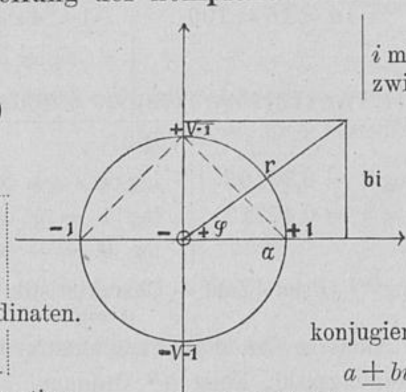
Graphische Darstellung der komplexen Größen. Gauss.

Richtung.
i mittlere Proportionale zwischen $+1$ und -1.

algebraisch:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

durch die Substitution: $\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi \\ \dfrac{a}{\cos\varphi} = r \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = +1 \end{array}\right\} \text{periodisch.}$$
$i^5 = i$ usw.

geometrisch: $\begin{cases}\text{Rechtwinklige Koordinaten.}\\ \text{Polar-Koordinaten.}\end{cases}$

Koordinaten-Transformation:

$$\left\{\begin{array}{l|l} a = r\cdot\cos\varphi & r = \sqrt{a^2+b^2} \\ b = r\cdot\sin\varphi & \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\}$$

konjugiert komplex:

$$\left.\begin{array}{l} a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) \\ (a+bi) + (a-bi) = 2a \\ (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2 \\ \dfrac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{array}\right\}$$

Wurzeln der Einheit durch den Moivre'schen Satz (s. S. 11):
Teilung des Gauß'schen Einheits-Kreises in die Anzahl Teile des Gleichungs-Grades.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Logarithmisch-machen durch trigonometrische Funktionen.

Ausdruck.	Substitution.	Resultat.	
$a+b$	$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}$	$=\frac{a}{\cos^2\varphi}$	
$a-b$	wenn $a>b$ $\quad \sin\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}$	$=a\cdot\cos^2\varphi$	das Größere mit Vorzeichen.
	wenn $a<b$ $\quad \sin\varphi=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$=-b\cdot\cos^2\varphi$	
$a\pm bi$	$\left\{\begin{array}{l}\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi\\ \frac{a}{\cos\varphi}=r\end{array}\right.$	$=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$	

Goniometrische Lösung der quadratischen Gleichung.

$$x^2+ax+b=0 \quad x_{\frac{1}{2}}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$$

2 Stellen logarithmisch durch 1 Substitution.

Bedingung.		Substitution.	Resultat.	
$b=-$		$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{b}}{\frac{a}{2}}$	$x_1=\sqrt{b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$	$x_2=-\sqrt{b}:\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$
$b=+$ und	$\sqrt{b}<\frac{a}{2}$	$\sin\varphi=\frac{\sqrt{b}}{\frac{a}{2}}$	$x_1=\sqrt{b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$	$x_2=\sqrt{b}:\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$
	$\sqrt{b}>\frac{a}{2}$	$\operatorname{cosin}\varphi=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{b}}$	$x_1=\sqrt{b}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$	$x_2=\sqrt{b}(\cos\varphi-i\sin\varphi)$

Vorzeichen-Bestimmung.

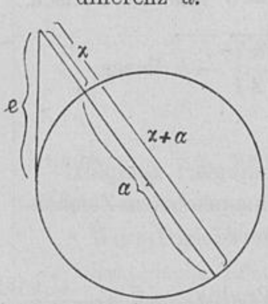
Geometrische Konstruktion der quadratischen Gleichung.

$\left\{\begin{array}{l}x \text{ nur eine Strecke: } a \text{ eine Strecke, } b \text{ eine Fläche } = e^2.\\ \text{nicht überall } +.\end{array}\right.$

$x^2+ax-e^2=0$

$x(x+a)=e^2$

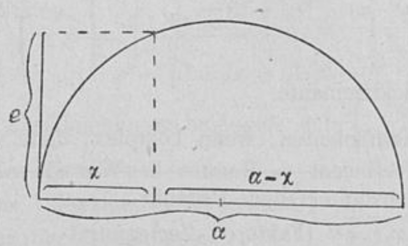
Quadrat e^2 = Rechteck mit gegebener Seitendifferenz a.



$x^2-ax+e^2=0$

$x(a-x)=e^2$

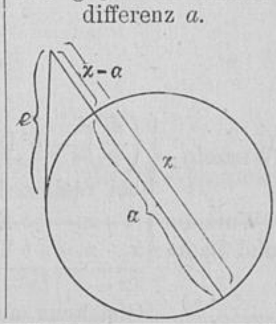
Quadrat e^2 = Rechteck mit gegebener Seitensumme a.



$-x^2+ax+e^2=0$

$x(x-a)=e^2$

Quadrat e^2 = Rechteck mit gegebener Seitendifferenz a.



Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichungen.

Formel (Satz) — Bestimmungsgleichung (Aufgabe).

Ordnen — Transponieren — entgegengesetzte Rechen-Operation.

I. 1. Grad 1 Unbekannte.

$(ax^1 + bx^0 = 0)$ Normalform: $x + a = 0$ $\quad x = -a$

II. 1. Grad 2 (und mehr) Unbekannte.

Normalform: $\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\}$ Eliminieren. | 1 Gleichung 1 Unbekannte.

1. Substitutions-Methode: $x = \dfrac{c - by}{a}$ $\quad\quad d \cdot \dfrac{c - by}{a} + ey = f$

2. Kombinations-Methode: $x = \dfrac{c - by}{a}$ $\quad x = \dfrac{f - ey}{d}$ $\quad\quad \dfrac{c - by}{a} = \dfrac{f - ey}{d}$

3. Koefficienten-Methode:

$$\begin{array}{l|l} ax + by = c & d \\ dx + ey = f & a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} dax + dby = dc \\ adx + aey = af \end{array}\right\} \text{algebraisch addiert} \qquad y(ae - db) = af - dc$$

4. Determinanten.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

5. Bézout.
Methode der unbestimmten Koefficienten.

$$\begin{array}{l|l} ax + by = c & n \\ dx + ey = f & \end{array}$$

$$x(an - d) + y(bn - e) = cn - f \qquad an - d = 0,\ n = \frac{d}{a} \qquad bn - e = 0,\ n = \frac{e}{b}$$

III. 2. Grad 1 Unbekannte.

$(ax^2 + bx^1 + cx^0 = 0)$ Normalform: $x^2 + \overbrace{\underbrace{a}_{\text{Koefficient.}}x + \underbrace{b}_{\text{Konstantes Glied.}}}^{\text{Daten.}} = 0$

spezielle Fälle: $\left\{\begin{array}{l} a = 0 \text{ rein quadratisch } x_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{-b} \\ b = 0 \quad x(x + a) = 0 \quad x_1 = 0 \mid x_2 = -a \end{array}\right.$

1. Ergänzungs-Methode:

$x^2 + ax + b = 0$ gemischt quadratisch.

$\left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 = -b + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ rein quadratisch.

$\underbrace{x_{\frac{1}{2}} = -\dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - b}}_{\text{Wurzeln.}}$ linear.

2. Methode der unbestimmten Koefficienten.

$x^2 + ax + b = 0$ gemischt quadratisch.

$x = y + z$

$z^2 + z(2y + a) + (y^2 + ay + b) = 0$

linear. $2y + a = 0$ $\quad y = -\dfrac{a}{2}$ | $z^2 - \dfrac{a^2}{4} + b = 0$ rein quadratisch. $\quad z_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - b}$ linear.

Wurzeln: $\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - b \text{ Diskriminante.} \\ \text{bei reellen Koefficienten: wenn komplex, dann konjugiert komplex.} \end{array}\right.$

Wurzeln und Daten: $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -a \text{ Koefficient = Summe der Wurzeln mit umgekehrtem Zeichen.} \\ x_1 \cdot x_2 = +b \text{ Konstantes Glied = Produkt „ „ nicht „ „} \end{array}\right.$

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (Faktoren-Zerlegung.)

Gleichung aus den Wurzeln: $x^2 - \text{Summe} \cdot x + \text{Produkt} = 0$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

IV. n. Grad 1 Unbekannte, reduzierbar auf 2. Grad.

$$x^{2n} + ax^n + b = 0 \qquad x^n = y$$

1. Binomische Gleichungen.

$$x^n - a = 0 \qquad x_{1 \ldots n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{1}$$

$$x^n = 1 \qquad x_{1 \ldots n} \text{ Wurzeln der Einheit.}$$

algebraische und goniometrische Lösung.

$x_1 = +1$	$x_1 = +1$	$x_1 = +1$	$x_1 = +1$	…
	$x_2 = -1$	$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$x_2 = -1$	
		$x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	$x_3 = +\sqrt{-1}$	
			$x_4 = -\sqrt{-1}$	

Methode der unbestimmten Koefficienten.

$$x = y + zi = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Moivre'scher Satz:

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{m}{n} 360 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$x_{1 \ldots n} = \cos\frac{m}{n} 360 + i \sin\frac{m}{n} 360$$

beim 5. Grad: reciproke Gleichung 4. Grades usw.

2. Reciproke Gleichungen.

$\begin{cases} \text{Reciproke Wurzeln = Symmetrische Koefficienten.} \\ \text{Vorzeichen gleich oder symmetrisch entgegengesetzt.} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{bei ungeradem Grad eine Wurzel } \pm 1. \\ \text{bei geradem Grad und entgegengesetzten Vorzeichen Mittel-Koefficient } \pm 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Lösung algebraisch: Faktoren-Abscheidung: } (x+1) \quad (x-1) \quad (x^2-1) \\ \text{beim 4. Grade: heben mit } x^2; \quad \text{substituieren } x + \dfrac{1}{x} = y, \text{ also } x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2 \end{cases}$

V. 2. (auch höherer) Grad 2 (und mehr) Unbekannte.

Grundformen: $(x+y)^{(2)}$ $(x-y)^{(2)}$ $(x \cdot y)$ (x^2+y^2) (x^2-y^2)

wenn die eine Gleichung 1. Grades: halbquadratisch: Einsetzen.

Beispiel: $\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = P \end{cases}$

1. Einsetzen.	2. algebraisch.	3. Identitäten.	4. Quadratische Gleichung.
$x = s - y$	$(x+y)^2 - 4xy$		$v^2 - sv + P = 0$

Identitäten: $\begin{cases} x \cdot y = \dfrac{(x+y)^2}{4} - \dfrac{(x-y)^2}{4} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + \dfrac{(x-y)^2}{2} \\ x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \end{cases}$

Grundform $\dfrac{x}{y} = z$, wenn die Gleichungen homogen, d. h. $\left\{\begin{matrix} \text{Grad} \\ \text{Dimension} \end{matrix}\right\}$ aller Glieder gleich.

Wort-Gleichungen: Unbekannte, Gleichheit.

Graphische Lösung der Gleichungen.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Proportionen.

(1. Rechenstufe.) Arithmetische Proportion: $a-b=c-d$

Summengleichung: $a+d=b+c$

Vertauschung der Außen-Glieder, Innen-Glieder.

$a-b=c-x$ 4. (3.) Proportionale $x=b+c-a$

stetige Proportion: $a-b=b-c$

$a-x=x-b \quad x=\frac{a+b}{2}$ $\Big\{$ mittlere arithmetische Proportionale oder arithmetisches Mittel.

fortlaufende Proportion: $a-b=c-d=e-f=\ldots\ldots$

(2. Rechenstufe.) Geometrische Proportion: $a:b=c:d$

Produktengleichung: $a\cdot d=b\cdot c$

Vertauschung der Außen-Glieder, Innen-Glieder.

Korrespondente Addition und Subtraktion. Addition und Subtraktion von 1, Division.

Verhältnis-Glieder.	Vorder- und Hinter-Glieder.
$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$	$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$
$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$	$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Radizieren.

$a:b=c:x$ 4. (3.) Proportionale $x=\frac{b\cdot c}{a}$

stetige Proportion: $a:b=b:c$

$a:x=x:b \quad x=\sqrt[2]{a\cdot b}$ $\Big\{$ mittlere geometrische Proportionale oder geometrisches Mittel.

fortlaufende Proportion: $a:b=c:d=e:f=\ldots$

andere Schreibweise: $a:c:e\ldots=b:d:f\ldots$

$$\frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$$

Reihen.

Fortlaufende stetige arithmetische Proportion: $a-b=b-c=c-d=\ldots$

$a, b, c, d, \ldots$ arithmetische Reihe, absteigend.
aufsteigend:

Arithmetische Reihe 1. Ordnung: 1. Differenz konstant.

$$\begin{cases} u=a+(n-1)d \\ s=\frac{n}{2}(a+u) \end{cases}$$

Beispiele:	$1, 2, 3 \ldots n$	$\Sigma n=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$	Kugel-Dreieck	
	$1, 3, 5 \ldots 2n-1$	$\Sigma(2n-1)=n^2$	Kugel-Viereck	
	$1, 4, 7 \ldots$	usw.	Figurierte Zahlen 1. Ordnung.	planimetrisch.
	$\ldots$			

Arithmetische Reihe 2. Ordnung: $\begin{cases} \text{1. Differenz arithmetische Reihe 1. Ordnung,} \\ \text{2. Differenz konstant.} \end{cases}$

Beispiele:		$\sum\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$	3 seitige Kugel-Pyramide	
	$1, 4, 9 \ldots n^2$	$\Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$	4 seitige Kugel-Pyramide	
		(aus $(a+b)^3$ rekurriernd) usw.	Figurierte Zahlen 2. Ordnung.	stereometrisch.

Beispiel für die arithmetische Reihe 3. Ordnung. 1 8 27 64 125 $\ldots n^3$

Fortlaufende stetige geometrische Proportion: $a:b=b:c=c:d=\ldots$

$a, b, c, d, \ldots$ geometrische Reihe, absteigend.
aufsteigend:

Geometrische Reihe: Quotient konstant.

$$u=a\cdot q^{n-1}$$

wenn $q>1$, steigend $s=a\cdot\frac{q^n-1^n}{q-1}$, divergent.

wenn $q<1$, fallend; ohne Ende: $s=\frac{a}{1-q}$, konvergent.

Konvergenz-Kriterien.

Beispiele konvergenter Reihen $\begin{cases} 1+{}^1/_2+{}^1/_4+\ldots=2 \\ \text{periodischer Dezimalbruch.} \end{cases}$

Anwendung der geometrischen Reihe:
Zinseszins-Rechnung.

Endglied: Zinseszins. $K=C\cdot p^n$ Zinsfaktor: $p=1+\frac{P}{100}$

Kapital verdoppelt: Exponentialgleichung: Zeit: $n=\frac{72}{p}$

Summe: Sparkasse: Einzahlung am Jahresschluß $K=a\cdot\frac{p^m-1^m}{p-1}$

Rente: $C=\frac{r}{p^n}\,\frac{p^n-1^n}{p-1}$

Altersversorgung: $a(p^m-1^m)=\frac{r}{p^n}(p^n-1^n)$

Ausgleich zu 0.
Sterblichkeit.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geometrische Reihe mit dem Quotient: $q = \pm \frac{b}{a}$:

Homogene Reihe zweier Elemente a und b.

$a^2 - b^2 = (a \mp b)(a \pm b)$	$a^2 + b^2$ reell nicht zerlegbar.
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 - b^4 = (a \mp b)(a^3 \pm a^2b + ab^2 \pm b^3)$	$a^4 + b^4$ reell nicht zerlegbar.

usw.

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

Binomischer Satz, rekurrierend.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1a^0b^0 \\
(a+b)^1 &= 1a^1b^0 + 1a^0b^1 \\
(a+b)^2 &= 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3
\end{aligned}$$

usw.

Buchstaben: homogene Reihe $\begin{cases} n \text{ Grad oder Dimension.} \\ n+1 \text{ Glieder.} \end{cases}$

Zahlen: $\begin{cases} \text{in einer und derselben Potenz: symmetrisch.} \\ \text{von einer Potenz zur andern: Pascal'sches Dreieck.} \end{cases}$

zur allgemeinen Formulierung:

Syntaktik.

$\begin{cases} \text{Permutieren: gleicher Inhalt, ungleiche Form.} \\ \text{Kombinieren: ungleicher Inhalt, gleiche Form.} \\ \text{Variieren: ungleicher Inhalt, ungleiche Form.} \end{cases}$

Ungleiche Elemente.	Gleiche Elemente (Wiederholung).
$P(n) = 1 \cdot 2 \ldots n = n!$	$\overset{w}{P}(n) = \frac{n!}{p!\,q!\ldots}$
$\underset{p}{C}(n) = \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{1 \cdot 2 \ldots p} \overset{-p+1}{} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	$\underset{p}{\overset{w}{C}}(n) = \underset{p}{C}(n + (p-1))$
$\underset{p}{V}(n) = \frac{n!}{(n-p)!}$	$\underset{p}{\overset{w}{V}}(n) = n^{p} \cdot$ s. Summe der Polynomial-Koefficienten.

Anwendung: Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wahrscheinlichkeit = günstige Fälle : mögliche Fälle. $w = g : m$

g	w	
$= m$	$= 1$	gewiß.
$> \frac{m}{2}$	$> \frac{1}{2}$	wahrscheinlich.
$= \frac{m}{2}$	$= \frac{1}{2}$	zweifelhaft.
$< \frac{m}{2}$	$< \frac{1}{2}$	unwahrscheinlich.
$= 0$	$= 0$	unmöglich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Binomischer Satz, independent.

1. Theoretische Form: $\dfrac{(a+b)^n}{n!} = \sum\limits_{p=0}^{p=n} \dfrac{a^{n-p}}{(n-p)!} \cdot \dfrac{b^p}{p!}$

2. Praktische Form: $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots$

$\dots + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{1} a b^{n-1} + b^n$

Rekursion: $0! = 1$

$\binom{n}{0} = 1$

Eigenschaften der Binomial-Koefficienten:

1. Symmetrie: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2. Pascal'sches Dreieck: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

3. $\left\{\begin{array}{lll} \text{Binom.} & a=1,\ b=1 & \sum \binom{n}{p} = 2^n \\ \text{Trinom.} & & = 3^n \\ \dots\dots & & \dots \\ \text{Polynom.} & & = p^n \end{array}\right.$ s. Variationen mit Wiederholung.

Verallgemeinerter Exponent.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^\infty =$ kann endlich sein: konvergent.

z. B. $\lim\limits_{n=\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots$

$< (1+)\, 1 + \underbrace{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots}_{2}$

$\left.\begin{array}{l} 2\frac{1}{2} < \text{Lim} < 3 \\ \text{Lim} = 2{,}718281828459\ldots = e \end{array}\right.$

$\lim\limits_{m=0} (1+m)^{\frac{1}{m}} = e$ nach der Methode der unbestimmten Koefficienten: (Descartes.)

Vor-Bestimmung der Form.

Ein Beispiel: Partialbruchzerlegung.

Die Methode: Potenzreihen; für $x = 0$ und $\gtrless 0$: Übereinstimmung Glied für Glied: soviel Bestimmungsgleichungen wie zu bestimmende Koefficienten.

Logarithmen.

$\overset{b}{\log}(1+x) = M\left(\dfrac{x^1}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + - \dots\right)$ Mercator's Reihe.

$\overset{b}{\log}(x+y) = \overset{b}{\log} x + \overset{b}{\log}\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = \overset{b}{\log} x + M\left[\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + - \dots\right]$ Interpolation.

M Modul, Funktion der Basis b.

$M = 1$ $\quad b = e$: Natürliche Logarithmen: l Napier.

zur Berechnung konvergenter: $l\dfrac{1+x}{1-x} = 2\left(\dfrac{x^1}{1} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots\right) \left\{\begin{array}{l} l\,2 = 0{,}69315 \\ l\,10 = 2{,}30259 \end{array}\right.$

Logarithmen-Systeme: Übergang.

e^{lx} $\quad x \quad$ $10^{\urcorner x}$

$lx \cdot \overbrace{le}^{1} = \urcorner x \cdot l\,10$

$\urcorner x = \dfrac{lx}{l\,10}$

$lx \cdot \urcorner e = \urcorner x \cdot \overbrace{\urcorner 10}^{1}$

$lx = \dfrac{\urcorner x}{\urcorner e}$

1 : Logarithmus der neuen Basis zur alten Basis = Modul.

$\dfrac{1}{l\,10} = 0{,}43429$ $\qquad$ $\dfrac{1}{\urcorner e} = 2{,}30259$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Exponential-Funktion.

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$=\left[\sqrt[x]{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^n}\,\right]^x$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$$

$$=[e]^x$$

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n=e^{ix}$$

Trigonometrische Funktionen.

$$\cos x+i\sin x=\left(\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

$$=\cos^n\frac{x}{n}\left(1+i\,\mathrm{tg}\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n=\infty}\ (\text{s. S. 31.})=1\cdot\left(1+i\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\cos x+i\sin x=e^{ix}$$

$$\left(\frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\dots\right)+i\left(\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+-\dots\right)=e^{ix}\ =\cos x+i\sin x$$

$$\left(\frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\dots\right)-i\left(\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+-\dots\right)=e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\dots\right)&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x\\ \left(\frac{x^1}{1!}-\frac{x^3}{3!}+-\dots\right)&=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x\end{aligned}\right\}\ \text{Euler.}$$

$$e^{2k\pi i}=1$$

Exponential-Funktion: imaginäre Periode. | Trigonometrische Funktionen: reelle Periode.

Proben:

$$\sin^2x+\cos^2x=1\qquad \underbrace{\sin x:\cos x=\mathrm{tang}\,x\quad 1+\mathrm{tang}^2x}_{\text{usw.}}=\frac{1}{\cos^2x}\qquad \sin 2x=2\sin x\cos x$$

Algebraische Operationen mit komplexen Größen

geben eine komplexe Größe.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+i(b-d)$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\cdot\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+i\cdot 2ab$$

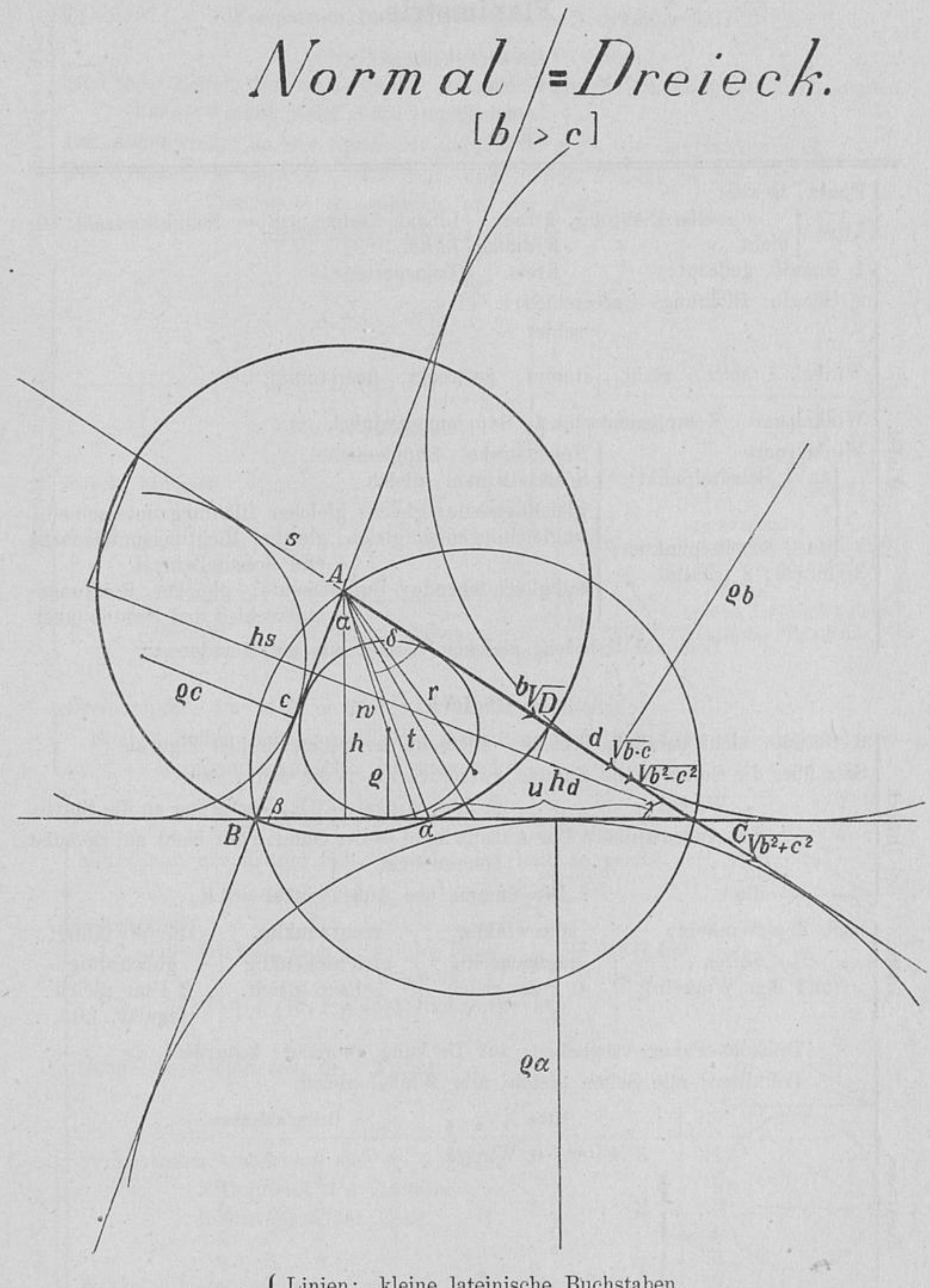
$$\sqrt[2]{a+bi}=\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}+i\sqrt{-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$l(a+bi)=lr+i\cdot\varphi$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Normal = Dreieck.

[b > c]



Linien: kleine lateinische Buchstaben.
Flächen: große „ „
Körper: „ deutsche „

Planimetrie.

Körper.	Grenze:
Fläche.	„ :
Linie.	„ :
Punkt.	

Punkt, bewegt:
Linie. { dieselbe Richtung: Gerade. | Lineal. Längenmaß: m. Reduktionszahl: 10.
nicht „ „ : Krumme. | Zirkel.

Winkel.

1 Gerade, gedreht: Kreis. | Transporteur.

2 Gerade: Richtungs-Unterschied:

schief

Winkel. spitz, recht. stumpf, gestreckt, überstumpf.

Winkelpaar. Komplementwinkel, Supplementwinkel.

Winkelpaare
- an 1 Scheitelpunkt: { Nebenwinkel, Supplemente. / Scheitelwinkel, gleich.
- an 2 Scheitelpunkten: 3 Gerade, 2 parallel. {
  - gleichliegende: gleich; gleicher Richtungsunterschied.
  - ungleichliegende: gleich; gleicher Richtungsunterschied und Scheitelwinkel.
  - halbgleichliegende: Supplemente; gleicher Richtungsunterschied und Nebenwinkel.

Lote auf Geraden: gleicher Winkel wie die Geraden.

Dreieck.

Dreieck.

3 Gerade, nicht parallel: Dreieck. Element der geometrischen Figuren.

Satz über die Seiten: Die Summe zweier Seiten > die dritte Seite.

„ „ „ Winkel: „ „ der drei Winkel = 2R; Verlegung an die Spitze.

„ „ den Außenwinkel: Der Außenwinkel = der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.

„ „ die „ : Die Summe der Außenwinkel = 4R.

Arten.

nach den Winkeln:	spitzwinklig,	rechtwinklig,	stumpfwinklig.
„ „ Seiten (und den Winkeln):	ungleichseitig 0 Paar gleich	gleichschenklig 1 Paar gleich	gleichseitig 2 Paar gleich regulär, 60°

Kongruenz.

Dreiecks-Paare, verglichen: zur Deckung gebracht: kongruent. ≅

Definition: alle Seiten gleich, alle Winkel gleich.

No.	Sätze.	Grundaufgaben.
1.	3 Seiten, 0 Winkel.	$a \quad b \quad c$
2.	2 „ 1 „	$b \quad c \quad \alpha$
3.		$b \quad c \quad \beta$
4.		$b \quad c \quad \gamma$
5.	1 „ 2 „	$a \quad \beta \quad \gamma$
6.		$a \quad \beta \quad \alpha$
[7.	0 „ 3 „]	s. S. 26.

homolog: gleiche Seiten und gleiche Winkel einander gegenüber.

Ungleichen Seiten entsprechend ungleiche Winkel gegenüber; und umgekehrt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichschenkliges Dreieck.

Kongruente Dreiecke, umgeklappt: symmetrisch:

Gleichschenkliges Dreieck.

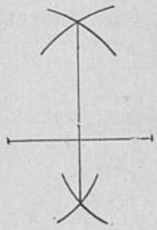
Sind zwei Seiten (Schenkel) gleich, so sind auch die beiden gegenüberliegenden (Basis-) Winkel gleich; und umgekehrt.

Der Außenwinkel an der Spitze ist doppelt so groß wie der Basiswinkel.

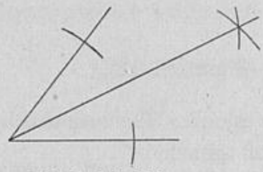
Die Symmetrale halbiert 1. die Basis und 2. den Winkel an der Spitze und steht 3. senkrecht auf der Basis;

Umkehrungen: Beweis indirekt.

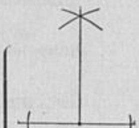
Elementar-Aufgaben.



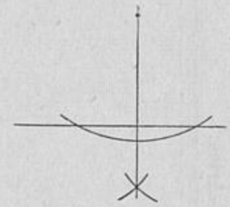
Strecke halbieren.



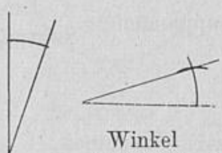
Winkel halbieren.



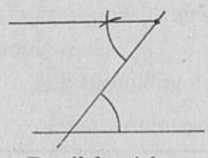
Lot errichten.



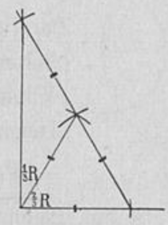
Lot fällen.



Winkel antragen.



Parallele ziehen. (Dreieck am Lineal verschieben.)



errichten, wenn der Punkt innerhalb der Geraden.

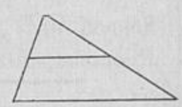
fällen, wenn der Punkt außerhalb der Geraden.

Dreieckspaar, nur noch in 2 Stücken übereinstimmend:

Sind 2 Seiten gleich, aber nicht die dritten, so sind deren Gegenwinkel entsprechend ungleich; und umgekehrt.

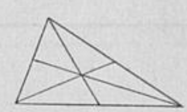
Punkte und Linien im Dreieck.

Mittellinie: der dritten Seite parallel und halb so groß.

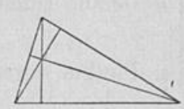


Schwerlinien:

- 2 schneiden sich nach 2 (bei der Ecke schmal.) : 1 (bei der Seite breit.).
- 3 „ „ in 1 Punkt: Schwerpunkt.

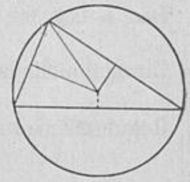


Höhen: schneiden sich in 1 Punkt.

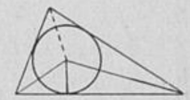


Dreieck und Kreis.

Symmetralen: schneiden sich in 1 Punkt: Mittelpunkt des Umkreises, Radius nach der Ecke.



Winkelhalbierenden: schneiden sich in 1 Punkt: Mittelpunkt des Inkreises, Radius senkrecht zur Seite.



Ankreise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Viereck.

4 Gerade schneiden sich in $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$ Punkten.
4 Punkte verbunden durch $6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$ Geraden.
$2 = \frac{4 \cdot 1}{2}$ Diagonalen.

Das Viereck ist bestimmt durch $3 + 2 = 5$ Stücke.

Viereck-Arten.

0 Paar Seiten parallel: Unregelmäßiges Viereck.
Winkelsumme $= 4$ R.

1 „ „ „ : Trapez.
$m = \frac{a + c}{2}$ (Figur S. 22)

1 „ „ „ , das andere gleich: Gleichschenkliges Trapez.
Basiswinkel gleich. Diagonalen gleich. – und umgekehrt.

2 „ „ „ : Parallelogramm.
Seiten: gleich. Winkel: { Gegenwinkel gleich, Nebenwinkel Supplemente.
Diagonalen: halbieren sich. – Umkehrungen.

Parallelogramm-Arten:

3 Eigenschaften: Seiten gleich: Rhombus. Diagonalen senkrecht. | Winkel gleich (R): Rechteck. Diagonalen gleich.

4 Eigenschaften: Seiten und Winkel gleich: Quadrat. regelmäßiges Viereck. – Umkehrungen.

Viereck und Kreis.

Sehnenviereck: Summe der Gegenwinkel gleich, $= 2$ R.
Tangentenviereck: „ „ „ seiten „ .
Sehnentrapez: gleichschenklig.
Rhombus: Inkreis. | Rechteck: Umkreis.
Quadrat: Inkreis und Umkreis.

Vieleck.

n Gerade schneiden sich in $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten.
n Punkte verbunden durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden.
$\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Das n-eck ist bestimmt durch $3 + 2(n-3) = 2n - 3$ Stücke.

Vieleck und Kreis. Arten.

Unregelmäßiges n-eck: { Winkelsumme $= (2n - 4)$ R. Außenwinkelsumme $= 4$ R.

Regelmäßiges n-eck: Bestimmungs-Dreieck gleichschenklig.
Winkel am Centrum: $\frac{4}{n}$ R.
„ an der Peripherie: $\frac{2n-4}{n}$ R.
Umkreis und Inkreis.

Kreis.

Drehung: Centriwinkel, zugehöriger Bogen und Sektor.

Sektor durch 2 Radien.
Segment durch 1 Sehne.

Kreis und Gerade.

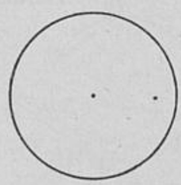
Sekante, Sehne | größte: Durchmesser. kleinste: Punkt. | , Tangente.

Sehne und Entfernung vom Mittelpunkt (Symmetrale): entsprechend gleich, umgekehrt ungleich. | Umkehrungen.

Tangente und Berührungsradius senkrecht. Umkehrungen.

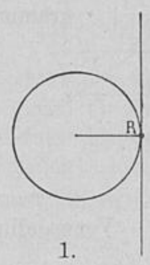
Konstruktion der Tangente:

Punkt innerhalb



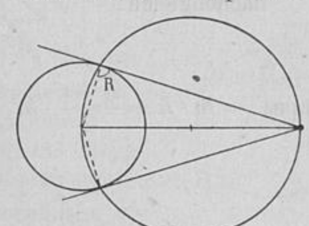
Tangenten: 0.

auf



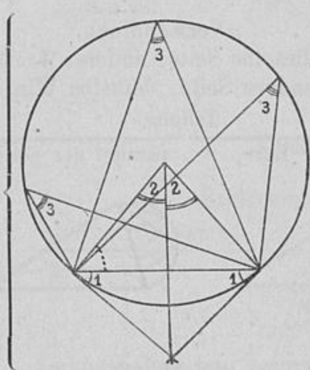
1.

außerhalb der Peripherie.



2: gleich, Winkel halbiert.

Kreis und Winkel.



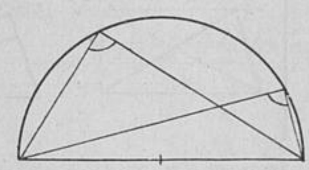
Winkel und zugehöriger Bogen (Sehne):
vom Scheitelpunkt gesehen, zwischen den Schenkeln liegend.

1. Abschnittswinkel: 2 ganze.
2. Centriwinkel: 2 halbe.
3. Peripheriewinkel: ∞ ganze.

| wenn zugehörig, dann gleich.

speciell:

Satz des Thales:
Peripheriewinkel im Halbkreis = R.

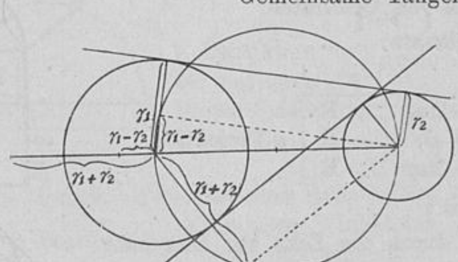


Kreis und Dreieck — Vieleck.

2 Kreise.

konzentrisch.
excentrisch. | Centrale.

Gemeinsame Tangenten:

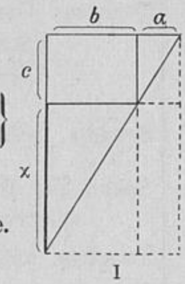


äußere, Radien-Differenz.
innere, Radien-Summe.

Apollonius' Berührungsproblem.

Gleiche Größe, ungleiche Gestalt.

Flächenberechnung.



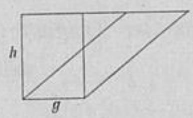
Viereck.

Flächenmaß: qm. Reduktionszahl: 10^2.

Quadrat $= a^2$. Seite und Diagonale des Quadrats inkommensurabel.
Rechteck $= a \cdot b$ kommensurabel für unendlich kleines m.
$g \cdot h$

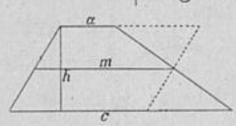
Scheitelrechtecke gleich: { Verwandlung: Rechteck, gegebene Seite. / Konstruktion der 4. Proportionale. }

Parallelogramm $= g \cdot h$.



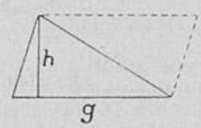
Parallelogramme flächengleich:	1. gleiche Grundlinie und Höhe. 2. Scheitelparallelogramme.	Verwandlung: dieselbe Seite. andere Seite. Teilung.

Trapez $= m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$.



Dreieck.

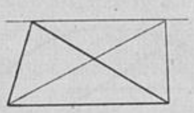
Dreieck $= \frac{1}{2} g \cdot h$.

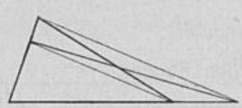


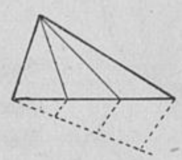
Verwandlung: Dreieck { Reckteck. / Parallelogramm. }

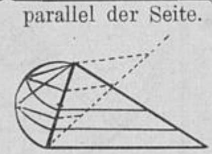
Dreiecke flächengleich:	1. gleiche Grundlinie und Höhe. 2. Scheiteldreiecke.	Verwandlung. dieselbe Seite, anderer Winkel. andere Seite, derselbe Winkel.

Teilung: von der Ecke, parallel der Seite.









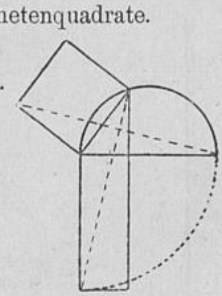
(Rechtwinkliges) Dreieck.

Euklid: Kathetenquadrat gleich Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Höhensegment. $c^2 = a \cdot q$

Pythagoras: Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

{ Verwandlung: Quadrat, Rechteck (gegebene Seite). / Summe und Differenz von Quadraten. }



Allgemeiner Pythagoreischer Lehrsatz:

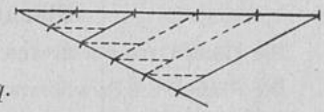
$$\left\{\begin{array}{l|c|l} & \gamma & \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ap & < \mathrm{R} & \\ c^2 = a^2 + b^2 (\mp 0) & = \mathrm{R} & p \text{ Projektion.} \\ c^2 = a^2 + b^2 + 2ap & > \mathrm{R} & \end{array}\right.$$

Vieleck.

Verwandlung: (bis Quadrat.)
Ecken abschneiden, Parallele durch die Ecke zur Diagonale.
Teilung.

Kreis.

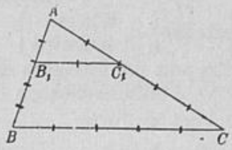
Gleiche Gestalt, ungleiche Größe.



Ähnlichkeit.

Strahlen.

Teilung einer Strecke in n gleiche Teile, im Verhältnis $p:q$.

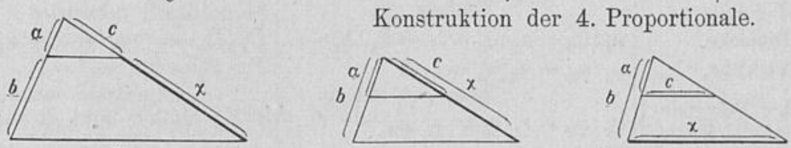


$$\left(\tfrac{2}{3}=\right)\frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C}$$

$$\left(\tfrac{2}{5}=\right)\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}=\frac{B_1C_1}{BC}$$

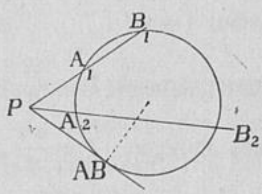
Abgeschnittenes Dreieck $\sim$ ganzes Dreieck. | veränderter Maßstab.

Konstruktion der 4. Proportionale.



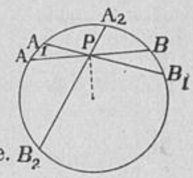
II III IV

Kreis.

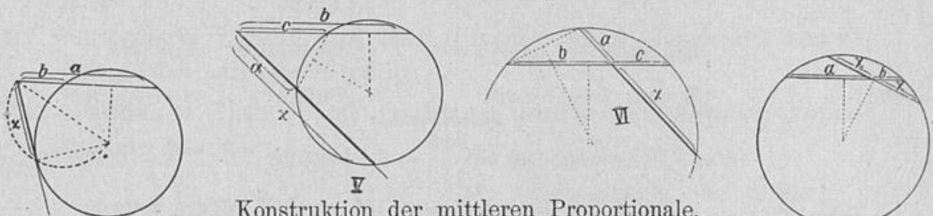


$$PA_1\cdot PB_1=PA_2\cdot PB_2=\begin{cases}PA^2\\ PB^2\end{cases}$$

Produkt der Sekanten-Segmente gleich, gleich Quadrat der Tangente.
Produkt der Sehnen-Segmente gleich, gleich Quadrat der halben kleinsten Sehne.



Konstruktion der 4. Proportionale.



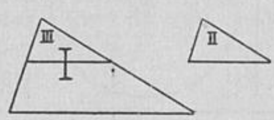
I V VI

Konstruktion der mittleren Proportionale.

II

Dreieck.

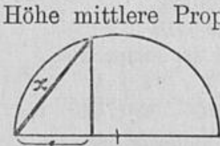
Erklärung: Seitenverhältnis gleich, Winkel gleich.

Ähnlichkeits-Sätze.				Gestalts-Grundaufgaben.
1. 2. 3. 4. 5. (6.)	vgl. Kongruenz.		Beweis. $\triangle_3\sim\triangle_1$ $\triangle_3\cong\triangle_2$ $\triangle_1\sim\triangle_2$	$a:b:c$ $b:c\ \alpha$ $b:c\ \beta$ $b:c\ \gamma$ $(\alpha)\ \beta\ \gamma$ s. S. 27.

verhältnisgleich alle homologen Stücke.

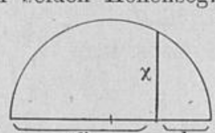
Rechtwinkliges Dreieck.

Kathete mittlere Proportionale zu Hypotenuse und anliegendem Höhensegment.
Höhe mittlere Proportionale zu den beiden Höhensegmenten.



III

Konstruktion der mittleren Proportionale.

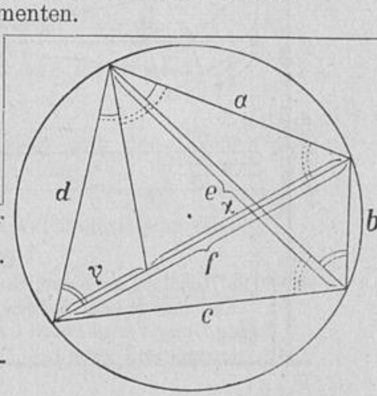


IV

Vieleck.

Sehnen-Viereck. Ptolemä'ischer Satz: $a\cdot c+b\cdot d=e\cdot f$

2 Paare $\triangle\sim\begin{cases}\text{kleinerer Winkel im größeren.}\\ \text{Peripheriewinkel.}\end{cases}$



Ähnliche Vielecke.
Kreise.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Flächen im Verhältnis. Kreis-Berechnung.

Die Flächen von Rechtecken mit einer gleichen Seite verhalten sich wie die nicht gleichen Seiten.

Die Flächen von Parallelogrammen mit gleicher $\left\{\begin{matrix}\text{Grundlinie}\\ \text{Höhe}\end{matrix}\right\}$ verhalten sich wie die $\left\{\begin{matrix}\text{Höhen}\\ \text{Grundlinien}\end{matrix}\right\}$.

Die Flächen von Dreiecken mit gleicher $\left\{\begin{matrix}\text{Grundlinie}\\ \text{Höhe}\end{matrix}\right\}$ verhalten sich wie die $\left\{\begin{matrix}\text{Höhen}\\ \text{Grundlinien}\end{matrix}\right\}$.

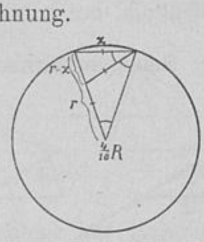
Die Flächen von Dreiecken mit einem gleichen Winkel verhalten sich wie die Produkte der ihn einschließenden Seiten.

Ähnliche Figuren:

	Umfang.	Inhalt.
Dreiecke.	$u_1 : u_2 = a_1 : a_2 = \ldots = h_1 : h_2 = \ldots$	$D_1 : D_2 = a_1{}^2 : a_2{}^2 = \ldots = h_1{}^2 : h_2{}^2 = \ldots$
Vielecke.	$u_1 : u_2 = a_1 : a_2 = \ldots$ homologe Stücke.	$P_1 : P_2 = a_1{}^2 : a_2{}^2 = \ldots$ Quadrate homologer Stücke.
Reguläre Polygone von gleichviel Ecken.	$u_1 : u_2 = r_1 : r_2 = \varrho_1 : \varrho_2$	$P_1 : P_2 = r_1{}^2 : r_2{}^2 = \varrho_1{}^2 : \varrho_2{}^2$
Kreise.	$p_1 : p_2 = r_1 : r_2$	$K_1 : K_2 = r_1{}^2 : r_2{}^2$
	$\frac{p}{2r}$ konstant $= \pi$ (unbenannt) Ludolf'sche Zahl.	$\frac{K}{r^2}$ konstant $(= \pi)$
		Bestimmungsdreieck $D = \frac{sh}{2}$
		Reguläres Polygon $P = \frac{uh}{2}$
		Kreis $K = \frac{pr}{2}$
	Rektifikation: $p = 2\pi r$	Quadratur: $K = \pi r^2$
	Bogen: $b = \frac{\alpha}{180}\pi r$ (Anthoniszoon)	Sektor: $S = \frac{\alpha}{360}\pi r^2$

$$\pi = \frac{22}{7}\ \text{(Archimedes)} = \frac{355}{113} = 3{,}1415926\ldots \qquad \lg \pi = 0{,}49715$$

Eckenzahl.	Berechnung.
3, 6, 12 …	$\pi = \frac{6r}{2r} = 3$
4, 8, 16 …	
5, 10, 20 … goldener Schnitt.	
15, 30, 60 …	
$2^n + 1$, wenn Primzahl. Gauss.	



Stetige Teilung.

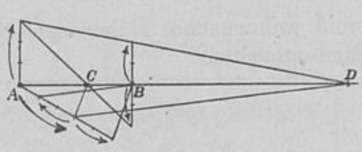
$r : x = x : r - x$

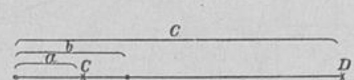
$x : r = r : r + x$

Radius geteilt so, daß der größere Abschnitt mittlere Proportionale zwischen ganzer Strecke und kleinerem Abschnitt:

Goldener Schnitt. Kepler.

Harmonische Teilung. Bei Lagenänderung Bestand des Verhältnisses.





Strahlen.

Teilung innen $(\pm)$ und außen $(\mp)$ nach einem und demselben Verhältnis: harmonische Teilung.

$$AC : CB = AD : BD$$

umgeformt: bezogen auf die Endpunkte:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right) \quad \Bigg| \quad \frac{1}{DC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{DB} + \frac{1}{DA}\right)$$

harmonisches Mittel: Vertauschung.

$$a : b - a = c : c - b$$

wenn $a : c = 1 : 2$	Oktav.	Akkord, Harmonie.
dann $b : c = 2 : 3$	Quint.	
und $a : b = 3 : 4$	Quart.	

Harmonische Punkte, Strahlen, Büschel.

Die Parallele zu einem Strahl wird von dem zugehörigen und den beiden andern Strahlen halbiert. Jede Gerade wird durch das harmonische Strahlenbüschel harmonisch geteilt.	Beweis: Umsatz auf den Scheitelpunkt.	Lage von Scheitelpunkt und Schnittgerade beliebig.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Dreieck.

Seitenhalbierende: b, c, t_a und die Parallele durch die Spitze zur Grundlinie harmonische Strahlen.

Winkelhalbierende: w_a teilt a nach $b:c$

Beweis: { Innenwinkel Seitensumme. / Außenwinkel Seitendifferenz.

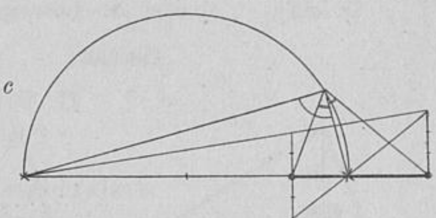
speziell: Wert: (1 : 1) Mitte und ∞

Die Schenkel des Winkels, die Halbierungslinie des Innenwinkels und die Halbierungslinie des Außenwinkels harmonische Strahlen.

speziell: Lage: R und gleiche Winkel.

Apollonius' Kreis: Ort für a und $b:c$

Kugel-Spiegel.



Satz des Menelaus: Eine Transversale teilt die Dreiecksseiten so, daß die Produkte der nicht anliegenden Teilstrecken gleich sind.

Satz des Ceva: Die Ecktransversalen durch einen Punkt teilen die Dreiecksseiten so, daß die Produkte der nicht anliegenden Teilstrecken gleich sind.

dual.

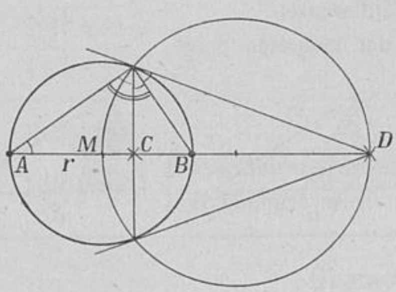
Viereck.

Im vollständigen Vierseit wird eine Diagonale durch die beiden andern Diagonalen harmonisch geteilt.

Im vollständigen Viereck sind die Diagonalpunkte Scheitelpunkte harmonischer Büschel.

dual.

Kreis.



Der Ausgangspunkt der beiden Tangenten und die Berührungssehne teilen den Durchmesser harmonisch.

$$AC : CB = AD : BD$$

umgeformt: bezogen auf den Mittelpunkt:

$$MC \cdot MD = r^2$$

spezielle Lage.

Jede Sekante wird durch den Punkt, seine Berührungssehne und den Kreis harmonisch geteilt.

beliebige Lage.

D und C Pole, Lote in C und D zugehörige Polaren.

Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so geht seine Polare durch den Pol der Geraden.

Geht eine Gerade durch einen Punkt, so liegt ihr Pol auf der Polare des Punktes.

dual.

Kreispolygon.

Satz von Pascal: Die Gegenseiten eines Sehnensechsecks verlängert schneiden sich auf einer Geraden.

Satz von Brianchon: Die Verbindungslinien der Gegenecken eines Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkt.

dual.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreiecks-Konstruktion.

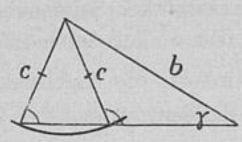
Analysis, Synthesis oder Konstruktion, Beweis; Determination.

I. Seiten und Winkel: Grund-Aufgaben.

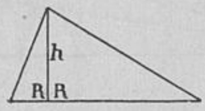
1. $a\,b\,c$
2. $b\,c\,\alpha$
3. $b\,c\,\beta$
4. $b\,c\,\gamma$ 2 Lösungen: Supplement-Winkel.
5. $a\,\beta\,\gamma$
6. $a\,\beta\,\alpha$

(7. $\alpha\,\beta\,\gamma$ 0 oder ∞ Lösungen.)

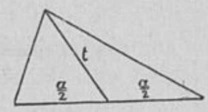
(Gestalt.)



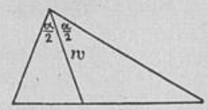
II. Direkte Stücke.



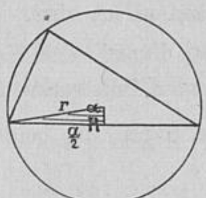
h



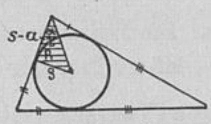
t



w



r



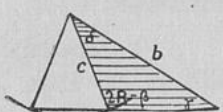
$s = \frac{a+b+c}{2}$

ϱ

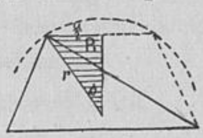
III. Indirekte Stücke.

1. Summen und Differenzen.

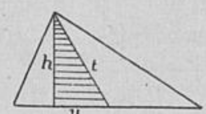
Kreis um die Spitze mit der kleineren Seite.



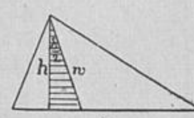
u, δ



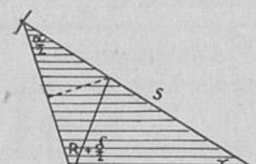
u, δ



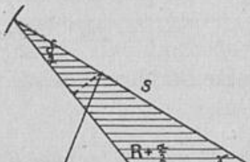
u



δ

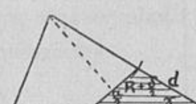


$s.\,\delta$

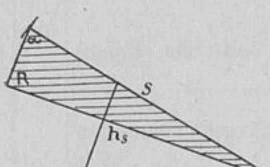


$s,\,\delta,\,u$

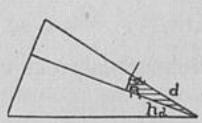
$d,\,\delta$



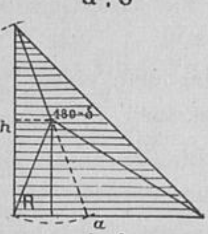
$d.\,\delta,\,u$



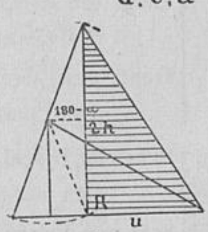
$s.\,h_s$



$d,\,h_d$



$a,\,h,\,\delta$



$a.\,h.\,u$

Grund-Aufgaben höherer Art.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Produkte und Quotienten.

Flächen-Daten: $D = c^2$ $\quad b \cdot c \quad b^2 + c^2 \quad b^2 - c^2$

Gestalts-Daten:

Grund-Aufgaben.		Rechtwinklige Dreiecke:
1. $a:b:c$		$h:b$ gibt γ
2. $b:c\ \alpha$	geben	$a:r$ „ α
3. $b:c\ \beta$	die	$s-a:\varrho$ „ α
4. $b:c\ \gamma$	Winkel.	$u:r$ „ δ
5. (—7.) $\beta\gamma$		$h:w$ „ δ
		$s:h_s$ „ α
		$d:h_d$ „ α

Flächen-Daten zusammen mit Gestalts-Daten.

IV. Geometrisch-algebraisch.

Konstruktion von Rechnungs-Ausdrücken.

	Quadratische Gleichung.	Funktionen.
$a+b$	s. S. 9.	Gesucht Strecke oder Winkel.
$a-b$		z. B.
$a \cdot b$		$\sin = \frac{a}{b}$
$\frac{a}{b}$		$\sin = \frac{a^2}{b^2} = \frac{b \cdot c}{b \cdot b} = \frac{c}{b}$
$\frac{ab}{c}$		
$\sqrt{ab}$		
$\sqrt{a^2+b^2}$		
$\sqrt{a^2-b^2}$		

Reduktion.

Hilfslinien: $\begin{cases} \text{Parallelverschiebung.} \\ \text{Symmetrieverlegung.} \end{cases}$

Geometrische Örter.

Entfernung von	1 Punkt	konstant	:	Kreis.
„ „	2 „	„	:	Symmetrale.
(„ „	3 „	„	:	Mittelpunkt des Umkreises.)
„ „	1 Geraden	„	:	Parallele.
„ „	2 „	„	:	Winkelhalbierende.
(„ „	3 „	„	:	Mittelpunkt des Inkreises.)
Ort für a und α (R)			:	Kreisbogen (Halbkreis).

Entfernung von 1 Punkt und 1 Gerade gleich: Parabel.

Entfernung-Summe	von 2 Punkten	konstant	:	Ellipse.
„ -Differenz	„ 2 „	„	:	Hyperbel.
„ -Produkt	„ 2 „	„	:	Cassini'sche Curve (Lemniscate).
„ -Quotient	„ 2 „	„	:	Apolloni'scher Kreis.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Trigonometrie.

Funktion = Abhängigkeit.

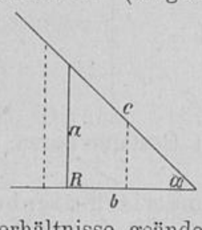
Rechtwinkliges Dreieck. (Grenze 90°)

Winkel ungeändert: Seitenverhältnis ungeändert.

Winkel-Funktionen = Seiten-Quotienten: unbenannte Zahlen.

Hauptfunktionen.	reciprok: Produkt 1. (umgekehrt).	Kofunktionen.

$$\left\{\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \text{tang}\,\alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Nebenkathete}} \\ \sec\alpha &= \frac{c}{b} \end{aligned}\right.$$

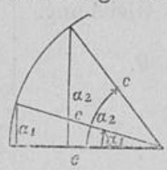


$$\left.\begin{aligned} \text{cosec}\,\alpha &= \frac{c}{a} \\ \text{cotang}\,\alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\text{Nebenkathete}}{\text{Gegenkathete}} \\ \text{cosin}\,\alpha &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Nebenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \end{aligned}\right\}$$

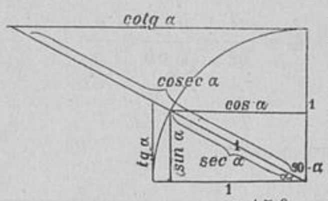
Winkel geändert: Verhältnisse geändert;
zum Vergleich gleichnamig: Kreis.

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{c}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{a_2}{c}$$



c beliebig,
= 1 genommen:
Funktion erscheint als Strecke.



Kreis mit dem Radius 1.

$\left\{\begin{array}{l} \text{sec} = \text{Sekante} \\ \text{tang} = \text{Tangente} \\ \text{sin} = \text{halbe Sehne} \end{array}\right.$ | co = complementi $\Big\}$ Namen-Erklärung.

s(emissi) ins(criptae lineae)?

Wert-Berechnung: $\left\{\begin{array}{l} 45^0 \text{ rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.} \\ 30^0 \text{ halbes gleichseitiges Dreieck, andere Hälfte unten.} \\ 60^0 \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \text{ rechts.} \end{array}\right.$

	sinus				tangens	
0	$0 = \frac{1}{2}\sqrt{0}$	90		0	0	90
30	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$	60	echte	30	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	60
45	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	45	Brüche	45	1	45
60	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	30	unechte	60	$\sqrt{3}$	30
90	$1 = \frac{1}{2}\sqrt{4}$	0		90	∞	0
	cosinus				cotangens	

Logarithmen: überwiegend Kennziffer 0, ...—1

Interpolation: $\left\{\begin{array}{l} \text{Diff. bei den Hauptfunktionen } +, \text{ bei den Kofunktionen } -. \\ \text{Beim Logarithmus multiplicieren, beim Numerus dividieren.} \end{array}\right.$

I. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. $\left\{\begin{array}{l} \text{wenn Hypotenuse} \quad \text{dabei: sin, cos} \\ \quad „ \quad „ \quad \text{nicht} \; „ \; : \text{tang, cotang} \end{array}\right.$

II. „ „ gleichschenkligen „
„ „ Rechteck, Rhombus, Quadrat.
„ „ regulären Polygons.

$$> D = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha \\ \varrho^2 \cdot \text{tang}\,\frac{\alpha}{2} \end{array}\right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Goniometrie. (Keine Grenze)

Funktions-Beziehungen:

1. reciprok.	2. Dreiecke einzeln, rechtwinklig.	3. Dreiecke paarig, ähnlich.
$\sin\cdot\mathrm{cosec}=1$ $\mathrm{tg}\cdot\mathrm{cotg}=1 \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tg}=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}} \\ \mathrm{cotg}=\dfrac{1}{\mathrm{tg}} \end{array}\right.$ $\sec\cdot\cos=1$	$1=\sin^2+\cos^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin=\sqrt{1-\cos^2} \\ \cos=\sqrt{1-\sin^2} \end{array}\right.$ $\sec^2=\mathrm{tg}^2+1$ $\mathrm{cosec}^2=\mathrm{ctg}^2+1$	$\dfrac{\mathrm{tg}}{(1)}=\dfrac{\sin}{\cos}$ $\dfrac{\mathrm{ctg}}{(1)}=\dfrac{\cos}{\sin}$

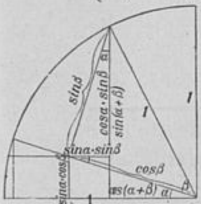
Funktionen periodisch: $\left\{ \begin{array}{l} 0\ldots\ 90 \text{ Wert ohne Vorzeichen.} \\ 0\ldots360 \quad \text{„} \quad \text{mit} \quad \text{„} \end{array}\right.$ | Reihenfolge.

Rekursion:

Wert.		Vorzeichen. sinus		cosinus		tangens und cotangens	
α_1	$180-\alpha_2$	+	+	+	—	+	—
$360-\alpha_4$	α_3-180	—	—	+	—	—	+

Funktions-Verlauf tabellarisch-graphisch: s. Fig. S. 36.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{für sinus: Wellenlinie.} \\ \text{„ tangens: Zusammenhangsstellen } \pm 0 \text{ und } \pm\infty \end{array}\right.$ —— Gründe:



$$\left\{ \begin{array}{l|l} \sin(-\alpha)=-\sin(+\alpha) & \cos \text{ gerade Funktion.} \\ \cos(-\alpha)=+\cos(+\alpha) & \sin \text{ und tg ungerade} \\ \mathrm{tg}(-\alpha)=-\ \mathrm{tg}(+\alpha) & \text{Funktionen.} \end{array}\right\}$$

1. algebraisch: reciprok.
2. geometrisch: Richtung, Kreis.
3. „ Parallele gedreht.
4. physikalisch: Konkav-Spiegel. (reell-virtuell.)

Additions-Theoreme.

Ableitung im Kreis mit Radius 1: s. Fig. oder mit Durchmesser 1: Ptolemäi'scher Satz.

Allgemein.

1.
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \\ \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \end{array}\right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) \\ 2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) \\ 2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) \\ -2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) \end{array}\right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\beta=\sigma \\ \alpha-\beta=\delta \\ \hline \alpha=\dfrac{\sigma+\delta}{2} \\ \beta=\dfrac{\sigma-\delta}{2} \end{array}\right\}$$

2.
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\sigma+\sin\delta=2\sin\dfrac{\sigma+\delta}{2}\cdot\cos\dfrac{\sigma-\delta}{2} \\ \sin\sigma-\sin\delta=2\cos\dfrac{\sigma+\delta}{2}\cdot\sin\dfrac{\sigma-\delta}{2} \\ \cos\sigma+\cos\delta=2\cos\dfrac{\sigma+\delta}{2}\cdot\cos\dfrac{\sigma-\delta}{2} \\ \cos\sigma-\cos\delta=-2\sin\dfrac{\sigma+\delta}{2}\sin\dfrac{\sigma-\delta}{2} \end{array}\right.$$

Speziell für $\beta=\alpha,\ 2\alpha=\varphi$

$$\left\{ \begin{array}{c} \sin\varphi=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} \\ [\sin 0=0] \\ \cos\varphi=\cos^2\dfrac{\varphi}{2}-\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \\ [\cos 0=1] \\ \mathrm{tg}\,\varphi=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}} \\ [\mathrm{tg}\, 0=0] \end{array}\right.$$

Ähnliche Formeln kombiniert:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} 1+\cos\varphi=2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} \\ 1-\cos\varphi=2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \end{array}\right\} \\ \sin\varphi=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}} \end{array}\right.$$

Moivre's Satz.

$$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{vom } n. \text{ Grad zum 1. Grad,} \\ \text{Form gleich.} \end{array}\right.$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

III. **Ungleichseitiges Dreieck.** Formeln cyklisch. | GA.

Elimination der Höhe: Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, konstant. — $\begin{cases} 5.\ 6. \\ 3.\ 4.\ \text{Winkel.} \end{cases}$

Umformung:

$$\begin{cases} \text{Mollweide'sche Gleichungen:} \begin{cases} b+c : a = \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} : \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} \\ b-c : a = \sin\dfrac{\beta-\gamma}{2} : \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} \end{cases} \\ \text{Tangenssatz:}\ b+c : b-c = \operatorname{tang}\dfrac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tang}\dfrac{\beta-\gamma}{2} \ \text{mit}\ \dfrac{\beta+\gamma}{2} = 90 - \dfrac{\alpha}{2} ; \end{cases}$$

$\begin{cases} 2.\ \text{Seite.} \\ 2.\ \text{Winkel.} \end{cases}$

Elimination des Höhensegments: Kosinussatz:

$$\begin{cases} \text{3-gliedrig:}\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ \text{2-}\ \ \text{„}\ \ : \begin{cases} a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\alpha/2 \\ a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\alpha/2 \end{cases} \\ [c^2 - 2b\cdot\cos\alpha\cdot c + (b+a)(b-a) = 0 \end{cases}$$

2. Seite.

3. 4. Seite.]

$$\begin{cases} \text{aus 3-gliedrig:}\ \cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \text{logarithmisch:} \begin{cases} \cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{b\cdot c}} \\ \sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{b\cdot c}} \end{cases} \operatorname{tang}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \text{aus 2-gliedrig:} \qquad s = \dfrac{a+b+c}{2} \end{cases}$$

1.

Berechnung der direkten Daten.

---

umgekehrt: gegeben — Direkte Daten.

Reduktion auf Seiten und Winkel; vermittelndes Stück: r

1. Höhe. $\begin{cases} h_a = b\cdot\sin\gamma \\ p = b\cdot\cos\gamma\ \text{(Projektion.)} \end{cases}$ | $h_a = \dfrac{b\cdot c}{2r}$, $h_a = 2r\sin\beta\sin\gamma$ | $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

2. Seitenhalbierende. $b^2 + c^2 = 2t_a^2 + a^2/2$ $\qquad b^2 - c^2 = a\cdot u$

3. Winkelhalbierende. $2bc\cos\alpha/2 = (b+c)\cdot w_a$

4. Radius des Umkreises. $\begin{cases} \dfrac{a}{\sin\alpha} = 2r \quad \text{(Sinussatz.)} \\ b\cdot c = 2r\cdot h_a \end{cases}$ | $\varrho = 4r\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$

5. Radius des Inkreises. $\operatorname{tg}\alpha/2 = \dfrac{\varrho}{s-a}$ | $M_i M_u = \sqrt{r(r-2\varrho)}$

6. Inhalt. $\begin{cases} D = \frac{1}{2}ah_a \\ D = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \\ D = \frac{1}{2}a^2\cdot\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} \\ D = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{cases}$ | $\begin{cases} D = \dfrac{a\cdot b\cdot c}{4r} \\ D = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \end{cases}$ $\begin{cases} D = \varrho\cdot s \\ D = \varrho^2\cdot\operatorname{cotg}\alpha/2\operatorname{cotg}\beta/2\operatorname{cotg}\gamma/2 \end{cases}$

zu 4 bis 6. Ankreise. $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha/2 = \sqrt{\dfrac{\varrho\,\varrho_a}{\varrho_b\,\varrho_c}} \\ \varrho_a = 4r\sin\alpha/2\cos\beta/2\cos\gamma/2 \\ \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r \\ \dfrac{1}{\varrho_a} + \dfrac{1}{\varrho_b} + \dfrac{1}{\varrho_c} = \dfrac{1}{\varrho} \end{cases}$ | $D = \varrho_a(s-a)$, $D = \varrho_a^2\operatorname{cotg}\alpha/2\operatorname{tg}\beta/2\operatorname{tg}\gamma/2$, $D = \sqrt{\varrho\,\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c}$

Rechnung über die Seiten: Identitäten.

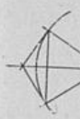
„ „ „ Winkel: $\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\alpha/2\cos\beta/2\cos\gamma/2 \\ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \end{cases}$

Winkel innerhalb und außerhalb der Funktion. z. B. Gestalts-Grundaufgabe 2:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{h_c}{h_b} \ \text{zusammen mit}\ \beta + \gamma = 2\mathrm{R} - \alpha$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Übergang.
Für $r=\infty$: Winkel am Mittelpunkt annähernd 0.



$2\sin < 2\,\mathrm{arc} < 2\,\mathrm{tg}$

$\frac{\sin}{\sin} > \frac{\sin}{\mathrm{arc}} > \frac{\sin}{\mathrm{tg}}$

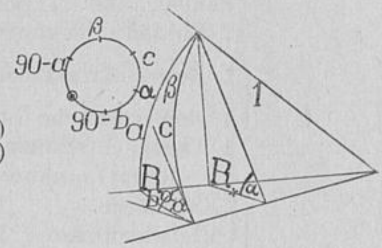
$1 > \sin : \mathrm{arc} > \cos$

für $\cos = 1 \begin{cases} \sin = \mathrm{arc} \\ \mathrm{tg} = \mathrm{arc} \end{cases}$

Seiten-Funktionen geändert.
Winkel-Funktionen nicht geändert.

Sphärische Trigonometrie. Formeln cyklisch.

I. Rechtwinkliges Dreieck.



Anzahl der Gleichungen: $\underset{3}{C}(5) = 10.$

Napier'scher Kreis: cos eines Stückes

$= \begin{cases} \sin \cdot \sin \text{ der getrennt liegenden Stücke} & (5) \\ \mathrm{cotg} \cdot \mathrm{cotg} \text{ „ zusammen „ „} & (5) \end{cases}$

II. Gleichschenkliges Dreieck.

III. Ungleichseitiges Dreieck.

Anzahl der Gleichungen: $\underset{4}{C}(6) = 15.$

GA.
3. 4. 6.

Funktionen. …… Sinussatz. …… Elimination der Höhe: Sinussatz: $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$ konstant. (3)

$\left(\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$ Elimination des Höhensegments:

Kosinussatz. ……

$\begin{cases} \text{Kosinussatz für die Seiten: } \cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha \; (3) \\ \text{„ „ „ Winkel: } \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \; (3) \\ \text{Kotangenssatz: } \mathrm{cotg}\, a \cdot \sin\left|\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right| = \cos\left|\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right| \cdot \Big\| \cdot \cos\left|\begin{matrix} \gamma \\ \beta \end{matrix}\right| + \sin\left|\begin{matrix} \gamma \\ \beta \end{matrix}\right| \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \; (6) \end{cases}$

Seiten. ‖ Winkel.

4 auf einander folgende Stücke.

logarithmisch:

Kosinussatz logarithmisch. ……

$$\left.\begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}} \end{cases}\right\} \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}} \quad s = \frac{a+b+c}{2} \qquad 1.$$

$$\left.\begin{cases} \cos\frac{a}{2} = \sqrt{+\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}} \\ \sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}} \end{cases}\right\} \mathrm{cotg}\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}} \quad \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \qquad 7.$$

Durch die Additions-Theoreme:

Mollweide'sche Gleichungen, Tangenssatz. ……

$$\begin{cases} \text{Gauß: } \sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{b-c}{2} : \cos\frac{a}{2} \quad (4) \\ \text{Napier: } \begin{cases} \mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} : \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{b-c}{2} : \cos\frac{b+c}{2} \quad (2) & 2. \\ \mathrm{tg}\frac{b+c}{2} : \mathrm{tg}\frac{a}{2} = \cos\frac{\beta-\gamma}{2} : \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \quad (2) & 5. \end{cases} \end{cases}$$

Wenn auf der einen Seite + in — verwandelt wird, wird auf der andern Seite sin und cos vertauscht.

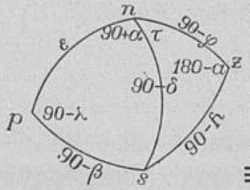
2-eck $= \alpha\pi r^2 : 90$ ε, sphärischer Exceß.

3-eck $= \pi r^2\,\overbrace{(\alpha+\beta+\gamma-180)}^{\varepsilon} : 180$ aus den Winkeln.

L'Huilier'sche Formel: $\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\mathrm{tg}\frac{s}{2}\,\mathrm{tg}\frac{s-a}{2}\,\mathrm{tg}\frac{s-b}{2}\,\mathrm{tg}\frac{s-c}{2}}$ „ „ Seiten.

Astronomie.

2 sphärische Dreiecke.



Daten.		
φ Polhöhe (=geogr. Breite) Berlin = 52,5°		z Zenit des Horizonts.
ε Schiefe der Ekliptik = 23,5°		n Nordpol d. Äquators.
s Stern.		p Pol der Ekliptik.

Koordinaten.	1. Horizontal-K.		2. Äquatorial-K.		3. Ekliptische K.
	a Azimut.	←	τ Stundenwinkel. / α Rektascension.	→	λ Länge.
	h Höhe.		δ Deklination.		β Breite.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Flächen. **Stereo-**

Punkt, Linie: 1 Ebene.

2 Ebenen: Raumwinkel. planimetrisch: Neigungswinkel.

$\begin{cases} \text{1 Ebene, 1 senkrechte Gerade: } \begin{cases}\text{wenn senkrecht auf 2 Geraden,} \\ \text{dann „ „ allen „}\end{cases} \\ \text{1 stereometrische Lot-Konstruktion = 3 planimetrische Lot-Konstruktionen.}\end{cases}$

1 Ebene, 1 schräge Gerade. projiciert: Neigungswinkel.

Rotationsbewegung: Oberfläche:

Kreisfläche.	$K = \pi r^2$	$R_l = 2\pi l s$	
Kreisringfläche.	$Kr = \pi a(a+2b)$		
Cylinderfläche.	$Cy = 2\pi r h$		$= 2\pi r(h+r)$
Kegelfläche.	$Ke = \pi r l = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$		$= \pi r(l+r)$
Kegelstumpffläche.	$Kst = \pi l(r_u + r_o)$		
Kugelfläche.	$Ku = 4\pi r^2$	$l \cdot s = \varrho \cdot p$	
Calotte.	$\left.\begin{matrix}Ca\\Z\end{matrix}\right\} = 2\pi r h$		
Zone.			

Krummflächig.	Ebenflächig.	Körper mit gleichartigen Flächen:
Cylinder.	Prisma.	Pyramide: Tetraeder.
Kegel.	Pyramide.	Prisma: Parallelepipedon.
Kegelstumpf.	Pyramidenstumpf.	Rhomboeder. Quader.
Kugel.		Kubus.
	Obelisk.	
(Normal-) Axenschnitt.	Diagonalschnitt.	Parallelschnitt.

$\underbrace{\text{(Normal-) Axenschnitt. Diagonalschnitt.}}_{\text{Längsschnitt.}}$ $\underbrace{\text{Parallelschnitt.}}_{\text{Querschnitt.}}$

Parallelbewegung: $F_{\frac{m}{n}} h$

Prismen-Gruppe:	$\cong G$	$= G$
Pyramiden-Gruppe:	$\sim G$	$= \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot G \cdot$ Strahlen-Ausbreitung.
Pyramidenstumpf-Gruppe:	$\sim G_u$ u. G_o	$\sqrt{F_{\frac{m}{n}} h} = \sqrt{G_o} + \frac{m}{n}\left(\sqrt{G_u} - \sqrt{G_o}\right)$
Kugel:		$= 4\pi r^2\left[\frac{m}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right]$
Obelisk: weder $\cong$ noch $\sim$	G_u u. G_o	$= P + Q\left(\frac{m}{n}\right) + R\left(\frac{m}{n}\right)^2 \begin{cases} P = G_o \\ Q = 4M - 3G_o - 1G_u \\ R = -4M + 2G_o + 2G_u \end{cases}$

3 Ebenen: 3-seitige körperliche Ecke.
Seiten: Summe zweier Seiten > die dritte Seite.
„ „ der drei „ < 4 R. Ecke und Polarecke.
Winkel: „ „ „ Winkel $\lesseqgtr \frac{6}{2}$ R.

n-seitige körperliche Ecke: Summe der Seiten < 4 R.

Die regulären Körper (Plato):
- 3 Dreiecke: Tetraeder.
- 4 „ : Oktaeder.
- 5 „ : Ikosaeder.
- 3 Vierecke: Hexaeder.
- 3 Fünfecke: Dodekaeder.

Unregelmäßige Körper: Euler's Satz: Kanten — Ecken = Flächen — 2

Rotationsfläche jeder Linie (Schwerpunkt, Statisches Moment):

$$R_l = 2\pi l s_a \begin{cases} \text{Reguläres Polygon: } s_m = \varrho \dfrac{p}{l} \\ \text{Kreis(-bogen): } s_m = r \cdot \dfrac{p}{l}\cdot \end{cases}$$

Das Rotations-Gebilde ist gleich dem rotierenden Gebilde mal der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

metrie. **Volumina.**

Raummaß: cbm. Reduktionszahl: 10^3.

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Würfel} & = a^3 \\ \text{Quader} & = a \cdot b \cdot c \quad \text{kommensurabel für unendlich kleines } m. \\ \text{Gerades Prisma} & = \underbrace{a \cdot b}_{G} \cdot \underset{h}{c}\end{array}\right.$$

Prismen-Princip: $\text{Körper} = \sum_{n=\infty} F_{\frac{m}{n}h} \cdot \frac{h}{n}$

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{(Schiefes) Prisma} & \mathfrak{Pr} & = G \cdot h \\ \text{Cylinder} & \mathfrak{C} & = \pi r^2 h\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{Pyramide} & \mathfrak{Py} & = \dfrac{G \cdot h}{3} \\ \text{Kegel} & \mathfrak{Ke} & = \dfrac{\pi r^2 h}{3}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{Pyramidenstumpf} & \mathfrak{Pst} & = \frac{1}{3} h (G_u + \sqrt{G_u G_o} + G_o) \\ \text{Kegelstumpf} & \mathfrak{Kst} & = \frac{1}{3} \pi h (r_u^2 + r_u r_o + r_o^2)\end{array}\right. \quad \Big| \text{ als Restkörper.}$$

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{Kugel} & \mathfrak{Ku} & = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ Volumen (auch) aus der Fläche.} \\ \text{Kugelkegel} & \mathfrak{Kk} & = \frac{2}{3} \pi r^2 h \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{Kugelsegment} & \mathfrak{S} & = \begin{cases} \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) \\ \frac{1}{6} \pi h (3\varrho^2 + h^2) \end{cases} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{Kugelschicht} & \mathfrak{Sch} & = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho_u^2 + h^2 + 3\varrho_o^2) \quad \text{"} \quad \text{"}\end{array}\right.$$

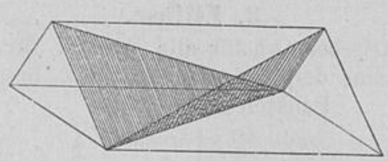
$$\text{Obelisk} \quad \mathfrak{O} = \frac{1}{6} h (G_u + 4M + G_o) \begin{cases}\text{Simpson'sche Regel.} \\ \text{Obelisken-Princip.}\end{cases}$$

verallgemeinernd. — spezialisierend.

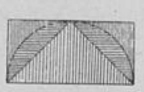
Vergleich: Cavalieri's Princip.

Körper gleich, wenn gleiche h und gleiche $F_{\frac{m}{n}h}$. (Anzahl, einzelne Summanden.)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.} \\ \text{Pyramiden " " " " " " "} \\ \text{Pyramide} = \frac{1}{3} \text{ Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.}\end{array}\right.$$

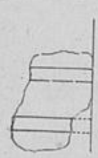


$$\text{Halbkugel} = \begin{cases}\text{Tangential-Cylinder —} \\ \text{einbeschriebener umgekehrter} \\ \text{Kegel.}\end{cases}$$



Archimedes' Satz: $\mathfrak{Ke} : \frac{1}{2}\mathfrak{Ku} : \mathfrak{C} = 1 : 2 : 3.$

Rotations-Volumen jeder Fläche (Schwerpunkt, Statisches Moment):



$$\mathfrak{R}_F = 2\pi F s_a \begin{cases}\text{Reguläres Polygon:} & s_m = \frac{2}{3} \varrho \dfrac{p}{l} \\ \text{Kreis (-sektor):} & s_m = \frac{2}{3} r \dfrac{p}{l}\end{cases}$$

Peripherie des Kreises, den der Schwerpunkt um die Axe beschreibt. Guldin's Regel.

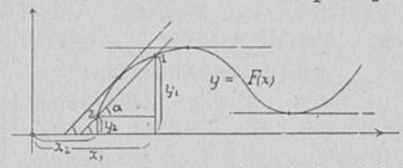
Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Ausgezeichnete Funktions-Werte. **Kegelschnitte.**

$F(x)=0$ Gleichung : Wurzeln.

$F(x)=y$ Curve:

(Differential-Quotient.) $\operatorname{tang}\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$



1. Durchschnittspunkte mit den Axen.
2. Umkehrpunkte: Tangente der Axe parallel.

   Maxima und Minima. Schellbach.

   I. $y=F(x)$ 1 Variable.

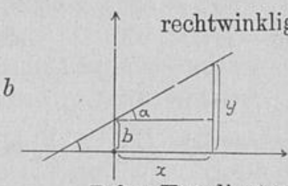
   II. $y_1-y_2=F(x_1)-F(x_2)=0$

   III. durch (x_1-x_2) heben.

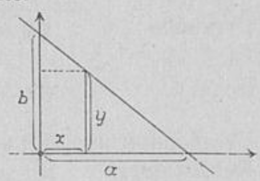
   IV. $x_1=x_2$ setzen.
3. alle Punkte.

1. Gerade. rechtwinklige Koordinaten.

$y=\underbrace{\operatorname{tg}\alpha}_{a}\cdot x+b$



$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

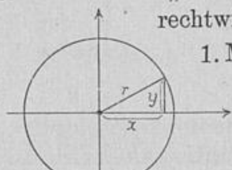


Gleichung: 1. Grad.

Polar-Koordinaten: $\varphi=$ const. \
" " : $r=$ const.

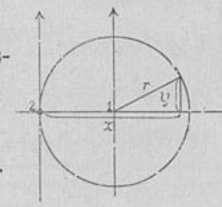
2. Kreis.

rechtwinklige Koordinaten.

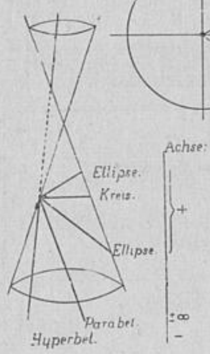


1. Mittelpunkts-Gleichung.	2. Scheitelpunkts-Gleichung.
Pythagoras:	Höhensatz:
$x^2+y^2=r^2$	$y^2=x(2r-x)$

Koordinaten-Transformation. $\begin{cases} x_1=x_2-r \\ y_1=y_2 \end{cases}$



2. Grad.



Kegelschnitte.

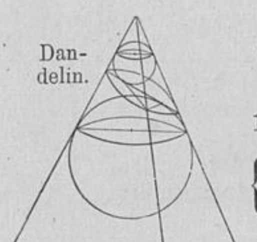
Daten:
- 2 Brennpunkte.
- $2e$ Excentricität.
- $2p$ Parameter.

(Brennpunkt.)

- $2a$ große Axe.
- $2b$ kleine Axe.

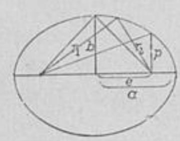
(Mittelpunkt.)

Dan-delin.



3. Ellipse.

Geometrischer Ort für alle Punkte, für die die Summe der Entfernungen von 2 (Brenn-) Punkten konstant ist.



Daten-Beziehungen.

1. Ortsgleichung: $r_1+r_2\begin{cases}=\text{const.}\\=2a\end{cases}$

$\begin{cases}\text{Brennpunkte symmetrisch.}\\\text{Konst. Entfernung = große Axe.}\end{cases}$

	Dreieck:	
beliebiges	Dreieck:	
rechtwinkliges	"	$: a^2=e^2+b^2$
gleichschenkliges	"	$: b^2=ap$

2. Scheitelgleichung: $y^2=2px\left(1-\frac{x}{2a}\right)$

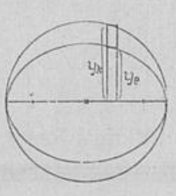
gegeben x: Rechteck = Quadrat.

" y: $\frac{p}{a}y^2=\frac{p}{a}x\left(2p-\frac{p}{a}x\right)$ Rechteck = Rechteck, gegebene Seitensumme $2p$.

Seite $<2p$: ἐλλείπειν.

Koordinaten-Transformation. $\begin{cases} x_1=x_2+a \\ y_1=y_2 \end{cases}$

3. Mittelpunktsgleichung: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Quadratur:
$$y_e:y_k=b:a$$
$$E:K=b:a$$
$$E=\pi ab$$

Planeten-Bahnen. Kepler, Newton.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

4. Parabel.

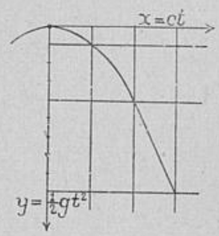
Ellipse mit $a = \infty$

Scheitelgleichung: $y^2 = 2px$

gegeben x: Rechteck = Quadrat.
„ y: Quadrat = Rechteck, gegebene Seite $2p$.
Seite $= 2p$: παραβάλλειν.

Geometrischer Ort für alle Punkte, die von einem Punkt und einer Geraden gleich weit entfernt sind.

Wurf-Curve.



Elimination der Zeit:

$$x^2 = 2\frac{c^2}{g} \cdot y$$

p

5. Hyperbel.

Geometrischer Ort für alle Punkte, für die die Differenz der Entfernungen von 2 (Brenn-)Punkten konstant ist.

1. Ortsgleichung: $r_1 - r_2 \begin{cases} = \text{const.} \\ = 2a \end{cases}$

{ Brennpunkte symmetrisch.
Konstante Entfernung = große Axe.

Daten-Beziehungen.
beliebiges Dreieck.
rechtwinkliges Dreieck: $a^2 = e^2 - b^2$
$ap = b^2$
mittlere Proportionale: Kleine Axe:
gleichschenkliges Dreieck.

2. Scheitelgleichung: $y^2 = 2px\left(1 + \frac{x}{2a}\right)$

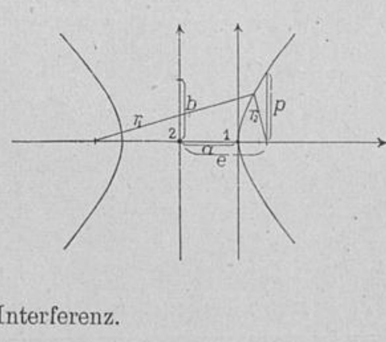
gegeben x: Rechteck = Quadrat.
„ y: $\frac{p}{a}y^2 = \frac{p}{a}x\left(2p + \frac{p}{a}x\right)$ Rechteck = Rechteck, gegeben Seitendifferenz $2p$
Seite $> 2p$: ὑπερβάλλειν.

Koordinaten-Transformation. $\begin{cases} x_1 = x_2 - a \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

3. Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(-a)^2} + \frac{y^2}{(bi)^2} = 1$$



Die Hyperbel eine Ellipse

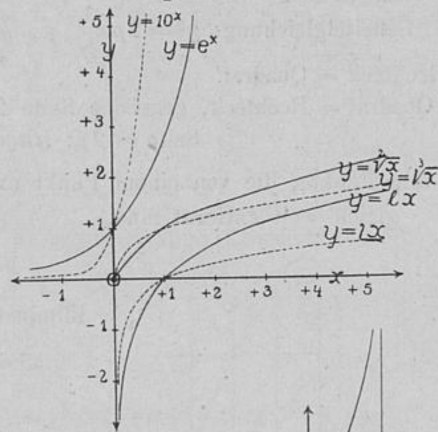
$\left\{\begin{array}{l}\text{mit negativer großer Axe.} \\ \text{„ imaginärer kleiner „}\end{array}\right\}$

Wellen-Interferenz.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Funktionen graphisch.

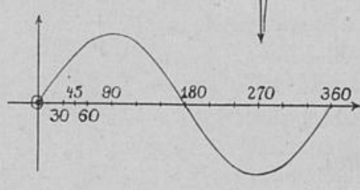
Exponential-Funktion.

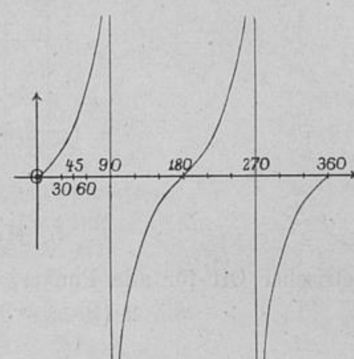


Wurzel.

Logarithmus.

Sinus.





Tangens.

Geschichtliches.

Anthoniszoon. 1527—1607. Holländer.
Apollonius c. 250—200. Alexandria. „Elemente der Kegelschnitte."
Archimedes. 287—212. Syrakus.
Bézout. 1765. Paris.
Brianchon. 1806. Paris.
Briggs. 1556—1630. London. „Arithmetica logarithmica." 1624.
Cavalieri. 1591?—1647. Bologna.
Ceva. c. 1700. Mailand.
Dandelin. 1822. Belgier.
Descartes. 1596–1650. „Geometrie." 1637. Franzose. Niederlande. Stockholm.
Euklid. c. 300 a. C. n. Alexandria. „Elemente."
Euler. 1707—1783. Basel. Berlin. Petersburg.
Gauss. 1777—1855. Göttingen.
Guldin. 1577—1643. Schweizer. Rom. Graz.
L'Huilier. 1752—1833. Paris.
Kepler. 1571—1630. Regensburg.
Ludolf van Ceulen. 1540—1610. Leiden.
Menelaus. c. 100 p. C. n. Alexandria.
Mercator. 1620—1687. Paris. London. „Logarithmotechnia." 1668.
de Moivre. 1667—1754. Franzose. London.
Mollweide. 1808. Leipzig.
Napier. 1550—1617. Schottland.
Newton. 1643—1727. London. „Philosophiae naturalis principia mathematica." 1687.
Pascal. 1623—1662. Paris.
Plato. 429—348. Athen.
Ptolemaeus. 87—165. Alexandria.
Pythagoras. 580—501. Kroton.
Simpson. 1710—1761. Glasgow.
Thales. 624—548. Milet.

Schellbach. 1805—1892. Berlin.
Schindler. 1835—1901. Berlin.
Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. 1908.

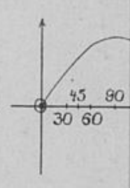
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

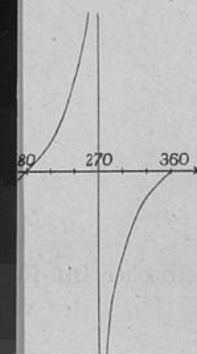
Funktionen graphisch.

Wurzel.

Logarithmus.

Sinus.





Tangens.

Anthoniszoon. 152 en. 1540—1610. Leiden.
Apollonius c. 250- 0 p. C. n. Alexandria.
„Elemente der K —1687. Paris. London.
Archimedes. 287— echnia." 1668.
Bézout. 1765. Par —1754. Franzose. London.
Brianchon. 1806. 8. Leipzig.
Briggs. 1556—16 -1617. Schottland.
„Arithmetica log —1727. London.
Cavalieri. 1591?— naturalis principia mathe-
Ceva. c. 1700. Ma 7.
Dandelin. 1822. B -1662. Paris.
Descartes. 1596–16 48. Athen.
Franzose. Nieder —165. Alexandria.
Euklid. c. 300 a. ( )—501. Kroton.
„Elemente." —1761. Glasgow.
Euler. 1707—1783. 548. Milet.
burg.
Gauss. 1777—185
Guldin. 1577—16 5—1892. Berlin.
Rom. Graz. —1901. Berlin.
L'Huilier. 1752— athematische Unterrichts-
Kepler. 1571—16 1908.