Auflösung der Aufgabe:

Aus einem in der Ebene eines Kegelschnitts gegebenen Punkte Normalen an den Kegelschnitt zu construiren.

§. 1.

Die eben bezeichnete Aufgabe hat schon Apollonius Pergaeus im fünften Buche seines Werkes über die Kegelschnitte behandelt. Die von ihm entdeckten merkwürdigen Beziehungen, welchen die Lage des gegebenen Punktes entsprechen muß, wenn 2 oder 3 oder 4 Normalen an den Kegelschnitt möglich sein sollen, findet man nicht, so viel mir bekannt ist, in den Werken über analytische Geometrie,*) wo die erwähnte Aufgabe nur angedeutet wird. Die folgende Auflösung setzt sich zum Ziele, die Ableitung der Resultate des antiken Geometers durch Rechnung und eine leichte Bestimmung der Punkte, in welchen der Kegelschnitt von den Normalen erreicht wird.

§. 2.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die metrischen Relationen, an welche Apollonius die Lage des gegebenen Punktes knüpft, wenn 3 oder 4 oder 2 Normalen aus demselben an den Kegelschnitt möglich sein sollen, darauf hinauskommen, ob der gegebene Punkt auf der Evolute des Kegelschnitts liege oder in dem von der Evolute und den beiden Hauptaxen abgeschlossenen Raume oder in dem unbegränzten Raume, der sich außerhalb der Evolute zwischen den Axen erstreckt.

Die Bestimmung der Anzahl der Normalen macht Apollonius von folgender Construction abhängig:**)

Für einen Kegelschnitt mit den Hauptaxen 2a und 2b und dem Abstande des Mittelpunktes vom Brennpunkte $= c$, für welchen α den senkrechten Abstand des gegebenen Punktes von der Axe 2b, β den senkrechten Abstand dieses Punktes von der Axe 2a bezeichnet, nimmt derselbe $m = \frac{a^2 \alpha}{c^2}$, dann bestimmt er

*) Klügel (Mathem. Wörterb. Th. 3 S. 692) äußert in Bezug auf diese Aufgabe: „Man wird Mühe haben, die Gränzscheidungen des Apollonius durch algebraische Rechnung zu bestimmen."

**) Klügel's Wörterbuch Th. 3 S. 692.

zwischen m und a zwei mittlere Proportionalen, deren nächste an a durch h bezeichnet werden mag. Dann ist $h^3 = m \cdot a^2 = \frac{a^4 \cdot \alpha}{c^2}$. Bedeutet nun k die zu h gehörige Ordinate für die Hyperbel, so ist $a^2 . k^2 = b^2 . (h^2 - a^2)$. Darauf nimmt Apollonius folgende Proportion:

$$\beta : k = \frac{\alpha(a^2 \alpha - c^2 . h)}{c^2} : \frac{b^2 \alpha . h}{c^2}$$

woraus folgt $\beta = \frac{k(a^2 \alpha - c^2 h)}{b^2 h}$

Werden nun für k und h ihre durch a, b, c und α ausgedrückten Werthe gesetzt, so wird erhalten:

$$b \beta = \left(a^{\frac{2}{3}} . \alpha^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ für die Hyperbel}$$

$$b \beta = \left(c^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}} . \alpha^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ für die Ellipse.}$$

Wenn der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck dividirt durch b mit X bezeichnet wird, so zeigt Apollonius, daß

$$\begin{aligned} \text{für } \beta &= X \quad 3 \text{ Normalen,} \\ \beta &< X \quad 4 \text{ Normalen,} \\ \beta &> X \quad 2 \text{ Normalen} \end{aligned}$$

möglich sind.

Die so eben aus den geometrischen Bestimmungen des Apollonius abgeleitete Beziehung zwischen β und α, wenn $\beta = X$, drückt nichts anders als die Gleichung der Evolute der Hyperbel und Ellipse aus, wie sich sogleich ergeben wird.

Bekanntlich ist die Gleichung einer geraden durch 2 gegebene Punkte gehenden Linie

$$y - y_{,} = \left(\frac{y_{,,} - y_{,}}{x_{,,} - x_{,}}\right)(x - x_{,})$$

wenn $x_{,}$ $y_{,}$ die Coordinaten des einen, $x_{,,}$ und $y_{,,}$ die Coordinaten des andern Punktes sind, bezogen auf ein rechtwinkliges oder schiefwinkliges Axensystem. Liegen die beiden Punkte auf einer Ellipse und sind die Coordinaten auf die Hauptaxen bezogen, $x_{,} = a \cos \vartheta$, $y_{,} = b \sin \vartheta$, $x_{,,} = a \cos \vartheta'$, $y_{,,} = b \sin \vartheta'$, so ist die Gleichung der Sehne

$$y - b \sin \vartheta = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} \frac{(\vartheta' + \vartheta)}{2} (x - a \cos \vartheta),$$

folglich die Gleichung der Tangente für den Punkt $(a \cos \vartheta, b \sin \vartheta)$, wenn der zweite Punkt mit diesem zusammenfällt

$$y - b \sin \vartheta = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} \vartheta (x - a \cos \vartheta)$$

Die Gleichung der Normale für denselben Punkt wird also sein

$$y - b \sin \vartheta = \frac{a}{b} . \operatorname{tang} \vartheta (x - a \cos \vartheta)$$

oder

$$y = \frac{a}{b} \operatorname{tang} \vartheta . x - \frac{c^2}{b} \sin \vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Die Gleichung einer zweiten Normale für den Punkt ($a \cos. \vartheta'$, $b \sin. \vartheta'$) ist

$$y = \frac{a}{b} \operatorname{tang} \vartheta' . x - \frac{c^2}{b} \sin \vartheta' \ldots\ldots (2)$$

Bezeichnen nun α und β die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Normalen, so hat man durch Verbindung der beiden Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{c^2}{a} . \frac{\cos \vartheta . \cos \vartheta' . \cos \left(\frac{\vartheta' + \vartheta}{2}\right)}{\cos \left(\frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right)} \\ \beta &= - \frac{c^2 \sin \vartheta . \sin \vartheta' . \sin \left(\frac{\vartheta' + \vartheta}{2}\right)}{b \cos \left(\frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

Fallen die beiden Normalen zusammen, so hat man für den Mittelpunkt des Krümmungskreises im Punkte ($a \cos \vartheta$, $b \sin \vartheta$):

$$\alpha = \frac{c^2}{a} \cos \vartheta^3$$

$$\beta = - \frac{c^2}{b} \sin \vartheta^3$$

folglich

$$(a\,\alpha)^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{2}{3}} . \cos \vartheta$$

$$- (b\,\beta)^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{2}{3}} . \sin \vartheta$$

Die beiden letzten ins Quadrat erhobenen Gleichungen geben

$$(a\,\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\,\beta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

woraus sich für die Ellipse ergiebt, daß der von Apollonius bestimmte geometrische Ort des Punktes mit der Evolute der Ellipse zusammenfällt.

Für die durch zwei Punkte der Hyperbel $\left(\frac{a}{\cos \vartheta}, b \operatorname{tang} \vartheta\right)$, $\left(\frac{a}{\cos \vartheta'}, b \operatorname{tang} \vartheta'\right)$ gehende Sehne erhält man die Gleichung

$$y - b \operatorname{tang} \vartheta = \frac{b}{a} . \frac{\cos \left(\frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\vartheta' + \vartheta}{2}\right)} \left(x - \frac{a}{\cos \vartheta}\right)$$

und die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier Normalen der Hyperbel werden hiernach

$$\alpha = \frac{c^2 \cos \left(\frac{\vartheta' - \vartheta}{2}\right)}{a . \cos \vartheta . \cos \vartheta' . \cos \left(\frac{\vartheta' + \vartheta}{2}\right)}$$

$$\beta = - \frac{c^2}{b} . \operatorname{tang} \vartheta . \operatorname{tang} \vartheta' . \operatorname{tang} \left(\frac{\vartheta' + \vartheta}{2}\right)$$

Für den Mittelpunkt des Krümmungskreises am Punkte $\left(\frac{a}{\cos \vartheta}, b \operatorname{tang} \vartheta\right)$ ergiebt sich hieraus

$$\alpha = \frac{c^2}{a \cos \vartheta^3}, \quad \beta = -\frac{c^2}{b} \operatorname{tang} \vartheta^3$$

und durch Verbindung beider Coordinaten-Ausdrücke

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

wodurch die im Anfange dieses §. ausgesprochene Behauptung auch für die Hyperbel gerechtfertigt wird.

§. 3.

Die Auflösung der Aufgabe über die aus einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt zu construirenden Normalen hängt, wie sich zeigen wird, analytisch betrachtet, von der allgemeinen Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades ab, die wir in diesem §. nach der Eulerschen Methode betrachten wollen. Um nicht Bekanntes zu wiederholen, setze ich die Bekanntschaft mit dieser Methode nach Cauchy's Auseinandersetzung *) voraus, erlaube mir aber schon zum Voraus die Aufmerksamkeit des Lesers auf eine Erleichterung bei der Berechnung der Wurzeln hinzulenken, wodurch wohl der Eulerschen Methode der Vorzug der schnellsten Berechnung der Wurzeln einer beliebigen vollständigen biquadratischen Gleichung vor andern Methoden gegeben sein möchte. Da bei dieser Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades die Gleichungen des 3ten Grades gebraucht werden, so setze ich die Bestimmung der Wurzeln derselben durch die Tafeln der Kreisfunctionen hieher, um alles zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen Nöthige beisammen zu haben.

Wenn die vollständige cubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ gegeben ist, so sind die drei Wurzeln derselben, wenn $p = b - \frac{1}{3}a^2$, $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$ gesetzt wird, und $\sin w = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$, überdieß p negativ und $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \frac{q^2}{4}$ ist,

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin\frac{w}{3} - \frac{a}{3} \\ x_1 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin\left(120^\circ + \frac{w}{3}\right) - \frac{a}{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \sin\left(240^\circ + \frac{w}{3}\right) - \frac{a}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Ist p negativ und $\left(\frac{p}{3}\right)^3 < \frac{q^2}{4}$, so sind die drei Wurzeln der kubischen Gleichung, wenn man setzt

$$\operatorname{cosec} w = \left(\frac{q}{2}\right)\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \operatorname{tang} \vartheta = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tang} w}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \operatorname{cosec} 2\vartheta - \frac{a}{3} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \operatorname{cosec} 2\vartheta + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{p} \cdot \operatorname{cotg} 2\vartheta - \frac{a}{3} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \operatorname{cosec} 2\vartheta - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{p} \cdot \operatorname{cotg} 2\vartheta - \frac{a}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

*) Cours d'Analyse algébrique p. 360, 361.

Ist endlich p positiv, so sind die 3 Wurzeln, wenn man setzt $\operatorname{cotg} w = \left(\frac{q}{2}\right)\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\operatorname{tang} \vartheta = \sqrt[3]{\operatorname{tang} \frac{w}{2}}$,

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\operatorname{cotg} 2\vartheta - \frac{a}{3} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{p}{3}}\,.\operatorname{cotg} 2\vartheta + \sqrt{-1}\,.\sqrt{p}\,.\operatorname{cosec} 2\vartheta - \frac{a}{3} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{p}{3}}\,.\operatorname{cotg} 2\vartheta - \sqrt{-1}\,.\sqrt{p}\,.\operatorname{cosec} 2\vartheta - \frac{a}{3} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Die Auflösung der vollständigen biquadratischen Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ hängt von der Auflösung der biquadratischen $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ ab, wenn $x = y - \frac{1}{4}a$, wo $p = b - \frac{3}{8}a^2$, $q = \frac{1}{8}a^3 - \frac{ab}{2} + c$, $r = -\frac{3}{256}a^4 + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d$. Setzt man nun $y = u + v + w$, $4u^2 = z_0$, $4v^2 = z_1$, $4w^2 = z_2$, so läßt sich zeigen, daß z_0, z_1 und z_2 die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

sind. Um diese Gleichung bequem durch Hülfe der trigonometrischen Tafeln aufzulösen, muß man zuerst p, q und r aus den Koeffizienten der vollständigen biquadratischen Gleichung berechnen und dann die Gleichung (7) auf die Form $Z^3 + PZ + Q = 0$ bringen; man kann aber die Berechnung von p, q und r ganz ersparen und P und Q unmittelbar durch die Koeffizienten a, b, c, d ausdrücken. Man findet nämlich

$$P = -\frac{b^2}{3} + ac - 4d,\text{*)}$$

$$Q = \tfrac{1}{3}b\,.\left(P + \frac{b^2}{9}\right) + d(4b - a^2) - c^2$$

$$Q = -\tfrac{2}{27}b^3 + \frac{d(8b - 3a^2)}{3} - c^2 + \frac{abc}{3}$$

Nach der Bestimmung von P und Q findet man die 3 Wurzeln der Gleichung $Z^3 + PZ + Q = 0$ durch die Formeln (4) oder (5) oder (6). Jede dieser Wurzeln um $\frac{2}{3}p$ vermindert oder um $\frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{3}b$ vermehrt, ergiebt die Wurzeln z_0, z_1, z_2 der kubischen Gleichung (7), woraus dann die Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3 der vollständigen biquadratischen Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit Berücksichtigung des Zeichens von q durch folgende Ausdrücke gefunden werden können:

---

*) Die Richtigkeit des Ausdrucks für **P** läßt sich leicht nachweisen: Wenn man von der Gleichung des dritten Grades $z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$ zu der Gleichung $Z^3 + PZ + Q = 0$ übergeht, so ist $P = B - \frac{A^2}{3}$, es ist aber $A = 2p$, $B = p^2 - 4r$, folglich $P = -4r - \frac{p^2}{3} = \frac{12}{256}a^4 - \frac{a^2b}{4} + ac - 4d - \frac{1}{3}\left(b^2 + \frac{9}{64}a^4 - \frac{6\,.\,b}{8}a^2\right)$ $= -\frac{a^2b}{4} + ac - 4d - \frac{b^2}{3} + \frac{a^2b}{4} = -\frac{b^2}{3} + ac - 4d.$

Die Bestimmung von **Q** wird erleichtert durch die Bemerkung, daß $Q = C - \frac{1}{3}A\left(P + \frac{A^2}{9}\right)$.

Wenn q positiv, z_0 positiv und reell, z_1 und z_2 reell, q negativ

so ist
$$\left.\begin{aligned}
2x_0 &= \sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}\\
2x_1 &= \sqrt{z_0} - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}\\
2x_2 &= -\sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}\\
2x_3 &= -\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}
\end{aligned}\right\}\dots(8)
\qquad
\left.\begin{aligned}
2x_0 &= \sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}\\
2x_1 &= \sqrt{z_0} - \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}\\
2x_2 &= -\sqrt{z_0} + \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}\\
2x_3 &= -\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \frac{a}{2}
\end{aligned}\right\}\dots(9)$$

Wenn q positiv, q negativ

z_0 positiv und reell, z_1 und z_2 von der Form $A + B\sqrt{-1}$ und $A - B\sqrt{-1}$, so ist, wenn $B = A \,.\, \operatorname{tang}\psi$, $\sqrt{2B \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}} = K$, und $\sqrt{2B \operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}} = L$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned}
2x_0 &= \sqrt{z_0} + K.\sqrt{-1} - \frac{a}{2}\\
2x_1 &= \sqrt{z_0} - K.\sqrt{-1} - \frac{a}{2}\\
2x_2 &= -\sqrt{z_0} + L - \frac{a}{2}\\
2x_3 &= -\sqrt{z_0} - L - \frac{a}{2}
\end{aligned}\right\}\dots(10)
\qquad
\left.\begin{aligned}
2x_0 &= \sqrt{z_0} + L - \frac{a}{2}\\
2x_1 &= \sqrt{z_0} - L - \frac{a}{2}\\
2x_2 &= -\sqrt{z_0} + K.\sqrt{-1} - \frac{a}{2}\\
2x_3 &= -\sqrt{z_0} - K.\sqrt{-1} - \frac{a}{2}
\end{aligned}\right\}..(11)$$

Ist aber z_1 und z_2 von der Form $-A + B\sqrt{-1}$ und $-A - B\sqrt{-1}$, während z_0 positiv und reell bleibt und K und L die gleiche Bedeutung beibehalten, so ist,

wenn q positiv, q negativ

$$\left.\begin{aligned}
2x_0 &= \sqrt{z_0} + L\sqrt{-1} - \frac{a}{2}\\
2x_1 &= \sqrt{z_0} - L\sqrt{-1} - \frac{a}{2}\\
2x_2 &= -\sqrt{z_0} + K - \frac{a}{2}\\
2x_3 &= -\sqrt{z_0} - K - \frac{a}{2}
\end{aligned}\right\}\dots.(12)
\qquad
\left.\begin{aligned}
2x_0 &= \sqrt{z_0} + K - \frac{a}{2}\\
2x_1 &= \sqrt{z_0} - K - \frac{a}{2}\\
2x_2 &= -\sqrt{z_0} + L\sqrt{-1} - \frac{a}{2}\\
2x_3 &= -\sqrt{z_0} - L\sqrt{-1} - \frac{a}{2}
\end{aligned}\right\}\dots(13)$$

§. 4.

Die Resultate des vorigen §. verbunden mit der Untersuchung, welche Legendre*) über die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

*) Traité des fonctions elliptiques Tom. 1 p. 349.

$$t^4 + 2(p+q)t^3 + 2(p-q).t - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

angestellt hat, geben Alles, was zur Auflösung der uns beschäftigenden Aufgabe vom Standpunkte der analytischen Geometrie erforderlich ist.

Legendre zeigt an der erwähnten Stelle, daß die Gleichung (14)

wenn $q^{\frac{2}{3}} < p^{\frac{2}{3}} + 1$, 2 reelle und 2 imaginäre,

wenn $q^{\frac{2}{3}} > p^{\frac{2}{3}} + 1$, 4 reelle Wurzeln

habe.

Denn nach dem vorigen §. ist $a = 2(p+q)$, $b = 0$, $c = 2(p-q)$, $d = -1$, folglich, da $P = \frac{1}{3}b^2 + ac - 4d$ für die Gleichung (14) $P = -4(q^2 - p^2 - 1)$ und da für die allgemeine biquadratische Gleichung $Q = \frac{b}{3}(P + \frac{b^2}{9}) + d(4b - a^2) - c^2$, so wird für die Gleichung (14) $Q = a^2 - c^2 = 16pq$. Hieraus folgt $\frac{Q^2}{4} = 64p^2q^2$ und $\left(\frac{P}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}(q^2 - p^2 - 1)^3$, und da in der Gleichung $Z^3 + PZ + Q = 0$

$\frac{Q^2}{4} + \left(\frac{P}{3}\right)^3$ positiv für 1 reelle und 2 imaginäre,

$\frac{Q^2}{4} + \left(\frac{P}{3}\right)^3$ negativ für 4 reelle Wurzeln,

so entspricht in der Gleichung (14)

$27p^2q^2 - (q^2 - p^2 - 1)^3 > 0$ dem ersten

$27p^2q^2 - (q^2 - p^2 - 1)^3 < 0$ dem zweiten

Falle.

Im ersten Falle hat die Gleichung (14) offenbar 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln, wie dies die Formeln (10), (11), (12), (13) zeigen, im zweiten Falle hat die Gleichung (14), wie aus den Formeln (8) und (9) hervorgeht, 4 reelle Wurzeln. Denn der dritte Fall, in welchem die Gleichung (7) Eine positive und 2 ungleiche negative Wurzeln, folglich die Gleichung des 4ten Grades 4 imaginäre Wurzeln hat, kommt bei der Gleichung (14) nicht in Betracht, die wegen des letzten Gliedes -1 nothwendig 2 reelle Wurzeln haben muß. Wenn $\frac{Q^2}{4} + \left(\frac{P}{4}\right)^3 = 0$, so sind unter den 4 reellen Wurzeln 2 gleiche vorhanden. Denn durch diese Bedingung werden in den Formeln (8) und (9) zwei Wurzeln einander gleich, wodurch auch die Gleichung (14) zwei gleiche Wurzeln erhält.

Die beiden angeführten Bedingungen für das Vorhandensein zweier reeller und zweier imaginärer Wurzeln oder vier reeller Wurzeln lassen sich jedoch auf einfachere Ausdrücke bringen. Setzt man $p^2 = \alpha^3$ und $q^2 = \beta^3$, so wird man für $27p^2q^2 - (q^2 - p^2 - 1)^3 > 0$ haben

$$3\alpha\beta - \beta^3 + \alpha^3 - 1 > 0 \text{ oder } (\alpha + 1)^3 - \beta^3 - 3\alpha(\alpha + 1 - \beta) > 0.$$

Aber die beiden ersten Glieder dieser Ungleichung sind das Produkt von $\beta^2 + \beta(\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2$ und $(\alpha + 1 - \beta)$, so daß der ganze linke Theil der Ungleichung sich in die Factoren $(\alpha + 1 - \beta)$ und $(\alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2 + \beta - \alpha + 1)$ zerlegen läßt. Dieser zweite Faktor bleibt positiv, es mag der erste Faktor

$(\alpha + 1 - \beta)$ positiv oder negativ sein, und deßhalb hängt die Entscheidung über das Zeichen des ganzen Produkts allein von dem Zeichen des Faktors $(\alpha + 1 - \beta)$ ab. Ist dieser Faktor positiv, so hat die Gleichung (14) 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln, ist derselbe negativ, so hat sie 4 reelle Wurzeln; ist $\alpha + 1 - \beta = 0$, so sind unter den 4 reellen Wurzeln 2 gleiche. Da $p^2 = \alpha^3$, $q^2 = \beta^3$, so ist $\alpha = p^{\frac{2}{3}}$, $\beta = q^{\frac{2}{3}}$, und deßhalb

$$\alpha + 1 - \beta \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} 0 \text{ gleichbedeutend mit } p^{\frac{2}{3}} + 1 \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} q^{\frac{2}{3}}$$

Es hat also die biquadratische Gleichung

$$t^4 + 2(p+q)t^3 + 2(p-q)t - 1 = 0,$$

$$\text{wenn } p^{\frac{2}{3}} + 1 \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} q^{\frac{2}{3}} \begin{matrix} \text{2 reelle Wurzeln und 2 imaginäre} \\ \text{4 reelle Wurzeln} \\ \text{4 reelle Wurzeln, worunter 2 gleiche.} \end{matrix}$$

§. 5.

Es macht nun weiter keine Schwierigkeit, die Anzahl der aus einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt, z. B. an eine Ellipse, möglichen Normalen zu bestimmen, indem die in 2 (2) entwickelte Gleichung der Normale mit dem Ergebniß des §. 4 verbunden wird.

Die Gleichung der Normale war an der angezeigten Stelle für einen Punkt $(a \cos \vartheta, b \sin \vartheta)$

$$yb = a \operatorname{tang} \vartheta \,.\, x - c^2 \sin \vartheta \text{*)}$$

Soll die Normale durch einen Punkt (α, β) gehen, so ist $b\beta = a\alpha \,.\, \operatorname{tang} \vartheta - c^2 \sin \vartheta$. Aus dieser Gleichung ist ϑ zu entwickeln. Um dasselbe ohne Ungewißheit in Bezug auf den Quadranten zu erhalten, führt man die trigonometrische Tangente von $\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}$ ein, und man erhält

$$b\beta = \frac{2a\alpha \,.\, \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta^2} - \frac{2c^2 \,.\, \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta^2}$$

Wird diese Gleichung nach Potenzen von $\operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2}$ entwickelt, so erhält man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\vartheta^4 + \frac{2(a\alpha + c^2)}{b\beta} \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\vartheta^3 + \frac{2(a\alpha - c^2)}{b\beta} \,.\, \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} - 1 = 0 \,\ldots\ldots\ldots (15)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung (14), so ist $p = \frac{a\alpha}{b\beta}$, $q = \frac{c^2}{b\beta}$, und da nach dem vorigen §. die Gleichung (14)

$$\text{wenn } p^{\frac{2}{3}} + 1 \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} q^{\frac{2}{3}} \begin{matrix} \text{2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln} \\ \text{4 reelle Wurzeln} \\ \text{4 reelle Wurzeln, darunter 2 gleiche} \end{matrix}$$

---

*) Geometrische Deutung dieser Gleichung. — Setzt man für $a \cos \vartheta$ x und y anstatt $b \sin \vartheta$, so hat man $xyc^2 = a^2\alpha y - b^2\beta x$. Führt man nun für y die Ordinate $y + \frac{b^2\beta}{c^2}$ und für x die Abscisse $\frac{a^2\alpha}{c^2} - x$ ein, so erhält man $yx = \frac{a^2b^2}{c^4} \,.\, \alpha\beta$, oder der geometrische Ort der Fußpunkte der Normalen bei der Ellipse ist eine gleichseitige Hyperbel deren sich schon Apollonius zur Construction der Stellen bedient, in denen die Ellipse von den Normalen getroffen wird.

hat, so wird die Gleichung (15)

$$\text{wenn } (a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} \gtreqless c^{\frac{4}{3}}$$

2 reelle Wurzeln oder 4 reelle Wurzeln oder 4 reelle Wurzeln worunter 2 gleiche haben, was so viel sagen will, als im ersten Falle sind 2 Normalen, im zweiten 4, im dritten 3 Normalen an die Curve möglich.

§. 6.

Die wirkliche Bestimmung der Punkte, wo die Normalen die Ellipse treffen, wird leicht erhalten. Nach §. 4 ist

$$\frac{P}{4} = p^2 - q^2 + 1 = \frac{(a\alpha + c^2)(a\alpha - c^2)}{b^2\beta^2} + 1$$

$$Q = 16\,pq = \frac{16\,a\alpha c^2}{b^2\beta^2}.$$

Hieraus berechnet man nach §. 3 die Wurzeln der Gleichung $Z + PZ + Q = 0$ und gelangt durch Vermehrung jeder Wurzel derselben um $\left(\frac{a\alpha + c^2}{b\beta}\right)^2$ zu den Wurzeln der reducirten Gleichung, durch welche dann sofort vermittelst der am Schlusse des §. 3 gegebenen Formeln die verschiedenen Werthe von $\tang \frac{1}{2}\vartheta$ gefunden werden können. Ein Paar numerischer Beispiele diene zur Erläuterung der angezeigten Auflösung.

I.

Es sei $\alpha = \frac{c^2}{4a}(3 - \sqrt{3})$, $\beta = -\frac{c^2}{4b}(3 - \sqrt{3})$, so ist $3P = -(40 + 32\sqrt{3})$, $Q = 32 + \frac{32}{3}\sqrt{3}$. Durch diese Werthe von P und Q findet man $Z_0 = 4{,}5518889$, $Z_1 = -6{,}3094001$, $Z_2 = 1{,}7575119$. Jede dieser Wurzeln um $\frac{(a\alpha + c^2)^2}{(b\beta)^2}$ vermehrt oder um 17,26153656 giebt die 3 Wurzeln der reducirten Gleichung

$$z_0 = 21{,}8134255, \quad z_1 = 10{,}9521365, \quad z_2 = 19{,}0190485.$$

Da q negativ, so sind die Formeln (9) in §. 3 anzuwenden, und man erhält durch Ausziehung der Quadratwurzel aus den 3 Wurzeln der reducirten Gleichung

$$\begin{aligned}
x_0 &= 8{,}2478348 = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{10 + 6\sqrt{3}} \\
x_1 &= 0{,}5773503 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \\
x_2 &= 0{,}2679492 = 2 - \sqrt{3} \\
x_3 &= -0{,}7837332 = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{10 + 6\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Durch die trigonometrischen Tangenten von $\frac{\vartheta}{2}, \frac{\vartheta_1}{2}, \frac{\vartheta_2}{2}, \frac{\vartheta_3}{2}$ findet man endlich

$$\begin{aligned}
\vartheta_0 &= 166^0\ 10'\ 26'',23 \\
\vartheta_1 &= 60^0\ 0'\ 0'',00 \\
\vartheta_2 &= 30^0\ 0'\ 0'',00 \\
\vartheta_3 &= 283^0\ 49'\ 33'',73.
\end{aligned}$$

Die cosinus und sinus dieser Winkel mit a und b multiplicirt bestimmen die Punkte auf der Ellipse, in welchen die Normalen die Curve erreichen.

II.

Ein zweites Beispiel sei folgendes: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Dann ist $P = \frac{91}{9}$, $Q = \frac{32}{3}$. Nun ist

$$
\begin{aligned}
\mathrm{l.}\ 2 &= 0{,}30103000 \\
\text{D. E. } \mathrm{l.}\ Q &= 8{,}97197127 \\
\mathrm{l.}\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} &= \underline{0{,}79151644} \\
\mathrm{l.\ tg}\ w &= 0{,}06451771 \\
w &= 49^{0}\ 14'\ 25'',05 \\
\frac{w}{2} &= 24^{0}\ 37'\ 12'',525 \\
\mathrm{l.\ tg}\ \frac{w}{2} &= 9{,}6611130{,}4 \\
\mathrm{l.\ tg}\ \vartheta = \mathrm{l.}\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\frac{w}{2}} &= 9{,}8870376{,}8 \\
\vartheta &= 37^{0}\ 37'\ 52'',174 \\
2\,\vartheta &= 75^{0}\ 15'\ 44'',348.
\end{aligned}
$$

Hieraus findet man

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= -0{,}9658373 \\
Z_1 &= +0{,}48291865 + 3{,}2879695\sqrt{-1} \\
Z_2 &= +0{,}48291865 - 3{,}2879695\sqrt{-1}.
\end{aligned}
$$

Jede Wurzel um 3,3611111 vermehrt, giebt

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2{,}3952728 \\
z_1 &= 3{,}84402976 + 3{,}2879695\,.\sqrt{-1} \\
z_2 &= 3{,}84402976 - 3{,}2879695\,.\sqrt{-1} \\
\mathrm{l.}\ A &= 0{,}5847868{,}1 \\
\mathrm{l.}\ B &= 0{,}5169277{,}5 \\
\mathrm{l.\ tg}\ \psi &= 9{,}9321409{,}4 \\
\psi &= 40^{0}\ 32'\ 30'',596 \\
\frac{\psi}{2} &= 20^{0}\ 16'\ 15'',298 \\
\mathrm{l.}\ 2 &= 0{,}30103000 \\
\mathrm{l.}\ B &= 0{,}5169277{,}5 \\
\mathrm{l.\ cotg}\ \frac{\psi}{2} &= \underline{0{,}4325803{,}7} \\
\mathrm{l.}\ 2B\ \mathrm{cotg}\ \frac{\psi}{2} &= 1{,}2505381{,}2
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{l.}\sqrt{2\,\mathrm{B}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\psi}{2}} = 0{,}6252690{,}6$$

$$\sqrt{2\,\mathrm{B}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\psi}{2}} = 4{,}2195784$$

$$\mathrm{l.}\ z_0 = 0{,}3793551{,}9$$

$$\mathrm{l.}\sqrt{z_0} = 0{,}1896775{,}95$$

$$\frac{\sqrt{z_0}}{2} = 0{,}7738335{,}5$$

$$\begin{aligned} x_0 &= -\,0{,}7738335{,}5 \\ &\quad +2{,}1097892 \\ &\quad -0{,}91666667 \\ \hline &= 0{,}4192889{,}8 = \mathrm{tg}\,\frac{\vartheta_0}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\,0{,}7738335{,}5 \\ &\quad -2{,}1097892 \\ &\quad -0{,}91666667 \\ \hline &= -\,3{,}8002894{,}2 = \mathrm{tg}\,\frac{\vartheta'}{2} \end{aligned}$$

Aus den Werthen für tang $\frac{\vartheta_0}{2}$ und tang $\frac{\vartheta'}{2}$ findet man $\vartheta_0 = 45^0\ 29'\ 43'',908$, $\vartheta' = 209^0\ 29'\ 5'',92$.

Um die Richtigkeit dieser Winkel zu prüfen, sollen hieraus nach §. 2 die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Normalen für ϑ_0 und ϑ' gesucht werden, welche dann die vorausgesetzten Coordinaten $\alpha = +2$, $\beta = +3$ wiedergeben müssen.

Es ist $\frac{(\vartheta' + \vartheta)}{2} = 127^0\ 29'\ 24'',914$, $\frac{\vartheta' - \vartheta}{2} = 81^0\ 59'\ 41'',006$

$$\mathrm{l.}\left(\frac{c^2}{a}\right) = 9{,}8750612{,}5 \qquad\qquad \mathrm{l.}\left(\frac{c^2}{b}\right) = 0{,}1760912{,}5\ \ \mathrm{n}$$

$$\mathrm{l.}\ \cos\vartheta = 9{,}8456962{,}4 \qquad\qquad \mathrm{l.}\ \sin\vartheta = 9{,}8532087{,}9$$

$$\mathrm{l.}\ \cos\vartheta' = 9{,}9397611{,}6\ \ \mathrm{n} \qquad\qquad \mathrm{l.}\ \sin\vartheta' = 9{,}6921275{,}2\ \ \mathrm{n}$$

$$\mathrm{l.}\ \cos\frac{(\vartheta' + \vartheta)}{2} = 9{,}7843508{,}1\ \ \mathrm{n} \qquad\qquad \mathrm{l.}\ \sin\frac{(\vartheta' + \vartheta)}{2} = 9{,}8995233{,}4$$

$$\mathfrak{D.\,C.}\ \mathrm{l.}\ \cos\frac{(\vartheta' - \vartheta)}{2} = 0{,}8561602{,}6 \qquad\qquad \mathfrak{D.\,C.}\ \mathrm{l.}\ \cos\frac{(\vartheta' - \vartheta)}{2} = 0{,}8561602{,}6$$

$$\mathrm{l.}\ \alpha = 0{,}3010297{,}2 \qquad\qquad \mathrm{l.}\ \beta = 0{,}4771211{,}6$$

$$\alpha = 1{,}999999 \qquad\qquad \beta = 2{,}999999$$

Pädagogische Mittheilungen.

Unter dieser Benennung werde ich künftig jedem Programme der Petrischule eine Anzahl von Aufgaben, Lehrsätzen, Fragen oder wissenschaftlichen Bemerkungen beifügen, die im Unterrichte wirklich vorgekommen sind, und sich in irgend einer Weise als anregend und fruchtbar bei der Bildung der Jugend gezeigt haben. Durch ähnliche Mittheilungen von Lehrern an Bürgerschulen würde ich mich zu lebhaftem Danke verpflichtet fühlen.

1. Fläche des ebenen Vierecks. — Das Quadrat der Fläche eines ebenen Vierecks ist gleich dem Quadrate der Fläche eines Kreisvierecks mit denselben Seiten, vermindert um das Produkt aller 4 Seiten in das Quadrat des Cosinus der halben Summe zweier Gegenwinkel des Vierecks.

Der Beweis dieses Satzes wird leicht geführt durch Zerfällung des Vierecks in 2 Dreiecke, auf welche man den Hauptsatz der ebenen Trigonometrie zwei Mal anwendet, und indem man zu beiden Seiten der hieraus erhaltenen Gleichung die doppelten Produkte der beiden an die zerfällende Diagonale anstoßenden Seiten hinzuaddirt.*)

Indem man auf ähnliche Weise das sphärische Viereck behandelt, so erhält man den Satz:

Das Quadrat der dreifachen Summe der kubischen Inhalte der beiden Tetraeder, welche die Sehne der sphärischen Diagonale mit den Sehnen zweier Seiten und drei Radien bildet, ist

$$= \sin(\tfrac{s}{2}-a).\sin(\tfrac{s}{2}-b).\sin(\tfrac{s}{2}-c).\sin(\tfrac{s}{2}-d) - \sin a.\sin b.\sin c.\sin d.\cos\left(\frac{B+D}{2}\right).\cos\left(\frac{B+D}{2}\right),$$

wenn a, b, c, d die aufeinander folgenden Seiten des Vierecks, s die Summe aller Seiten, B den von a und b, D den von c und d eingeschlossenen Winkel bedeutet.

Gewiß giebt es für das sphärische Viereck einen Ausdruck von $(\tan \frac{1}{2}F)^2$, der den Lexell'schen Ausdruck der Fläche des sphärischen Kreisvierecks als einen besondern Fall enthält. Bis jetzt habe ich diesen Satz nicht gefunden.

2. Quadratur des hyperbolischen Sektors. — Für eine Ellipse mit den Halbaxen a und b ist bekanntlich der Sektor zwischen der großen Halbaxe, dem aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte (x, y) gezogenen Radius Vektor und dem elliptischen Bogen

$$= \tfrac{1}{2}ab \,.\, \mathrm{arc}\left(\sin = \frac{y}{b}\right)$$

Da nun $\sqrt{-1}\,.\,\vartheta = \log.(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\,.\,\sin\vartheta)$, so ist für eine Ellipse mit den Halbaxen a und $b\sqrt{-1}$ oder eine Hyperbel mit den Halbaxen a und b der entsprechende hyperbolische Sektor $= \frac{1}{2}ab\,.\,\log.\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$

*) Die Anwendung des eben mitgetheilten Satzes führt auch zu einem leichten Beweise der sogenannten Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes.

3. Cubatur der dreiseitigen Pyramide. — Wenn man in einem Tetraeder eine beliebige Kante in n gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspunkte parallele Ebenen zu einer an die getheilte Kante anstoßenden Dreiecksfläche des Tetraeders legt, und aus den Durchschnittspunkten der Ebenen und Kanten Gerade parallel zu der getheilten Kante zieht, so ist der Gesammt-Cubikinhalt aller dreiseitigen äußern Prismen (durch Hülfe der Summation der Quadratzahlen) $= F \cdot h \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$, wenn F die Dreiecksfläche und h die Höhe des Tetraeders auf diese Fläche bedeutet. Die Betrachtung der Gränze dieses Ausdrucks führt zum cubischen Inhalte der dreiseitigen Pyramide.

4. Cubatur des Ellipsoids, Hyperboloids mit 2 gleichen Axen. — Die Gleichung des um die große Axe rotirenden Kegelschnitts sei $y^2 = px + qx^2$, die Abscisse x werde in n gleiche Theile getheilt und durch die Endpunkte der Ordinaten werden Parallelen zur großen Axe gezogen, dann entstehen durch Umdrehung des Kegelschnitts Cylinder, deren Gesammt-Cubikinhalt durch die Summation der Quadratzahlen und der natürlichen Zahlen gefunden wird $= x\pi \left[\frac{px}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + qx^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$

Indem man das Ellipsoid mit 3 ungleichen Axen durch Ebenen, die zu zwei Axen parallel gezogen werden, in gleich weit von einander abstehende elliptische Cylinder zerfällt, kann man durch dasselbe Hülfsmittel ohne die geringste Schwierigkeit den Gesammt-Cubikinhalt der elliptischen Cylinder erhalten. Sind die Axen b und c, zu welchen die Ebenen parallel gelegt werden, und wird die auf a genommenen Abscisse x vom Mittelpunkte gezählt in n gleiche Theile getheilt, so ist der Cubikinhalt der elliptischen Cylinder $= x\pi cb \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$, woraus der Cubikinhalt des halben Ellipsoids $\frac{2}{3}\, abc \cdot \pi$ folgt.

5. Der bekannte Ausdruck für den Radius des Krümmungskreises der Kegelschnitte durch die Normale stand mir zu isolirt, ich suchte deßhalb einen Ausdruck für den Radius des durch 3 Punkte eines Kegelschnitts gelegten Kreises, und fand, daß jener Radius gleich ist dem Produkte dreier Normalen auf die 3 Sehnen des Kegelschnitts, dividirt durch das Quadrat des halben Parameters. Jede dieser Normalen wird auf folgende Art bestimmt: Aus dem Mittelpunkte wird ein Radius Vektor durch den Mittelpunkt der Kegelschnittssehne gelegt, und die oben bezeichnete Normale auf diese Sehne geht von dem Endpunkte des Radius Vektor auf der Curve bis zum Durchschnitte mit der großen Axe. Fallen die 3 Punkte des Kegelschnitts zusammen, so verwandeln sich die ursprünglich ungleichen Normalen in 3 gleiche Linien.

6. Wenn ein Punkt sich auf der Peripherie einer Ellipse bewegt, während der anziehende Punkt in einem Brennpunkte derselben steht, so ist die anziehende Kraft dem Quadrate der umgekehrten Entfernung des anziehenden von dem angezogenen Punkte proportional.

Dieser bekannte Satz läßt sich ohne Hülfe der höhern Rechnungen beweisen. Die Kraft, mit welcher der Punkt vom Centrum der Anziehung sich zu entfernen strebt, ist $= \frac{v^2}{R}$, wenn v die Geschwindigkeit und R den Krümmungshalbmesser für den Ort des bewegten Punktes bezeichnet. Ist F die Kraft, mit welcher dieser Punkt in der Richtung des Radius Vektor r angezogen wird, so ist die in die Richtung der Normale n fallende Kraft $F \cos(t, r)$, wenn t die Senkrechte vom Brennpunkte auf die Tangente bezeichnet. Da nun die genannte Kraft gerade so groß sein muß, als die Centrifugalkraft $\frac{v^2}{R}$, so ist $F = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{r}{t}$. Ist die Geschwindigkeit im nächsten Scheitelpunkte 1, die Excentrizität e, so ist $a(1 - e) = vt$, folglich $F = \frac{a^2 \cdot (1-e)^2 \cdot r}{Rt^3}$. Da aber, wie leicht zu beweisen, $\frac{nt}{r} = \frac{b^2}{a}$, und $R = \frac{n^3 \cdot a^2}{b^4}$, so ist $F = \frac{(1 - e^2)\, a^3}{b^2 \cdot r^2}$.

Bewegt sich der Punkt auf der Peripherie der Ellipse, während der anziehende Punkt im Mittelpunkte derselben steht, so ist F der Entfernung direkt proportional.

Denn sei der Radius Vektor r, so ist $F = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{r}{t}$, wenn t die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Tangente bedeutet. Ist die Geschwindigkeit im Scheitel 1, so hat man $v = \frac{a}{t}$, $t = \frac{ab}{n}$, $Rt^3 = \frac{n^3 a^2 a^3 b^3}{b^4 n^3} = \frac{a^5}{b}$, folglich $F = \frac{b}{a^3} \cdot r$

7. Ein weites und interessantes Gebiet zur Untersuchung der Eigenschaften der Ellipse bietet die Betrachtung dieser Curve als der orthographischen Projektion des Kreises dar, wenn beide Ebenen in der Richtung der großen Axe einander schneidend angenommen werden. Durch die einfachsten Hülfsmittel, als da sind, die Projektionen paralleler Linien im Raume auf dieselbe Ebene sind parallel, der Cosinus des Neigungswinkels einer begrenzten Figur in der Kreisebene mit der Projektion ist $= \frac{b}{a}$ u. s. w., gelangt man ohne die geringste Mühe zu den Eigenschaften der Tangenten, der konjugirten Durchmesser, der umschriebenen Parallelogramme u. s. w.

8. Die Auflösung der 6 Hauptfälle der sphärischen Trigonometrie durch geometrische Construction in der Ebene läßt sich auf sehr einfache Weise erhalten, indem man in der körperlichen dreiseitigen Ecke, deren Kanten SA, SB, SC in derselben Folge die Winkel c, b und a einschließen, BC und AC rechtwinklig auf SC nimmt. Das Dreieck ABC, in welchem 3 Seiten bekannt sind, wenn a, b und c gegeben werden, giebt den Neigungswinkel ACB oder den sphärischen Winkel zwischen a und b. Durch dasselbe Dreieck findet man die dritte sphärische Seite aus den beiden andern Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel. Ist gegeben c, a und der c gegenüber liegende Winkel, so fällt man von A eine Senkrechte AD auf BC und eine Senkrechte von AE auf SB, so liegen die Punkte S, E, D, C auf der Peripherie eines Kreises, so daß die Lage des Punktes E durch den Durchschnitt dieses Kreises und des mit dem Radius SE beschriebenen Kreises gefunden werden kann u. s. w.

9. Die graphische Darstellung der Funktionen scheint mir ein zweckmäßiges Hülfsmittel für den Unterricht, um eine recht bewußte Auffassung der Eigenschaften derselben möglich zu machen. Zu dem Ende habe ich mir eine ansehnliche Menge solcher Darstellungen gezeichnet, wie die Linien der Sinus, der Cosinus, der Tangenten, der natürlichen und Briggischen Logarithmen, der Logarithmen der Kreisfunktionen u. s. w. Selbst einfache Funktionen, wie $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ bieten, wenn sie für dieselbe Veränderliche auf dasselbe Blatt gezeichnet werden, manche Eigenschaften dar, deren sich wenigstens der Schüler in dem Augenblicke, da ihm diese Funktionen genannt werden, nicht bewußt wird, z. B. daß sich alle diese Curven

in 2 Punkten begegnen, daß sie je nach dem höhern Grade bis zum Punkte $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$ immer näher an die Abscissenaxe und an die Ordinate 1 treten u. s. w.

10. Veranschaulichende Darstellung der Primzahlen. — Ein großes gleichseitiges Dreieck wird in 10000 kongruente gleichseitige Dreiecke zertheilt und in jedes Dreiecksfeld eine der natürlichen Zahlen so geschrieben, daß die Zahl 1 in die Spitze, 2 an den Anfang der zweiten Horizontalreihe, 4 an das Ende derselben, 5 an den Anfang der dritten Horizontalreihe, 9 an das Ende derselben kommt, wie denn überhaupt der ganze rechte Saum des Dreiecks von den Quadraten der natürlichen Zahlen eingenommen, in jeder Horizontalreihe aber von der linken nach der rechten Hand gezählt wird. Giebt man nun den Feldern der Primzahlen eine andere Farbe, so gewahrt man bei geringer Aufmerksamkeit, daß im Allgemeinen die Primzahlen in gewissen parallelen fast gleichweit von einander entfernten Richtungen dichter beisammen liegen, als in andern Richtungen. Die Zahlen von der Form $41 + n(n-1)$ stellen einen Stab mit geschlossenem sechseckigem Sterne dar, dem einzigen, der unter den 10000 Dreiecken vorkommt.

11. Einfache Bestimmung des Brechungsverhältnisses in einem dreiseitigen Prisma durch den Neigungswinkel ψ zweier Seiten-Ebenen des Prismas und durch die Winkel, welche der einfallende und der austretende Strahl an jeder Stelle mit dem Einfallslothe bilden.

Der Strahl treffe in A das Prisma, und bilde mit dem Einfallslothe den Winkel a, der gebrochene Strahl trete in B aus dem Prisma und bilde mit dem Einfallslothe daselbst den Winkel b, die beiden Lothe, welche die Winkel α und β im Innern des Prismas mit dem Strahle AB einschließen, schneiden sich in C, so hat man in dem Dreiecke ABC

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \,.\, CB \,.\, \cos\psi = AB^2\left[\frac{AC^2}{AB^2} + \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 + \frac{2AC}{AB}\cdot\frac{CB}{AB}\cos\psi\right]$$

folglich $1 = \sin\beta^2 + \sin\alpha^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\psi = \dfrac{\sin b^2}{n^2\sin\psi^2} + \dfrac{\sin a^2}{n^2\sin\psi^2} + \dfrac{2\sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos\psi}{n^2\sin\psi^2}$

und $n\sin\psi = \sqrt{\sin a^2 + \sin b^2 + 2\sin a \,.\, \sin b\cos\psi}$ *)

12. Die Oszillationsgeschwindigkeit v eines geradlinig bewegten Aethertheilchens und sein Abstand vom Ruhepunkte läßt sich unter der Voraussetzung, daß die auf das Theilchen wirkende Kraft der Elastizität der Entfernung vom Ruhepunkte proportional sei, durch einfache Hülfsmittel finden.

Ist in der Entfernung 1 die Kraft der Elasticität $= E$, die Entfernung vom Ruhepunkte $= x$, die größte Ausweichung vom Ruhepunkte, um welche das Theilchen beim Anfange der Bewegung entfernt ist $= a$, $a - x = X$, und wird X in n gleiche Theile getheilt, so ist die Kraft F, welche das Aethertheilchen an der Stelle $(a - m\frac{X}{n})$ anregt, $= E\,.\,(a - m\frac{X}{n})$. Wird nun angenommen, daß in jedem Raume $\frac{X}{n}$ eine gleichförmig beschleunigte Bewegung stattfinde, die erst im nächsten Raume $\frac{X}{n}$ dem Abstande vom Ruhepunkte proportional sich ändert, aber in einem solchen Raume constant bleibt, so ist $v_m \,.\, v_m - v_{(m-1)} \,.\, v_{(m-1)}$

---

*) Siehe Seebeck's: Observationes de corporum lucem simpliciter refringentium angulis polarisationis. Berolini 1830.

$= 2E\left(a - m\cdot\frac{X}{n}\right)\cdot\frac{X}{n}$. Legt man jetzt m alle Werthe von $m = 1$ bis $m = n$ bei und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bleibt

$$v_n \cdot v_n = 2E\left[na - \frac{X}{n}\frac{(n^2+n)}{2}\right]\frac{X}{n} = E\cdot\left[2a - \left(1+\frac{1}{n}\right)X\right]X$$

Soll die Bewegung eine continuirliche werden, und bezeichnet v die Endgeschwindigkeit, so wird

$$v^2 = E(2a - X)\cdot X = E\cdot(a + a - X)X = E(a+x)(a-x).$$

Setzt man nun $x = a\cos\vartheta$, so erhält man $v = \sqrt{E}\cdot a\sin\vartheta$ u. s. w.*)

F. Strehlke.

---

*) S. Bohnenberger's Astronomie S. 403.