Über die Verwendung der Parallelprojektion im geometrischen Unterricht.

Für die Projektionslehre bietet der Leitfaden von Müller und Presler[1] reichen, mit großer Geschicklichkeit zusammengestellten Übungsstoff, der die Probe im praktischen Unterricht bestanden hat; über die Art der Verwendung ist dem Lehrer mit Recht völlige Freiheit gelassen. Da auch die systematischen Lehrbücher der Geometrie, soweit sie die Darstellung des Räumlichen berühren, gleichfalls keinen Einblick in den **Unterrichtsbetrieb** gewähren können, so möge eine Aussprache über einige im Lauf der Jahre gemachten Unterrichtserfahrungen gestattet sein; die darstellende Geometrie bleibe dabei außer Betracht.

Sollen zeichnerische Übungen zu einem unzertrennlichen Bestandteil des mathematischen Unterrichts werden, so müssen sie im engsten Anschluß an den theoretischen Lehrgang und an die rechnerischen Aufgaben betrieben werden. Bei der Einführung in die Stereometrie bilden sie den Ausgangspunkt; den Berechnungen der Körper arbeiten sie vor, indem das konstruktive Verfahren von denselben ebenen Schnitten ausgeht, an die auch die Rechnung anknüpft und schließlich laufen zeichnerische und rechnerische Lösung von Aufgaben nebeneinander her. Das Gleiche gilt von der Oberstufe; denn wenn man die über räumliche Vorkommnisse gesammelten Erfahrungen sichtet, wenn man zur Aufstellung der räumlichen Axiome schreitet und die Lage von Punkten, Geraden und Ebenen erörtert, so bilden wiederum die Körper das naturgemäße Veranschaulichungsmittel und geeigneten Übungsstoff.

Nach diesem Gesichtspunkt habe ich in dem **ersten Teil** der vorliegenden Arbeit einige konstruktive Aufgaben über die einfachsten Körper besprochen. Die Einführung in die Projektionslehre [N 1—8] ist ziemlich breit gehalten; einmal, weil sie unterrichtlich wichtig ist, dann

[1] Müller-Presler, Leitfaden der Projektionslehre. Ausg. A. Teubner, 1903.

aber auch mit Rücksicht auf das „geometrische Zeichnen" (siehe unten). Das Verfahren ist zunächst rein empirisch. Dann folgen Konstruktionen in bestimmtem Maßstab; die dem Unterricht der Oberstufe zuzuweisenden Erweiterungen sind der Kürze halber unmittelbar angefügt und, wo es zweckmäßig erschien, mit einem Sternchen (*) versehen. Ebenso sind solche Bemerkungen gekennzeichnet, die im Unterricht keine unmittelbare Verwendung finden, die aber für den Lehrer von Interesse sein können. Es wird vorausgesetzt, daß die Zeichnungen zunächst an der Tafel heuristisch entwickelt, dann aber ausgelöscht werden, um ein mechanisches Kopieren unmöglich zu machen.

Der **zweite Teil** der Arbeit behandelt die Ellipse als affines Bild des Kreises. Wie bekannt lassen sich viele Sätze der Planimetrie durch räumliche Betrachtungen leichter begründen, als es bei der Beschränkung auf die Ebene möglich ist; so wirkt insbesondere die Auffassung der Ähnlichkeit als perspektive Abbildung einer Ebene auf eine zu ihr parallele Tafel sehr anschaulich und überzeugend. Als Beweismittel können allerdings derartige Betrachtungen erst dann zugelassen werden, wenn der stereometrische Unterricht die nötigen Grundlagen geschaffen hat; denn es erscheint nicht angängig, inmitten des planimetrischen Lehrgangs Erfahrungstatsachen aus der Raumgeometrie aufzunehmen und das der Mathematik eigene deduktive Verfahren zu unterbrechen.

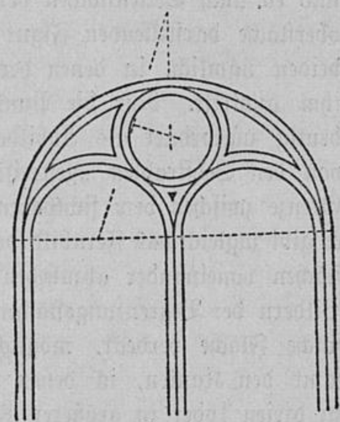
Neben der Ähnlichkeit gibt es noch eine zweite perspektive Abbildung einer Ebene auf eine zweite, die ausnahmslos jedem Punkt ein Bild zuweist, nämlich die Parallelprojektion, oder was auf dasselbe hinausläuft, die Affinität. Auch sie kann auf der Oberstufe als Beweismittel herangezogen werden; dabei ist die affine Abbildung des Kreises von besonderem Interesse. Die Ellipse vor den anderen Kegelschnitten zu bevorzugen, ist schon durch den Umstand gerechtfertigt, daß sie praktisch als Kreisbild schlechthin bezeichnet werden kann, und ihre Eigenschaften aus denen des Kreises abzuleiten, ist eine gute Übung im Verallgemeinern bekannter Wahrheiten. Der Begriff der Affinität wird dabei völlig verarbeitet und nebenher lernt der Schüler, wie man eine Ellipse praktisch aus den Stücken zeichnet, die bei der Parallelprojektion des Kreises gewöhnlich gegeben sind.

Die Anregung, die konstruktive Seite der Geometrie zu betonen und besonders die Affinität für den Unterricht nutzbar zu machen, verdanke ich Herrn H. Wiener, Professor a. d. technischen Hochschule zu Darmstadt, mit dem ich auch die im Unterricht gemachten Erfahrungen regelmäßig besprach.

Zahlreiche der nachstehend angegebenen Konstruktionen rühren von ihm her; die Nachweise kann ich mir im einzelnen ersparen, da Herr Wiener das Lehrbuch seines Vaters Chr. Wiener neu bearbeitet, wo man dann die einschlägigen Artikel nachlesen möge.

I. Die einfachsten Körper in Parallelprojektion.

Vorbemerkung. An den hessischen Realschulen wird in Sekunda ein besonderer Unterricht im „geometrischen Zeichnen" erteilt; man wird denselben mit Vorteil der Entwicklung des Raumsinns dienstbar machen und kann dann der Projektionslehre einen breiteren Raum zuweisen als in dem „mathematischen Unterricht". Die Wiederholung der Planimetrie wird dabei nicht verkürzt, im Gegenteil sie wird gewinnen, weil der alte Lehrstoff in neuem Gewande erscheint. Zum Ausgangspunkt können z. B. Aufgaben über das Maßwerk genommen werden, da es sich hier zunächst um ebene Figuren handelt. Wählt man dann das Steinprofil scharfkantig, so bleibt in der vortretenden Kante die planimetrische Konstruktion rein erhalten; beim Einzeichnen der äußeren Kanten hat man darauf zu achten, daß sie die vortretende Kante nicht schneiden können. Man vergleiche die beistehende Figur 1, der ein Renaissancemotiv aus dem Palast Vendramin in Venedig zugrunde liegt. Zahlreiche Beispiele mit Erläuterungen, auch solchen aus der Statik gotischer Bauformen gibt Gerlach[2]; für unseren Zweck kommen allerdings nur solche Formen in Betracht, die eine einfache Konstruktion zulassen.



Figur 1.

1. Als Ausgangspunkt für die Projektion geometrischer Körper empfiehlt sich der **Schatten einer Pyramide auf ihre Grundebene,** weil die gesuchte Figur durch das Bild eines einzigen Punktes, nämlich der Spitze bestimmt ist. Die Projektion auf die Grundrißtafel verdient den Vorzug, weil man die einfachen Körper auf einer „Grundfläche" stehend annimmt.

[2] A. Gerlach, Das Maßwerk im geometrischen Unterricht. Zeitschr. für mathem. u. naturw. Unterricht. 39. Jahrg. 1908, S. 341 ff.

Der Schatten gibt zugleich das Bild des Körpers in der Richtung der Sonnenstrahlen gesehen. Man gehe von einem Drahtmodell aus, um die Verdeckung einzelner Flächen zu vermeiden. Setzt man eine zur Grundfläche parallele Schnittfläche ein, indem man von dem [auf dieser Stufe der Erfahrung entnommenen] Satze ausgeht, daß zwei parallele Ebenen von jeder dritten Ebene in parallelen Kanten geschnitten werden, so gewinnt man Gelegenheit, die Ähnlichkeitslehre zu wiederholen und interessante Sonderlagen perspektiv-ähnlicher Figuren aus allgemeiner Lage entstehen zu lassen.

2. Besondere Beachtung verdient der **Umriß** in seiner Abhängigkeit von der Sehstrahlrichtung. Man setze jetzt die Seitenflächen als Pappscheiben in das Modell der Pyramide ein; hierdurch wird die Grundfläche und ev. auch Seitenflächen verdeckt, und jeder Punkt der die Pyramidenoberfläche darstellenden Figur ist das Abbild zweier Punkte, derjenigen beiden nämlich, in denen der Sehstrahl in den Körper ein- bezw. aus ihm austritt. Nur die Punkte des Umrisses sind ihren Urbildern eindeutig zugeordnet als Abbilder derjenigen Punkte, in denen der Körper von den Sehstrahlen „gestreift" wird. Der Umriß bildet demnach die Grenze zwischen dem sichtbaren und dem unsichtbaren Teil der Oberfläche; er gibt zugleich das Fernbild des Körpers, ohne die einzelnen Begrenzungsflächen voneinander abzuheben. Da das Innere des Umrisses von den Bildern der Begrenzungsflächen doppelt überdeckt wird, ist mindestens eine solche Fläche verdeckt, möglicherweise aber auch zwei, drei oder mehr samt den Kanten, in denen sie zu zweien, und den Ecken, in denen sie zu dreien [oder in größerer Zahl] zusammenstoßen.

Das Erkennen der Verdeckungen macht dem Anfänger Schwierigkeiten; man überwindet sie leicht, indem man von dem Bild einer sichtbaren Fläche ausgeht und diejenigen Flächen bestimmt, deren Bilder mit jenem zusammen den Umriß ausfüllen; alle übriggebliebenen Flächen sind verdeckt und ihre Begrenzungen sind nur insoweit sichtbar, als sie dem Umriß angehören.

3. Die Projektion auf die Grundrißtafel gibt kein sehr anschauliches Bild, weil wir nicht gewöhnt sind, die uns umgebenden Körper von oben zu betrachten; wir sehen sie gewöhnlich von vorne und bevorzugen daher bei bildlichen Darstellungen die **scheitelrechte Bildfläche.** Diese stellt der Zeichner zwischen sich und den Gegenstand, während es in der Parallelprojektion gebräuchlich ist, den Körper auf der dem Beschauer zugewandten Seite der Tafel aufzustellen, ihn an die Aufrißwand anzulehnen oder die

Tafel durch ihn hindurchzulegen. Welche Festsetzung man trifft, ist an sich willkürlich, doch empfiehlt es sich die Vorstellung festzulegen. Die von der Sonne entworfenen Schattenbilder weichen von den perspektivischen Zeichnungen insofern ab, als sie parallele Geraden immer parallel erscheinen lassen; insonderheit zeigen alle auf der Tafel senkrechten Geraden im Bilde dieselbe Richtung, deren Neigung gegen die Vertikale man beliebig [etwa zu 30°] annehmen kann. Kommen die Strahlen von rechts oben, so fällt der Schatten eines aus der Tafel senkrecht vortretenden Stabes von dem Fußpunkt ausgehend nach links unten. Die Begrenzungsflächen der Körper erscheinen daher i. a. verzerrt, jede zur Tafel parallele Figur bildet sich aber kongruent ab.

4. Eine Pyramide mit ihrer Grundfläche an die Aufrißwand anzulehnen, empfiehlt sich nicht, dagegen bietet ein **wagerechter Zylinder,** etwa als Welle gedacht, reichlichen Übungsstoff für diese Lage der Grundfläche. Man zeigt, daß auf dem Zylindermantel beliebig viele Geraden gezogen werden können, die alle der Achse parallel sind; legt man nun die eine Grundfläche in die Tafel, so bilden sich beide Grundkreise kongruent ab, die Achse hat ihr Bild in der gemeinsamen Zentrale der Bildkreise und ihr parallel laufen die Erzeugenden. Diese liegen im Bilde zu zweien in einer Geraden, die über beide Grundflächen und ev. über beide Erzeugende gleichzeitig hinwegstreicht. Nur die gemeinsamen Tangenten beider Kreise haben je eine Randerzeugende zum Urbild, sie bilden daher Stücke des Umrisses, der durch zwei Halbkreise geschlossen wird; von den letzteren gehört der eine der vorderen, der andere der hinteren, verdeckten Grundfläche an. Für das Gelingen der Zeichnung ist es wesentlich, daß die Berührpunkte der Tangenten bestimmt werden, damit diese gut an die krummlinigen Teile des Umrisses anschließen. Man teile den vorderen Kreis nach Art des Zifferblattes in zwölf gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte die Erzeugenden, soweit sie sichtbar sind. Man beginnt die Zeichnung am besten mit der Festlegung der Achse, setzt die Grundkreise ein und dann die Randerzeugenden.

5. Das Bild ändert sich, wenn man die Grundflächen des Zylinders wegnimmt und so die innere Seite des Mantels sichtbar macht; richtet man es dabei so ein, daß sich die Grundkreise im Bilde schneiden, so kann man durch den Zylinder hindurchsehen. Auch die Zeichnung eines doppelwandigen Zylinders (Fig. 2) erscheint schon mit Rücksicht auf seine häufige Verwendung in der Technik angebracht; Reihenfolge beim Zeichnen: Achse, innere Grundkreise, äußere Grundkreise, Randlinien, weitere Erzeugende.

Will man auf **Maschinenteile** eingehen, denen die Schüler reges Interesse entgegenbringen, so ist hier die geeignete Stelle, weil die stets in größerer Zahl auftretenden Kreise hier als solche erscheinen, während man i. a. kongruente und ähnliche Ellipsen zeichnen müßte. Verdeckte Linien bleiben hier am besten ganz weg. Man kann Fig. 2 leicht zu einem Lager ausbilden, auch mit abgehobenem Lagerdeckel; Wellrad und Kurbel bieten ebenfalls keine Schwierigkeit, auch eine Transmission eignet sich, sofern man die Riemenscheiben massiv (aus Holz bestehend), ev. eingedreht annimmt. Abmessungen und Skizzen, die man nur in schiefe Projektion zu setzen braucht, findet man in Bernullis Vademekum des Maschinenbauers.

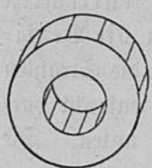


Fig. 2.

Hier soll noch ein schematisches Bild des Exzenters (Fig. 3) folgen, das man natürlich auch noch mehr vereinfachen kann. Vergleiche übrigens das Bild des Trommelankers von Hefner-Alteneck bei Müller u. Presler[3] sowie den Doppel-T-Anker.

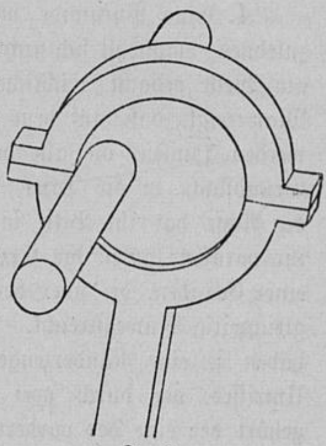


Fig. 3.

6. Als Beispiel eines **abgestumpften Kegels** kann u. a. ein Hebelumschalter (Fig 4) dienen. Die Erzeugenden gehörig verlängert gehen — wie die Achse — durch die Spitze des Ergänzungskegels; verlegen wir diese im Bilde außerhalb der Grundkreise, so erhalten wir — wie beim Zylinder — zwei Umrißerzeugende, die äußeren Tangenten der Grundkreise, die sich mit der Zentrale im äußeren Ähnlichkeitspunkt treffen. Der Umriß wird geschlossen durch Bögen der Grundkreise, deren Mittelpunktswinkel sich zu 360° ergänzen. Man nehme den vorderen Grundkreis und die Kegelspitze an, ziehe die Tangenten durch Anlegen des Lineals an Punkt und Kreis[4] und konstruiere dann den zurückliegenden Grundkreis; die Mittellinie des Hebels muß durch die Mitte dieses Kreises gehen, während der vordere Grundkreis seitlich verschoben erscheint.

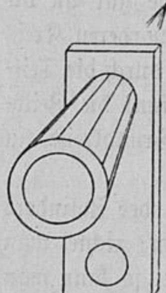


Fig. 4.

[3] Müller-Presler, a. a. O., S. 111 u. 112.

[4] Diese Verwendung des Lineals paßt nicht in das System der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal; gleichwohl verdient sie geübt zu werden, da sie sehr einfach und genau ist; die Berührpunkte müssen in der bekannten Weise bestimmt werden.

7. Der vorstehende Übungsstoff behandelt die einfachsten Körperformen auf Grundlage der Erfahrung und ist wie erwähnt vorwiegend für das geometrische Zeichnen bestimmt. Der mathematische Unterricht im engeren Sinn wird frühzeitig zur **Darstellung geometrischer Körper in bestimmtem Maßstab** übergehen; dabei wird der Verzerrungswinkel und das Verkürzungsverhältnis für die zur Tafel senkrechten Strecken vorgeschrieben. Vergleiche darüber Müller-Presler a. a. O. und Kullrich.[5] Muß eine Ellipse konstruiert werden, so ist das Verhältnis 1 : 1 sehr bequem, weil die Achsen die Winkel des Paares gleichlanger konjugierter Durchmesser halbieren.[6] Für die Herstellung von Ellipsenschablonen ist ein Winkel von 45^0 vorzuziehen, weil eine solche Schablone dann zur Abbildung sowohl wagerechter wie parallel zur Kreuzrißebene liegender Kreise dienen kann; im übrigen werden die Figuren plastischer, wenn man sich durch Anwendung eines kleinen Verzerrungswinkels (30^0) und starker Verkürzung (auf $^1/_3$) mehr der senkrechten Projektion nähert.

Die Konstruktion des Schrägbildes wird an dem Würfel erläutert, dessen Rückfläche an der Tafel anliegt; die Ecken der Vorderfläche sind durch Kanten, die in den Ecken der Rückfläche auf der Tafel senkrecht stehen, mit ihr verbunden; diese Kanten werden also unter dem Verzerrungswinkel, in dem Verkürzungsverhältnis abgetragen. (Daß die Kanten auf der Tafel senkrecht stehen, wird vorläufig ohne weitere Begründung der Anschauung entnommen; vergl. Nr. 13.)

Für die Folge nun wird in der Regel die Tafel durch den Körper hindurchgelegt, um die Bestimmung der Ebene durch Punkte und Geraden einzuüben, und um diejenigen Schnittfiguren in den Mittelpunkt der Betrachtung zu rücken, die später bei der Rechnung gebraucht werden. Die außerhalb der Tafel liegenden Punkte sind nach dem Prinzip des Anschlusses mit dieser zu verbinden, und zwar durch senkrechte Stäbe, deren Fußpunkte und deren Längen jeweils zu bestimmen sind.

In den folgenden Beispielen bedeuten a u. s Grund- u. Seitenkanten, h u. h' die Höhe des Körpers bezw. einer Fläche u. r den Halbmesser eines Grundkreises. Die Maße sind in cm gedacht; sie beziehen sich nicht auf die eingesetzten Figuren, sondern sind für die Schülerhefte passend gewählt, zugleich mit Rücksicht auf übersichtliche Rechenergebnisse.

---

[5] Kullrich, Bemerkungen über die Figuren des mathematischen Schulunterrichts. Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht. 38. Jahrg. 1907, S. 16 ff., bes. S. 31 u. 32.

[6] Vergl. Nr. 30.

8. Quadratische Pyramide aus $a = 6$, $h = 4$ (Fig. 5). [Wo nichts Gegenteiliges gesagt ist, sind gerade Pyramiden und Prismen gemeint.] Die Tafel wird durch die Spitze und durch die Mitten zweier paralleler Grundkanten gelegt, also durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen. Als Schnittfigur erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, welches durch die Mittellinie a des Quadrats als Grundlinie und durch die Höhe h des Körpers als Höhe bestimmt ist; sein Schenkel ist die Höhe h' der Seitenfläche. Die Rechnung bevorzugt das rechtwinklige Dreieck, welches h' zur Hypotenuse und $\frac{a}{2}$ und h zu Katheten hat. In der Figur ist dieses Dreieck schraffiert als eine in ein Drahtmodell eingesetzte Scheibe; entsprechendes gilt von den späteren Figuren. Die Ecken der Grundfläche sind leicht zu finden; der Umriß hängt außer von den Maßverhältnissen des Körpers noch von dem Verzerrungswinkel und dem Verkürzungsverhältnis ab. Die Schnittfigur liefert zeichnerisch oder rechnerisch die Höhe der Seitenfläche h' und den Winkel, den die Seitenfläche mit der Grundfläche bildet; auch die Seitenfläche kann i. w. Gr. ermittelt werden. Die letzten beiden Aufgaben eignen sich bes. für den Oberkurs.

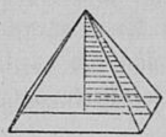


Fig. 5.

9. Quadratische Pyramide aus dem Winkel zweier gegenüberliegender Seitenkanten $\alpha = 60^0$ und aus der Seitenkante $s = 6$. Man lege die Tafel durch jene beiden Seitenkanten, also durch zwei sich schneidende Geraden; das i. a. gleichschenklige Schnittdreieck ist für $\alpha = 60^0$ gleichseitig; es zerfällt durch h in zwei rechtwinklige Dreiecke, die s zur Hypotenuse, h und die halbe Diagonale $\frac{d}{2}$ zu Katheten haben. Dieses Dreieck liefert aus s und $\frac{\alpha}{2}$ die Stücke h und $\frac{d}{2}$ [sowie den Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche]. Mit Hilfe der zweiten Diagonale konstruiert man die außerhalb der Tafel liegenden Ecken der Grundfläche.

10. Sechsseitiges Prisma aus $a = 3$, $s = 6$. Die Tafel werde durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten, also durch zwei parallele Geraden bestimmt. Die Schnittfläche, i. a. ein Rechteck, ist hier ein Quadrat über einer Hauptdiagonale des Sechsecks als Grundlinie. Da nun die Grundfläche zu dieser Hauptdiagonale spiegelig ist, so stehen diejenigen Nebendiagonalen auf der Tafel senkrecht, die je eine hintere und eine vordere Ecke der Grundfläche miteinander verbinden. Ihre Schnittpunkte mit der Tafel liegen in $^1/_4$ der Hauptdiagonale und ihre Länge wird gefunden, indem man die Grundfigur i. w. Gr. aufzeichnet. Als Abbild der Grundfläche ergibt sich ein schief-symmetrisches Sechseck. Diese Figur ist auch als Übergang zur Ellipse von Interesse und eignet sich u. a. als Vorlage zur Konstruktion perspektivähnlicher Figuren. — Als Anwendung sei der Schraubenschlüssel genannt.

10a. Einen **Würfel** so zu zeichnen, daß zwei gegenüberliegende Seitenkanten in der Tafel liegen; gesucht die Diagonale des Körpers [sowie ihr Winkel gegen die Grundfläche]. Die Flächendiagonale ist der Vorderfläche des in frontaler Stellung gezeichneten Würfels (N 7) zu entnehmen.

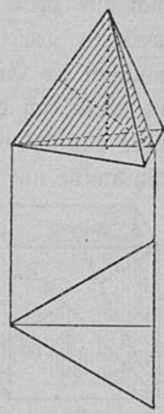


Fig. 6.

11. Das **regelmäßige Tetraeder** aus $a = 6$ (Fig. 6). Man lege die Tafel durch eine Seitenkante und durch die Mitte der gegenüberliegenden Grundkante, also durch eine Gerade und einen außerhalb derselben gelegenen Punkt. Die Schnittfigur ist ein gleichschenkliges Dreieck, welches die Seitenkante zur Grundlinie und die Mitte der Grundkante zur Spitze hat. Sein Schenkel ist die Flächenhöhe h'; sie muß aus dem Grunddreieck i. w. Gr. ermittelt werden. Die Schnittfigur enthält noch die Höhe h des Körpers, außerdem den Abstand h_0 der windschiefen Gegenkanten sowie die Winkel, die die Grundfläche mit der Seitenfläche und mit der Seitenkante einschließt. Die fehlenden Ecken sind durch die auf der Tafel senkrechte Grundkante bestimmt.

Anmerkung 1. Durch eine Drehung von 180° um h_0 sowie durch eine solche von 120° oder 240° um h geht das Tetraeder in sich über; berücksichtigt man die drei möglichen h_0 und die vier h, so bilden die 11 Drehungen zusammen mit der Identität, die als Drehung von 360° auftritt, eine Gruppe, die Tetraedergruppe.[7]

Anmerkung 2. In den vorstehenden Aufgaben sind alle Möglichkeiten, eine Ebene durch Punkte und Geraden zu bestimmen, behandelt; man mache ausdrücklich darauf aufmerksam, daß die Festlegung einer Ebene durch zwei parallele Geraden auf der Erklärung paralleler Linien im Raum beruht. — An die oben behandelte Aufgabe läßt sich noch die folgende Betrachtung anschließen. Durch die in der Tafel liegende Seitenkante sind drei Ebenen gelegt, nämlich zwei Seitenflächen und die Zeichenebene; man könnte unendlich viele Ebenen durch sie hindurchlegen [Ebenenbüschel], aber keine von ihnen enthält die rückwärtslaufende Grundkante; man kann also keine Ebene legen, die beide Kanten zugleich enthält, sie sind windschief. Wenn sich solche Geraden im Bilde zu schneiden scheinen, so ist es zweckmäßig, die zurückliegende Gerade an der betreffenden Stelle zu unterbrechen.

[7] H. Wiener, Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle, Bd. I, Heft 1, N 3, 4, 5. Teubner, 1907.

*12. Aufgaben über den **Schnitt von Ebenen mit Ebenen und Geraden.**

a) Eine sechsseitige Pyramide zu zeichnen [die Tafel durch die Spitze und eine Hauptdiagonale der Grundfläche gelegt] und den Schnitt zweier nicht benachbarter Seitenflächen zu bestimmen.

Lösung: Da die Seitenflächen die Spitze gemein haben, schneiden sie sich und zwar in einer durch diesen Punkt gehenden Geraden. Um einen weiteren gemeinsamen Punkt zu finden, benutzt man eine „Hilfsebene", nämlich die Grundfläche und stützt sich auf den Satz, daß die drei Kanten, in denen sich drei Ebenen wechselweise schneiden, durch einen Punkt gehen oder parallel sind. Es können beide Fälle eintreten, bei der quadratischen Pyramide nur der letztgenannte.

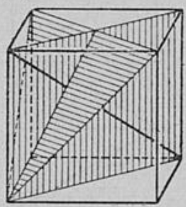


Fig. 7.

b) Die Endpunkte der von der Ecke eines Würfels ausgehenden Kanten sind verbunden und die Ebene dieses Dreiecks ist mit der von dieser Ecke ausgehenden Diagonale zu schneiden (Fig. 7).

Lösung: Man legt durch die Diagonale eine „Hilfsebene", nämlich eine der drei Diagonalebenen; jede schneidet das Dreieck in einer Schwerlinie, also ist der Schwerpunkt der gesuchte Schnittpunkt. Außerdem steht die Diagonale senkrecht auf der Dreiecksebene; die in der Deckfläche liegende Dreiecksseite steht nämlich auf der i. d. Figur eingezeichneten Diagonalebene senkrecht, also auch auf der Würfeldiagonale (Winkel windschiefer Geraden), ebenso steht letztere auf den anderen Dreiecksseiten senkrecht.

Anmerkung. Eine Drehung von 120° oder 240° um die Diagonale führt den Würfel [und das Dreieck] in sich über. Außerdem gestattet der Würfel noch Drehungen von 180° um die gemeinsamen Mittellote zweier Gegenkanten sowie Drehungen von 90°, von 180° und von 270° um die gemeinsamen Mittellote je zweier gegenüberliegender Flächen; je eine dieser Drehachsen ist in dem Diagonalschnitt als Mittellinie enthalten. Alle genannten Drehungen bilden mit der Identität eine Gruppe, die auch bei dem Oktaeder auftritt (siehe unten) und die man als Oktaedergruppe bezeichnet. [H. Wiener, a. a. O.]

c) Eine Diagonalebene des Würfels mit einer in ihr nicht enthaltenen Würfeldiagonale zu schneiden.

13. **Das regelmäßige Oktaeder** unter Benutzung des mineralogischen Achsenkreuzes zu zeichnen: Die Hauptachse geht senkrecht aufwärts und liegt mit der Querachse in der Aufrißtafel, während die Längsachse auf ihr senkrecht steht. — In welchen der vorhergehenden Aufgaben tritt ebenfalls ein Achsenkreuz auf? An dieser Stelle kann man auf das Senkrechtstehen von Ebenen und Geraden eingehen. Soll man prüfen, ob ein

Stab auf dem Erdboden senkrecht steht, so muß man von zwei Seiten her die Richtung nachsehen; die Beobachtung führt zu dem Ergebnis: Steht eine Gerade auf zwei Geraden einer Ebene senkrecht, so steht sie auf jeder Geraden senkrecht, die in der Ebene durch ihren Fußpunkt geht, sie steht „auf der Ebene senkrecht". Beispiele: Die Gerade, die auf den Diagonalen eines Quadrats senkrecht steht, steht auch auf den Mittellinien senkrecht. — Für die in N 7 ff. angegebenen Beispiele ist für die auf der Tafel senkrechten Stäbe nachzuweisen, daß sie auf zwei Geraden der Tafel senkrecht stehen; auch ist zu zeigen, daß die Hauptachse senkrecht auf dem Grundriß und daß die Querachse senkrecht auf dem Kreuzriß steht.

Zahlreiche Aufgaben aus der Krystallographie gibt Müller-Presler[8]; sie lehren besonders, den Schnitt zweier Ebenen zu finden.

*13a. Das **Oktaeder** ist um die Hauptachse um 45° zu drehen und in dieser Stellung zu zeichnen.

Der Schnitt mit der Tafel ist ein Rhombus, dessen lange Diagonale durch die Hauptachse, dessen kürzere Diagonale durch das zwei Gegenkanten gemeinsame Mittellot gebildet wird. Man zeichne auch die in der Schnittfigur enthaltenen je zwei Gegenseiten gemeinsamen Mittellote ein.

Anmerkung. Das Oktaeder gestattet Drehungen um seine Diagonalen von 90°, 180° und 270°, um die Mittellote zweier Gegenkanten solche von 180° und um die Mittellote der Flächen solche von 120° und 240°. [Die in der Schnittfigur enthaltenen Achsen sind aufzusuchen.] Alle diese Drehungen bilden mit der Identität die „Oktaedergruppe", die mit der des Würfels übereinstimmt.[9]

14. Eine **gerade, dreiseitige Pyramide** aus der Grundkante $a = 6$ und der Höhe $h = 5$ zu zeichnen und in beliebiger Höhe durch eine zur Grundfläche parallele Ebene abzuschneiden; eine Grundkante soll in der Tafel liegen.

Wir müssen hier zuerst die Grundfläche abbilden; eine ihrer Seiten ist in der Tafel angenommen, die Gegenecke liegt senkrecht vor der Seitenmitte, um die Flächenhöhe von ihr entfernt; die Höhe des Grunddreiecks ist also i. w. Gr. zu bestimmen und in schiefer Projektion anzutragen. Die Höhe der Pyramide trifft das regelmäßige Grunddreieck in der Mitte, diese findet ihr Bild im Schwerpunkt; die Höhe ist in wahrer Länge und Richtung einzutragen. Die zur Grundfläche parallele Ebene schneidet jede Seitenfläche in einer zu ihrer Grundkante parallelen Geraden. Um die Höhe des Pyramidenstumpfes zu finden, muß man die Höhe der Pyramide

[8] Müller-Presler, a. a. O., S. 62 ff.

[9] H. Wiener, Abhandlungen, a. a. O.

mit der Deckfläche schneiden; man legt durch die Höhe und je eine Seitenkante eine Hilfsebene, diese schneidet die Grundflächen des Stumpfes in Schwerlinien; der gesuchte Schnittpunkt ist also der Schwerpunkt.

Anmerkung. Die Seitenflächen des dreiseitigen Pyramidenstumpfes dienen als Beispiel dreier Ebenen, deren Schnittgeraden durch einen Punkt gehen; wird der Pyramidenstumpf zum Prisma, so laufen die drei Schnittkanten parallel.

14a. a) Einen geraden **quadratischen Pyramidenstumpf** zu zeichnen aus den Grundkanten $a_1 = 8$, $a_2 = 2$ und der Höhe $h = 4$.

Ges. Die Höhe der Seitenfläche $[h' = 5]$ und die der Ergänzungspyramide $[h_0 = 1\frac{1}{3}]$; in welchem Verhältnis stehen die von der Spitze ausgemessenen Höhen?

b) Über zwei **kongruenten Grunddreiecken** sind **Pyramiden von gleicher Höhe** zu errichten und beide in gleicher Höhe parallel zur Grundfläche zu schneiden. [Der Höhenfußpunkt ist in jeder Grundfigur willkürlich anzunehmen.] — Ergebnis: Die Schnittfiguren sind kongruent.

15. Die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei Pyramiden (Fig. 8). Hier handelt es sich um schiefe Körper von unregelmäßiger Grundfläche; die Zeichnung ist also ganz willkürlich, doch wird man zweckmäßig die Seitenkante, welche den Zug der Flächendiagonalen schließt, als vordere annehmen, damit die mittlere Pyramide gut hervortritt; ferner lasse man die Diagonale der Rückfläche im Bilde von der vorderen Kante überschneiden, so daß nach Wegnahme der mittleren Pyramide die beiden Schnittflächen sichtbar werden; man kann sie schraffieren, oder die drei Pyramiden in der Richtung der Seitenkanten auseinanderziehen; wenn man im letzteren Fall alle sichtbaren Oberflächenstücke des Prismas schraffiert, treten die Schnittflächen sehr schön hervor. Die mittlere Pyramide ist zuerst auszuzeichnen. Strenge genommen müßte man zum Beweis des in Rede stehenden Satzes eine beliebig gegebene dreiseitige Pyramide zum Prisma ergänzen.[10] Dies kann so geschehen, daß eine Fläche der Pyramide zur Grundfläche des Prismas wird, jedoch auch derart, daß zwei seiner windschiefen Gegenkanten a und b zu Grundkanten werden. Die letztere Konstruktion liefert für das Volumen der dreiseitigen Pyramide die Formel:

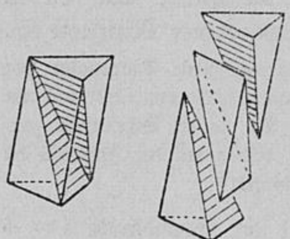


Fig. 8.

[10] Müller-Presler, a. a. O., S. 35.

$$V = \frac{h \cdot a \cdot b \sin \gamma}{6},$$

wo γ den Winkel und h den Abstand der Kanten a und b bedeutet.

16. Die Darstellung von Zylinder, Kegel und Kugel in schiefer Projektion erfordern die **Zeichnung der Ellipse.** Ein angenähertes Bild derselben gewährt schon ein schiefsymmetrisches Sechseck, dem sie umschrieben ist, oder dessen Seiten sie jeweils in deren Mitten berührt. [Vergl. N 10.]

Das Bild eines in wagerechter Ebene liegenden Kreises ist dadurch bestimmt, daß der zur Tafel parallele Durchmesser in wahrer Größe, der zu ihr senkrechte Durchmesser aber unter dem gegebenen Verzerrungswinkel und in dem gegebenen Verkürzungsverhältnis wiederzugeben ist. Wenn uns solche Zeicheninstrumente fehlen, die — wie etwa die Ellipsenschablone oder der Ellipsenzirkel — die Kurve in einem Zuge zu ziehen gestatten, so müssen wir uns auf die Konstruktion einzelner Punkte und Tangenten beschränken und das Fehlende freihändig oder mit dem Kurvenlineal ergänzen. Wir bilden deshalb das Quadrat ab, das die oben bezeichneten Kreisdurchmesser zu Mittellinien hat, sowie das Quadrat, das durch Drehung um 45° aus jenem hervorgeht. [Vergl. N 30 aus dem II. Teil dieser Arbeit.]

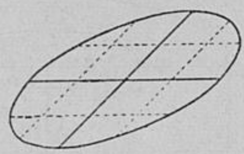


Fig. 9.

Im Interesse der Anschaulichkeit ist es oft angebracht, den Kreis wie in N 4, 5 und 6 in eine Anzahl gleicher Teile zu zerlegen und diese Gleichteilung auf das Bild zu übertragen. [Der Gleichheit der Mittelpunktswinkel entspricht bei der Ellipse die Flächengleichheit der aus dem Mittelpunkt genommenen Sektoren.] Im Schulunterricht wird man die 12-Teilung bevorzugen; sie läßt sich beim Kreis leicht nach dem Augenmaß herstellen, indem man die Mittellote der wagerechten und senkrechten Halbmesser mit dem Kreis zum Schnitt bringt. Beim Übergang zur Ellipse treten an Stelle der Lote die Parallelen zum konjugierten Durchmesser. Fig. 9. [Vergl. N 10 sowie den II. Teil dieser Arbeit.]

Als Anwendung ist ein Turm über quadratischer Grundfläche mit Zifferblatt zu zeichnen, also Kreis und Ellipse nebeneinander.

17. Die **krummflächigen Körper** wird man wohl am besten als Drehkörper einführen und den schiefen Zylinder und Kegel zunächst zurückstellen.[11] Da der Achsenschnitt eine symmetrische Figur ist, so würde

[11] So verfährt z. B. H. Thieme in seinem Leitfaden der Mathematik (I. Teil). Freytag, 1902.

er bei einer Umdrehung den Körper zweimal beschreiben, weshalb man nur die eine Hälfte der Drehung unterwirft. Um ein anschauliches Bild des Drehkörpers zu erhalten, muß man mindestens einen Bahnkreis [Grundkreis, Äquator] sowie einige Meridiane oder den Umriß zeichnen. Daß die Meridiane den Achsenschnitt teilweise verdecken oder ihn zurücktreten lassen, ist mißlich; auch bereitet es dem Anfänger Schwierigkeiten zu verstehen, daß der Umriß nicht mit dem Achsenschnitt übereinstimmt. Man wird sich deshalb bei den meisten Aufgaben mit der Skizze des Achsenschnitts begnügen, ohne das Schrägbild ganz zu verbannen. So dürfte z. B. das beistehende Bild des „Restkörpers" (Fig. 10) gute Dienste leisten. Der Verzerrungswinkel ist hier zu 0^0 angenommen, damit die Randerzeugenden des Zylinders in den Achsenschnitt fallen; die Randerzeugenden des Kegels gehören der weggeschnittenen Hälfte des Körpers an, sie kommen also in Wegfall. Die Bodenellipse kann man zur Not noch sparen, wenn man noch mehr vereinfachen will; andrerseits fällt das Bild natürlich anschaulicher aus, wenn man den Verzerrungswinkel von 30^0 beibehält und dadurch ein Stück der Außenseite des Zylinders sichtbar macht.

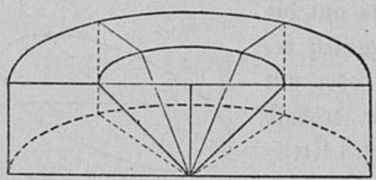


Fig. 10.

17a. Aufgaben über Achsenschnitt und Abwickelung. a) Den Achsenschnitt eines geraden Kegels zu konstruieren aus r und h; ges. s. — Umkehrungsaufgaben.

b) Die entsprechenden Aufgaben für den Kegelstumpf zu lösen, z. B. geg. r_1, r_2 und h; gesucht s.

c) Den Winkel im Achsenschnitt eines geraden Kegels zu finden aus zweien der Größen r, h und s.

d) Die entsprechenden Aufgaben für den Kegelstumpf zu lösen.

e) Aus dem Achsenschnitt eines geraden Zylinders den abgerollten Mantel zu zeichnen.

f) Ebenso für den Kegel den Winkel des abgerollten Mantels.

g) Ein Dreieck zu zeichnen, welches dem Mantel flächengleich ist.

h) Aus dem Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes den abgerollten Mantel zu zeichnen.

i) Ein Trapez zu zeichnen, welches diesem Mantel flächengleich ist.

*18. Kann man die Darstellung krummflächiger Körper eingehender behandeln, so wird man frühzeitig zur senkrechten Projektion übergehen, die für die Abbildung dieser Körper vor der schiefen Projektion den Vorzug verdient.[12] Für die Kugel habe ich dies kürzlich ausgeführt.[13] Den Ausgangspunkt bildet **die senkrechte Projektion des Kreises auf einen seiner Durchmesser.** Der Kreis liege in einer wagerechten Ebene, mit seinem Mittelpunkt in der Aufrißtafel; die Strahlen, welche den Kreis senkrecht projizieren, verlaufen ganz in seiner Ebene, und zwar senkrecht zu dem in dem Aufriß liegenden Durchmesser; die Aufgabe ist also planimetrisch in der Ebene des Kreises zu lösen. Wenn ein Punkt die Kreislinie durchläuft, etwa in einem Ende dieses Durchmessers beginnend, so beschreibt sein Bild den Durchmesser zweimal, nämlich hin und wieder zurück. Um die Anordnung der Punkte im Bilde zu beurteilen, verteilt man eine Anzahl Punkte gleichmäßig über den Kreisumfang und projiziert diese, die Ecken eines regelmäßigen Vielecks auf die Bildstrecke. Diese darf man als Symmetrieachse des Vielecks annehmen, so daß jeder vor der Tafel liegende Punkt mit einem hinter ihr gelegenen das Bild gemein hat; man hat also die hinter der Tafel liegenden Punkte nicht besonders abzubilden.

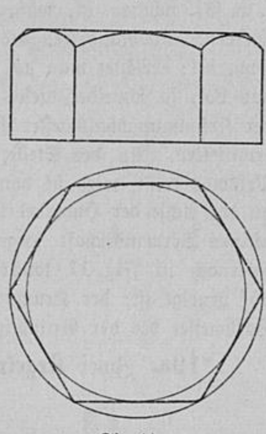


Fig. 11.

Legen wir ein Sechseck zugrunde, dessen eine Hauptdiagonale in die Tafel fällt, so bildet sich die zu ihr parallele Seite i. w. Gr. ab und aus Gründen der Symmetrie fallen die Bilder ihrer Endpunkte in die Mitten der Radien; die zur Tafel geneigten Seiten erscheinen also in halber Größe. Beim Übergang zum Zwölfeck kommt noch die Mitte als Bild des vordersten Punktes hinzu und außerdem noch zwei Punkte, die vom Rande um $(1\text{-}\cos 30^0)\cdot r = 0{,}1340\cdot r$, d. h. um etwas mehr als $\frac{1}{8}$ des Halbmessers [fast genau um das Mittel zwischen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$] entfernt sind.

Auf Grund vorstehender Anweisung kann man Kegel und Zylinder leicht abbilden.

*19. Einen **Schraubenkopf** zu zeichnen (Fig. 11); eine Hauptdiagonalebene sei der Tafel parallel.

Der Schraubenkopf ist eine sechsseitige Säule, deren obere Ecken gebrochen sind; die angefeilten Flächen sind nach oben durch die der Deck-

[12] Kullrich, a. a. O., S. 31.

[13] Balser, Die Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung, Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. 1909, 15. Jahrg., S. 15 ff.

fläche eingeschriebene Kreislinie begrenzt. Die Seitenflächen sind oben durch Bögen geschlossen, die jenen Kreis in sechs gleichweit voneinander abstehenden Punkten berühren, und das von diesen Punkten gebildete regelmäßige Sechseck ist gegen die Grundfigur um 30° verdreht. Die oberen Begrenzungen der Seitenflächen können annähernd durch Kreise ersetzt werden: die mittlere Fläche schließe man durch einen Bogen von dem Halbmesser des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises, die äußeren Flächen durch Bögen von gleicher Pfeilhöhe.

Anmerkung. Die schräg angefeilten [bezw. angedrehten] Flächen sind Stücke eines Kegelmantels; dieser schneidet die Seitenflächen in Hyperbeln, deren mittlere i. w. Gr. sichtbar ist, während die seitlichen im Verhältnis 1:2 affin verändert erscheinen. Die Randerzeugenden des Kegels sind im Bilde die Asymptoten der mittleren Hyperbel; errichtet man auf der Asymptote in dem Schnittpunkt mit der Scheiteltangente das Lot, so schneidet dieses aus der Achse die Krümmungsmitte des Scheitels aus; der Krümmungshalbmesser für den Scheitel der anderen Hyperbel beträgt $\frac{1}{4}$ des eben ermittelten. An der Stelle, wo die Randerzeugende des Kegels die Seitenkante des Prismas trifft, wird sie von der äußeren Hyperbel im Bilde berührt; die Spiegelung an der Achse der Hyperbel liefert eine zweite Tangente mit Berührpunkt und aus der affinen Verwandtschaft folgen für die mittlere Hyperbel die entsprechenden Stücke. Hiernach ist Fig. 11 konstruiert, unter der Annahme, daß die Kegelerzeugende unter 45° geneigt ist; der Krümmungsradius der mittleren Hyperbel stimmt dann mit dem Halbmesser des der Grundfigur eingeschriebenen Kreises überein.

***19a.** Zwei **Kegelräder** zu zeichnen (Fig. 12). Die Räder sind der Einfachheit halber als kongruent angenommen worden, so daß die Erzeugende gegen die größere Grundfläche um 45° geneigt ist. Die eine Achse liegt senkrecht, die andere wagerecht; die letztere stelle man zunächst parallel, dann aber auch senkrecht zur Tafel, um die Grundkreise i. w. Gr. sichtbar zu machen. Die Verzahnung wird man im Unterricht nicht wiedergeben können und deshalb Reibungsräder darstellen, obwohl diese wohl nur als Stirnräder gebräuchlich sind.

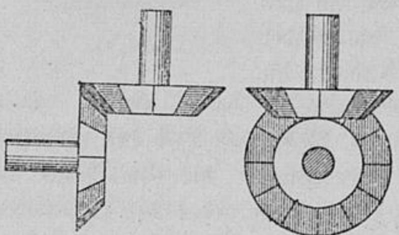


Fig. 12.

***20.** Aufgabe: Das Bild der **Schraubenlinie** zu entwerfen (Fig. 13). Ein gerader Zylinder erscheint im Aufriß als ein Rechteck, welches den Durchmesser 2 r des Grundkreises zur Grundlinie und die Höhe h des Zylinders zur Höhe hat. In die Grundkreise denke man sich das regelmäßige Zwölfeck einbeschrieben und projiziere die durch seine Ecken gehenden Erzeugenden. Die **Abwickelung** des Zylindermantels liefert ein Rechteck, welches mit dem oben besprochenen in der Höhe h übereinstimmt; seine Grundlinie ist $3\frac{1}{7}$ r, wofür man beim Skizzieren $3\frac{1}{8}$ r setzen mag. In der Abwickelung stehen die Erzeugenden gleichweit voneinander ab, weil ihre Fußpunkte gleichen Bogenabstand haben. Schneidet man nun dieses Rechteck längs der [von links unten nach rechts oben gehenden] Diagonalen auf und wickelt das untere Dreieck wieder auf den Zylinder auf, derart, daß die dem Beschauer zugekehrte Seite Außenseite wird, so legt sich die Hypotenuse in eine Schraubenlinie von der Ganghöhe h. Die Grundlinie wird zum Grundkreis und die Höhe zu der Erzeugenden, die den tiefsten und den höchsten Punkt des Schraubenganges verbindet; jede andere Erzeugende enthält nur einen Punkt der Schraubenlinie.

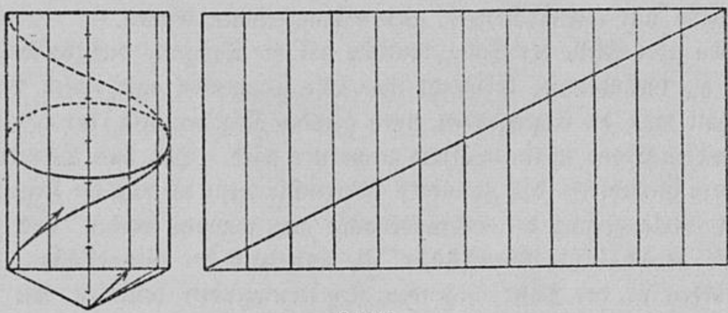


Fig. 13.

Aus der Abwickelung sieht man, daß der Höhenunterschied zweier benachbarter Punkte der Schraubenlinie unveränderlich, nämlich $\frac{1}{12}$ h ist. Trägt man nun die Punkte ihrer Höhe entsprechend in den Aufriß ein, so erhält man keine gerade Linie, weil die Erzeugenden im Aufriß verschiedenen Abstand haben, sondern eine Wellenlinie als Bild der Schraubenlinie. Nur eine Hälfte ist sichtbar, die andere ist von dem Zylinder verdeckt. Die Schraubenlinie steigt am linken Rande schräg nach vorne auf, sie scheint aber im Bilde senkrecht aufwärts zu laufen; im vordersten Punkt sieht man ihre Neigung i. w. Gr., sie stimmt also mit derjenigen der Abwickelung überein. Am rechten Rande scheint sie wieder senkrecht aufzusteigen und verschwindet hinter dem Zylinder, um im höchsten Punkt am linken Rand wieder sichtbar zu werden. Will man einen zweiten Schraubengang erhalten, so hat man die Figur kongruent zu wiederholen. Von Anwendungen sind zu empfehlen die Wendeltreppe und die flachgängige Schraube.[14]

[14] Müller-Presler, a. a. O., S. 157.

Anmerkung 1. Anstatt die Höhe der einzelnen Punkte durch Zwölfteilung der Zylinderhöhe zu ermitteln, kann man sie auch durch Projektion aus der Abwickelung finden. Dieses letztere Verfahren ist jedoch weniger genau als das erstere und vor allem schwerer verständlich, denn es setzt voraus, daß die Abwickelung in eine bestimmte Lage zum Aufriß gebracht wird.

Anmerkung 2. An dieser Stelle kann auch der Grammesche Ringanker zur Darstellung kommen.

***21.** Der Aufriß der Schraubenlinie ist bei 45° Neigung eine Sinuslinie, bei anderer Neigung aber dieser Kurve affin, er hat also die Gleichung

$$y = u \sin p\,\alpha = a \sin x,$$

wobei die x=Achse in die Schraubenachse fällt. Weil nun der Lehrer oft in die Lage kommt, diese Linien zeichnen zu müssen, mögen hier noch **Tangenten= und Krümmungskonstruktion** Platz finden, obwohl sie im Unterricht selbst nur ausnahmsweise Verwendung finden können.

An jeder Stelle der Schraubenlinie hat die Tangente dieselbe Neigung gegen die Grundebene; verschiebt man alle Tangenten nach einem Punkt, so erhält man die Erzeugenden eines geraden Kegelmantels, der von jeder wagerechten Ebene in einem Kreis geschnitten wird. Soll diese Schnittlinie mit dem Grundkreis des Zylinders übereinstimmen, so muß die Kegelspitze in der Verlängerung der Schraubenachse angenommen werden, und zwar um die „reduzierte Ganghöhe“ h_0 unterhalb der Grundfläche. Jede der beiden in der Tafel liegenden Kegelerzeugenden bestimmt mit dem Halbmesser r des Grundkreises ein rechtwinkliges Dreieck, das h_0 zur Höhe hat; daher besteht die Proportion:

$$h_0 : h = r : 2\pi r = 1 : 2\pi, \text{ also ist } h_0 = \frac{h}{2\pi}.$$

Mithin ist h_0 unabhängig von r und konstant für alle Schraubenlinien derselben Ganghöhe, wie solche z. B. bei der flachgängigen Schraube nebeneinander vorkommen.

Durchläuft ein Punkt die Schraubenlinie so wie oben angenommen, so durchläuft seine verschobene Tangente den „Richtkegel“ mit der nach vorne weisenden Erzeugenden beginnend, dem Punkt im Sinne der Drehung um 90° vorauseilend. Hiernach kann im Bilde die Tangente jedes Punktes bestimmt werden.

Die Schmiegungsebene der Schraubenlinie schneidet aus dem Schraubenzylinder eine Ellipse aus, deren Krümmung im Berührpunkt — auch in der Projektion — mit derjenigen der Schraubenlinie übereinstimmt.[15]

[15] H. Wiener, Entwicklung geometrischer Formen. Verhandl. des III. Intern. Mathematiker=Kongresses, S. 742. Teubner, 1905.

Im vordersten Punkt projiziert sich diese Ellipse als gerade Strecke in ihre große Achse, am Rande aber in eine Ellipse, deren Achsen $2r$ und $2h_0$ sind. Der Krümmungskreis dieser Ellipse im Scheitel von $2r$ gibt die Krümmung im Scheitel der Linie $y = a \cdot \sin x$.

*22. **Aufgaben über senkrechte Projektion der Kugel.** a) Die Erdkugel ist auf die Ebene eines Meridiankreises senkrecht zu projizieren und das Gradnetz in Maschen von 30° zu 30° einzutragen.

Die Parallelkreise werden durch ihre Durchmesser abgebildet, die 12=Teilung des Umrißkreises wird durch Projektion auf das Bild des Äquators übertragen; die erhaltenen Teilpunkte sind Scheitel der Meridianellipsen.

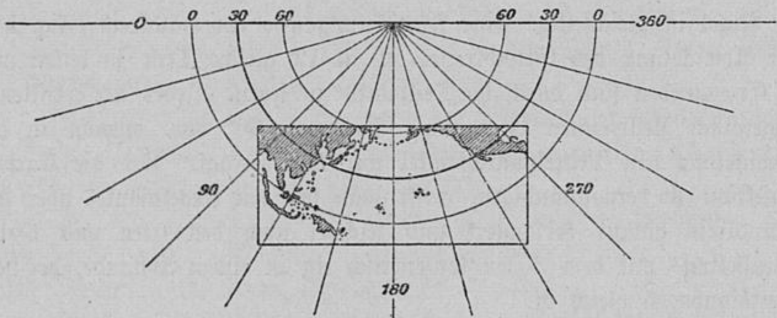


Fig. 14.

b) Die Erdkugel auf die Ebene des Äquators zu projizieren.

Die Meridiane bilden sich in die Halbmesser des Umrißkreises ab, diesen in 12 Teile zerlegend. Die Teilung wird auf einen Meridiankreis übertragen und die Parallelkreise werden durch die Teilpunkte mit dem Umriß konzentrisch eingezeichnet.

c) Von der Erdkugel sei ein Meridiankreis als Umriß mit den Polen sowie ein beliebiger Punkt P durch seine Projektion gegeben; man soll den Meridian durch P legen.[16] Man dreht den Punkt P an den Rand usw.

d) Die Erdkugel sei z. B. der Sommersonnenwende von der Sonne aus gesehen dargestellt durch den Umrißkreis und den Nordpol; man soll den Äquator finden.

Man legt durch den Pol N den Großkreis, der auf der Tafel senkrecht steht; sein Bild ist der durch N laufende Durchmesser; auf ihm geht man von N aus um 90° weiter und findet den Scheitel der Äquatorellipse; ihre kleine Achse stimmt mit der durch N gehenden kürzesten Kreissehne überein.

[16] Balser, a. a. O., S. 17.

e) Zu einem Kugeldreieck, welches einen Bogen des Umrißkreises zur Seite hat, ist das Poldreieck gesucht.

Die Polaren der auf dem Umriß liegenden Ecken bilden sich als Durchmesser ab; die Polare der dritten Ecke ist nach (4) zu finden.

Anmerkung. Man vergleiche N 35 dieser Arbeit.

*23. **Kegelprojektion.** An das Bild der Erdkugel soll der längs des 30ten Parallelkreises berührende Kegel angelegt und dann abgewickelt werden. Das Gradnetz ist in Maschen von 30° zu 30° angenommen.

Die Kugel erscheint als Kreis, die Parallelkreise werden durch ihre Durchmesser abgebildet. Die Seitenlinie s des berührenden Kegels stimmt in unserem Sonderfall mit dem Durchmesser des Parallelkreises überein; der Kegel ist gleichseitig, seine Abwickelung also ein Halbkreis (Fig. 14). Die Abwickelung des Grundkreises ist in 12 gleiche Teile zu teilen und die Erzeugenden sind durch die Teilpunkte zu legen. Jedes der erhaltenen Bogenstücke stellt einen Längenunterschied von 30° vor, obwohl in der Abwickelung sein Mittelpunktswinkel nur 15° beträgt. Um die Kartenprojektion zu vervollständigen, denkt man sich den Kegelmantel über den Grundkreis hinaus verlängert und zeichnet noch den 0ten und 60ten Parallelkreis mit dem 30ten konzentrisch ein in einem Abstande, der dem Meridianbogen gleich ist.

II. Die Ellipse als affines Bild des Kreises.

24. Die nachstehenden Ableitungen stützen sich auf folgende **Sätze über Parallelprojektion:**

a) Das Bild einer Geraden ist wieder eine Gerade.
Die gegebene Gerade bestimmt nämlich mit einem sie treffenden Sehstrahl eine Ebene, die Sehstrahlebene; diese schneidet die Tafel in der Bildgeraden.

b) Die Bilder paralleler Geraden sind parallel [als Schnitte paralleler Sehstrahlebenen].

c) Das Bild des Mittelpunkts einer Strecke ist die Mitte der Bildstrecke. [Die Sehstrahlen, welche die Enden einer Strecke projizieren, bilden die Grundlinien eines Trapezes, dessen Mittellinie den Mittelpunkt projiziert.]

Man hat demnach in der Parallelprojektion oder in der Affinität ein Mittel, um zu beweisen, daß eine Strecke halbiert ist oder daß zwei Geraden parallel laufen.

Nun sollen die Eigenschaften des Kreises auf sein Bild in Parallelprojektion übertragen werden, auf die aus dem Zeichenunterricht bekannte Ellipse; wir definieren daher die Ellipse als affines Bild des Kreises.[17] Die Übereinstimmung dieser Erklärung mit der von den Brennpunkten ausgehenden wird sich nachträglich ergeben. Der Kreis erscheint unserer Erklärung zufolge als Sonderfall der Ellipse.

25. Die Grundeigenschaft des Kreises, daß alle seine Halbmesser gleich sind, kann sich auf sein Bild i. a. nicht übertragen, weil dieses eben kein Kreis ist. Da man aber weiß, daß die Mitte einer Strecke in die Mitte der Bildstrecke übergeht, wird man von dem Kreisdurchmesser ausgehen und erhält den

Satz: Die Ellipse hat einen Mittelpunkt, nämlich das Bild der Kreismitte; alle durch diesen Punkt gehenden Sehnen — die **Ellipsendurchmesser** — halbieren sich gegenseitig.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Ellipse durch jeden Durchmesser in zwei kongruente Hälften geteilt wird, die durch Umdrehung um die Mitte ineinander übergehen (Fig. 15).

26. Die Lehrsätze von der Kreistangente und der Kreissehne werden erst durch den Vergleich mit der Ellipse ins rechte Licht gerückt, insofern bei letzterer der Halbmesser zum Berührpunkt der Tangente von der Kurvennormalen und von dem aus dem Mittelpunkt auf die Tangente gefällten Lot sinnlich unterschieden werden kann. Um jetzt die beiden Kurven gemeinsame Tangenteneigenschaft zu finden, geht man wieder von dem Durchmesser aus und erhält den

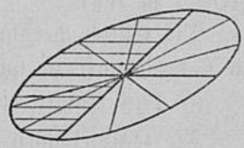


Fig. 15.

Satz: **Die Tangenten** in den Enden eines Durchmessers sind parallel [da parallele Geraden durch ebensolche abgebildet werden].
Zusatz: Die diesen Tangenten parallelen Sehnen werden durch den Durchmesser halbiert.

27. Aufgaben. a) Gegeben ist ein beliebiges Dreieck, gesucht ein regelmäßiges Dreieck als affines Urbild des gegebenen, d. h. ein solches, aus dem das gegebene durch Parallelprojektion hervorgeht.

Als Lösung kann das über einer Seite der gegebenen Figur errichtete regelmäßige Dreieck gelten; man drehe es um die gemeinsame Grundlinie

[17] Vergl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, III, S. 427. Teubner, 1907. Von der dort gegebenen Darstellung unterscheidet sich die vorliegende besonders durch die Hervorhebung des pädagogischen Elements.

aus der Tafelebene heraus und wähle die Verbindungslinie der Spitzen als Sehstrahlrichtung.

b) Welches sind die **Abbilder der Symmetrielinien** des regelmäßigen Dreiecks? — Die Schwerlinien.

Anmerkung. Der Satz, daß die Schwerpunktstransversalen eines Dreiecks durch einen Punkt gehen, folgt aus der affinen Abbildung des regelmäßigen Dreiecks unter Vermeidung des Proportionalitätslehrsatzes; seine Begründung wird damit von dem Begriff der irrationalen Maßzahl losgelöst, von dem der Satz unabhängig ist.

c) Gegeben ist ein Dreieck als affines Abbild eines regelmäßigen Dreiecks; gesucht sind von dem **Bild seines Umkreises** sechs Punkte samt Tangenten.

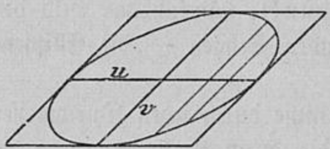


Fig. 16.

Die Mitte der Bildellipse ist der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks; spiegelt man seine Ecken an diesem Punkt, so erhält man die fehlenden Punkte der Ellipse; die Tangenten laufen paarweise den Seiten parallel.

d) Die entsprechende Aufgabe für den **Inkreis** des regelmäßigen Dreiecks zu lösen.

Die Ellipse berührt jede Seite in der Mitte; diese ist samt der Seite am Schwerpunkt zu spiegeln.

e) Das Abbild eines **Ankreises** ist gesucht.

Die Halbierenden der Innenwinkel des gleichseitigen Dreiecks gehen in die Schwerlinien, diejenigen der Außenwinkel in die Parallelen zu den Seiten über; die Halbmesser zu den Berührpunkten laufen den Schwerlinien parallel.

Anmerkung. Hier liegt es nahe, darauf hinzuweisen, daß die Ankreisbilder einander kongruent und dem Inkreisbild perspektiv ähnlich sind mit dem Ähnlichkeitsverhältnis 3 : 1.

f) Zu einem beliebig gegebenen **Parallelogramm** ist ein **Quadrat als affines Urbild** zu konstruieren und dessen Umkreis und Inkreis abzubilden.

28. Die beiden Hälften, in die eine Ellipse (Fig. 16) durch einen ihrer Durchmesser 2 u zerfällt, lassen sich nicht durch Umklappung um diesen Durchmesser zur Deckung bringen, weil die von ihm halbierten Sehnen i. a. schief zum Durchmesser liegen [schiefe Spiegelung]. Jedem Durchmesser ist also eine bestimmte Richtung zugeordnet oder „konjugiert“, nämlich die Richtung der in seinen Endpunkten gezogenen Tangenten und der von ihm halbierten Sehnen. Unter diesen Sehnen ist ein Durchmesser 2 v enthalten; 2 u und 2 v sind also Abbilder senkrechter Kreisdurchmesser. Das Parallelogramm, welches 2 u und 2 v zu Mittellinien hat, ist das Abbild eines dem Kreis umschriebenen Quadrats; daher sind seine zu u parallelen Seiten die Ellipsentangenten in den Enden des Durchmessers 2 v. Mithin ist die Richtung von u dem Durchmesser 2 v konjugiert.

Erklärung. Die Abbilder senkrechter Kreisdurchmesser nennt man **konjugierte Durchmesser.**

Folgerung. Je zwei konjugierte Durchmesser sind einander wechselweise zugeordnet.

Anmerkung. Es sei gestattet, an dieser Stelle die Verwendung der Mittellinien des Parallelogramms im Unterricht zu empfehlen. Die Mittellinien werden durch die Diagonalen harmonisch getrennt; da nun auch umgekehrt zwei harmonische Strahlenpaare als Mittellinien und Diagonalen von Parallelogrammen dienen können, hat man in dieser Eigenschaft eine Definition harmonischer Strahlenpaare und somit eine elementare und zugleich maßzahlfreie Einführung harmonischer Stücke überhaupt.[18] Aber schon auf der Unterstufe dürfte es sich empfehlen, die durch die Mitte eines Parallelogramms zu den Seiten gezogenen Parallelen als Mittellinien einzuführen und zu zeigen, daß sie die Seiten halbieren, daß sie sich wechselweise halbieren, also die Diagonalen eines Parallelogramms sind und daß sie im Rechteck Achsen sind. Die Mittellinie eines Dreiecks ergibt sich dann ganz von selbst, weil dieses durch Spiegelung an der Mitte einer Dreiecksseite zum Parallelogramm ergänzt werden kann, und das Trapez erledigt sich durch Zerlegung in zwei Dreiecke. Es scheint mir zweckmäßig, die auch für den Proportionalitätslehrsatz grundlegenden Sätze von der Mittellinie an die Lehre vom Parallelogramm anzuschließen, das im Mittelpunkt des ganzen Kapitels steht. Bringt man die Mittellinie erst bei dem Trapez, so fehlt der Begriff, wenn er beim Rechteck gebraucht wird.

29. Aufgaben und Erklärung. Folgende für die Ellipse gültigen Sätze sind zu beweisen:

a) Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf dem der Sehne konjugierten Durchmesser.

b) Ist ein Parallelogramm einer Ellipse eingeschrieben, so sind seine Mittellinien konjugierte Durchmesser der Ellipse. [Das Parallelogramm ist das Abbild eines Rechtecks.]

c) Ist ein Parallelogramm einer Ellipse umschrieben, so sind seine Diagonalen konjugierte Durchmesser. [Das Urbild des Parallelogramms ist ein Rhombus.]

---

[18] H. Wiener, Abhandlungen usw., S. 70.

d) Wenn in einem der Ellipse umschriebenen Parallelogramm auch die Mittellinien konjugiert sind, so ist es das Abbild eines Quadrats.

Erklärung. Ein Parallelogramm, dessen Mittellinien konjugierte Ellipsendurchmesser sind, heißt konjugiert umschrieben.

30. Skizzierung der Ellipse. Für die Zeichnung der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern ist die Lösung der folgenden Aufgabe von Wichtigkeit.

Aufgabe. Von einer Ellipse sei ein konjugiert umschriebenes Parallelogramm gegeben; es soll eine zweite ebensolche Figur konstruiert werden, welche mit der ersten zusammen das affine Abbild eines **regelmäßigen Sternachteckes** bildet (Fig. 17).

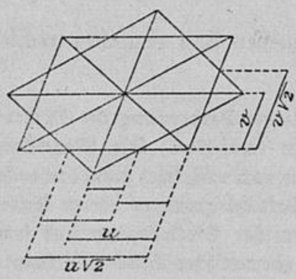


Fig. 17.

Das regelmäßige Sternachteck besteht aus zwei Quadraten, die um 45° gegeneinander verdreht sind; es fallen also auch im affinen Bild die Diagonalen des zweiten Parallelogramms auf die Mittellinien des ersten, und jede Diagonale steht zu der in ihr liegenden Mittellinie im Verhältnis $\sqrt{2}:1$. Haben die Mittellinien des gegebenen Parallelogramms die Längen $2u$ und $2v$, so sind die Ecken des gesuchten Parallelogramms um $\pm u\sqrt{2}$ und $\pm v\sqrt{2}$ von der Ellipsenmitte entfernt, so daß man diese Entfernungen als Hypotenusen gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke mit den Katheten u bezw. v findet.[19]

Anmerkung 1. Die Richtigkeit vorstehender Konstruktion ergibt sich daraus, daß Teilverhältnisse auf ein und derselben oder auf parallelen Geraden bei affiner Abbildung erhalten bleiben (affine Punktreihen sind ähnlich). Bei der Anwendung auf stereometrische Aufgaben aber kommt man ohne diesen Satz aus. Es liegt nämlich ein Durchmesser — etwa $2u$ — in der Tafel oder ihr parallel, so daß seine Punkte kongruent abgebildet werden; weil außerdem die Seiten des „verschränkten" Parallelogramms den Diagonalen des gegebenen parallel sind, überträgt sich das Teilverhältnis $\sqrt{2}:1$ auf das Bild des senkrecht zur Tafel liegenden Durchmessers.

Ist das gegebene Parallelogramm das konjugiert umschriebene Rechteck, so ist das andere das konjugiert umschriebene Rhombus; sind umgekehrt die gegebenen Ellipsendurchmesser gleichlang, so daß die Tangenten in ihren Enden ein konjugiert umschriebenes Rhombus bilden, so wird dieses durch das konjugiert umschriebene Rechteck zum Sternachteck er-

[19] Chr. Wiener, Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Karlsruhe, Band XI: „Über die Schönheit der Linien", Anhang 1890 (1891), u. H. Wiener, Abhandlungen usw., S. 58.

gänzt, die Diagonalen des Rhombus sind also die Achsen der Ellipse und die Seiten des Rechtecks die Scheiteltangenten; die Seitenmitten des Rhombus werden Diagonalpunkte genannt. [Vergleiche auch N 36.]

Anmerkung 2. Es ist praktisch von Wichtigkeit, das Sternachteck aus dem Parallelogramm leicht skizzieren zu können; dies geschieht, indem man auf der Seite $2u$ von der Ecke aus $u\sqrt{2}$ schätzungsweise aufträgt. Es muß dann (siehe die Figur) der Überschuß von $u\sqrt{2}$ über die halbe Seite kleiner sein als der Rest, den die ganze Seite $2u$ läßt, und dieser Rest muß kleiner sein als die Seite des Achtecks; hiernach läßt sich das Teilverhältnis sehr genau treffen.

Anmerkung 3. Übungen im Zeichnen von Ellipsen in stereometrischer Einkleidung mögen in den theoretischen Lehrgang eingestreut werden; man vergleiche den ersten Teil dieser Arbeit.

31. Wie soll man nun **zu einem Ellipsendurchmesser den konjugierten finden?** Geht man wieder auf den Kreis zurück, so hat man die Konstruktion des rechten Winkels zu ersetzen durch das Ziehen paralleler Geraden und das Halbieren oder Verdoppeln von Strecken. Dies hat Steiner[20] ausgeführt unter der Voraussetzung, daß ein Quadrat gezeichnet vorliegt, und H. Wiener[21] hat diesen Gedanken auf die vorliegende Aufgabe angewandt. Man denke sich (Fig. 18) dem abzubildenden Kreis ein Quadrat umschrieben; um nun zu einem beliebigen Durchmesser $2u_0$ den senkrechten Durchmesser $2v_0$ zu finden, schneide man ihn mit einer Seite des Quadrats, projiziere den Schnittpunkt

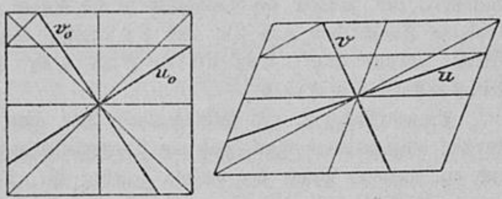


Fig. 18.

parallel mit einer Nachbarseite auf die Gegenseite und von da parallel einer Diagonale auf die Nachbarseite; dann geht durch den so gefundenen Punkt der gesuchte Durchmesser $2v_0$. Diese Konstruktion läuft darauf hinaus, daß $2u_0$ zuerst an einer Mittellinie und dann an einer Diagonale nach $2v_0$ gespiegelt wird, also an zwei Geraden, die einen Winkel von 45^0 bilden; die Folge dieser Spiegelungen ist eine Drehung von 90^0. Bildet man die ganze Figur affin ab, so geht die senkrechte Spiegelung in schiefe Spiegelung über. Für den Schüler ist es einleuchtender, daß sich die

[20] Jak. Steiner, „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“, § 9 (1833), Ges. Werke I, S. 477.

[21] H. Wiener, Abhandlungen usw., S. 70.

Konstruktion selbst durch Parallelprojektion auf die Ellipse wörtlich übertragen läßt.

32. Nach dem **Lehrsatz des Thales** kann man einen Kreis punktweise aus den Enden eines Durchmessers erhalten, indem man je zwei durch diese Punkte gehende Strahlen zum Schnitt bringt, die aufeinander senkrecht stehen. Da senkrechte Geraden durch Parallelprojektion in konjugierte übergehen, so folgt für die Ellipse der Satz:

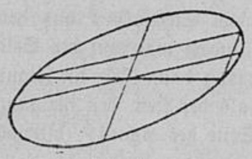


Fig. 19.

Die Sehnen, welche die Enden eines Durchmessers mit einem Punkte der Ellipse verbinden, haben konjugierte Richtung, und umgekehrt, zieht man durch die Enden eines Durchmessers Strahlen, die paarweise konjugiert sind, so schneiden sie sich auf der Ellipse (Fig. 19).

Wenn also von einer Ellipse zwei konjugierte Durchmesser nach Länge und Richtung gegeben sind, so ist sie eindeutig bestimmt.

Anmerkung 1. Zeichnet man aus beliebigen sich wechselweise halbierenden Strecken $2u$ und $2v$ als Mittellinien das Parallelogramm und errichtet über einer Seite das Quadrat, so wird dieselbe Affinität, die das Quadrat in das Parallelogramm überführt, den Inkreis des Quadrats in die Kurve abbilden, die man nach den vorstehenden Vorschriften aus $2u$ und $2v$ erhält. Eine solche Kurve ist also stets eine Ellipse; daraus folgt: Das affine Bild einer Ellipse ist eine Ellipse, im Sonderfall ein Kreis.

Anmerkung 2. J. Wellstein[22] gibt eine einfache Konstruktion der Ellipse für den allgemeineren Fall, daß ein Durchmesser nebst der ihm konjugierten Richtung und ein weiterer Punkt der Ellipse gegeben ist. Das Verfahren beruht darauf, daß jedes vollständige Viereck (oder jedes Dreieck samt drei durch einen Punkt gehenden Ecktransversalen) als affines Bild eines Höhenvierecks, d. h. eines Dreiecks mit Höhenpunkt gelten kann. Dem Schüler dürfte aber der hier eingeschlagene Weg verständlicher sein.

33. Achsen der Ellipse. Projiziert man einen Kreis senkrecht, so gehen diejenigen beiden aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser, deren einer der Tafel parallel ist, in senkrechte Ellipsendurchmesser über, in die „Achsen" der Ellipse, d. h. in die beiden konjugierten Durchmesser, die aufeinander senkrecht stehen. Hat jede Ellipse, auch eine durch schiefe Projektion des Kreises entstandene, Achsen, und wie findet man sie?

Dem zu projizierenden Kreise sei ein Quadrat umschrieben derart, daß zwei Gegenseiten der Tafel parallel laufen. Ohne das Bild zu ändern,

---

[22] Weber u. Wellstein, a. a. O., S. 428.

kann man die Kreisebene in der Sehstrahlrichtung parallel verschieben und dadurch eine Quadratseite in die Tafel verlegen. Das Abbild des Quadrats ist dann ein Parallelogramm, welches eine Seite mit dem Quadrat gemein hat; auf dieser Seite oder ihrer Verlängerung — auf der Spur s — schneidet dann jede Gerade der Kreisebene ihr Bild, wenn nicht beide der Spur parallel laufen. Wir legen endlich die Kreisebene um die Spur in die Tafel um (Fig. 20). Sollen nun zwei aufeinander senkrechte Kreisdurchmesser in ebensolche Ellipsendurchmesser abgebildet werden, so muß der über der Entfernung der Spurpunkte als Durchmesser errichtete „Hilfskreis" die Mitte O des Quadrats und die Mitte M des Parallelogramms enthalten. Umgekehrt schneidet der Hilfskreis, der durch die beiden Mitten O und M geht und die Spur s zur Zentralen hat, die Spurpunkte der Achsen aus. Die Längen a und b der Halbachsen können aus den Kreisradien ermittelt werden, deren Abbilder sie sind.

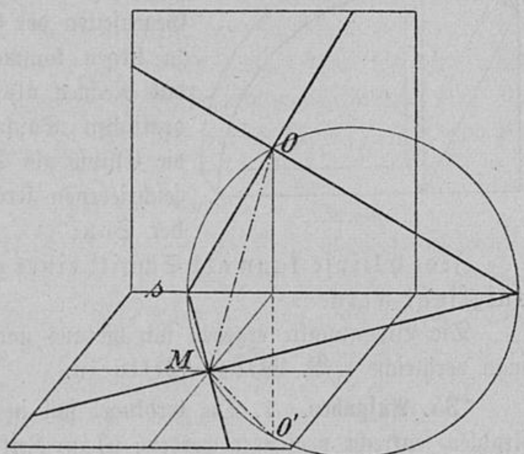


Fig. 20.

Anmerkung 1. Spiegelt man die Mitte O des Quadrats an der Spur s nach O', so liegt auch dieser Punkt auf dem Hilfskreis und kann daher zur Konstruktion benutzt werden. Außerdem geben die Halbierenden des Winkels O M O' und seines Nebenwinkels die Achsenrichtungen; endlich ist

$$M O = \tfrac{1}{2}(a + b), \quad M O' = \tfrac{1}{2}(a - b).$$

Anmerkung 2. Der Existenzbeweis der Achsen sollte nicht unterdrückt werden, obwohl die Konstruktion nur selten im Unterricht Verwendung finden wird. Zu empfehlen ist die schätzungsweise Einzeichnung der Achsenrichtungen; die große Achse liegt in den beiden spitzen Winkeln, welche die Diagonalen bezw. die Mittellinien des gegebenen Parallelogramms bilden. Hiernach ist leicht die Mittellinie und die Diagonale zu finden, welche die große Achse in ihrem spitzen Winkel einschließen; die Normalen dieser Linien enthalten die kleine Achse, für deren Einzeichnung nur ein kleiner Spielraum bleibt; die große Achse wird als Lot der kleinen Achse gefunden. Da die Ellipse zu den Achsen symmetrisch ist und sie rechtwinklig schneidet, kann man mit ihrer Hilfe die Kurve aus dem konjugiert umschriebenen Parallelogramm scharf treffen.

34. Brennpunkte der Ellipse. Die Achsen der Ellipse sind die Mittellinien des konjugiert umschriebenen Rechtecks; man denke sich über der kleineren Seite dieses Rechtecks das Quadrat errichtet und dann das Rechteck um die gemeinsame Seite soweit gedreht, daß die Gegenseiten der Spur senkrecht übereinander zu liegen kommen (Fig. 21). Jetzt kann das Rechteck als schiefer Schnitt einer quadratischen Säule aufgefaßt werden, und die Ellipse als Schnitt des der Säule eingeschriebenen Kreiszylinders. Hieraus folgt der Satz:

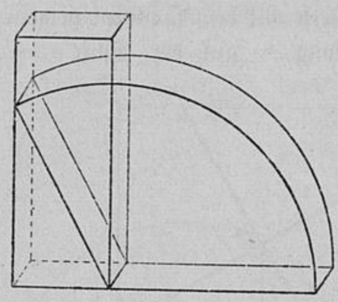


Fig. 21.

Jede Ellipse kann als Schnitt eines geraden Kreiszylinders aufgefaßt werden.

Die Brennpunkte ergeben sich hieraus nach Danderlins Verfahren; man vergleiche z. B. Weber-Wellstein.

***35. Aufgaben.** 1. Die Erdkugel soll in der Richtung der Sonnenstrahlen senkrecht projiziert werden: a) zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche, b) zur Zeit der Sommersonnenwende.

Zu a): Die Achse der Ekliptik sei scheitelrecht angenommen, die Erdachse also um $23^1/_2{}^0$ gegen die Scheitellinie geneigt; das Gradnetz werde in Maschen von 30^0 zu 30^0 gezeichnet.

Zu b): Zur Konstruktion des Bildes kann die vorige Zeichnung (als Kreuzriß) benutzt werden; außer dem Umriß stellen wir nur einige Parallelkreise dar. Sie erscheinen als ähnliche, ähnlich liegende Ellipsen; die Äquatorellipse berührt den Umrißkreis in den Enden des wagerechten Durchmessers, beim Übergang zu den Parallelkreisen der heißen und der gemäßigten Zone rücken die Berührpunkte aus der großen Achse der Ellipse nach oben, um für den Polarkreis in dem obersten Punkt des Umrisses zusammenzufallen, so daß der Umrißkreis der Krümmungskreis der Bildellipse ist. Die Parallelkreise der kalten Zone sind ganz sichtbar, sie berühren den Umriß nicht mehr, umschließen den Nordpol und schrumpfen schließlich in diesen Punkt zusammen.

2. Die Erdkugel soll schief auf die Ebene des Äquators projiziert werden.

Der Umriß ist eine Ellipse, die Parallelkreise bilden sich kongruent ab; der Äquator und die folgenden Parallelkreise berühren die Umrißellipse; der Parallelkreis, der von den Lichtstrahlen gerade gestreift wird, erscheint als Krümmungskreis im Scheitel der großen Achse; die höheren Parallelkreise umschließen den Pol, allmählich in diesen Punkt übergehend.

36. Krümmung. Zum genauen Zeichnen der Ellipse braucht man Krümmungskreise; ein Eingehen auf diesen Begriff ist aber auch für das Verständnis der Erdabplattung nützlich. Die Krümmungsmitten der Scheitel werden durch Lote ausgeschnitten, die man aus den Ecken des konjugiert umschriebenen Rechtecks auf die Diagonale fällt, die nicht durch die betreffende Ecke hindurchgeht. Die Krümmungshalbmesser [r_1 für den Scheitel der kleinen, r_2 für den der großen Achse] folgen aus der Proportion:

$$a : b = r_1 : a = b : r_2.$$

Die Richtigkeit der Gleichung $b \cdot r_1 = a^2$ kann aus der senkrechten Projektion der Kugel im Anschluß an die erste Aufgabe des vorigen Paragraphen gefolgert werden.[23] Wir sahen nämlich, daß die den Polarkreis darstellende Ellipse den Kugelumriß zum Krümmungskreis im Scheitel der kleinen Achse hat. Nun bestimmt aber der Kugelradius r_1 mit dem Halbmesser a des Parallelkreises ein rechtwinkliges Dreieck, das r_1 zur Hypotenuse, a zur einen Kathete und die kleine Halbachse b des Parallelkreisbildes zur zugehörigen Kathetenprojektion hat; die andere Kathete liegt in der Erdachse. Da man umgekehrt jede Ellipse auf die angegebene Weise kann entstehen lassen, so folgt allgemein $r_1 = \frac{a^2}{b}$.

Ganz ähnlich geht die Formel $b^2 = a \cdot r_2$ aus der Aufgabe 2 hervor durch schiefe Projektion der Kugel.

Hier ist die große Halbachse a der Umrißellipse Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der den Scheitel treffende Sehstrahl und dessen andere Kathete der zu diesem Sehstrahl senkrechte Kugelhalbmesser b ist; die Kathetenprojektion von b ist der Halbmesser r_2 des Parallelkreises, also $b^2 = a \cdot r_2$.

Anmerkung. Die Krümmungsmitte eines Diagonalpunktes [vergl. N 30] wird auf seiner Normalen als Mitte der Strecke bestimmt, welche aus ihr die Achsen ausschneiden.[24]

37. Schlußbemerkung. Der Übergang zur rechnenden Behandlung läßt sich bereits nach N 33 mit Hilfe des über einer Achse errichteten Kreises bewerkstelligen, oder nach 34 auf Grund der Brenn-

[23] Diesen sowie den folgenden Beweis verdanke ich Herrn H. Wiener.

[24] Vergl. die Fußnote S. 24.

punktseigenschaften. Will man darauf eingehen, daß das Verhältnis der Flächen bei affiner Abbildung unverändert bleibt, so findet man, daß alle konjugiert umschriebenen Parallelogramme inhaltsgleich sind und daß sie zur Fläche der Ellipse in demselben Verhältnis stehen wie ein Quadrat zu dem ihm eingeschriebenen Kreis.

Aus der Proportion

$\pi r^2 : 4 r^2 = E : 4ab$ folgt für die Fläche der Ellipse $E = ab\pi$.

punktseigenschaften … Verhältnis der Flächen bei affin… ndet man, daß alle konjugiert un… sind und daß sie zur Fläche der… wie ein Quadrat zu dem ihm einge…

Aus der Pr…

$\pi r^2 : 4 r^2 = E$ … $E = a b \pi$.