

Zu den algebraischen Gleichungen.

Die hier mitgeteilten Auffösungen der allgemeinen und vollständigen algebraischen Gleichungen der ersten vier Grade entstehen auf folgende Weise. Die Gleichung höheren Grades wird aus einer Gleichung niederen Grades, deren Lösung bekannt ist, durch Potenzieren der letzteren abgeleitet, und zwar einunddieselbe Gleichung 2. Grades durch Quadrieren zweier verschiedener Gleichungen 1. Grades; dieselbe Gleichung 3. Grades durch Kubieren dreier verschiedener Gleichungen 1. Grades; dieselbe Gleichung 4. Grades durch Quadrieren zweier verschiedener Gleichungen 2. Grades. Die Verschiedenheit der in jedem Falle zu potenzierenden Gleichungen besteht darin, dass ihre rechten Seiten, ceteris paribus, mit den bezw. 2., 3. und 2. Wurzeln der Eins multipliziert sind. Im Grunde genommen wird durch dieses Verfahren die Gleichung 2. Grades in zwei symmetrische Faktoren 1. Grades, die Gleichung 3. Grades in drei solche 1. Grades, die Gleichung 4. Grades in zwei solche 2. Grades zerlegt. Schliesslich führt die Gleichstellung der entsprechenden Koeffizienten von x der zur Lösung gegebenen und der durch Potenzieren gefundenen Gleichung und die Berechnung der letzteren Koeffizienten durch die ersteren auf als lösbar bekannte Gleichungen: bei der Gleichung 2. Grades auf eine rein quadratische; bei der Gleichung 3. Grades auf eine vollständige quadratische vom 6. Grade; bei der Gleichung 4. Grades auf eine vollständig kubische vom 6. Grade. Setzt man nun die berechneten Werte für die Koeffizienten in die ursprünglich angenommene Gleichung, deren Lösung bekannt ist, ein, so erhält man die Lösung der gegebenen Gleichung, und zwar sämtliche Wurzeln der letzteren. — An die Lösungen der Gleichungen 3. und 4. Grades schliessen sich Neuformulierungen der Wurzeln der Gleichungen bezw. 2. und 3. Grades. — Endlich folgt eine Aufstellung der algebraisch lösbaren dreigliederigen Gleichungen 5. und 6. Grades.

$$\text{I. } x^2 - 2mx + n^2 = 0.$$

1) $x - a = + b$ giebt quadriert und geordnet:

2) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$

2) erhält man aber auch aus 1), wenn man in 1) die rechte Seite negativ setzt, dann quadriert und ordnet. 2) hat also die Wurzeln der Gleichungen:

3) $\left. \begin{array}{l} x - a = + b \\ x - a = - b \end{array} \right\} \text{ d. i. } \left. \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} = a \pm b.*$

* Vergl. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, Leipzig, B. G. Teubner, 1878, § 111.

Vergleicht man nun 2) mit I, so ist

$$4) \dots \dots \dots \begin{cases} a = m \\ a^2 - b^2 = n^2 \end{cases} \text{ d. i. } \begin{cases} a = m \\ b = \pm \sqrt{m^2 - n^2}. \end{cases}$$

Wählt man b positiv, so ist

$$5) \dots \dots \dots \begin{cases} x_1 = m + \sqrt{m^2 - n^2} \\ x_2 \end{cases}$$

b negativ gewählt giebt dieselben Wurzeln, aber in der Reihenfolge $x_2 x_1$.

II. $x^3 - 3mx^2 + 3n^2x - p^3 = 0$.

Setzt man $x = y + m$, so wird

$$1) \dots \dots \dots y^3 - 3(m^2 - n^2)y - (2m^3 - 3mn^2 + p^3) = 0, \text{ oder abgekürzt:}$$

$$2) \dots \dots \dots y^3 - 3n_1^2 y - 2p_1^3 = 0. \text{ Nun giebt}$$

$$3) \dots \dots \dots y - a = by - c \text{ kubiert und geordnet:}$$

$$4) \dots \dots \dots y^3 - 3 \frac{a - b^2c}{1 - b^3} y^2 + 3 \frac{a^2 - bc^2}{1 - b^3} y - \frac{a^3 - c^3}{1 - b^3} = 0.$$

4) erhält man aber auch, wenn man in 3) die rechte Seite mit $u = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, oder mit $v = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$ multipliziert, dann die Gleichungen kubiert und ordnet.

4) hat also die Wurzeln von

$$5) \dots \dots \dots \begin{cases} y - a = by - c & y_1 = \frac{a - c}{1 - b} \\ y - a = u(by - c) \text{ d. i. } & y_2 = \frac{a - uc}{1 - ub} \\ y - a = v(by - c) & y_3 = \frac{a - vc}{1 - vb}. \end{cases}$$

Vergleicht man nun 4) mit 2), so ist

$$6) \dots \dots \dots \begin{cases} a - b^2c = 0 \\ \frac{a^2 - bc^2}{1 - b^3} = -n_1^2 \\ \frac{a^3 - c^3}{1 - b^3} = 2p_1^3. \end{cases} \text{ Löst man nach c auf, so ist}$$

$$7) \dots \dots \dots c^6 + 2p_1^3 c^3 + n_1^6 = 0, \text{ und daraus folgt:}$$

$$8) \dots \dots \dots c = \sqrt[3]{-p_1^3 + \sqrt{p_1^6 - n_1^6}} = -\sqrt[3]{p_1^3 \pm \sqrt{p_1^6 - n_1^6}}.$$

c hat also folgende sechs Werte:

$$9) \dots \dots \dots \begin{cases} c_1 = -\sqrt[3]{p_1^3 + \sqrt{p_1^6 - n_1^6}} & c_1^1 = -\sqrt[3]{p_1^3 - \sqrt{p_1^6 - n_1^6}} \\ c_2 = uc_1 & c_2^1 = uc_1^1 \\ c_3 = vc_1 & c_3^1 = vc_1^1. \end{cases}$$

Man beachte, dass $u^2 = v$, $v^2 = u$, $uv = 1$, dass

$$10) \dots \dots \begin{cases} c_1 c_1' = n_1^2 \\ c_2 c_2' = v n_1^2 \\ c_3 c_3' = u n_1^2 \text{ ist.} \end{cases}$$

Wählt man nun für 5) den Wert c_1 , setzt nach 6) $b^2 c_1$ für a und beachtet, dass

$$b c_1 = \frac{n_1^2}{c_1} = c_1' \text{ ist, so wird}$$

$$11) \dots \dots \begin{cases} y_1 = -c_1 - c_1' & x_1 = m - c_1 - c_1' \\ y_2 = -u c_1 - v c_1' & \text{also } x_2 = m - u c_1 - v c_1' \\ y_3 = -v c_1' - u c_1 & x_3 = m - v c_1' - u c_1. \end{cases} \text{ Mithin ist}$$

$$12) \dots \dots \begin{cases} x_1 = m + \frac{1}{v} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2m^3 - 3mn^2 + p^3) + \sqrt{\frac{1}{4}(2m^3 - 3mn^2 + p^3)^2 - (m^2 - n^2)^3}} \\ x_2 = m \\ x_3 = m + \frac{1}{u} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(2m^3 - 3mn^2 + p^3) - \sqrt{\frac{1}{4}(2m^3 - 3mn^2 + p^3)^2 - (m^2 - n^2)^3}} \end{cases}$$

Wählt man für e der Reihe nach $c_1 | c_1' | c_2 | c_2' | c_3 | c_3'$, so ergeben sich immer dieselben drei Wurzeln und zwar bezw. in der Reihenfolge:

$$x_1 x_2 x_3 \mid x_1 x_3 x_2 \mid x_2 x_3 x_1 \mid x_3 x_2 x_1 \mid x_3 x_1 x_2 \mid x_2 x_1 x_3,$$

Setzt man in II $p^3 = 0$, so wird eine der Wurzeln auch $= 0$, und die beiden anderen sind die Wurzeln der Gleichung 2. Grades $x^2 - 3mx + 3n^2 = 0$, oder, wenn man $3m = 2\mu$ und $3n^2 = v^2$ setzt, der Gleichung

$$13) \dots \dots x^2 - 2\mu x + v^2 = 0.$$

Diese drei Wurzeln erhält man aber auch, wenn man auch in den Wurzeln der Gleichung 3. Grades $p^3 = 0$ setzt. Letztere sehen dann nach 12) so aus:

$$x_1 = \frac{1}{3} \left(2\mu + \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu v^2 + 3v^2 \sqrt[3]{v^2(v^2 - \mu^2)}} + \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu v^2 - 3v^2 \sqrt[3]{v^2(v^2 - \mu^2)}} \right)$$

oder abgekürzt:

$$14) \dots \dots \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2\mu + M + N) \text{ und demnach} \\ x_2 = \frac{1}{3}(2\mu + uM + vN) \\ x_3 = \frac{1}{3}(2\mu + vM + uN). \end{cases}$$

Von diesen drei Wurzeln ist $x_1 = 0$ und zwar identisch Null, wie man sich entweder durch Einsetzen irgend welcher Zahlenwerte für μ und v^2 überzeugt, oder allgemeiner, indem man $v^2 = \mu^2 \pm 3k^2$ setzt, jenachdem $v^2 \geq \mu^2$ ist. Mit Hilfe der Gleichung

$$15) \dots \dots 2\mu + M + N \equiv 0$$

erhalten die beiden anderen Wurzeln, das sind also die Wurzeln der allgemeinen quadratischen Gleichung 13, die neuen Formen:

$$16) \begin{cases} x_2 = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}) \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 + 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}) \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 - 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} \\ x_3 = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}) \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 + 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}) \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 - 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x_2 = \mu + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 + 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} - \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 - 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} \right) \\ x_3 = \mu - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 + 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} - \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 - 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} \right) \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x_2 = \mu(1 + i\sqrt{\frac{1}{3}}) + i\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 + 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} \\ x_3 = \mu(1 - i\sqrt{\frac{1}{3}}) - i\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 + 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} x_2 = \mu(1 - i\sqrt{\frac{1}{3}}) - i\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 - 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)} \\ x_3 = \mu(1 + i\sqrt{\frac{1}{3}}) + i\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{8\mu^3 - 9\mu\nu^2 - 3\nu^2\sqrt{3}(v^2 - \mu^2)}. \end{cases}$$

Sie reduzieren sich sämtlich auf die bekannten einfachsten Formen I 5), wenn man, wie oben, bzw. $v^2 = \mu^2 \pm 3k^2$ setzt.

III. $x^4 - 4mx^3 + 6n^2x^2 - 4p^3x + q^4 = 0$.

1) $x^2 - 2ax + b^2 = 2cx - d^2$ giebt quadriert und geordnet:

2) $x^4 - 4ax^3 + 2(2a^2 + b^2 - 2c^2)x^2 - 4(ab^2 - cd^2)x + b^4 - d^4 = 0$.

2) erhält man aber auch, wenn man in 1) die rechte Seite negativ setzt, dann die Gleichung quadriert und ordnet. 2) hat also die Wurzeln der Gleichungen:

$$3) \dots \begin{cases} x^2 - 2(a+c)x + b^2 + d^2 = 0 \\ x^2 - 2(a-c)x + b^2 - d^2 = 0^*, \text{ d. i.} \end{cases}$$

$$4) \dots \begin{cases} \left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - b^2 - d^2} \\ \left. \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = a - c \pm \sqrt{(a-c)^2 - b^2 + d^2}. \end{cases}$$

Vergleicht man nun 2) mit III, so ist

$$5) \dots \begin{cases} a = m \\ 2a^2 + b^2 - 2c^2 = 3n^2 \\ ab^2 - cd^2 = p^3 \\ b^4 - d^4 = q^4. \end{cases}$$

Mit Hilfe der drei ersten Gleichungen von 5) erhalten die vier Wurzeln in 4) die Gestalt:

* Vergl. a. a. O. § 259-261.

$$6) \dots \begin{cases} \left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = m + c \pm \sqrt[3]{3(m^2 - n^2) - c^2 + \frac{1}{c}(2m^3 - 3mn^2 + p^3)} \\ \left. \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = m - c \pm \sqrt[3]{3(m^2 - n^2) - c^2 - \frac{1}{c}(2m^3 - 3mn^2 + p^3)} \end{cases}$$

Sie sind dadurch interessant, dass sie dieselben Koeffizientenverbindungen aufweisen, wie I 5) und II 12). Eine andere interessante Form erhalten sie, wenn man $m + c = y$ und $m - c = z$ setzt:

$$7) \dots \begin{cases} \left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = y \pm i \sqrt{\frac{y^3 - 3my^2 + 3n^2y - p^3}{y - m}} \\ \left. \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = z \pm i \sqrt{\frac{z^3 - 3mz^2 + 3n^2z - p^3}{z - m}} \end{cases}$$

Es handelt sich nun noch um die Betrachtung von c in 6). Löst man 5) nach c^2 auf, so ist

$$8) \dots \begin{aligned} c^6 - 3\alpha^2 c^4 + 3(\alpha^4 - \frac{1}{4}\gamma^4)c^2 - \frac{1}{4}\beta^6 &= 0, \text{ wenn} \\ \alpha^2 &= m^2 - n^2 \\ \beta^3 &= 2m^3 - 3mn^2 + p^3 \\ 3\gamma^4 &= 3n^4 - 4mp^3 + q^4 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Und es wird

$$9) \dots \begin{cases} c_1^2 = \alpha^2 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\delta^6 + \sqrt{\delta^{12} - \gamma^{12}}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\delta^6 - \sqrt{\delta^{12} - \gamma^{12}}} \\ c_2^2 = \alpha^2 + \frac{u}{2} \sqrt[3]{\delta^6 + \sqrt{\delta^{12} - \gamma^{12}}} + \frac{v}{2} \sqrt[3]{\delta^6 - \sqrt{\delta^{12} - \gamma^{12}}} \\ c_3^2 = \alpha^2 + \frac{v}{2} \sqrt[3]{\delta^6 + \sqrt{\delta^{12} - \gamma^{12}}} + \frac{u}{2} \sqrt[3]{\delta^6 - \sqrt{\delta^{12} - \gamma^{12}}}, \text{ wo} \\ \delta^6 = -4\alpha^6 + 3\alpha^2\gamma^4 + \beta^6 \\ = n^6 - 2mn^2p^3 + p^6 + m^2q^4 - n^2q^4 \text{ ist.} \end{cases}$$

c hat also sechs Werte, die drei positiven c_1, c_2, c_3 und die drei entsprechenden negativen c_1', c_2', c_3' , so dass die Gleichungen gelten:

$$10) \dots \quad c_1 + c_1' = 0 \quad c_2 + c_2' = 0 \quad c_3 + c_3' = 0$$

und anscheinend 24 verschiedene Wurzeln x hervorgerufen werden. Da aber aus 6) unmittelbar ersichtlich ist, dass immer dieselben vier Wurzeln zum Vorschein kommen, nur in anderer Reihenfolge, wenn c_1' d. i. $-c_1$ statt $+c_1$, c_2' d. i. $-c_2$ statt $+c_2$, c_3' d. i. $-c_3$ statt $+c_3$ gesetzt wird, so bleiben nur noch die 12 Wurzelwerte von x zu betrachten, welche durch das Einsetzen der drei positiven Werte c_1, c_2, c_3 in 6) entstehen. Aus 8) oder 9) ergibt sich:

$$11) \dots \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3\alpha^2 \quad c_1^2 c_2^2 c_3^2 = \frac{1}{4}\beta^6$$

Letztere Gleichung wiederum ergibt $c_1 c_2 c_3 = \pm \frac{1}{2}\beta^3$. Wählt man nun zunächst $c_1 c_2 c_3 = +\frac{1}{2}\beta^3$, also $\frac{\beta^3}{c_1} = +2c_2 c_3$, und setzt die eben genannten Werte für $3\alpha^2$ und $\frac{\beta^3}{c_1}$ in 6) ein, so erhalten die Wurzeln die Gestalt: *

* Die Wurzelformen 12) und 13) heissen die Euler'schen. Matthiessen a. a. O. § 203 vermutet, dass Euler dieselben durch ein Kombinationsverfahren entdeckt habe.

$$12) \dots \begin{cases} x_1 = m + c_1 + c_2 + c_3 \\ x_2 = m + c_1 - c_2 - c_3 \\ x_3 = m - c_1 + c_2 - c_3 \\ x_4 = m - c_1 - c_2 + c_3 \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen wird jetzt weiter und überhaupt allgemein klar, dass, wenn man in 6) für c der Reihe nach $c_1 | c_1' | c_2 | c_2' | c_3 | c_3'$ setzt, sich nicht die Anzahl, sondern jedesmal nur die Reihenfolge der vier Wurzeln ändert, bezw.:

$x_1 x_2 x_3 x_4 | x_3 x_4 x_1 x_2 | x_1 x_3 x_2 x_4 | x_2 x_4 x_1 x_3 | x_1 x_4 x_2 x_3 | x_2 x_3 x_1 x_4$. —
Ist $c_1 c_2 c_3 = -\frac{1}{2}\beta^3$, so lauten die vier Wurzeln:

$$13) \dots \begin{cases} x_1' = m + c_1 + c_2 - c_3 \\ x_2' = m + c_1 - c_2 + c_3 \\ x_3' = m - c_1 + c_2 + c_3 \\ x_4' = m - c_1 - c_2 - c_3 \end{cases}$$

Sind also für III Zahlenbeispiele gegeben, so bilde man $\frac{1}{2}\beta^3$ und $c_1 c_2 c_3$, sehe dann nach, ob $c_1 c_2 c_3 = \pm \frac{1}{2}\beta^3$ ist, und stelle demgemäss die vier Wurzeln nach bezw. 12) oder 13) fest. —

Setzt man in III $q^4 = 0$, so wird auch eine der Wurzeln $= 0$, und die übrigen drei sind diejenigen der Gleichung 3. Grades: $x^3 - 4mx^2 + 6n^2x - 4p^3 = 0$, oder wenn man $4m = 3\mu$, $6n^2 = 3r^2$, $4p^3 = q^3$ setzt, der Gleichung

$$14) \dots \dots \dots x^3 - 3\mu x^2 + 3r^2 x - q^3 = 0.$$

In 8) bleiben α^2 und β^3 unverändert, aber es wird $3\gamma^4 = 3n^4 - 4mp^3$; mithin ist $\alpha^2 = \frac{1}{16}(9\mu^2 - 8r^2)$; $\beta^3 = \frac{1}{32}(27\mu^3 - 36\mu r^2 + 8q^3)$; $\gamma^4 = \frac{1}{4}(r^4 - \mu q^3)$.

8) lässt sich aber dann in die Faktoren zerlegen:

$$15) \dots [c^3 + mc^2 - \frac{1}{2}(2m^2 - 3n^2)c - \frac{1}{2}\beta^3] [c^3 - mc^2 - \frac{1}{2}(2m^2 - 3n^2)c + \frac{1}{2}\beta^3] = 0.$$

Die Gleichungen 9) nehmen die Gestalt an:

$$c_1^2 = \frac{1}{16} \left(9\mu^2 - 8r^2 + \sqrt[3]{32} \sqrt[3]{q^6 + 2r^6 - 3\mu r^2 q^3 + q^3} \sqrt[3]{q^6 - 6\mu r^2 q^3 + 4\mu^3 q^3 - 3\mu^2 r^4 + 4r^6} + \sqrt[3]{32} \sqrt[3]{q^6 + 2r^6 - 3\mu r^2 q^3 - q^3} \sqrt[3]{q^6 - 6\mu r^2 q^3 + 4\mu^3 q^3 - 3\mu^2 r^4 + 4r^6} \right)$$

oder abgekürzt:

$$16) \dots \begin{cases} c_1^2 = \frac{1}{16}(9\mu^2 - 8r^2 + M + N) \text{ und demnach} \\ c_2^2 = \frac{1}{16}(9\mu^2 - 8r^2 + uM + vN) \\ c_3^2 = \frac{1}{16}(9\mu^2 - 8r^2 + vM + uN). \end{cases}$$

Nun liefern die 6 Wurzeln $c_1 c_2 c_3 c_1' c_2' c_3'$ von 15) folgende Möglichkeiten:

1. $c_1 + c_2 + c_3 =$	$c_1 c_2 c_3 =$	also auch $c_1' + c_2' + c_3' =$	$c_1' c_2' c_3' =$
2. $c_1 + c_2' + c_3 =$	$c_1 c_2' c_3 =$	$c_1' + c_2 + c_3 =$	$c_1' c_2 c_3 =$
3. $c_1' + c_2 + c_3 =$	$c_1' c_2 c_3 =$	$c_1 + c_2' + c_3 =$	$c_1 c_2' c_3 =$
4. $c_1' + c_2' + c_3 =$	$c_1' c_2' c_3 =$	$c_1 + c_2 + c_3' =$	$c_1 c_2 c_3' =$
5. $c_1 + c_2 + c_3 =$	$c_1 c_2 c_3 =$	$c_1' + c_2' + c_3 =$	$c_1' c_2' c_3 =$
6. $c_1 + c_2' + c_3 =$	$c_1 c_2' c_3 =$	$c_1' + c_2 + c_3 =$	$c_1' c_2 c_3 =$
7. $c_1' + c_2 + c_3 =$	$c_1' c_2 c_3 =$	$c_1 + c_2' + c_3 =$	$c_1 c_2' c_3 =$
8. $c_1' + c_2' + c_3 =$	$c_1' c_2' c_3 =$	$c_1 + c_2 + c_3 =$	$c_1 c_2 c_3 =$

-m + $\frac{1}{2}\beta^3$ +m - $\frac{1}{2}\beta^3$

d. h.

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad m + c_1 + c_2 + c_3 = 0 & \text{und} \quad 5. \quad m + c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\
 2. \quad m + c_1 - c_2 - c_3 = 0 & 6. \quad m + c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\
 3. \quad m - c_1 + c_2 - c_3 = 0 & 7. \quad m - c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\
 4. \quad m - c_1 - c_2 + c_3 = 0 & 8. \quad m - c_1 - c_2 - c_3 = 0,
 \end{array}$$

d. h. nichts anderes, als jede der vier Wurzeln in 12) oder 13) kann = 0 werden. Mithin lassen sich die Formen von 12) bzw. 13) nicht ohne weiteres zur Darstellung der drei Wurzeln von 14) verwenden, so lange μ , ν^2 und φ^3 willkürliche Grössen sind. Oder man muss sagen: Die Wurzeln der allgemeinen kubischen Gleichung lassen sich wohl unter den Formen von 12) bzw. 13) darstellen; aber es bleibt ungewiss, welche von ihnen = 0 wird. Mithin drängt sich die Frage auf: Welche Beziehungen müssen zwischen μ , ν^2 und φ^3 bestehen, wenn einer der obigen 4 bez. 8 Fälle eintreten soll? Ihre Beantwortung bleibe einer späteren Untersuchung aufgespart.

Zu 15) werde noch bemerkt, dass die Gleichung

$$17) \dots\dots\dots c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 = -\frac{1}{2}(2m^2 - 3n^2) = -\frac{3}{4\nu}(3\mu^2 - 4\nu^2)$$

in ihrer rechten Seite für alle Fälle konstant bleibt, wenn auch auf der linken willkürlich $c_1' c_2' c_3'$ statt $c_1 c_2 c_3$ gesetzt werden.

Zu den dreigliederigen Gleichungen fünften und sechsten Grades.

Der Italiener Ruffini 1803, der Norweger Abel 1826, der Deutsche Düring 1884 haben gezeigt, dass die allgemeine Gleichung 5. Grades und somit auch jede allgemeine Gleichung höheren Grades algebraisch nicht lösbar ist, d. h. dass ihre Wurzeln nicht durch endliche algebraische Ausdrücke der Bekannten, wie bei den Gleichungen der ersten vier Grade, gegeben werden können. Erst 1858 gab der Franzose Hermite, Mitglied der Pariser Akademie, ihre Lösung (sowie auch die der Gleichung 4. Grades) mit Hilfe elliptischer Funktionen.* Sie lässt sich nämlich nach der Methode des Deutschen Tschirnhausen oder der des Engländers Jerrard zunächst auf algebraischem Wege vom 2., 3. und 4. Gliede befreien, dann auf die sehr einfache Form $x^5 - x - a = 0$ bringen, und diese lässt sich mit Hilfe elliptischer Funktionen lösen.** Die sich aufdrängende Frage, ob es nicht doch dreigliederige Gleichungen 5. Grades giebt, welche sich algebraisch lösen lassen, ist bejahend zu beantworten. Selbstverständlich können dann aber die beiden Bekannten nicht mehr von einander unabhängig sein. Im Folgenden sollen die allgemeinen Formen dieser algebraisch lösbaren Fälle aufgestellt werden.

* Comptes rendus 1858, Bd. 46, S. 508.

** Zeitschrift für Mathematik und Physik 1859, VI. S. 81.

IV. $x^5 + mx + n = 0$.

Es lässt sich zwar aus jeder dreigliedrigen Gleichung beliebigen Grades immer eine der beiden Bekannten entfernen. Dividiert man z. B. IV durch n , setzt

$\frac{x}{n^{\frac{1}{5}}} = x$, und $\frac{m}{n^{\frac{4}{5}}} = m$, so ist $x^5 + m x + 1 = 0$; dividiert man IV durch $m^{\frac{5}{4}}$,

setzt $\frac{x}{m^{\frac{1}{4}}} = x$, und $\frac{n}{m^{\frac{5}{4}}} = n$, so ist $x^5 + x + n = 0$. Wir halten uns aber an die Form IV.

- 1) $x^3 + ax + b = cx^2 + dx - b$ giebt quadriert und dann geordnet:
 2) $x^5 + (2a - c^2)x^3 + 2(b - cd)x^2 + (a^2 - d^2 + 2bc)x + 2b(a + d) = 0$.
 2) erhält man aber auch, wenn man in 1) die rechte Seite mit -1 multipliziert, die Gleichung dann quadriert und das Resultat ordnet. 2) hat also die Wurzeln der Gleichungen:

$$3) \dots \dots \begin{cases} x^3 - cx^2 + (a-d)x + 2b = 0 \\ x^2 + cx + (a+d) = 0. \end{cases}$$

Vergleicht man nun 2) mit IV, so ist

$$4) \dots \dots \begin{cases} 2a - c^2 = 0 \\ b - cd = 0 \\ a^2 - d^2 + 2bc = m \\ 2b(a + d) = n. \end{cases}$$

Löst man nach c und d auf und setzt dann $d = \frac{1}{2}\delta c^2$, so wird

$$5) \dots \dots \begin{cases} c^4(1 + 4\delta - \delta^2) = 4m \\ c^5\delta(1 + \delta) = 2n. \end{cases}$$

Liessen sich nun hieraus c und δ als Funktionen von m und n algebraisch berechnen, so wäre damit die Lösung von IV gegeben. Schafft man aber einmal c , dann δ heraus, so entstehen die Gleichungen:

$$6) \dots \dots \begin{cases} (1 + 4\delta - \delta^2)^5 n^4 = 64 m^5 \delta^4 (1 + \delta)^4 \text{ und} \\ (2n + 4mc - c^5)^2 + 5c^5(2n + 4mc - c^5) = 50nc^5. \end{cases}$$

Beide sind in Bezug auf δ und c von noch höherem als 5. Grade, nämlich vom 10., also algebraisch nicht lösbar. Man kann aber jetzt mit Hilfe der Gleichungen 5) und unter der Berücksichtigung, dass c sowohl $+$ als auch $-$ sein kann, der Gleichung IV die Form geben:

$$7) \dots \dots x^5 + \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2) c^4 x \pm \frac{1}{2}\delta(1 + \delta) c^5 = 0,$$

welche nach 3) und 4) die Wurzeln der Gleichungen hat:

$$8) \dots \dots \begin{cases} x^3 \mp cx^2 + \frac{1}{2}(1 - \delta) c^2 x \pm \delta c^3 = 0 \\ x^2 \pm cx + \frac{1}{2}(1 + \delta) c^2 = 0. \end{cases}$$

Bemerkung: In 7) und 8) entsprechen einander die oberen Vorzeichen und ebenso die unteren. So auch in folgenden.

7) bleibt also algebraisch unlösbar, so lange δ und c von einander unabhängig sind. Sie ist aber algebraisch lösbar, wenn c^4 eine Funktion von δ ist und die Form hat:

$$\varphi = \frac{a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2}{b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + b_4\delta^4}.$$

Aus 7) wird dann:

$$9) \dots x^5 + \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)\varphi x \pm \frac{1}{2}\delta(1 + \delta)\varphi^{\frac{5}{4}} = 0.$$

Denn aus $\frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)\varphi = m$ lässt sich δ noch algebraisch berechnen als eine Funktion von m und der willkürlichen Bekannten $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, \dots, b_4$. n ist aber in diesem Falle von m abhängig. Soll dagegen n die unabhängige Bekannte, m die von ihr abhängige sein, so ist $c^5 = \varphi$ zu setzen, und die algebraisch lösbare Gleichung heisst dann:

$$10) \dots x^5 + \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)\varphi^{\frac{4}{5}}x \pm \frac{1}{2}\delta(1 + \delta)\varphi = 0. -$$

Für beide Annahmen 9) und 10) ist ein einfacher Fall $\varphi = 1$:

$$11) \dots x^5 + \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)x \pm \frac{1}{2}\delta(1 + \delta) = 0$$

mit den Wurzeln der Gleichungen:

$$12) \dots \begin{cases} x^3 \mp x^2 + \frac{1}{2}(1 - \delta)x \pm \delta = 0 \\ x^2 \pm x + \frac{1}{2}(1 + \delta) = 0. - \end{cases}$$

Übrigens lassen sich die Gleichungen 8) und damit auch Gleichung 7) direkt, d. h. ohne Hilfe von 4) ableiten. Und will man sie nicht gerade möglichst symmetrisch bezüglich der Koeffizienten von x haben, so kann man ihnen auch die Gestalt geben:

$$13) \dots \begin{cases} x^3 \mp cx^2 + \delta c^2x \pm (1 - 2\delta)c^3 = 0 \\ x^2 \pm cx \pm (1 - \delta)c^2 = 0, \end{cases}$$

welche die Wurzeln der Gleichung enthalten:

$$14) \dots x^5 + (1 - \delta - \delta^2)c^4x \pm (1 - \delta)(1 - 2\delta)c^5 = 0.$$

Man erhält sie auch aus 8), wenn man δ statt $\frac{1}{2}(1 - \delta)$ setzt. —

V. $x^5 + mx^2 + n = 0.$

$$1) \dots \begin{cases} x^3 \pm cx^2 + \frac{1}{2}(1 - \delta)c^2x \pm \frac{1}{4}(1 - \delta^2)c^3 = 0 \\ x^2 \mp cx + \frac{1}{2}(1 + \delta)c^2 = 0 \end{cases}$$

geben mit einander multipliziert:

$$2) \dots x^5 \pm \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)c^3x^2 \pm \frac{1}{8}(1 - \delta)(1 + \delta)^2c^5 = 0.$$

Oder, δ statt $\frac{1}{2}(1 - \delta)$ gesetzt,

$$3) \dots x^5 \pm (1 - \delta - \delta^2)c^3x^2 \pm \delta(1 - \delta)^2c^5 = 0 \text{ hat die Wurzeln der Gleichungen:}$$

$$4) \dots \begin{cases} x^3 \pm cx^2 + \delta c^2x \pm \delta(1 - \delta)c^3 = 0 \\ x^2 \mp cx + (1 - \delta)c^2 = 0. \end{cases}$$

2) und 3) sind algebraisch lösbar, wenn

$$c^3 = \varphi = \frac{a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2}{b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + b_4\delta^4}$$

ist. 2) lautet z. B.:

- 5) $x^5 \pm \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)\varphi x^2 \pm \frac{1}{8}(1 - \delta)(1 + \delta)^2\varphi^{\frac{5}{3}} = 0$
 n ist dann eine Funktion von m. Soll aber n die Unabhängige sein, so ist

$$c^5 = \frac{a_0 + a_1\delta}{b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + b_4\delta^4} = \psi$$

zu setzen, und 2) lautet dann:

- 6) $x^5 \pm \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)\psi^{\frac{3}{5}}x^2 \pm \frac{1}{8}(1 - \delta)(1 + \delta)^2\psi = 0.$
 Der einfachste Fall ist:
 7) $x^5 \pm \frac{1}{4}(1 + 4\delta - \delta^2)x^2 \pm \frac{1}{8}(1 - \delta)(1 + \delta)^2 = 0$ mit den Wurzeln der Gleichungen
 8) $\begin{cases} x^3 \pm x^2 + \frac{1}{2}(1 - \delta)x \pm \frac{1}{4}(1 - \delta^2) = 0 \\ x^2 \mp x + \frac{1}{2}(1 + \delta) = 0. \end{cases}$

Die noch übrigen zwei Formen dreigliedriger Gleichungen 5. Grades lassen sich mit Hilfe der reziproken Wurzelwerte auf die Formen IV und V bringen. Ihre algebraische Lösbarkeit ist also nach dem Vorangegangenen zu beurteilen.

VI. $x^6 + mx + n = 0.$

- 1) $\begin{cases} x^3 \pm 2px^2 + 2(1 + \delta)p^2x \pm (1 + 4\delta - \delta^2)p^3 = 0 \\ x^3 \mp 2px^2 + 2(1 - \delta)p^2x \mp (1 - 4\delta - \delta^2)p^3 = 0 \end{cases}$
 geben mit einander multipliziert:

- 2) $x^6 \pm 4\delta(3 + \delta^2)p^5x - (1 - 18\delta^2 + \delta^4)p^6 = 0.$
 2) ist algebraisch lösbar, wenn n abhängig von m und

$$p^5 = \varphi = \frac{a_0 + a_1\delta}{b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + b_4\delta^4}$$

ist; sie lautet dann:

- 3) $x^6 \pm 4\delta(3 + \delta^2)\varphi x - (1 - 18\delta^2 + \delta^4)\varphi^{\frac{6}{5}} = 0.$

Wird $p^6 = \psi = \frac{a_0}{b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + b_4\delta^4}$ gesetzt, so ist m abhängig von n, und 2) lautet:

- 4) $x^4 \pm 4\delta(3 + \delta^2)\psi^{\frac{5}{6}}x - (1 - 18\delta^2 + \delta^4)\psi = 0.$

Ein einfacher Fall ist:

- 5) $x^6 \pm 4\delta(3 + \delta^2)x - (1 - 18\delta^2 + \delta^4) = 0$ mit den Wurzeln der Gleichungen:
 6) $\begin{cases} x^3 \pm 2x^2 + 2(1 + \delta)x \pm (1 + 4\delta - \delta^2) = 0 \\ x^3 \mp 2x^2 + 2(1 - \delta)x \mp (1 - 4\delta - \delta^2) = 0. \end{cases}$

