Ueber die Bewegung zweier materieller Punkte auf concentrischen Kreisen.

§. 1.

Sollen die ersten Variationen des Integralausdruckes

$$\int_{t_0}^{t} f\,(t\;x\;y\;z\;x'\;y'\;z')\;dt.$$

verschwinden, so müssen folgende Bedingungsgleichungen stattfinden:

$$f'x - d.\frac{f'x'}{d\,t} = 0.$$

$$f'y - d.\frac{f'y'}{d\,t} = 0.$$

$$f'z - d.\frac{f'z'}{d\,t} = 0.$$

und sollen auch x y z gewissen Bedingungsgleichungen

$$\varphi\,(x\;y\;z) = 0 \quad \psi\,(x\;y\;z) = 0.$$

Genüge leisten, so werden sich die entsprechenden Differentialgleichungen unter der Form darstellen, vorausgesetzt, dass hier durch $x' = \frac{d\,x}{d\,t}$ $y' = \frac{d\,y}{d\,t}$ $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ u.s.w. bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} f'x - d\,\frac{f\,x'}{d\,t} + \mu\,\varphi'x + r\,\psi\,x &= 0. \\ f'y - d\,\frac{f'y'}{d\,t} + \mu\,\varphi'y + r\,\psi\,y &= 0. \\ f'z - d\,\frac{f'z'}{d\,t} + \mu\,\varphi'z + r\,\psi\,z &= 0. \end{aligned}\right\}\;1.$$

diese Gleichungen haben eine ganz ähnliche Form wie die Gleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\,x}{dt^2}-\frac{d\,U}{d\,x}-\mu\,\varphi'\,x-r\,\psi\,x&=0.\\ m\frac{d^2\,y}{dt^2}-\frac{d\,U}{d\,y}-\mu\,\varphi'\,y-r\,\psi\,y&=0.\\ m\frac{d^2\,z}{dt^2}-\frac{d\,U}{d\,z}-\mu\,\varphi'\,z-r\,\psi\,z&=0.\end{aligned}\right\}\quad 2.$$

und diese lassen sich leicht auf die Form der vorigen Gleichungen bringen. — Führt man nämlich den Ausdruck für die halbe lebendige Kraft ein:

$$T = \tfrac{1}{2}\,m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

so hat man

$$\frac{d\,T}{d\,x'} = m\frac{d\,x}{d\,t} \qquad d\cdot\frac{\frac{d\,T}{d\,x}}{d\,t} = m\,\frac{d^2\,x}{dt^2}$$

Da nun in T kein x und in U, der Kräftefunktion kein x′ enthalten ist, so kann man in den beiden Gliedern

$$d.\frac{\frac{d\,T}{d\,x'}}{d\,t} \text{ und } \frac{d\,U}{d\,x}$$ nunmehr T + U statt T und U einführen, wodurch sich die Bewegungsgleichungen des Systems 2. folgendermassen gestalten:

$$\left.\begin{aligned} d\cdot\frac{\frac{d(T+U)}{d\,x'}}{d\,t}-\frac{d\,(T+U)}{d\,x}-\mu\,\varphi'\,x-r\,\psi\,x&=0.\\ d\cdot\frac{\frac{d(T+U)}{d\,y'}}{d\,t}-\frac{d\,(T+U)}{d\,y}-\mu\,\varphi'\,y-r\,\psi\,y&=0.\\ d\cdot\frac{\frac{d(T+U)}{d\,z'}}{d\,t}-\frac{d\,(T+U)}{d\,z}-\mu\,\varphi'\,z-r\,\psi\,z&=0.\end{aligned}\right\}\quad 3.$$

Jetzt haben sie in der That keine andere Form als die Gleichungen 1. und diese Gleichungen integriren heisst somit nichts anderes als x y z so als Funktionen von t bestimmen, dass die ersten Variationen verschwinden und zugleich der Integral-Ausdruck:

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,d\,t. \qquad 4.$$

ein Maximum oder Minimum wird. Hierin besteht wie bekannt das Hamiltonsche Princip. — Dieses Princip verhilft nun auch zu einer bequemeren Methode die Bewegungsgleichungen in andere Variabele zu transformiren. Sind $q_1\ q_2\ q_3 \ldots$ die neuen Variabeln, die mit den alten durch die Gleichungen:

$$x = f_1\,(q_1\ q_2\ q_3 \ldots)\quad y = f_2\,(q_1\ q_2\ q_3 \ldots)\quad z = f_3\,(q_1\ q_2\ q_3 \ldots)$$

verbunden sind und substituirt man diese Ausdrücke in $(T + U)$ in die Gleichung 4., so werden die in den neuen Variabeln ausgedrückten Bewegungsgleichungen diejenigen sein, welche integrirt $q_1\ q_2\ q_3 \ldots$ so als Functionen von t bestimmen, dass die ersten Variationen verschwinden. Wie wir diese Gleichungen finden, lehren uns die Gleichungen 1. Man erhält nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\,(T+U)}{d\,q_1} - \frac{d\,\dfrac{d\,(T+U)}{d\,q'_1}}{d\,t} + \mu\left(\frac{d\,\varphi}{d\,q_1}\right) + r\left(\frac{d\,\psi}{d\,q_1}\right) = 0.\\
&\frac{d\,(T+U)}{d\,q_2} - \frac{d\,\dfrac{d\,(T+U)}{d\,q'_2}}{d\,t} + \mu\left(\frac{d\,\varphi}{d\,q_2}\right) + r\left(\frac{d\,\psi}{d\,q_2}\right) = 0.\\
&\frac{d\,(T+U)}{d\,q_3} - \frac{d\,\dfrac{d\,(T+U)}{d\,q'_3}}{d\,t} + \mu\left(\frac{d\,\varphi}{d\,q_3}\right) + r\left(\frac{d\,\psi}{d\,q_3}\right) = 0.
\end{aligned}\right\}\quad 5.$$

wobei $\left(\frac{d\,\varphi}{d\,q_1}\right)\left(\frac{d\,\psi}{d\,q_1}\right)$ u. s. w. anzeigen, dass in den Functionen φ und ψ zuerst x y z durch $q_1\ q_2\ q_3$ ersetzt und partiell nach diesen Variabeln differentiirt werden soll. Dass diese Gleichungen ganz dem Systeme 3. entsprechen, ist wohl einzusehen und zugleich leuchtet ein, dass diese Form der Bewegungsgleichungen, die Lagrange ihnen gegeben für alle beliebig einzuführenden Variabele passt. — Wählt man die neuen Variabeln so, dass den Bedingungsgleichungen von selbst genügt wird, so nehmen sie die Form an:

$$\frac{d\cdot\dfrac{d\,(T+U)}{d\,q'}}{d\,t} - \frac{d\,(T+U)}{d\,q} = 0. \qquad 6.$$

und man hat so viele Gleichungen als unabhängige Variabele. Eine andere Form giebt Poisson den Differentialgleichungen der Bewegung (conf. Poisson: die Variation der Constanten Journ. politechnique. Tom. 15). Er führt ein:

$$\frac{d\,T}{d\,q'_1} = p_1\quad \frac{d\,T}{d\,q'_2} = p_2\quad \frac{d\,T}{d\,q'_3} = p_3$$

und somit gehen die Gleichungen von Lagrange über in:

$$\frac{d\,(T+U)}{d\,q_1} = \frac{d\,p_1}{d\,t}\quad \frac{d\,(T+U)}{d\,q_2} = \frac{d\,p_2}{d\,t}\quad \frac{d\,(T+U)}{d\,q_3} = \frac{d\,p_3}{d\,t}$$

und man hat 6 Gleichungen der ersten Ordnung, die weiter zu behandeln sind.

Da nun $T = \frac{1}{2} m (x'x' + y'y' + z'z')$ gesetzt und für x y z

$$x = f_1 (q_1 q_2 q_3) \; y = f_2 (q_1 q_2 q_3) \; z = f_3 (q_1 q_2 q_3)$$

eingeführt wird, so ergiebt sich hieraus

$$\begin{aligned} x' &= f'_1 \, q_1 \, q'_1 + f'_1 \, q_2 \, q'_2 + f'_1 \, q_3 \, q'_3 \\ y' &= f'_2 \, q_1 \, q'_1 + f'_2 \, q_2 \, q'_2 + f'_2 \, q_3 \, q'_3 \\ z' &= f'_3 \, q_1 \, q'_1 + f'_3 \, q_3 \, q_3 + f'_3 \, q_3 \, q'_3 \end{aligned}$$

und T wird mithin eine homogene Function vom 2ten Grade in Bezug auf q' von der Form:

$$T = a_{11} q_1'^2 + a_{22} q_2'^2 + a_{33} q_3'^2 + 2a_{12} q'_1 q'_2 + 2a_{13} q'_1 q'_3 + 2a_{23} q'_2 q'_3 \qquad 7.$$

worin die a Functionen der q sind; die p. sind nun Differentialquotienten der Function T nach den q' genommen, so dass sie liniäre homogene Functionen in Bezug auf die q' sind und zwar:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2 (a_{11} q'_1 + a_{12} q'_2 + a_{13} q'_3) \\ p_2 &= 2 (a_{12} q'_1 + a_{22} q'_2 + a_{23} q'_3) \\ p_3 &= 2 (a_{31} q'_1 + a_{32} q'_2 + a_{33} q'_3) \end{aligned}$$

wo jedoch z. B. $a_{31} = a_{13}$ u. s. w. ist. Wenn man diese Gleichungen auflösst, so erhält man die q ebenso als liniäre homogene Functionen der p ausgedrückt und substituirt man diese Ausdrücke in 7, so wird T auch eine homogene Function des zweiten Grades in Bezug auf die p. Um nun noch zu zeigen, dass $\left(\frac{d\,T}{d\,p}\right) = q'$, erinnere man sich, dass $2\,T = \Sigma\, q'_i \frac{d\,T}{d\,q'_i}$, oder, was dasselbe $T = \Sigma\, q'_i\, p - T$. Da nun T eine Function der p und q sein soll, die Function T auf der rechten Seite nur q' enthalten, so werde ich durch Differentiation erhalten:

$$\left(\frac{d\,T}{d\,p}\right) = q' + \Sigma \frac{d\,q'_i}{d\,p} \cdot \frac{d\,T}{d\,q'} - \Sigma \frac{d\,T}{d\,q'_i} \frac{d\,q'_i}{d\,p} = q'$$

und den Gleichungen die Form geben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,p_1}{d\,t} &= -\frac{d\,(T-U)}{d\,q_1} \quad \frac{d\,p_2}{d\,t} = -\frac{d\,(T-U)}{d\,q_2} \quad \frac{d\,p_3}{d\,t} = -\frac{d\,(T-U)}{d\,q_3} \\ \frac{d\,p_1}{d\,t} &- \left(\frac{d\,T}{d\,p_1}\right) \quad \frac{d\,q_2}{d\,t} = \left(\frac{d\,T}{d\,p_2}\right) \quad \frac{d\,q_3}{d\,t} = \left(\frac{d\,T}{d\,p_3}\right) \end{aligned}\right\} \quad 8.$$

Hamilton stellte diese Gleichungen zuerst in dieser Form auf, und nannte die rechten Theile dieser Gleichungen die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Function die charakteristische Function H. — Drückt man in T die q durch p aus, so stellen sich die Differentialgleichungen der Bewegung dar:

$$\begin{array}{ccccccccc} dt & : & dq_1 & : & dq_2 \ldots\ldots & : & dp_1 & : & dp_2 \\ = 1 & : & \dfrac{d(T-U)}{dp_1} & : & \dfrac{d(T-U)}{dp_2} \ldots\ldots & : - & \dfrac{d(T-U)}{dq_1} & : - & \dfrac{d(T-U)}{dq_2} \end{array}$$

und man kann sie immer lösen, wenn man die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dt} + T - U = 0. \qquad 9.$$

kennt, wo in T als Function von $q_1\ q_2\ q_3 \ldots p_1\ p_2 \ldots$ statt $p_1 = \frac{dV}{dq_1}, p_2 = \frac{dV}{dq_2}$ u. s. w. gesetzt wird. Falls t in der Gleichung 9. nicht in T und U vorkommt, zerlegt man die Gleichung in zwei Theile $\frac{dV}{dt} + \alpha = 0$ und $T - U - \alpha = o$, wo α eine willkührliche Constante und behandelt beide Theile einzeln. —

§ 2.

Es liegt nun in der Absicht zu zeigen, dass bei allen dynamischen Problemen, so auch bei der Lösung der folgenden Aufgabe stets eine partielle Differentialgleichung mitintegrirt wird:

Es sind zwei materielle Punkte mit den Massen m_1 und m_2 gegeben, die sich auf zwei concentrischen Kreisen bewegen und sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen oder abstossen — man soll die Bewegungsgleichungen für die beiden Puncte aufstellen und sie vollständig integriren.

Sind $x_1\ y_1$ die Coordinaten des Punktes mit der Masse m_1 und l_1 der Radius des Kreises, auf dem er sich bewegt $x_2\ y_2$ die Coordinaten des Punktes m_2, der sich auf dem Kreise mit dem Radius l_2 bewegt, φ_1 der Winkel, den l_1 mit der vertikalen Y Achse und φ_2 der, den l_2 mit dieser Achse bildet, so ist die Entfernung beider Punkte:

$$E = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$U = \frac{1}{E}$$

ist die bestehende Kräftefunction.

Die Bedingungsgleichungen sind:

$$f_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - l_1^2]} = 0.$$
$$f_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 - l_2^2]} = 0.$$

so dass sich nunmehr die Bewegungsgleichungen darstellen:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d\,U.}{d\,x_1} + \lambda_1 \frac{d\,\varphi_1}{d\,x_1} \qquad m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d\,U.}{d\,y_1} + \lambda_1 \frac{d\,\varphi_1}{d\,x_1}$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d\,U.}{d\,x_2} + \lambda_2 \frac{d\,\varphi_2}{d\,x_2} \qquad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{d\,U.}{d\,y_2} + \lambda_2 \frac{d\,\varphi_2}{d\,x_2}$$

Setzt man nun:

$$x_1 = l_1 \cos.\ \varphi_1 \qquad x_2 = l_2 \cos.\ \varphi_2$$
$$y_1 = l_1 \sin\ \varphi_1 \qquad y_2 = l_2 \sin\ \varphi_2$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= -l_1 \sin\ \varphi_1\, \varphi'_1 \qquad x'_2 = -l_2 \sin\ \varphi_2\, \varphi'_2 \\ y'_1 &= l_1 \cos.\ \varphi_1\, \varphi'_1 \qquad y'_2 = l_2 \cos.\ \varphi_2\, \varphi'_2 \\ T &= \tfrac{1}{2}\, [l_1^2\, \varphi'_1\, \varphi'_1 + l_2^2\, \varphi'_2\, \varphi'_2] \\ U &= [l_1^2 - 2 l_1 l_2 \cos.\,(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} 10.$$

da nun $\frac{d\,T}{d\,\varphi'_1} - l_1^2\, \varphi'_1 = \psi_1 \quad \frac{d\,T}{d\,\varphi'_2} = l_2^2\, \varphi'_2 = \psi_2$

somit $T = \frac{1}{2}\left[\frac{\psi_1\,\psi_1}{l_1^2} + \frac{\psi_2\,\psi_2}{l_2^2}\right]$

so erhält man:

$$dt : d\varphi_1 : d\,\varphi_2 \ldots\ldots : d\,\psi_1 : d\,\psi_2$$
$$= 1 : \frac{d\,(T-U)}{d\,\psi_1} : \frac{d\,(T-U)}{d\,\psi_2} \ldots : -\frac{d\,(T-U)}{d\,\varphi_1} : -\frac{d\,(T-U)}{d\,\varphi_2}$$

oder:

$$\frac{d\,V}{dt} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{m_1 l_1^2}\left(\frac{d\,V}{d\varphi_1}\right)^2 + \frac{1}{m_2 l_2^2}\left(\frac{d\,V}{d\varphi_2}\right)^2\right] - \left[l_1^2 - 2 l_1 l_2 \cos.(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 0. \quad 11$$

Um diese Gleichungen zu lösen, theile ich sie in die beiden Theile:

$$\frac{d\,V}{d\,t} + c_3 = 0. \qquad 12.$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{m_1 l_1^2}\left(\frac{d\,V}{d\varphi_1}\right)^2 + \frac{1}{m_2 l_2^2}\left(\frac{d\,V}{d\varphi_2}\right)^2\right] - \left[l_1^2 - 2 l_1 l_2 \cos.(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2\right]^{-\frac{1}{2}} - c_3 = 0. \quad 13.$$

Setze ich $\left(\frac{d\,V}{d\,\varphi_1}\right) = p.\ \left(\frac{d\,V}{d\,\varphi_2}\right) = q$

und $p + q = c_1$ so liefert 11

$$\frac{p^2}{m_2 l_1^2} + \frac{q^2}{m_2 l_2^2} = \frac{2}{E} + c_3$$

Nachdem ich diese Gleichungen nach p und q aufgelöst ergiebt sich:

$$p = m_1 l_2^2 c_1 \pm \sqrt{\frac{m_1 l_1^4 c_1^2 + m_1 l_1^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left[\frac{2 m_2 l_2^2}{E} + m_2 l_2^2 c_3 - c_1^2\right]}{m_1 l_1^2 + m^2 l_2^2}}$$

$$q = m_1 l_2^2 c_1 \pm \sqrt{m_1 l_1^4 c_1^2 + m_2 l_2^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left[\frac{2 m_1 l_1^2}{E} + m_1 l_1^2 c_3 - c_1^2\right]}$$

da nun $dV = p\, d\varphi_1 + q\, d\varphi_2$ und somit $V = \int p\, d\varphi_1 + q\, d\varphi_2$ ergiebt sich:

$$V = \frac{c_1 [m_1 l_1^2 \varphi_1 + m_2 l_2^2 \varphi_2]}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} + l_1 l^2 \int \frac{\sqrt{m_1 m_2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left(\frac{2}{E} + c_3\right) - c_1^2}}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} d(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Aus 12 ergiebt sich:

$$V = - c_3 t + c_4$$

und somit

$$V = \frac{c_1 [m_1 l_1^2 \varphi_1 + m_2 l_2^2 \varphi_2]}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} + l_1 l_2 \int \frac{\sqrt{m_1 m_2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left(\frac{2}{E} + c^3\right) - c_1^2}}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} d(\varphi_1 - \varphi_2) - c_3 t + c_4.$$

Differentire ich nach c_3 so erhalte ich die Gleichung 31, die aus den Gleichungen 29. und 30. hervorgeht, nämlich

$$t + c_4 = m_1 m_2 l_1 l_2 \int_m^{(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{m_1 m_2 \left[(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left(\frac{2}{E} + c_3\right) - c_1^2\right]}} \qquad 14.$$

differentire ich dagegen nach c_1, so erhalte ich:

$$\frac{m_1 l_1^2 \varphi_1 + m_2 l_2^2 \varphi_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = \frac{m_1 m_2 l_1 l_2 c_1}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \int_m^{\varphi_1 - \varphi_2} \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{m_1 m_2 \left[(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left(\frac{2}{E} + c_3\right) - c_1^2.\right]}} + c_4 \qquad 15.$$

nachdem ich 15 mit $m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$ und 14 mit c_1 multiplicirt und die erstere Gleichung von der letztern subtrahirt, erhalte ich

$$m_1\, l_1^2\, \varphi_1 + m_2\, l_2^2\, \varphi_2 = c_1\, t + c_2$$

und $m_1\, l_1^2\, \varphi'_1 + m_2\, l_2^2\, \varphi'_2 = c_1$

zwei Gleichungen, die vollständig mit 23. den Integralgleichungen übereinstimmen.

Drückt man nun wie in 33. geschehen, die Constanten durch die Anfangswerthe aus und setzt noch nach 38. und 39.

$$d(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{2E\, dE}{\sqrt{(l_1 - l_2 + E)\,(l_1 + l_2 - E)\,(l_1 + l_2 + E)\,(l_2 - l_1 + E)}} = \frac{2E\, dE}{\sqrt{F}}$$

so erhält man die Function:

$$V = \frac{c_1[m_1 l_1^2 \varphi_1 + m_2 l_2^2 \varphi_2]}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} + \frac{2 l_1 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \int \sqrt{m_1 m_2[2(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) + (2c_3(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) - c_1^2)E]E}\, \frac{dE}{\sqrt{F}} - c_3 t + c_4.$$

Bildet man aus 14. die Gleichung für die Anfangszeit der Bewegung $t = t_0$ und subtrahirt beide Gleichungen, so entsteht:

$$t - t_0 = m_1\, m_2\, l_1\, l_2 \int_{(\varphi_1^0 - \varphi_2^0)}^{(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{(d\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{m_1 m_2 \left[(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left(\frac{2}{E} + c_3\right) - c_1^2\right]}} \qquad \textbf{16.}$$

Setzt man für c_1 und c_3 die Anfangswerthe, so erhält man,

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} \int_{(\varphi_1^0 - \varphi_2^0)}^{(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{\frac{2}{E} - \frac{2}{E_0} \pm \frac{m_1 m_2\, l_1^2\, l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\, (\varphi'^0_1 - \varphi'_2)}} \qquad \textbf{17.}$$

und setze ich

$$\frac{2}{E_0} - \frac{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\, (\varphi'^0_1 - \varphi'^0_2)^2 = \frac{2.}{M.}$$

so wird

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} \int_{E_0}^{E} \frac{2\, E^2\, M\, dE}{\sqrt{[(l_1 + l_2)^2 - E^2]\,[E^2 - (l_1 - l_2)^2]\,[M - E]\, ME}} \qquad \textbf{18.}$$

eine Gleichung, die genau mit 42. übereinstimmt und weiter zu behandeln ist.

Somit ist erwiesen, dass die partielle Differentialgleichung von der wir ausgingen mit den Differentialgleichungen der Bewegung genau zusammenhängt, wenn wir bei der Behandlung dieser zu denselben Resultaten gelangen. Nach dem Vorhergehenden (10.) stellen diese sich für die Anziehung dar als:

$$\left.\begin{aligned} m_1 l_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= -\frac{l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)}{E^3} && 19. \\ m_2 l_2^2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} &= \frac{l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)}{E^3} && 20. \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

und für die Abstossung:

$$\left.\begin{aligned} m_1 l_1^2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= \frac{l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)}{E^3} && 21. \\ -m_2 l_2^2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} &= \frac{l_1 l_2 \sin.(\varphi_1-\varphi_2)}{E^3} && 22. \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Betrachten wir zunächst die Anziehung, so liefert die Addition von 19 und 20 integrirt

$$\left.\begin{aligned} m_1\, l_1^2\, \varphi'_1 + m_2\, l_2^2\, \varphi'_2 &= C_1 \\ m_1\, l_1^2\, \varphi_1 + m_2\, l_2^2\, \varphi_2 &= C_1\, t + C_2. \end{aligned}\right\} 23.$$

Die entsprechende Gleichung für die Abstossung aus 21 und 22

$$\left.\begin{aligned} m_1\, l_1^2\, \varphi_1 + m_2\, l_2^2\, \varphi_2 &= -(C_1\, t + C_2) \\ \text{und} \quad m_1\, l_1^2\, \varphi'_1 + m_2\, l_2^2\, \varphi'_2 &= -C_1. \end{aligned}\right\} 24.$$

durch Multiplication der Gleichung 19. mit $2\,d\,\varphi_1$ und 20 mit $2\,d\,\varphi_2$, dann folgender Addition und Integration erhalte ich:

$$\left.\begin{aligned} m_1\, l_1^2\, {\varphi'_1}^2 + m_2\, l_2^2\, {\varphi'_2}^2 &= -\int\frac{2 l_1 l_2\, d(\varphi_1-\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{[l_1^2 - 2 l_1 l_2 \cos.(\varphi_1-\varphi_2) + l_2^2]^{3/2}} \\ m_1\, l_1^2\, {\varphi'_1}^2 + m_2 l_2^2 {\varphi'_2}^2 &= \frac{2}{[l_1^2 - 2 l_1\, l_2 \cos.(\varphi_1-\varphi_2) + l_2^2]^{1/2}} + C_3 = \frac{2}{E} + C^3 \end{aligned}\right\} 25.$$

Für die Abstossung folgt ebenso aus 21 und 22

$$m_1\, l_1^2 {\varphi_2'}^2 + m_2 l_2^2 {\varphi_2'}^2 = -\left[\frac{2}{E} + C_3\right] \qquad 26.$$

Löset man 23 und 25 nach φ'_1 und φ'_2 auf, so erhält man

$$C_1^2 - m_2 l_2^2 C_3 - 2 m_1 l_1^2 C_1 \varphi'_1 + m_1 l_1^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) {\varphi'_1}^2 - \frac{2 m_2 l_2^2}{E} = 0. \qquad 27.$$

während man aus 24 und 27. für die Abstossung erhält:

$$C_1^2+m_2l_2^2C_3+2m_1l_1^2C_1\varphi'_1+m_1l_1^2(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\varphi'^2_1+\frac{2m_2l_2^2}{E}=0. \qquad 28.$$

Aus 27 erhält man:

$$\varphi'_1=\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2C_1\pm\sqrt{m_1^2l_1^4C_1^2+m_1l_1^2(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\left[\frac{2m_2l_2^2}{E}+m_2l_2^2C_3-+C_1^2\right]m_2l_2^2}}{m_1m_2l_1^2l_2^2(m_1l_1^2+m_2l_2^2)}$$

und aus der 27 analogen Gleichung für φ'_2

$$\varphi'_2=\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2C_1\mp\sqrt{m_2^2l_2^4C_1^2+m_2l_2^2(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\left[\frac{2m_1l_1^2}{E}+m_1l_1^2C_3-C_1^2\right]m_1l_1^2}}{m_1m_2l_1^2l_2^2(m_1l_1^2+m_2l_2^2)}$$

nachdem die erste dieser Gleichungen mit $m_2l_2^2$ die zweite mit $m_1l_1^2$ multiplicirt ist. Es ergiebt sich:

$$\varphi'_1-\varphi'_2=\frac{\sqrt{m_1m_2l_1^2l_2^2\left[(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\left(\frac{2}{E}+C_3\right)-C_1^2\right]}}{m_1m_2l_1^2l_2^2} \qquad 29.$$

$$\frac{d(\varphi_1-\varphi_2)}{\sqrt{m_1m_2\left[(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\left(\frac{2}{E}+C_3\right)-C_1^2\right]}}=\frac{dt.}{m_1m_2l_1l_2} \qquad 30.$$

$$t+C_4=m_1m_2l_1l_2\int_m^{(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{d(\varphi_1-\varphi_2)}{\sqrt{m_1m_2\left[(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\left(\frac{2}{E}+C_3\right)-C_1^2\right]}} \qquad 31.$$

Aus 28 ergiebt sich für die **Abstossung**,

$$\varphi'_1=\frac{-m_1m_2l_1^2l_2^2C_1\pm\sqrt{m_1m_2l_1^2l_2^2\left[-(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\left(\frac{2}{E}+C_3\right)-C_1^2\right]m_2l_2^2}}{m_1m_2l_1^2l_2^2(m_1l_1^2+m_2l_2^2)}$$

und aus einer analogen für φ'_2 und der Subtraction beider

$$t+C_4=m_1m_2l_1l_2\int_m^{(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{d(\varphi_1-\varphi_2)}{\sqrt{m_1m_2\left[-(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\left(\frac{2}{E}+C_3\right)-C_1^2\right]}} \qquad 32.$$

Die Gleichungen 23, 25 und 31 dienen zur Bestimmung der Constanten für die Anfangswerthe, die für die Anfangszeit der Bewegung der Zeit $t = t_0 = 0$ gelten. Es ist:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 l_1^2 \varphi'^0_1 + m_2 l_2^2 \varphi'^0_2 = C_1 \\ m_1 l_1^2 \varphi^0_1 + m_2 l_2^2 \varphi'^0_2 = C_2 \\ m_1 l_1^2 \varphi'^{0\,2}_1 + m_2 l_2^2 \varphi'^{0\,2}_2 - \frac{2}{E_0} = C_3 \end{array}\right\} \quad 33. \qquad \left.\begin{array}{l} m_1 l_1^2 \varphi'^0_1 + m_2 l_2^2 \varphi'^0_2 = - C_1 \\ m_1 l_1^2 \varphi^0_1 + m_2 l_2^2 \varphi^0_2 = - C_2 \\ m_1 l_1^2 \varphi'^{0\,2}_1 + m_2 l_2^2 \varphi'^{0\,2}_2 + \frac{2}{E_0} = - C_3 \end{array}\right\} \quad 34.$$

Für die vierte Constante ergiebt sich noch zu (33.) für die Anziehung

$$t - t_0 = m_1 m_2 l_1 l_2 \int_{(\varphi_1^0 - \varphi_2^0)}^{(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{m_1 m_2 \left[(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left(\frac{2}{E} + C_3\right) - C^2\right]}} \qquad 35.$$

und für die Abstossung zu 34

$$t - t_0 = m_1 m_2 l_1 l_2 \int_{(\varphi_1^0 - \varphi_2^0)}^{(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{m_1 m_2 \left[-(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\left(\frac{2}{E} + C_3\right) - C_1^2\right]}} \qquad 36.$$

Setze ich in 35. für die Constanten C_1 und C_3 ihre Werthe aus 33., so ergiebt sich:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} \int_{(\varphi_1^0 - \varphi_2^0)}^{(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{\frac{2}{E} - \frac{2}{E_0} + \frac{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} (\varphi'^0_1 - \varphi'^0_2)}} \qquad 37.$$

Es ist

$$\begin{array}{l} l_1^2 - 2 l_1 l_2 \cos.\ (\varphi_1 - \varphi_2) + l_2^2 = E^2 \\ 2 l_1 l_2 \sin\ (\varphi_1 - \varphi_2)\ d\ (\varphi_1 - \varphi_2) = 2EdE. \end{array} \qquad 38.$$

$$\sin^2\ (\varphi_1 - \varphi_2) = 1 - \cos.^2\ (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\sin\ (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm \sqrt{1 - \left[\frac{l_1^2 + l_2^2 - E^2}{2 l_1 l_2}\right]^2} = \pm \frac{\sqrt{4 l_1^2 l_2^2 - [l_1^2 + l_2^2 - E^2]^2}}{2 l_1 l_2}$$

$$\begin{array}{rl} 2 l_1 l_2 \sin\ (\varphi_1 - \varphi_2) & = \pm \sqrt{4 l_1^2 l_2^2 - [l_1^2 + l_2^2 - E^2]^2} \\ & = \pm \sqrt{(l_1 - l_2 + E)\ (l_1 + l_2 - E)\ (l + l_2 + E)\ (l_2 - l_1 + E)} \end{array} \qquad 39.$$

Aus 38 folgt somit:

$$d(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{2EdE}{\pm\sqrt{(l_1-l_2+E)(l_1+l_2-E)(l_1+l_2+E)(l_2-l_1+E)}} \qquad 40.$$

Setze ich nun

$$\frac{2}{E_0}-\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}(\varphi'^0_1-\varphi'^0_2)^2=\frac{2.}{M.} \qquad 41.$$

so folgt, wenn ich diese Werthe in 37 setze:

$$\left.\begin{aligned} t-t_0 &= \sqrt{\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}\int_{E_0}^{E}\frac{2E\sqrt{ME}\,dE.}{\sqrt{(l_1-l_2+E)(l_1+l_2-E)(l_1+l_2+E)(l_2-l_1+E)}} \\ t-t_0 &= \sqrt{\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}\int_{E_0}^{E}\frac{2\,E^2\,M\,d\,E}{\sqrt{[(l_1+l_2)^2-E^2]\,[E^2-(l_1-l_2)^2]\,[M-E]\,ME}} \end{aligned}\right\} 42.$$

Für die Abstossung erhalte ich aus 36, wenn ich die Werthe aus 34 substituire:

$$t-t_0\sqrt{\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}\int_{(\varphi_1^0-\varphi_2^0)}^{(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{d(\varphi_1-\varphi_2)}{\sqrt{\frac{2}{E_0}-\frac{2}{E}+\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}(\varphi'^0_1-\varphi'^0_2)^2}}$$

Führe ich die unter 38 angegebene Substitution aus und setze

$$\frac{2}{E_0}+\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}(\varphi'^0_1-\varphi'^0_2)^2=\frac{2}{M} \qquad 43.$$

so ergiebt sich:

$$t-t_0=\sqrt{\frac{m_1m_2l_1^2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}\int_{E_0}^{E}\frac{2E^2MdE.}{\sqrt{[(l_1+l_2)^2-E^2]\,[E^2-(l_1-l_2)^2]\,[E-M]\,ME.}} \qquad 44.$$

die weitere Behandlung und Entwickelung des Integrals 42 für die Anziehung und 44 für die Abstossung ist nun der Inhalt des folgenden Abschnittes. —

§ 3.

Es ist leicht einzusehen; wenn man nur an der Annahme $l_1 > l_2$ festhält. dass für $l_1 - l_2$ das Minimum, für $l_1 + l_2$ das Maximum der Entfernung der beiden Puncte m_1 und m_2 eintreten wird; und da sich, wenn wir zunächst die Anziehung, also die Gleichungen 41 und 42 näher betrachten, bestimmte Interwalle darbieten, in denen die Grösse M, die Winkelgeschwindigkeit, die sich aus 41 ergiebt

$$M = \frac{1}{\frac{1}{E_0} - \frac{m_1 m_2 l_1{}^2 l_2{}^2}{2(m_1 l_1{}^2 + m_2 l_2{}^2)} (\varphi_1{}'^0 - \varphi_2{}'^0)^2}$$

liegen kann, nämlich in:

$$-\infty \underbrace{\ldots}_{1} -(l_1+l_2) \underbrace{\ldots}_{2} -(l_1-l_2) \underbrace{\ldots}_{3} 0 \underbrace{\ldots}_{4} +(l_1-l_2) \underbrace{\ldots}_{5} +(l_1+l_2) \underbrace{\ldots}_{6} +\infty$$

so wollen wir untersuchen, in welchen Interwallen M liegen kann und wo Bewegung stattfindet. Setzen wir:

$$\frac{m_1 m_2 l_1{}^2 l_2{}^2}{2(m_1 l_1{}^2 + m_2 l_2{}^2)} (\varphi_1{}'^0 - \varphi_2{}'^0)^2 = n^2$$

so wird auch

$$\frac{1}{E_0} - \frac{1}{M} = n^2. \qquad 45.$$

und obgleich $E_0 = \pm \sqrt{l_1{}^2 - 2 l_1 l_2 \cos.(\varphi_1{}^0 - \varphi_2{}^0) + l_2{}^2}$ also positiv und negativ sein kann, so nehme ich E_0 doch nur positiv an, da E der Aufgabe gemäss nur positiv und nie der Null gleich sein kann und bemerke, dass es zwischen $(l_1 - l_2)$ und $(l_1 + l_2)$ ebenso wie E liegen muss. —

Nach 45. geht, wenn E_0 positiv

$$n^2 \text{ von } 0 \text{ durch } \frac{1}{E_0} \ldots\ldots \text{bis } \infty$$

während M von E_0 durch $+\infty - \infty \ldots$ bis 0 geht.

Mithin kann M in allen Intervallen mit Ausnahme des 4ten liegen, da E_0 nicht kleiner als $(l_1 - l_2)$ werden kann; und somit geht M von E_0 einem zwischen $(l_1 - l_2)$ und $(l_1 + l_2)$ liegenden Werthe bis $+\infty$ durch $-\infty$ bis 0.

Liegt aber M. zwischen $0 \ldots -\infty$ oder zwischen $+(l_1+l_2) \ldots\ldots +\infty$, so findet zwischen $(l_1 - l_2)$ und $(l_1 + l_2)$ aus dem Grunde Bewegung statt, weil dann für diese beiden Ausdrücke die Wurzelgrösse 42. verschwindet.

Liegt jedoch M zwischen $(l_1 - l_2)$ und $(l_1 + l_2)$, so findet zwischen $(l_1 - l_2)$ und M die Bewegung statt, weil anders jene Wurzelgrösse imaginär wird. Es folgt somit, dass für diesen Fall der Bewegung eine pendelnde Bewegung des Punktes, eine Bewegung vom Minimum $(l_1 - l_2)$ bis M, von M bis zum Minimum u. s. f. stattfinden wird.

Gleiche Schlüsse wie die vorangegangenen leiten uns auch in dem Falle, in welchem eine Abstossung zwischen den Punkten stattfindet. — Aus 43 folgt:

$$M = \frac{1}{\frac{1}{E_0} + \frac{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}{2(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} (\varphi'_1{}^0 - \varphi'_2{}^0)^2}$$

und aus einer dem Vorhergehenden gleichen Betrachtung

$$\frac{1}{E_0} - \frac{1}{M} = -n^2 \qquad 46.$$

so dass, wenn E_0 auch hier natürlich positiv genommen wird:

$$-n^2 \text{ von } 0 \ldots \text{ durch } \frac{1}{E_0} \ldots \text{ bis } -\infty \text{ geht.}$$

während M von $E_0 \ldots -\infty + \infty \ldots$ bis 0 geht.

Auch in diesem Falle, bei der Abstossung kann M in allen Intervallen mit Ausnahme des vierten liegen. — Es findet dann, wenn M zwischen 0 bis $-\infty$ oder zwischen (l_1+l_2) bis $+\infty$ liegt, Bewegung zwischen (l_1-l_2) und (l_1+l_2) statt, denn in diesem Falle verschwindet die Wurzelgrösse 44. — Liegt M zwischen (l_1+l_2) und (l_1+l_2), so findet Bewegung zwischen (l_1+l_2) und M und umgekehrt statt, so dass in einem Falle der Bewegung, wenn die Punkte m_1 und m_2 einander abstossen, eine pendelnde Bewegung zwischen dem Maximum der Entfernung der beiden Punkte und M stattfindet.

Somit ergiebt sich, dass fünf Integrale, je nachdem M in einem der fünf Interwalle liegt, für die Anziehung und fünf für die Abstossung behandelt werden müssen. — Da die Ausführungen indess zu lang, einige der Integrale auch zusammen fallen und gleich sein werden, sollen im Folgenden nur die Fälle, in denen eine Pendelbewegung stattfindet, näher untersucht werden. — Demgemäss ist es nothwendig, das Integral 42 zu transformiren. — Da es nicht der Raum gestattet die Transformation ausführlich auseinander zu setzen, verweise ich auf die vortrefflichen Abhandlungen Richelot's: „Commentatio de integralibus Abelianis primi ordinis.“ und: „Ueber die Substitutionen von der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform.“ Crelle Bd. 34. und folge in kurzem dem Gange der Umformung der zuerst erwähnten Abhandlung.

Das in diesem Falle zu untersuchende Integral ist von der Form:

$$\int \frac{F(E)dE}{\sqrt{\varphi_6(E)}}$$

wo die liniären Factoren der Function φ (E) reell sind, so dass:

$$\varphi(E) = (E-\alpha_1)(E-\alpha_2)(E-\alpha_3)(E-\alpha_4)(E-\alpha_5)(E-\alpha_6)$$

und die Grössen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_6$ sich in einer abnehmenden Reihe befinden, somit die Differenzen $(\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_2-\alpha_3) \ldots (\alpha_5-\alpha_6)$ positive Werthe liefern. Unter diesen Voraussetzungen erhält man für den Ausdruck, wenn man ihn transformirt:

$$\int\frac{F(E)dE}{\sqrt{\varphi_6(E)}} = \frac{2}{\left(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}\right)\sqrt{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+3})(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+4})}}\int\frac{\left[(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1})z^2\right]\psi z^2 dz.}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu^2 z^2)}}$$

oder

$$\int\frac{F(E)dE}{\sqrt{\varphi_6(E)}} = \int\frac{M\psi z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu^2 z^2)}}$$

wo $\varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2$ und $\varkappa^2 > 0 < 1$ ist.

Die zu untersuchenden Integrale gestalten sich verschieden, je nachdem

1. M zwischen $+\infty \ldots + (l_1+l_2)$

dann ist die Reihenfolge der Factoren entsprechend den $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha$

$$M\ (l_1+l_2)\ E\ (l_1-l_2)\quad 0 - (l_1-l_2) - (l_1+l_2)$$

2. M zwischen $+ (l_1+l_2) \ldots E_0$

$$(l_1+l_2)\ M.\ E.\ (l_1-l_2)\ 0 - (l_1-l_2) - (l_1+l_2)$$

Bei der Abstossung

2. M zwischen $+ (l_1+l_2) \ldots E_0$

$$(l_1+l_2)\ E\ M\ (l_1-l_2)\quad 0 - (l_1-l_2) - (l_1+l_2)$$

3. M zwischen $0 \ldots - (l_1-l_2)$

$$(l_1+l_2)\ E\ (l_1-l_2)\quad 0.\quad M - (l_1-l_2) - (l_1+l_2)$$

4. M zwischen $- (l - l_2 \ldots - (l_1+l_2)$

$$(l_1+l_2)\ E\ (l_1-l_2)\quad 0 - (l_1-l_2)\ M - (l_1+l_2)$$

5. M zwischen $- (l_1+l_2) \ldots - \infty$

$$(l_1+l_2)\ E\ (l_1-l_2)\quad 0 - (l_1-l_2) - (l_1+l_2)\ M.$$

Setzt man noch

$$\sqrt{\frac{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} = F.$$

so sind die näher zu untersuchenden Intregale, von denen 1 und 5 und dann wiederum 3 und 4 zusammenfallen folgende:

$$1.\quad t - t_0 = F\int_{E_0}^{E} \frac{2ME^2dE}{\sqrt{(E-M)\,(E-(l_1+l_2))\,(E-(l_1-l_2))\,E.\,(E-(-l_1+l_2))(E-(-l_1-l_2))}}$$

$$3.\quad t - t_0 = F\int_{E_0}^{E} \frac{2ME^2dE}{\sqrt{-(E-(l_1+l_2))(E-(l_1-l_2))\,E.\,(E-M)(E-(-l_1-l_2))(E-(-l_1+l_2))}}$$

$$4.\quad t - t_0 = F\int_{E_0}^{E} \frac{2ME^2dE}{\sqrt{-(E-(l_1+l_2))(E-(l_1-l_2))\,E.\,(E-(-l_1-l_2))(E-M)(E-(-l_1+l_2))}}$$

$$5.\quad t - t_0 = F\int_{E_0}^{E} \frac{2ME^2dE}{\sqrt{-(E-(l_1+l_2))(E-(l_1-l_2))\,E\,(E-(-l_1+l_2))(E-(-l_1-l_2))\,(E-M)}}$$

Der nunmehr interessantere und näher zu betrachtende Fall ist indess 2., der sich für den Fall, dass eine Anziehung stattfindet, darstellt:

$$2.\; t - t_0 = F\int_{E_0}^{E} \frac{2ME^2dE}{\sqrt{(E-(l_1+l_2))\,(E-M)\,(E-(l_1-l_2))\,E.\,(E-(-l_1+l_2))(E-(-l_1-l_2))}} \qquad 47.$$

für die Abstossung ist:

$$2.\; t - t_0 = F\int_{E_0}^{E} \frac{2ME^2dE}{\sqrt{-(E-(l_1+l_2))(E-M)(E-(l_1-l_2))\,E.\,(E-(-l_1-l_2))(E-(-l_1-l_2))}} \qquad 48.$$

Betrachtet man zuerst den Fall der Anziehung, so geht der Ausdruck, wenn man ihn transformirt, über in:

$$t-t_0=2MF\int_{E^0}^{E}\frac{[2l_2M-(l_1+l_2)(M-(l_1-l_2)z^2)]^2zdz.}{\sqrt{2l_2\sqrt{2l_2M(M+(l_1-l_2))(M+(l_1+l_2))}[2l_2-(M+l_2-l_1)z^2]\sqrt{z^2(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)}}}$$

Setze ich

$$z^2=\sin^2\varphi$$

$$zdz=\sin\varphi.\cos\varphi d\varphi$$

$$\frac{d\varphi.}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}=du \quad \text{wo } \varphi=\operatorname{am}(u_\varkappa)$$

$$\lambda^2=\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_1 \qquad a_1=\int_0^{\operatorname{arc}\sin\frac{\lambda}{\varkappa}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

$$\mu^2=\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_2 \qquad a_2=\int_0^{\operatorname{arc.}\sin\frac{\mu}{\varkappa}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

so wird, wenn gesetzt wird

$$4M^2Fl_2=A. \qquad 4.l_2\sqrt{2l_2M(M+(l_1-l_2))(M+(l_1+l_2))}=C.$$

$$2MF(l_1+l_2)(M-(l_1-l_2))=B. \qquad 2(M+l_2-l_1)l_2\sqrt{2l_2M(M+(l_1-l_2))(M+(l_1+l_2))}=D.$$

$$t-t_0=\int_0^u\frac{(A-B\sin^2\operatorname{am}u)^2du}{(C-D\sin^2\operatorname{am}u)\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_1\sin^2\operatorname{am}u)(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_2\sin^2\operatorname{am}u)}} \qquad 49.$$

Es ergiebt sich aus Jacobi Fundament. Theor. funct. eliptic pag. 152.

$$\Theta(u+a_1)\ \Theta(u-a_1)=\left(\frac{\Theta u\Theta a_1}{\Theta o}\right)^2(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_1\sin^2\operatorname{am}u)$$

$$\Theta(u+a_2)\Theta(u-a_2)=\left(\frac{\Theta u\Theta a_2}{\Theta o}\right)^2(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_2\sin^2\operatorname{am}u.)$$

daher.

$$(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_1\sin^2\operatorname{am}u)(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}a_2\sin^2\operatorname{am}u)=\frac{\Theta(u+a_1)\Theta(u-a_1)\Theta(u+a_2)\Theta(u-a_2)\Theta o^4}{\Theta u^4\Theta a_1{}^2\Theta a_2{}^2} \qquad 50.$$

Nun ist aber:

$$\Theta\,(u \pm a_1) \pm 1 - \frac{2q\cos.\,\pi\,(u \pm a_1)}{K} + 2q^4\cos.\,\frac{2\pi(u \pm a_1)}{K} - 2q^9\cos.\,\frac{3\pi\,(u \pm a_1)}{K} \pm \ldots\ldots$$

$$\Theta\,(u \pm a_2) = 1 - \frac{2q\cos.\,\pi\,(u \pm a_2)}{K} + 2q^4\cos.\,\frac{2\pi(u \pm a_2)}{K} - 2q^9\cos.\,\frac{3\pi\,(u \pm a_2)}{K} \pm \ldots\ldots$$

somit wird der Ausdruck 50.

$$\frac{\Theta_0{}^4}{\Theta u^4\,\Theta a_1{}^2\,\Theta a_2{}^2}\left|1 - \frac{4\cos.\pi u}{K}\left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right)q + 4\left[\left|\left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right)^2 + 1\right| + \cos.\frac{2\pi u}{K}\left(\frac{2\cos.\pi a_1}{K}\frac{\cos.\pi a_2}{K} + 1\right)\right]q^2\right.$$

Bei der Entwickelung zur — ½ten Potenz erhalte ich:

$$f\,(\Theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \cos.\frac{\pi u}{K}\,\alpha q + \left(\cos\frac{2\pi u}{K}\beta + \gamma\right)q^2 + \left(\cos\frac{3\pi u}{K}\delta + \cos\frac{\pi u}{K}q\right)q^3 + \left(\cos\frac{4\pi u}{K}\eta + \cos\frac{2\pi u}{K}\eta + \xi\right)q^4$$

$$\text{wo } \alpha = 2\left(\cos\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right)$$

$$\beta = 3\cos.^2\frac{\pi a_1}{K} + 2\cos.\frac{\pi a_2}{K}\cos.\frac{\pi a_1}{K} + 3\cos.^2\frac{\pi a_2}{K} - 2$$

$$\gamma = \left(\cos\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right)^2 - 2.\ \text{u. s. w.}$$

Da ferner

$$\Theta u = 1 - 2q\cos.\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos.\frac{2\pi u}{K} + \ldots\ldots$$

so ist

$$\Theta u^2 = 1 - 4q\cos.\frac{\pi u}{K} + 4q^2\cos.^2\frac{\pi u}{K} + \ldots\ldots$$

Der andere noch nicht in Betracht gezogene Theil von 49 lässt sich ebenfalls noch anders darstellen. Es ist:

$$\left(\frac{2\varkappa K}{\pi}\right)\sin^2 am u = \frac{2K}{\pi}\frac{2(K-E)}{\pi} - 8\left\{(q+q^3)\cos.\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos.\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right.$$

$$\sin^2 am\,u = \frac{\pi^2}{4\varkappa^2 K^2}\left\{\frac{2K}{\pi}\,\frac{2(K-E)}{\pi} - 8q\cos\frac{\pi u}{K} - 8q^3\cos.\frac{\pi u}{K} - 16q^4\cos.\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right.$$

$$(A - B\sin^2 amu)^2 = \left\{A - \frac{\pi^2 B}{4\varkappa^2 K^2}\left(\frac{2K}{\pi}\frac{2(K-E)}{\pi}\right) + \frac{\pi^2 B}{4^2 K}\cos.\frac{\pi u}{K}\,8q + \ldots\right.$$

Setze ich:

$$\left.\begin{aligned} A - \frac{\pi^2 B}{4\varkappa^2 K^2}\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2(K-E)}{\pi}\right) &= \beta_0 & \qquad \frac{\pi^2 B}{4\varkappa^2 K^2} &= \beta_1 \\ C - \frac{\pi^2 D}{4\varkappa^2 K^2}\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2(K-E)}{\pi}\right) &= \gamma_0 & \qquad \frac{\pi^2 D}{4\varkappa^2 K^2} &= \gamma_1 \end{aligned}\right\}\ 51b$$

ferner

$$\beta_0\,\beta_1 = \beta_2$$
$$\beta_1\,\beta_1 = \beta_3$$

so ist:

$$\frac{(A - B\sin^2 \mathrm{am}\, u)^2}{C - D\ \sin \mathrm{am}\, u} = \frac{\beta_0{}^2}{\gamma_0}$$
$$+ \frac{\beta_2 - \beta_0{}^2\gamma_1}{\gamma_0{}^2} \cos.\frac{\pi u}{K}\, 8q$$
$$+ \left[\frac{(2\beta_3\gamma_0{}^2 - 4\beta_2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_1{}^2\beta_0{}^2)}{\gamma_0{}^3} + \frac{2\beta_3\gamma_0^2 - 4\beta_2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_1{}^2\beta_0{}^2}{\gamma_0{}^3} \cos.\frac{2\pi u}{K}\right] 16q^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Führe ich nun die Multiplihation der Factoren von 49 aus, die sich darstellen als:

$$t - t_0 = \Theta a_1 \Theta a_2 \Theta o_2 \int_0^u \left[\delta_0 + \delta_1 \cos.\frac{\pi u}{K} 2q + \left(\delta_2 + \delta_2 \cos.\frac{2\pi u}{K}\right) 2q^2 \ \right) \times$$
$$\left[1 - 4 \cos.\frac{\pi u}{K} q + 4.\ \cos.^2 \frac{\pi u}{K} q^2 + \ldots\ldots\ldots\right] \times$$
$$\left[1 + 2\alpha \cos.\frac{\pi u}{K} q + \left(\gamma + \beta \cos.\frac{2\pi u}{K}\right) q^2 + \ldots\right]$$

so erhalte ich

$$t - t_0 = \Theta a_1 \Theta a_2 \Theta o^2 \int_0^u S_0 + S_1 \cos.\frac{\pi u}{K} q + \left(S_2 + S_3 \cos.\frac{2\pi u}{K}\right) q^2 + \left(S_4 \cos.\frac{\pi u}{K} S_5 \cos\frac{3\pi u}{K}\right) q^3 + \ldots$$

$$S_0 = \delta_0 \qquad S_1 = (\delta_0 \varepsilon_0 + \delta_1) \qquad S_2 = (\delta_0 \varepsilon_1 + \frac{\delta_1 \varepsilon_0}{2} + \delta_2) \qquad S_3 = (\delta_0 \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_0 \delta_1}{2} + \delta_2)$$

$$\delta_0 = \frac{\beta_0{}^2}{\gamma_0} \quad \delta_1 = \frac{\beta_2 - \beta^2{}_0 \gamma_1}{\gamma_0{}^2} \quad \delta_2 = \frac{2\beta_1{}^2\gamma_0{}^2 - 4\beta_0\beta_1\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_1{}^2\beta_0{}^2}{\gamma_0{}^3}$$

$$\varepsilon_0 = 2\left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right) - 4.$$

$$\varepsilon_1 = \left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right)^2 - 4 \left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right)$$

$$\varepsilon_2 = 3\left(\cos.^2\frac{\pi a_1}{K} + \cos.^2\frac{\pi a_2}{K}\right) - 4\left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right) + 2\cos.\frac{\pi a_1}{K}.\ \cos.\frac{\pi a_2}{K}.$$

Da ferner

$$\varkappa^2 = \frac{(M + l_2 - l_1)(l_1 + l_2)}{2 l_2 M.} \; \lambda^2 = \frac{l_1(M + l_2 - l_1)}{l_2(M + l_1 - l_2)} \; \mu^2 = \frac{(M + l_2 - l_1)(l_1 + l_2)}{l_2(M + l_1 - l_2)}$$

Nun ist abe [illegible]

$$\Theta\,(u \pm a_1) \pm 1 - \text{[illegible]} - 2q^9 \cos.\frac{3\pi\,(u \pm a_1)}{K} \pm \ldots$$

$$\Theta\,(u \pm a_2) = 1 - \text{[illegible]} - 2q^9 \cos.\frac{3\pi\,(u \pm a_2)}{K} \pm \ldots$$

somit wird der Aus [illegible]

$$\frac{\Theta_0^{\,4}}{\Theta u^4 \Theta a_1^{\,2} \Theta a_2^{\,2}} \Big| 1 - \frac{4\cos.\pi u}{K}\Big(\cos.\frac{\pi a}{K} \text{[illegible]} \Big)^2 + 1 \Big| + \cos.\frac{2\pi u}{K}\Big(\frac{2\cos.\pi a_1}{K}\frac{\cos.\pi a_2}{K} + 1\Big)\Big] q^{\text{[illegible]}}$$

Bei der Ent [illegible] lte ich:

$$f\,(\Theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \cos.\frac{\pi u}{K}\,\alpha q + \Big(\text{[illegible]} \Big) q^3 + \Big(\cos\frac{4\pi u}{K}\eta + \cos\frac{2\pi u}{K}\eta + \xi\Big) q^4$$

$$\text{wo } \alpha = 2\Big(\cos\frac{\pi a_1}{K} \text{[illegible]}$$

$$\beta = 3\,\cos.^2\frac{\pi a_1}{K} \text{[illegible]}\,^2$$

$$\gamma = \Big(\cos\frac{\pi a_1}{K} \text{[illegible]}$$

Da ferner

$$\Theta u = 1 \text{[illegible]}$$

so ist

$$\Theta u^2 = 1 \text{[illegible]}$$

Der andere [illegible] eil von 49 lässt sich ebenfalls noch anders darstell [illegible]

$$\Big(\frac{2\varkappa\,K}{\pi}\Big) \sin^2 amu = \text{[illegible]} 2q^4 \cos.\frac{2\pi u}{K} + \ldots.$$

$$\sin^2 am\,u = \frac{\pi^2}{4\varkappa^2 K^2} \text{[illegible]} \frac{\pi u}{K} - 16\,q^4 \cos.\frac{2\pi u}{K} + \ldots$$

$$(A - B\,\sin^2\ amu)^2 = \text{[illegible]} \frac{{}^2 B}{{}^2 K} \cos.\frac{\pi u}{K}\ 8\,q + \ldots.$$

Setze ich:

$$\left.\begin{aligned} A - \frac{\pi^2}{4\varkappa^2 \text{[illegible]}} &\text{[illegible]} \frac{{}^2 B}{{}^2 K^2} = \beta_1 \\ C - \frac{\pi^2}{4\varkappa^2 \text{[illegible]}} &\text{[illegible]} \frac{{}^2 D}{{}^2 K^2} = \gamma_1 \end{aligned}\right\} 51b$$

so ergiebt sich, wenn ich der Kürze wegen in 51 setze:

$$\frac{(K-E)}{\varkappa^2 K} = c_1 \text{ und } \frac{\pi^2}{4\varkappa^2 K^2} = c_2$$

$$S_0 = \frac{(\varkappa_2 - c_1 c_2)^2}{\lambda^2 - c_1 c_2}$$

$$S_1 = \frac{2(\varkappa^2 - c_1 c_2)^2}{\lambda^2 - c_1 c_2} \left\{ \cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K} \right\} - 4 + \frac{c_1 c_2}{(\lambda^2 - c_2)\varkappa^2}(\varkappa^2 - 1).$$

$$S_2 = \frac{(\varkappa^2 - c_1 c_2)^2}{\lambda^2 - c_1 c_2} \left\{ \left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right)^2 - 4\left(\cos\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right) \right\}$$

$$+ \frac{c_1 c_2}{(\lambda^2 - c_2)^2 \varkappa}(\varkappa^2 - 1) \left\{ \left(\cos.\frac{\pi a_1}{K} + \cos.\frac{\pi a_2}{K}\right) - 2 \right\}$$

$$+ \frac{2\left(\lambda^2 c_2 - 2c_1 c_2 + \frac{c_2^3 c_1^2}{\lambda^2 c_2}\right) - 4c_2^2(\varkappa^2 - c_1^2 c_2)(\lambda^2 - c_1 c_2) + c_2\left(\varkappa^2 - 2c_1 + \frac{c_1}{\varkappa^2}\right)}{(\lambda^2 - c_1 c_2)^3}$$

$$S_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und somit erhalte ich, wenn die Integration des letzten Integrals ausgefüht wird, für die Zeit die schnell convergirende Reihe von der Form:

$$t - t_0 = \Theta a_1 \Theta a_2 \Theta o^2 \left\{ S_0 + S_1 \sin\frac{\pi u}{K}\frac{K}{\pi} q + \left(S_2 + S_3 \sin\frac{2\pi u}{K}\frac{K}{3\pi}\right) q^2 + \ldots + \left(S_4 \sin\frac{\pi u}{K}\frac{K}{\pi} + S_5 \sin\frac{3\pi u}{K}\frac{K}{2\pi}\right) q^3 + \right.$$

$$\left. \left(S_6 + S_7 \sin\frac{2\pi u}{K}\frac{K}{2\pi} + S_8 \sin\frac{4\pi u}{K}\frac{K}{4\pi}\right) q^4 + \ldots \right.$$

Der Fall, in welchem **eine Abstossung** der beiden Punkte stattfindet liefert, ebenso wie die andern 4 Integrale, für die Zeit der Bewegung eine ähnliche Reihe, wie die eben erhaltene, doch behalte ich mir die nähere Betrachtung dieser Fälle und die Untersuchungen über die kleinen Schwingungen in der Nähe des Gleichgewichts vor. — Vorläufig möge es genügen die Identität der Gleichungen 18 und 42, die auf verschiedene Weise hergeleitet sind, nachgewiesen und für die Umlaufszeit eine schnell convergirende Reihe aufgestellt zu haben.

Dr. Gieswald.