Beiträge zur Methodik des Unterrichts in der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

A. Ebene Trigonometrie.

I. Berechnung der trigonometrischen Funktionen eines Winkels aus einer gegebenen Funktion.

Die Lösung dieser Aufgabe wird wesentlich erleichtert durch die Anwendung der Funktionen Kosekante und Sekante. Es ist $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ und $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$. Bezeichnet man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit c und die Katheten mit a und b, so ist $a^2 + b^2 = c^2$. Wird diese Relation der Reihe nach durch c^2, b^2, a^2 dividiert, so ergibt sich:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \text{ oder } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2} \text{ oder } \operatorname{tang}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha,$$

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \text{ oder } 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Die acht in Betracht kommenden Formeln sind:

$$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1 \qquad 1 + \operatorname{tang}^2\alpha = \sec^2\alpha$$

$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Ist irgendeine Funktion gegeben, so hat man ohne weiteres die zugehörige reziproke Funktion, und die übrigen vier Funktionen werden dann gefunden, wenn einer der beiden Werte in eine geeignete Formel eingesetzt wird.

Beispiel. Gegeben $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

Es ist $\sec\alpha = \frac{13}{5}$. Setzt man diesen Wert in die Formel $1 + \operatorname{tang}^2\alpha = \sec^2\alpha$ ein, so ergibt sich $1 + \operatorname{tang}^2\alpha = \frac{169}{25}$, woraus $\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{144}{25}$, also $\operatorname{tang}\alpha = \frac{12}{5}$*). Ferner $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{5}{12}$, und aus

*) Es wird hier vorläufig nur das + Zeichen genommen.

$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$ folgt $1 + \frac{25}{144} = \operatorname{cosec}^2\alpha$, woraus $\operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{169}{144}$, also $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$, und daher $\sin\alpha = \frac{12}{13}$. Oder aus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt $\sin^2\alpha + \frac{25}{169} = 1$, also $\sin^2\alpha = \frac{144}{169}$ und $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, und dann $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$. Oder aus $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$ folgt $\sin\alpha = \frac{5}{13}\cdot\frac{12}{5} = \frac{12}{13}$, und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$.

II. Veränderung der trigonometrischen Funktionen bei zunehmendem und abnehmendem spitzen Winkel.

Um diese Veränderungen zu zeigen, kann man die Schenkel des Winkels als Radien eines Kreises ansehen; es ist dabei noch nicht nötig, die Länge des Radius als Maßeinheit zu nehmen.

1) In Fig. 1 ist $\sin\alpha = \frac{AB}{OA}$ und $\sin\alpha' = \frac{A'B'}{OA'}$, woraus folgt $\sin\alpha' > \sin\alpha$. Ebenso ist $\cos\alpha = \frac{OB}{OA}$ und $\cos\alpha' = \frac{OB'}{OA'}$, woraus folgt $\cos\alpha' < \cos\alpha$. Auch die Grenzwerte der Funktionen für einen

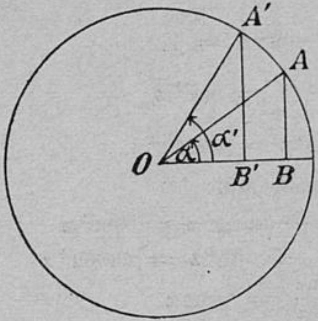

Fig. 1.

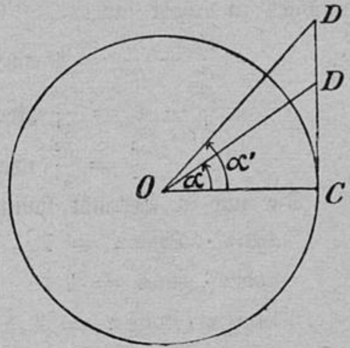

Fig. 2.

spitzen Winkel lassen sich aus der Figur bestimmen. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r, so ist $\sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$ und $\cos 0^\circ = \frac{r}{r} = 1$; ebenso $\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$ und $\cos 90^0 = \frac{0}{r} = 1$.

2) Die Veränderung der Funktionen $\sec\alpha$ und $\operatorname{cosec}\alpha$ und die Grenzwerte können nach derselben Figur bestimmt werden.

3) In Fig. 2 ist $\operatorname{tang}\alpha = \frac{CD}{OC}$ und $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{CD'}{OC}$, also $\operatorname{tang}\alpha' > \operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{OC}{CD}$ und $\operatorname{cotg}\alpha' = \frac{OC}{CD'}$, also $\operatorname{cotg}\alpha' < \operatorname{cotg}\alpha$.

Ferner ist $\operatorname{tang} 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$ und $\operatorname{cotg} 0^\circ = \frac{r}{0} = \infty$. Ebenso ist $\operatorname{tang} 90^\circ = \frac{\infty}{r} = \infty$ und $\operatorname{cotg} 90^\circ = \frac{r}{\infty} = 0$.

Anmerkung. Sobald alle Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels zum Verständnis gebracht sind, kann die Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks vorgenommen werden; für den Anfang empfiehlt es sich, dabei nicht sofort Logarithmen der trigonometrischen Funktionen anzuwenden, sondern erst die natürlichen Werte derselben zu benutzen.

III. Darstellung der trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels durch die Maßzahlen von Strecken.

Nimmt man den Radius des Kreises als Maßeinheit an, so ist die Maßzahl der Kathete BC in Fig. 3 gleich dem Sinus des spitzen Winkels α, die Maßzahl der Projektion des zweiten Schenkels OB auf den Anfangsschenkel des Winkels α, OC, ist der Kosinus des Winkels α. Errichtet man die geometrische Tangente im Endpunkte des Anfangsschenkels bis zum Schnittpunkte mit dem zweiten Schenkel, AD, so ist die

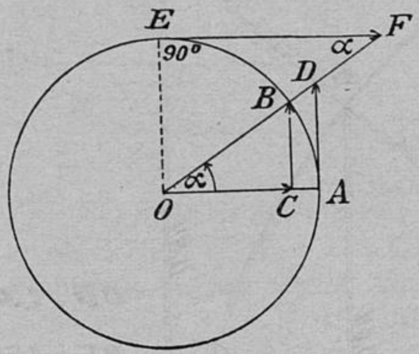

Fig. 3.

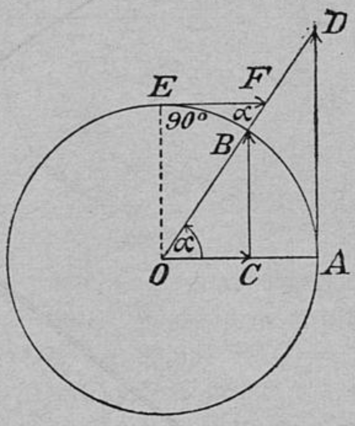

Fig. 4.

Maßzahl derselben die trigonometrische Tangente des Winkels α. Macht man die analoge Konstruktion für den Komplementwinkel des Winkels α, $\sphericalangle$ BOE, so ist die Maßzahl der Tangente EF gleich der Kotangente des Winkels α. In Fig. 3 ist ein Winkel gewählt, der kleiner ist als 45°. Es empfiehlt sich, auch diese graphische Darstellung für einen Winkel über 45° auszuführen (Fig. 4) und für einen Winkel von 45° (Fig. 5). In dem letzteren Falle werden die Relationen $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ und tang 45° = cotg 45° bestätigt. Um die Maßzahlen für die trigonometrischen Funktionen eines spitzen Winkels durch die angegebenen Konstruktionen durch Messung zu erhalten, empfiehlt es sich, daß diese Darstellung an einem Winkel von 40° in einem Kreise mit dem Radius 1 dm ausgeführt wird. Dann werden die betreffenden Strecken in Zentimetern gemessen und in Dezimeter verwandelt. In Fig. 6 sind diese Konstruktionen ausgeführt, wobei sich folgende Zahlen ergeben: sin 40° = BC = 0,64; cos 40° = OC = 0,77; tang 40° = AD = 0,84;

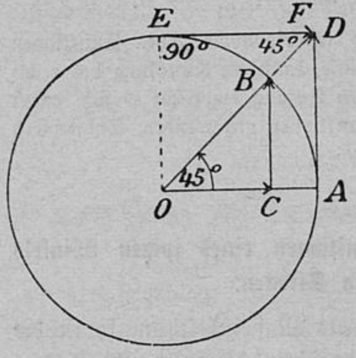

Fig. 5.

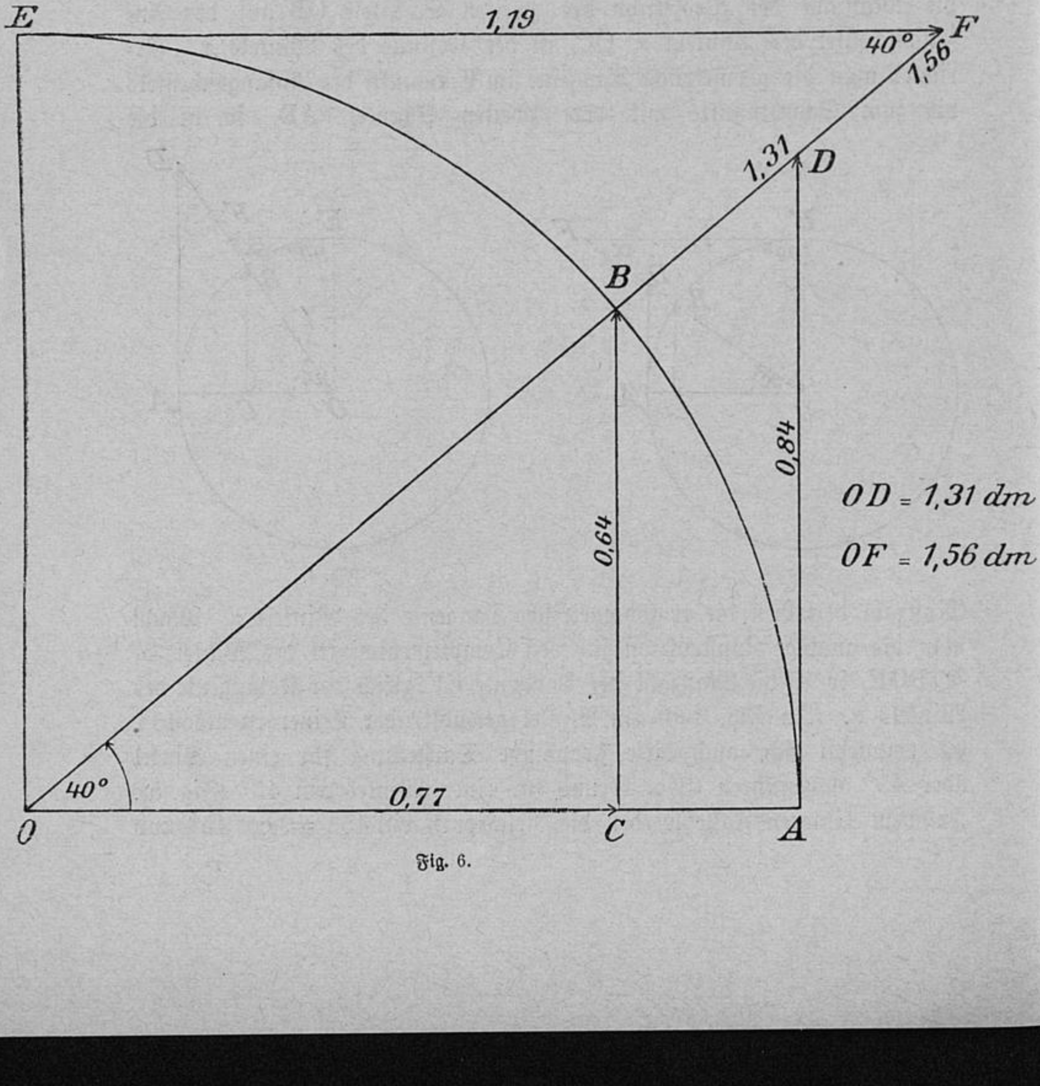

Fig. 6.

cotg 40° = EF = 1,19; sec 40° = OD = 1,31; cosec 40° = OF = 1,56. — Für diese Darstellung eignet sich auch sehr gut ein Winkel von 30°, weil dieser ohne Transporteur gezeichnet werden kann, und weil die Funktionen dieses Winkels auf einfache Weise durch Ausrechnung geprüft werden können.

IV. Erweiterung des Begriffes der trigonometrischen Funktionen.

1) Der Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks ABC, in dem der Winkel BAC $= \alpha$ spitz ist, werde mit $2\,r$ bezeichnet (Fig. 7). Zieht man durch einen Endpunkt der Seite BC = a, B, den Durchmesser BA′ und verbindet A′ mit C, so ist $\sphericalangle$ BA′C $= \alpha$ und $\sin\alpha =$

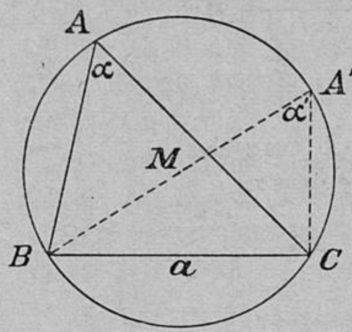

Fig. 7.

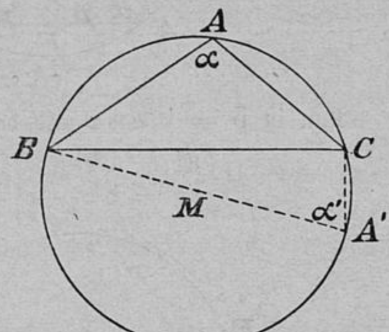

Fig. 8.

$\frac{a}{2\,r}$. Mit Hilfe der Formeln $\sin\beta = \frac{b}{2\,r}$, $\sin\gamma = \frac{c}{2\,r}$ ergibt sich dann der **Sinussatz**: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. Macht man dieselbe Konstruktion in dem Dreieck ABC, in dem der Winkel BAC $= \alpha$ stumpf ist (Fig. 8), so ist $\sphericalangle$ BA′C $= \alpha'$ der Supplementwinkel von α, und es ist $\sin\alpha' = \frac{a}{2\,r}$. Wenn also in der Relation $a = 2\,r \sin\alpha$ der Winkel α stumpf ist, so ist für den Sinus dieses Winkels der Sinus des Supplementwinkels zu setzen. Damit gelangt man zu der **ersten Erweiterung des Begriffs der Sinusfunktion**.

2) Der **Kosinussatz** läßt sich mit Hilfe des Sekantensatzes folgendermaßen entwickeln. In dem Dreieck ABC sei $\sphericalangle$ CAB $= \alpha$ spitz und CA < CB (Fig. 9). Man beschreibe mit CA als Radius von C aus einen Kreis, der die Seite BC in G und AB in D schneidet; man ver-

längere BC über C hinaus bis an den Kreisumfang und fälle von C aus das Lot CF auf AB. Dann ist nach dem Sekantensatz:

$$BE \cdot BG = BA \cdot BD,$$

oder, da $BE = a + b$, $BG = a - b$, $BD = c - 2p$ ist,

$$(a + b) \cdot (a - b) = c \cdot (c - 2p).$$

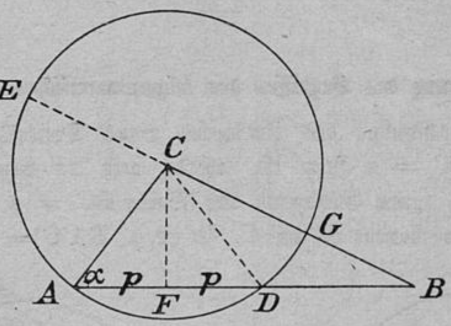

Fig. 9.

Nun ist $p = b \cos\alpha$ und daher

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2c \cdot b \cos\alpha \text{ oder}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

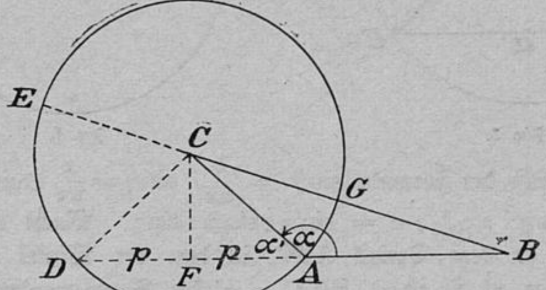

Fig. 10.

Macht man dieselbe Konstruktion in dem Dreieck ABC, in welchem $\sphericalangle BAC = \alpha$ stumpf ist (Fig. 10), so hat man für BD zu setzen $c + 2p$, also:

$$(a + b) \cdot (a - b) = c \cdot (c + 2p).$$

p ist aber gleich $b \cos\alpha'$, wo $\alpha' = 180^0 - \alpha$ ist, und daher

$$a^2 - b^2 = c^2 + 2c \cdot b \cos\alpha' \text{ oder}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha'.$$

Wenn die Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$ für einen stumpfen Winkel α angewandt werden soll, so ist für den Kosinus dieses Winkels der Kosinus des Supplementwinkels zu setzen, aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen. Hiernach ist, wenn $\alpha > 90^\circ$ ist, $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. Für den Sinus eines stumpfen Winkels hat sich aber die Notwendigkeit eines Zeichenwechsels nicht ergeben.

Aus der Formel $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ folgt dann für einen stumpfen Winkel $\operatorname{tang}\alpha = -\operatorname{tang}(180^\circ - \alpha)$ und $\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha)$.

V. Die trigonometrischen Funktionen von Winkeln in den vier Quadranten.

Um die Begriffe der trigonometrischen Funktionen für Winkel, die größer als 90° sind, zu erweitern, werden folgende Erklärungen aufgestellt:

1) Der Sinus eines Winkels ist die Maßzahl der Senkrechten, die von dem Endpunkte des zweiten Schenkels auf den ersten Schenkel (bzw. auf die Verlängerung desselben über den Scheitel hinaus) gefällt ist.

2) Der Kosinus eines Winkels ist die Maßzahl der Projektion des zweiten Schenkels auf den ersten Schenkel (bzw. auf die Verlängerung desselben über den Scheitel hinaus).

3) Die Tangente eines Winkels ist die Maßzahl der Senkrechten, die im Endpunkte des ersten Schenkels bis zum Schnittpunkte mit dem zweiten Schenkel (bzw. mit der Verlängerung des zweiten Schenkels über den Scheitel hinaus) errichtet ist.

4) Die Kotangente eines Winkels ist die Maßzahl der Senkrechten, die im Endpunkte des zu dem ersten Schenkel senkrecht stehenden Halbmessers bis zum Schnittpunkte mit dem zweiten Schenkel (bzw. mit der Verlängerung des zweiten Schenkels über den Scheitel hinaus) errichtet ist.

Dabei ist vorausgesetzt, daß der Halbmesser des Kreises gleich der Längeneinheit ist.

Winkel im zweiten Quadranten.

Für einen Winkel $\beta \gtrless {90^\circ \atop 180^\circ}$ sind die Funktionen folgende: $\sin\beta =$ BC, $\cos\beta =$ OC, $\operatorname{tang}\beta =$ AD, $\operatorname{cotg}\beta =$ EF (Fig. 11). Konstruiert man zu dem im ersten Quadranten liegenden Winkel α, der das Supplement von β ist ($\alpha = 180^\circ - \beta$), die Funktionsstrecken, so ergibt sich, daß diese für beide Winkel dieselbe Größe haben. Vergleicht man die Richtungen der zugehörigen Strecken, so ergibt sich, daß die Sinusstrecken in der Richtung übereinstimmen, dagegen die Strecken für die drei übrigen Funktionen entgegengesetzte Richtung haben. Bezeichnet man die Richtung der zu dem ersten Schenkel senkrecht stehenden Strecken von unten nach oben als die positive, und die von oben nach unten als die negative, ebenso die Richtung der zu OE senkrechten Strecken von links nach rechts als die positive und die von rechts nach links als die negative, so ergeben sich die Sätze:

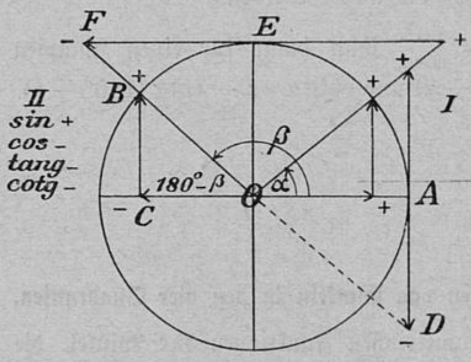

Fig. 11.

1) Die Funktionen eines spitzen Winkels sind sämtlich positiv.

2) Der Sinus eines Winkels im zweiten Quadranten ist positiv, der Kosinus, die Tangente und die Kotangente sind negativ.

3) Für das Aufsuchen der Funktionen eines Winkels im zweiten Quadranten gelten folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \sin(180^\circ - \beta)\\
\cos\beta &= -\cos(180^\circ - \beta)\\
\operatorname{tang}\beta &= -\operatorname{tang}(180^\circ - \beta)\\
\operatorname{cotg}\beta &= -\operatorname{cotg}(180^\circ - \beta).
\end{aligned}$$

4) Dabei wird die Drehungsrichtung des zweiten Schenkels, durch die der Winkel β entstanden ist, als die positive Drehungsrichtung bezeichnet (entgegengesetzt der Drehung des Uhrzeigers). Dreht man den zweiten Schenkel, bis er mit dem ersten Schenkel eine Gerade bildet, so ergeben sich die Grenzwerte:

$$\sin 180^0 = 0$$
$$\cos 180^0 = -1$$
$$\text{tang } 180^0 = 0$$
$$\text{cotg } 180^0 = -\infty.$$

Anmerkung 1. Die Konstruktion der Strecken für die Tangente und Kotangente ist nicht unbedingt notwendig, da die Vorzeichen dieser Funktionen sich aus den Vorzeichen des Sinus und des Kosinus ergeben. Ähnliches gilt für die Tangente und die Kotangente von Winkeln, die im dritten und vierten Quadranten liegen.

Anmerkung 2. Die Funktionen des Winkels β lassen sich auch auf den Winkel FOE $= \beta - 90^0$ zurückführen; dann muß aber die entsprechende Kofunktion gesetzt werden, z. B. $\sin\beta = \cos(\beta - 90^0)$. Die obigen Formeln sind aber deshalb vorzuziehen, weil bei ihnen der Name der Funktion beibehalten wird. Der Lernende hat sich fest einzuprägen, daß bei dem Winkel und seinem Supplementwinkel die Funktion beibehalten wird, abgesehen vom Vorzeichen, daß aber bei einem spitzen Winkel und seinem Komplementwinkel die Kofunktion gesetzt werden muß. $\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$, $\text{tang}\,\alpha = \text{cotg}(90^0 - \alpha)$, $\text{cotg}\,\alpha = \text{tang}(90^0 - \alpha)$.

Winkel im dritten Quadranten.

Bei der Konstruktion der Funktionsstrecken sind absichtlich die Buchstaben beibehalten worden, wie sie bei der Konstruktion für Winkel im zweiten und im ersten Quadranten angewendet wurden. Dasselbe wird bei dem Winkel im vierten Quadranten der Fall sein. Für einen Winkel $\gamma \gtrless \begin{smallmatrix}180^0\\270^0\end{smallmatrix}$ ergibt sich, daß der Sinus und der Kosinus negativ sind, und daß mithin die Tangente und die Kotangente positiv sind (Fig. 12). Zugleich ergibt sich aus der Figur, daß der spitze Winkel COB $= \gamma - 180^0$ dieselben Funktionen hat wie der gegebene Winkel γ, abgesehen vom Vorzeichen. Es bestehen also folgende Formeln:

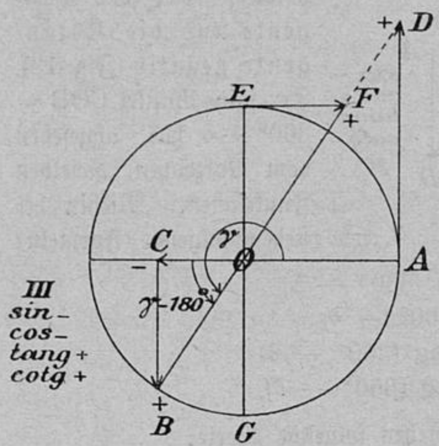

Fig. 12.

$$\sin\gamma = -\sin(\gamma - 180^0)$$
$$\cos\gamma = -\cos(\gamma - 180^0)$$
$$\text{tang}\,\gamma = \text{tang}(\gamma - 180^0)$$
$$\text{cotg}\,\gamma = \text{cotg}(\gamma - 180^0).$$

Für die Grenzwerte bestehen die Formeln:

$$\begin{aligned} \sin 270^0 &= -1 \\ \cos 270^0 &= 0 \\ \operatorname{tang} 270^0 &= \infty \\ \operatorname{cotg} 270^0 &= 0. \end{aligned}$$

Anmerkung. Will man die Funktionen des Winkels γ auf den Winkel BOG $= 270^0 - \gamma$ zurückführen, so hat man die Kofunktion zu setzen. Die Formeln $\sin\gamma = -\cos(270^0 - \gamma)$, $\cos\gamma = -\sin(270^0 - \gamma)$, $\operatorname{tang}\gamma = +\operatorname{cotg}(270^0 - \gamma)$, $\operatorname{cotg}\gamma = +\operatorname{tang}(270^0 - \gamma)$ sind aber vollständig überflüssig. Denn die oben gegebenen Formeln sind in ihrer Anwendung einfacher, weil bei ihnen der Name der Funktion beibehalten wird.

Winkel im vierten Quadranten.

Die Vorzeichen der Funktionen eines Winkels $\delta \gtrless {270^0 \atop 360^0}$ im vierten Quadranten sind folgende: Der Sinus ist negativ, der Kosinus ist positiv, mithin sind die Tangente und die Kotangente negativ (Fig. 13). Der spitze Winkel COB $= 360^0 - \delta$ hat, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben Funktionen. Mithin bestehen folgende Formeln:

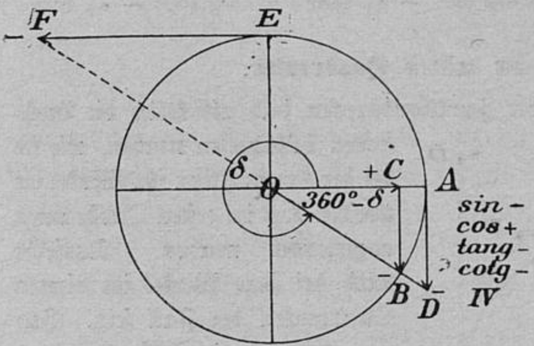

Fig. 13.

$$\begin{aligned} \sin\delta &= -\sin(360^0 - \delta) \\ \cos\delta &= \cos(360^0 - \delta) \\ \operatorname{tang}\delta &= -\operatorname{tang}(360^0 - \delta) \\ \operatorname{cotg}\delta &= -\operatorname{cotg}(360^0 - \delta). \end{aligned}$$

Für den Grenzwinkel 360^0 bestehen folgende Werte:

$$\begin{aligned} \sin 360^0 &= 0 \\ \cos 360^0 &= 1 \\ \operatorname{tang} 360^0 &= 0 \\ \operatorname{cotg} 360^0 &= \infty. \end{aligned}$$

Anmerkung. Wenn α ein spitzer Winkel ist, so ist $\sin(90^0 + \alpha) = \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ und $\cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha) = -\sin\alpha$. Oder man setze $\sin(90^0 + \alpha) = \sin 90^0 \cdot \cos\alpha + \cos 90^0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$ und $\cos(90^0 + \alpha) = \cos 90^0 \cos\alpha - \sin 90^0 \sin\alpha = -\sin\alpha$.

VI. Aufsuchen der zwei Winkeln, die zu einer Funktion gehören.

1. Sinus.

a) Wenn der Sinus positiv ist, so gehören dazu zwei Winkel, von denen der eine im ersten und der andere im zweiten Quadranten liegt. Der letztere, x_2, wird aus dem spitzen Winkel x_1 erhalten, indem man x_1 von 180^0 subtrahiert (Fig. 14).

Beispiel. $\log \sin x = 9{,}34547 - 10;$
$x_1 = 12^0\,48'$, $x_2 = 180^0 - x_1 = 167^0\,12'$.

b) Wenn der Sinus negativ ist, so gehören dazu zwei Winkel, von denen der eine im dritten und der andere im vierten Quadranten

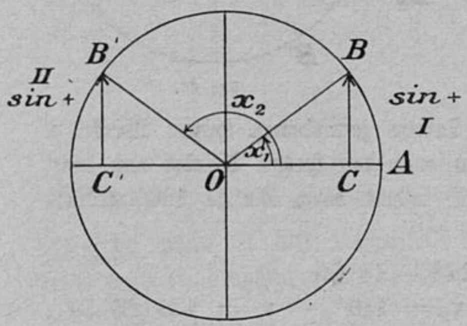

Fig. 14.

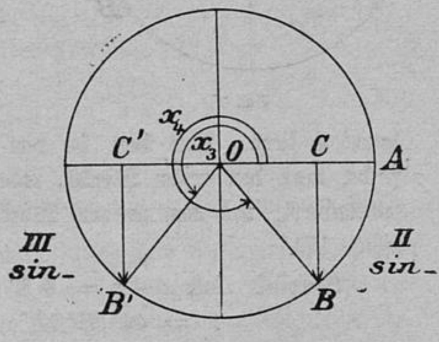

Fig. 15.

liegt. Aus dem in den Tafeln gefundenen spitzen Winkel x findet man den Winkel x_3, wenn man x zu 180^0 addiert, und den Winkel x_4, wenn man x von 360^0 subtrahiert (Fig. 15).

Beispiel. $\log \sin x = 9{,}92865 - 10\,(n)$*);
$x = 58^0\,2'\,50''$; $x_3 = 180^0 + x = 238^0\,2'\,50''$, $x_4 = 360^0 - x = 301^0\,57'\,10''$.

2. Kosinus.

a) Wenn der Kosinus positiv ist, so gehören zu demselben zwei Winkel, von denen der erste im ersten und der zweite im vierten Quadranten liegt. Der letztere, x_4, wird aus dem spitzen Winkel x_1 erhalten, indem man ihn von 360^0 subtrahiert (Fig. 16).

*) Durch die Bezeichnung (n) soll angedeutet werden, daß der natürliche Wert, sin x, negativ ist.

Beispiel. $\log \cos x = 9{,}46833 - 10;$
$x_1 = 72^0\,54'\,12''$; $x_4 = 360^0 - x_1 = 287^0\,5'\,48''$.

b) Wenn der Kosinus negativ ist, so gehören zu demselben zwei Winkel, von denen der erste im zweiten und der zweite im dritten Qua-

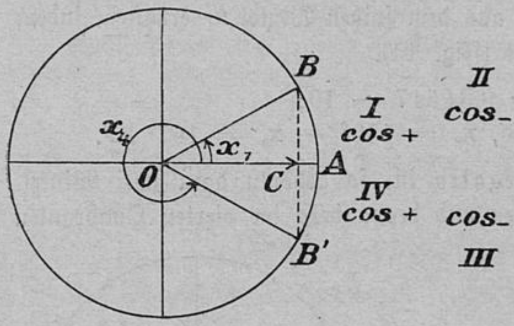

Fig. 16.

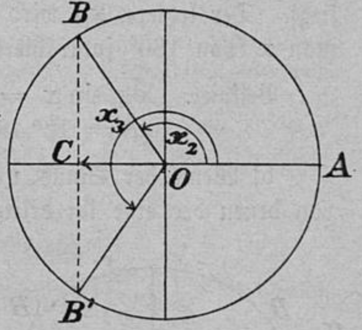

Fig. 17.

dranten liegt. Aus dem in den Tafeln gefundenen spitzen Winkel x findet man den ersten Winkel, indem man den spitzen Winkel von 180^0 subtrahiert, und den zweiten Winkel, indem man ihn zu 180^0 addiert (Fig. 17).

Beispiel. $\log \cos x = 9{,}85248 - 10$ (n);
$x = 44^0\,36'\,10''$; $x_2 = 180^0 - x = 135^0\,23'\,50''$,
$x_3 = 180^0 + x = 224^0\,36'\,10''$.

3. Tangente und Kotangente.

a) Wenn die Tangente (und Kotangente) positiv ist, so gehören zu derselben zwei Winkel, von denen der erste im ersten und der zweite im dritten Quadranten liegt (Fig. 18).

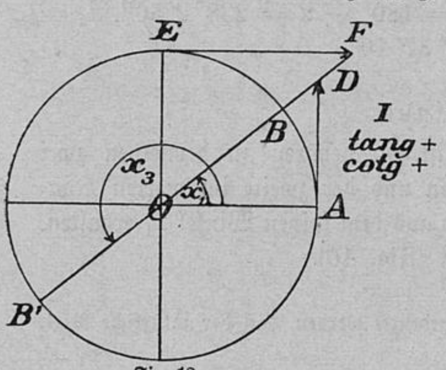

Fig. 18.

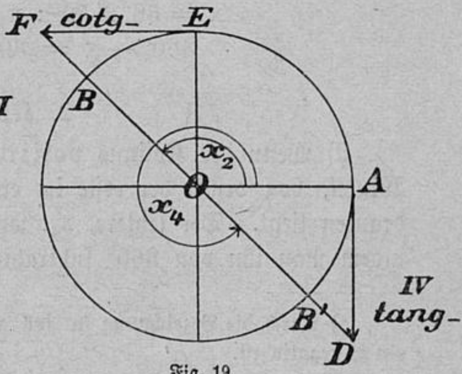

Fig. 19.

Beispiel. $\log \operatorname{tang} x = 9{,}78695 - 10$;
$x_1 = 31^0\,28'\,42''$; $x_3 = 180^0 + x_1 = 211^0\,28'\,42''$.
$\log \operatorname{cotg} x = 1{,}09848$;
$x_1 = 4^0\,33'\,27''$, $x_3 = 180^0 + x_1 = 184^0\,33'\,27''$.

b) Wenn die Tangente (und die Kotangente) **negativ** ist, so gehören zu derselben zwei Winkel, von denen der erste im zweiten und der zweite im vierten Quadranten liegt (Fig. 19).

Beispiel. $\log \operatorname{tang} x = 0{,}72486$ (n);
$x = 79^0\,19'\,44''$; $x_2 = 180^0 - x = 100^0\,40'\,16''$,
$x_4 = 360^0 - x = 280^0\,40'\,16''$.
$\log \operatorname{cotg} x = 9{,}07450 - 10$ (n);
$x = 83^0\,13'\,48''$; $x_2 = 180^0 - x = 96^0\,46'\,12''$,
$x_4 = 360^0 - x = 276^0\,46'\,12''$.

VII. Trigonometrische Funktionen von Winkeln, die größer sind als 360⁰.

1) Wenn der zweite Schenkel eines Winkels vom Anfangsschenkel aus eine volle Umdrehung macht, und wenn die Drehung dann in demselben Sinne fortgesetzt wird, so beschreibt der gedrehte Schenkel einen Winkel, der größer ist als 360^0. Als Beispiel dafür ist in Fig. 20 die Entstehung eines Winkels von 480^0 dargestellt. Dieser Winkel hat dieselben Funktionen wie der Winkel $480^0 - 360^0 = 120^0$. Es ist also $\sin 480^0 = \sin 120^0 = \sin 60^0$, $\cos 480^0 = \cos 120^0 = -\cos 60^0$ usw. Macht der Schenkel OB des Winkels BOA $= 480^0$ noch eine volle Umdrehung in demselben Sinne, so entsteht ein Winkel von $180^0 + 2 \cdot 360^0 = 900^0$. Die Funktionen solcher Winkel, die größer als 360^0 sind, werden auf Winkel unter 360^0 zurückgeführt, indem man von dem gegebenen Winkel entweder 360^0 oder $2 \cdot 360^0$ oder $3 \cdot 360^0$ . . . subtrahiert.

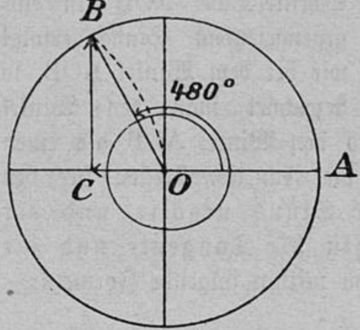

Fig. 20.

Beispiel. $\operatorname{tang} 380^0 = \operatorname{tang} 20^0$; $\cos 820^0 = \cos 100^0 = -\cos 80^0$; $\operatorname{cotg} 1265^0 = \operatorname{cotg} 185^0 = \operatorname{cotg} 5^0$.

2) Zu einer gegebenen Winkelfunktion gehören nicht nur die zwei Winkel in den betreffenden Quadranten, sondern noch unendlich viele Winkel, die man erhält, wenn man zu jedem der beiden Winkel 360^0, $2 \cdot 360^0$, $3 \cdot 360^0$, . . . $k \cdot 360^0$, . . . addiert.

Beispiel. $\log \cos x = 9{,}73812 - 10$ (n);

$x = 56^0\,49'\,37''$; $x_2 = 180^0 - x = 123^0\,10'\,23'' + k \cdot 360^0$; $x_3 = 180^0 + x = 223^0\,49'\,37'' + k \cdot 360^0$.

VIII. Trigonometrische Funktionen negativer Winkel.

1) In Fig. 21 ist die Entstehung des spitzen Winkels $BOA = \alpha$ durch die Drehung des Schenkels OA in positivem Sinne bis nach OB dargestellt. Wird der Schenkel in entgegengesetzter Richtung gedreht (in negativem Drehungssinne), so entsteht bei gleicher Größe der Drehung ein Winkel, AOB', der dem Winkel AOB gleich ist. Weil aber die Drehung des zweiten Schenkels bei AOB' in entgegengesetztem Sinne erfolgt wie bei dem Winkel AOB, so bezeichnet man den Winkel AOB' als einen **negativen** Winkel und den Winkel AOB als einen **positiven** Winkel. Konstruiert man die Funktionsstrecken für den Winkel $-\alpha$, so ergibt sich, daß der **Sinus negativ** und der **Kosinus positiv** ist und daß mithin die **Tangente** und die **Kotangente negativ** sind. Es bestehen mithin folgende Formeln:

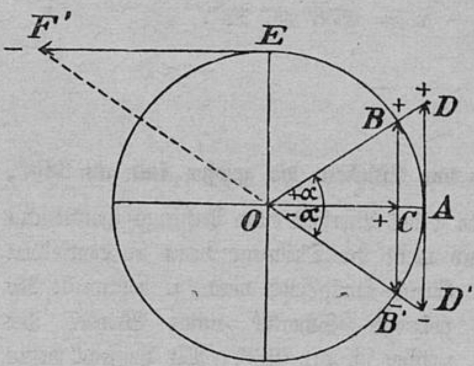

Fig. 21.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$
$$\operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

2) Diese Formeln gelten zunächst für negative spitze Winkel; sie sind aber auch allgemein gültig, wie in folgenden Falle nachgewiesen werden soll. In Fig. 22 ist der Winkel AOB' negativ; seine Funktionen werden dargestellt durch die Strecken $B'C$ (+), OC (—), AD' (—), EF' (—).

Der Winkel AOB, der an absolutem Werte dem Winkel AOB′ gleich ist, bei dem aber die Drehung in positivem Sinne erfolgt ist, hat die Funktionen BC (—), OC (—), AD (+), EF (+). Es finden also zwischen den Funktionen des negativen und des positiven Winkels dieselben Beziehungen statt wie bei den beiden spitzen Winkeln in Fig. 21.

3) Die Funktionen eines negativen Winkels von beliebiger Größe werden auf einen positiven Winkel zurückgeführt, indem man 360^0 oder ein Vielfaches von 360^0 zu dem Winkel addiert, so daß eine positive Anzahl von Graden entsteht.

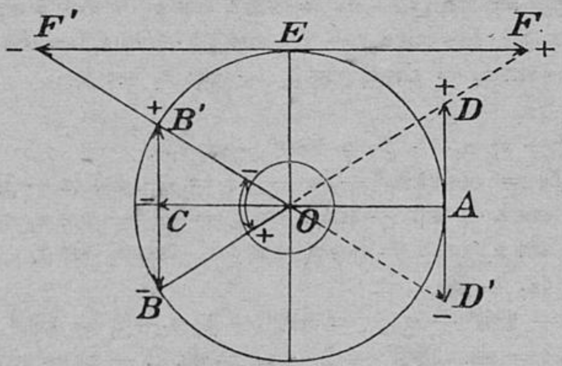

Fig. 22.

Beispiel. $\sin(-560^0) = \sin(-560^0 + 720^0) = \sin 160^0 = \sin 20^0$.

4) Zu einer gegebenen Winkelfunktion gehören nicht nur die zwei Winkel in dem betreffenden Quadranten, sondern noch unendlich viele Winkel, die man erhält, wenn man von jedem der beiden Winkel 360^0, $2 \cdot 360^0$, $3 \cdot 360^0$, ... $k \cdot 360^0$, ... subtrahiert. (Vgl. VII, 2.)

5) Durch die vorstehenden Betrachtungen ergeben sich die Formeln $\sin(\alpha - \beta) = -\sin(\beta - \alpha)$, $\cos(\alpha - \beta) = +\cos(\beta - \alpha)$.

Anmerkung. Die in VII und VIII entwickelten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen finden ihre Anwendung in der Analysis, wo der Winkel als die Länge des zu demselben gehörigen Bogens in einem Kreise mit dem Radius 1 betrachtet wird. Dann treten für die Größen 90^0, 180^0, 270^0, 360^0, $k \cdot 360^0$ die Bezeichnungen $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $2k\pi$ auf. Durch die vorstehenden Betrachtungen, bei denen der Winkel als Drehungsgröße aufgefaßt wird, sind diese Begriffe bereits gründlich vorbereitet.

IX.

Die allgemeine Gültigkeit der Formeln für $\sin(\alpha \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ läßt sich für Winkel in beliebigen Quadranten, auch für solche, die größer sind als 360^0, nachweisen, ohne daß es dazu einer Zeichnung bedarf. In folgenden Beispielen soll der Index den Quadranten bezeichnen, und die Bezeichnung ohne Index soll den zugehörigen spitzen Winkel bedeuten, z. B.: $\alpha_3 = 180^0 + \alpha$, $\beta_6 = \beta_2 + 360^0 = 360^0 + 180^0 - \beta$.

1) $\sin(\alpha_2 + \beta_3)$.

$\alpha_2 = 180^0 - \alpha$, $\beta_3 = 180^0 + \beta$; $\alpha_2 + \beta_3 = 360^0 + \beta - \alpha = \beta - \alpha$.

$$\sin(\alpha_2 + \beta_3) = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = (-\sin\beta_3)\cdot(-\cos\alpha_2) - (-\cos\beta_3)\cdot(\sin\alpha_2) = \sin\beta_3\cos\alpha_2 + \cos\beta_3\cdot\sin\alpha_2 = \sin\alpha_2\cos\beta_3 + \cos\alpha_2\sin\beta_3.$$

2) $\cos(\alpha_2 + \beta)$.

$\alpha_2 = 180^0 - \alpha$; $\alpha_2 + \beta = 180^0 - (\alpha - \beta)$.

$$\cos(\alpha_2 + \beta) = \cos(180^0 - [\alpha - \beta]) = -\cos(\alpha - \beta) = -\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -(-\cos\alpha_2\cos\beta) - \sin\alpha_2\sin\beta = \cos\alpha_2\cos\beta - \sin\alpha_2\sin\beta.$$

3) $\sin(\alpha_7 - \beta_5)$.

$\alpha_7 = 360^0 + 180^0 + \alpha$, $\beta_5 = 360^0 + \beta$; $\alpha_7 - \beta_5 = 180^0 + (\alpha - \beta)$.

$$\sin(\alpha_7 - \beta_5) = \sin(180^0 - [\beta - \alpha]) = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \sin\beta_5\cdot(-\cos\alpha_7) - \cos\beta_5\cdot(-\sin\alpha_7) = \sin\alpha_7\cos\beta_5 - \cos\alpha_7\sin\beta_5.$$

4) $\cos(\alpha_{10} - \beta_6)$.

$\alpha_{10} = 720^0 + 180^0 - \alpha$, $\beta_6 = 360^0 + 180^0 - \beta$, $\alpha_{10} - \beta_6 = 360^0 - (\alpha - \beta)$.

$$\cos(\alpha_{10} - \beta_6) = \cos(360^0 - [\alpha - \beta]) = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = (-\cos\alpha_{10})\cdot(-\cos\beta_6) + (-\sin\alpha_{10})\cdot(-\sin\beta_6) = \cos\alpha_{10}\cos\beta_6 + \sin\alpha_{10}\sin\beta_6.$$

X.

1) Einfache Entwicklung der Formel $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Der doppelte Inhalt des Dreiecks ABC, $2\triangle$, ist gleich $bc\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ (Fig. 23). Andererseits ist $2\triangle = ch\sin\alpha_1 + bh\sin\alpha_2$, wenn $AD = h$ senkrecht zu BC gezogen wird. Aus $bc\cdot\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = ch\sin\alpha_1 + bh\sin\alpha_2$ folgt, wenn beide Seiten durch bc dividiert werden:

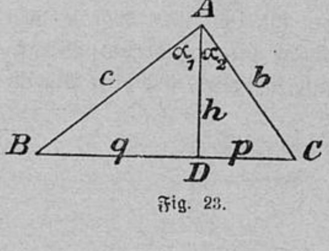

Fig. 23.

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{h}{b} \cdot \sin\alpha_1 + \frac{h}{c} \cdot \sin\alpha_2 \text{ oder}$$
$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2.$$

2) Einfache Entwicklung des Kosinussatzes mit Anwendung des Projektionssatzes.

Im Dreieck ABC (Fig. 23) ist

$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$	a	$-a$	$-a$
$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$	$-b$	b	$-b$
$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$	$-c$	$-c$	c

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit den nebenstehenden Faktoren multipliziert und die Produkte addiert, dann erhält man:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos\alpha \text{ oder } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$-a^2 + b^2 - c^2 = -2ac\cos\beta \text{ oder } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$-a^2 - b^2 + c^2 = -2ab\cos\gamma \text{ oder } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

3) Wenn die Hypotenuse a eines rechtwinkligen Dreiecks und eine Kathete c nur wenig voneinander verschieden sind, so wird der Winkel γ sehr groß, und seine Bestimmung durch den Sinus wird ungenau. In diesem Falle wendet man besser die Formel $\tang\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$ an. Um diese Formel abzuleiten, verlängere man die Hypotenuse BC des rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 24) über B hinaus und mache die Verlängerung gleich BA; dann ist $DC = a + c$. Ferner trage man BA

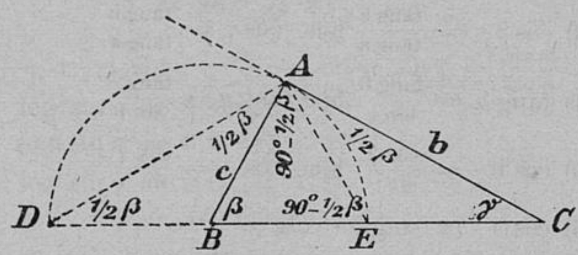

Fig. 24.

auf BC von B aus ab, $BE = BA$; dann ist $EC = a - c$. Endlich verbinde man A mit D und E. Dann ist:

$$\frac{a-c}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin(90^0 - \frac{1}{2}\beta)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \tang\frac{1}{2}\beta$$

$$\text{und } \frac{b}{a+c} = \frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin(90^0 + \frac{1}{2}\beta)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta} = \tang\frac{1}{2}\beta.$$

Durch Multiplikation dieser beiden Formeln erhält man:

$$\frac{a - c}{a + c} = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\beta, \text{ und daher } \text{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{a - c}{a + c}}.$$

Anmerkung. Die Kathete b kann dann auch nach der Formel berechnet werden: $b = \dfrac{a - c}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\beta}$ oder $b = (a + c)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\beta$.

B. Sphärische Trigonometrie.

I. Rechtwinkliges Dreieck.

1) In manchen Lehrbüchern, z. B. in dem Spiekerschen, werden zuerst die Formeln für das allgemeine (schiefwinklige) Dreieck entwickelt und daraus die Formeln für das rechtwinklige Dreieck abgeleitet. Ich halte für zweckmäßiger, zuerst die Formeln für das rechtwinklige Dreieck auf besondere Art zu entwickeln, wie es beispielsweise in dem Lehrbuch von Reidt geschieht. Bezeichnet man die Hypotenuse mit a, die Katheten mit b und c und die gegenüberliegenden Winkel mit β und γ, so bestehen die 6 Formeln:

1) $\cos a = \cos b \cos c$

2) $\sin\beta = \dfrac{\sin b}{\sin a}$ bzw. $\sin\gamma = \dfrac{\sin c}{\sin a}$

3) $\cos\beta = \dfrac{\text{tang}\, c}{\text{tang}\, a}$ bzw. $\cos\gamma = \dfrac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, a}$

4) $\text{tang}\,\beta = \dfrac{\text{tang}\, b}{\sin c}$ bzw. $\text{tang}\,\gamma = \dfrac{\text{tang}\, c}{\sin b}$

5) $\cos b = \dfrac{\cos\beta}{\sin\gamma}$ bzw. $\cos c = \dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta}$

6) $\cos a = \text{cotg}\,\beta \cdot \text{cotg}\,\gamma$.

Die vier ersten Formeln haben ihr Analogon in der ebenen Trigonometrie, während für die Formeln 5 und 6 solche bei dem ebenen Dreieck fehlen. Die gedächtnismäßige Handhabung dieser Formeln ist nicht leicht. Die Anwendung dieser Formeln auf das rechtwinklige Dreieck wird aber wesentlich erleichtert durch die Nepersche Regel, die aber in manchen Lehrbüchern, z. B. in dem von Reidt, nicht zu finden ist. Sie lautet bekanntlich: Der Kosinus eines Stückes ist gleich dem Produkte der Kotangenten der anliegenden Stücke und gleich dem Produkte der Sinus der getrennten Stücke, wenn man für die Katheten b und c ihre Komplemente $90^0 - b$ und $90^0 - c$ setzt und den rechten Winkel nicht mitrechnet.

Wenn aus den gegebenen Stücken die übrigen drei Stücke berechnet werden sollen, so ordnet man die zwei Stücke mit dem gesuchten Stücke so an, daß zwei Stücke dem mittleren Stück entweder anliegend oder nicht benachbart sind (was immer nur auf eine Art möglich ist), und löst die nach der Neperschen Regel enthaltene Gleichung nach dem gesuchten Stücke als Unbekannte auf.

Beispiel. Gegeben $a = 109^0\,12'\,50''$, $c = 41^0\,25'\,6''$.

1) b, a, c; $\cos a = \cos b \cdot \cos c$; $\cos b = \dfrac{\cos a}{\cos c}$

$$\begin{array}{l} \log \cos a = 9{,}51732 - 10\ (n) \\ \log \cos c = 9{,}87500 - 10 \\ \hline \log \cos b = 9{,}64232 - 10\ (n) \\ \qquad b = 116^0\,1'\,50''. \end{array}$$

2) a, β, c; $\cos\beta = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} c$

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{cotg} a = 9{,}54221 - 10\ (n) \\ \log \operatorname{tang} c = 9{,}94556 - 10 \\ \hline \log \cos\beta = 9{,}48777 - 10\ (n) \\ \qquad \beta = 107^0\,54'\,20''. \end{array}$$

3) a, c, γ; $\sin c = \sin a \sin\gamma$; $\sin\gamma = \dfrac{\sin c}{\sin a}$

$$\begin{array}{l} \log \sin c = 9{,}82056 - 10 \\ \log \sin a = 9{,}97511 - 10 \\ \hline \log \sin\gamma = 9{,}48545 - 10 \\ \qquad \gamma = 44^0\,28'\,26''. \end{array}$$

Die Bestimmung des Winkels γ durch den Sinus ist hier nicht zweifelhaft, da hier der Satz zur Anwendung kommt:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Kathete mit ihrem Gegenwinkel gleichartig, d. h. zugleich entweder spitz oder stumpf oder recht.

Außerdem ist der Satz zu beachten:

Wenn die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks gleichartig sind, so ist die Hypotenuse spitz; sind die Katheten ungleichartig, so ist die Hypotenuse stumpf.

Wenn die drei Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet sind, so läßt sich aus ihren bei der Auflösung angewandten Funktionen nach der Neperschen Regel immer eine Relation bilden, die als Probe für die ausgeführte Rechnung dienen kann. Diese Probe, die in den Lehrbüchern kaum erwähnt wird, findet sich in der Aufgabensammlung von Reidt.

In obigem Beispiele sind die berechneten Stücke: b, β, γ. Es ist $\cos\beta = \cos b \sin\gamma$, also $\log\cos\beta = \log\cos b + \log\sin\gamma$.

$$\begin{array}{rcl} \log\cos b & = & 9{,}64232 - 10 \ (n) \\ \log\sin\gamma & = & 9{,}84545 - 10 \\ \hline \log\cos\beta & = & 9{,}48777 - 10 \ (n). \end{array}$$

2) Wenn die Hypotenuse a und eine Kathete b wenig voneinander verschieden sind, so wird die Bestimmung des Winkels β nach der Formel $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}$ ungenau, und man bedient sich dann besser der Formel $\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(a-b)}$. Diese wird folgendermaßen entwickelt:

Aus $\sin\beta = \dfrac{\sin b}{\sin a}$ folgt $1 + \sin\beta = \dfrac{\sin a + \sin b}{\sin a}$

und $1 - \sin\beta = \dfrac{\sin a - \sin b}{\sin a}$.

Durch Division:

$$\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} \text{ oder } \frac{2\sin^2(45^0 + \frac{1}{2}\beta)}{2\cos^2(45^0+\frac{1}{2}\beta)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

und daher:

$$\operatorname{tang}^2(45^0 + \tfrac{1}{2}\beta) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(a-b).$$

Für die Berechnung der anderen Kathete c wende man die Formel an: $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}$.

Entwicklung. Aus $\cos c = \dfrac{\cos a}{\cos b}$ folgt:

$1 + \cos c = \dfrac{\cos b + \cos a}{\cos b}$ und $1 - \cos c = \dfrac{\cos b - \cos a}{\cos b}$;

$$\frac{1+\cos c}{1-\cos c} = \frac{\cos b + \cos a}{\cos b - \cos a} \text{ oder } \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

und daher

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b).$$

Für die Berechnung des Winkels γ wende man die Formel an:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\sin (a-b)}{\sin (a+b)}}.$$

Entwicklung. Aus der Formel $\cos \gamma = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tang} b$ folgt:

$$1 - \cos \gamma = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \text{ und } 1 + \cos \gamma = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

$$\frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b} \text{ oder } \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} \gamma = \frac{\dfrac{\sin (a-b)}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\sin (a+b)}{\cos a \cos b}} \text{ und daher}$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} \gamma = \frac{\sin (a-b)}{\sin (a+b)}.$$

3) Wenn eine Kathete b und ihr Gegenwinkel β gegeben sind, so werden die übrigen Stücke nach den Formeln berechnet:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin \beta}, \ \sin c = \operatorname{cotg} \beta \cdot \operatorname{tang} b, \ \sin \gamma = \frac{\cos \beta}{\cos b}.$$

Sind die beiden gegebenen Stücke wenig voneinander verschieden, so wird die Bestimmung der gesuchten Stücke nach diesen Formeln ungenau, und man kann dann folgende Formeln zur genaueren Berechnung anwenden:

$$\operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2} a) = \sqrt{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\beta + b) \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\beta - b)};$$

$$\operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2} c) = \sqrt{\frac{\sin (\beta + b)}{\sin (\beta - b)}};$$

$$\operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2} \gamma) = \sqrt{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\beta + b) \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\beta - b)}.$$

Diese Formeln werden ähnlich wie die unter Nr. 2 angegebenen entwickelt.

II. Schiefwinkliges Dreieck.

1) Sämtliche Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck lassen sich mit Anwendung des Kosinussatzes I, des Kosinussatzes II, des Sinussatzes und der Neperschen Analogien lösen. Wenn z. B. die Stücke b, c, α gegeben sind, so wird zunächst die Seite a nach dem Kosinussatz I berechnet: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.

Für $b = 37^0\,14'\,9''$, $c = 121^0\,28'\,9''$, $\alpha = 161^0\,22'\,30''$ ergibt sich folgende Ausrechnung:

$$\begin{array}{rl} \log \cos b = & 9{,}90099 - 10 \\ \log \cos c = & 9{,}71770 - 10\,(n) \\ \hline \log(\cos b \cdot \cos c) = & 9{,}61869 - 10\,(n) \\ \cos b \cdot \cos c = & -\ 0{,}41561 \\ \sin b \sin c \cos \alpha = & -\ 0{,}48908 \\ \hline \cos a = & -\ 0{,}90469 \\ \log \cos a = & 0{,}95650 - 10\,(n) \\ a = & 154^0\ 46'\ 50''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \sin b = & 9{,}78183 - 10 \\ \log \sin c = & 9{,}93091 - 10 \\ \log \cos \alpha = & 9{,}97664 - 10\,(n) \\ \hline \log(\sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha) = & 9{,}68938 - 10\,(n) \\ \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha = & -\ 0{,}48908. \end{array}$$

In manchen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen wird, um die Unterbrechung der logarithmischen Rechnung zu vermeiden, die Einführung eines Hilfswinkels empfohlen. Nach dieser Methode kann man setzen:

$$\cos a = \sin b \cos \alpha \left(\frac{\operatorname{cotg} b \cos c}{\cos \alpha} + \sin c \right).$$

Setzt man $\operatorname{cotg} \varphi = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos \alpha}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin b \cos \alpha\, (\operatorname{cotg} \varphi \cos c + \sin c) \\ &= \sin b \cos \alpha \left(\frac{\cos \varphi \cdot \cos c + \sin c \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi} \right) \\ &= \frac{\sin b \cdot \cos \alpha}{\sin \varphi} \cdot \cos(\varphi - c) \end{aligned}$$

oder da $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos \alpha}$ und $\frac{\cos \alpha}{\sin \varphi} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\cos \varphi}$ ist:

$$\cos a = \frac{\sin b \cdot \operatorname{cotg} b}{\cos \varphi} \cdot \cos(\varphi - c) = \frac{\cos b \cdot \cos(\varphi - c)}{\cos \varphi}$$

Hiernach gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{cotg} b = & 0{,}11917 \\ \log \cos \alpha = & 9{,}97664 - 10\,(n) \\ \hline \log \operatorname{cotg} \varphi = & 0{,}14253\,(n) \\ \varphi = & 144^0\ 14'\ 16'' \\ c = & 121^0\ 28'\ 9'' \\ \hline \varphi - c = & 22^0\ 46'\ 7'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos b = & 9{,}90099 - 10 \\ \log \cos(\varphi - c) = & 9{,}96476 - 10 \\ \hline \log Z = & 9{,}86575 - 10 \\ \log \cos \varphi = & 9{,}90926 - 10\,(n) \\ \hline \log \cos a = & 9{,}95649 - 10\,(n) \\ a = & 154^0\ 46'\ 40''. \end{array}$$

Wenn der Schüler jedesmal die Entwicklung machen soll, so erfordert die letztere Methode viel mehr Zeit als die erstere. Nach der ersten Methode kann man log cos b und log sin b, sowie log cos c und log sin c je auf einer Seite der Tafel aufsuchen; dazu kommen noch 5 weitere Aufsuchungen. Nach der letzten Methode sind es 6 Aufsuchungen. Wenn aber die Substitutionsformel und die Schlußformel gedächtnismäßig eingeprägt werden sollen, so wird dadurch die Anzahl der auswendig zu lernenden Formeln noch vermehrt. Dabei ist zu bedenken, daß für die anderen Fälle, wenn zwei Winkel und die Zwischenseite, die drei Seiten, die drei Winkel gegeben sind, wieder andere Substitutionsformeln zu merken sind. Die Schwierigkeiten werden noch größer, wenn die Stücke des Dreiecks nicht mit den Buchstaben a, b, c, α, β, γ bezeichnet sind, sondern eine andere weniger einfache Bezeichnung haben, wie es bei den Aufgaben in der sphärischen Astronomie und mathematischen Geographie der Fall ist. Die beiden Kosinussätze sind aber bei ihrer Anwendung äußerst leicht und bequem zu handhaben. — Wenn aus b, c, α die dritte Seite a gefunden ist, so können die Winkel β und γ in den meisten Fällen nach dem Sinussatz berechnet werden. Wenn man die für das allgemeine Dreieck geltenden Kriterien anwendet, so kann man in vielen Fällen feststellen, ob der spitze oder der stumpfe Winkel genommen werden muß. Kann durch diese Kriterien nicht entschieden werden, welche Werte zu nehmen sind, so sind die Neperschen Analogien anzuwenden. Diese können auch dann benutzt werden, wenn beispielsweise aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nicht die dritte Seite, sondern nur die beiden anderen Winkel gesucht werden. In meinen Elementen der sphärischen Astronomie und mathematischen Geographie habe ich in § 5 alle einschlägigen Fälle an Beispielen besprochen.

Der Kotangentensatz kann völlig entbehrt werden. Was die Anwendung der Gaußischen Formeln betrifft, so möchte ich diese gegenüber den Neperschen Analogien doch nicht empfehlen, wenn jene auch einen Vorteil mehr gewähren. Dieser besteht z. B. darin, daß bei der Berechnung der Winkel β und γ aus b, c, α die dritte Seite a zugleich mitberechnet wird, während diese Seite bei der Anwendung der Analogien nach dem Sinussatz oder nach einer von den weiteren Analogien gesucht werden müßte. Trotzdem ist die Anwendung der Neperschen Analogien derjenigen der Gaußischen Gleichungen vorzuziehen, da sie sich dem Gedächtnis leichter einprägen und da das Rechnungsschema sich bei jenen einfacher gestaltet.

III. Direkte Entwicklung der Neperschen Analogien.

Die Neperschen Analogien werden gewöhnlich aus den Gaußischen Formeln abgeleitet. Wenn man aber auf die Anwendung der letzteren verzichten will, so empfiehlt es sich, die Neperschen Analogien direkt aus dem Kosinussatz abzuleiten, weil sich die dabei vorkommenden Entwicklungen wesentlich einfacher gestalten als die bei den Gaußischen Formeln. Die nachstehende Entwicklung habe ich entnommen aus Lacroix, Trigonometrie, übersetzt von Ideler, Berlin 1837, Seite 80—83.

Aus den Formeln

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \beta$$

und $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$ folgt

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos \beta.$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin b \cos \alpha}{\sin a \cos \beta} \text{ oder}$$

$$(1) \quad \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}.$$

In (1) wird auf beiden Seiten 1 addiert.

$$\frac{\cos b - \cos a \cos c + \cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} \text{ oder}$$

$$(1_a) \quad \frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

In (1) wird auf beiden Seiten 1 subtrahiert.

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c - \cos b + \cos a \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cos \beta} \text{ oder}$$

$$(1_b) \quad \frac{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

(1_b) wird durch (1_a) dividiert.

$$\frac{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)}{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)} = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin (\beta + \alpha)}.$$

Nun ist $\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)}{2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)} =$

$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b + a) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(b - a)$; $\frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} c.$

$$\frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin (\beta + \alpha)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{2 \sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}.$$

Daher geht durch Einsetzung dieser Werte 1_b über in:

$$(2)\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+a)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}.$$

Aus dem Sinussatz $\frac{\sin b}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ folgt:

$$\frac{\sin b-\sin a}{\sin b+\sin a}=\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\alpha} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b-a)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$

Oder $(3)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(b+a)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$

Wird (3) mit (2) multipliziert, so erhält man:

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(b-a)\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin^2\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}.$$

Hieraus folgt durch Radizieren:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-a)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}.$$

Wird 2 durch I dividiert, so ergibt sich:

$$\text{II.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+a)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}.$$

Die Formeln I und II können auch in der Form geschrieben werden:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c.$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c.$$

Die 3. und 4. Analogie kann man aus den Formeln

$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$ und

$\cos\beta=-\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos b$

in analoger Weise ableiten.

Einfacher gestaltet sich ihre Entwicklung, wenn man die Formeln I und II auf das Polardreieck anwendet. Bezeichnet man die Seiten desselben mit a', b', c' und die Winkel mit α', β', γ', so ist:

$$\tfrac{1}{2}(a - b) = \tfrac{1}{2}(180^0 - \alpha' - 180^0 + \beta') = -\tfrac{1}{2}(\alpha' - \beta'),$$

$$\tfrac{1}{2}(a + b) = \tfrac{1}{2}(360^0 - \alpha' - \beta') = 180^0 - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta').$$

Ebenso $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}(a' - b')$ und $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^0 - \frac{1}{2}(a' + b')'$, $\frac{1}{2}\,c = 90^0 - \frac{1}{2}\,\gamma'$.

Daher ist: $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a - b) = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha' - \beta')$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a + b) = \operatorname{tang}(180^0 - \tfrac{1}{2}[\alpha' + \beta']) = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta')$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = -\sin\tfrac{1}{2}(a' - b')$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sin\tfrac{1}{2}(a' + b')$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos\tfrac{1}{2}(a' - b')$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = -\cos\tfrac{1}{2}(a' + b')$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,c = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\,\gamma'.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln I und II ein, so erhält man:

$$\text{III.}\quad -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha' - \beta') = \frac{-\sin\frac{1}{2}(a' - b')}{\sin\frac{1}{2}(a' + b')}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\,\gamma'.$$

$$\text{IV.}\quad -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \frac{\cos\frac{1}{2}(a' - b')}{-\cos\frac{1}{2}(a' + b')}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\,\gamma'.$$

Diese Formeln können wieder auf das ursprüngliche Dreieck angewandt werden und lauten dann:

$$\text{III.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a - b)}{\sin\frac{1}{2}(a + b)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\,\gamma.$$

$$\text{IV.}\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b)}{\cos\frac{1}{2}(a + b)}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\,\gamma.$$

Kurze Zeit vor der Drucklegung der vorliegenden Arbeit bekam ich Kenntnis von einer Entwicklung der Neperschen Analogien, die von Herrn Professor Dr. **Karl Schmidt** in Mainz im 6. Hefte der Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrgang 1907, mitgeteilt wurde. Diese Ableitung gründet sich auf die bekannte Formel:

(1) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \rho}{\sin (s-a)}$,

wobei $\operatorname{tang} \rho = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}$.

Aus (1) folgt:

(2) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \frac{\operatorname{tang}^2 \rho}{\sin (s-a) \sin (s-b)} = \frac{\sin (s-c)}{\sin s}$ und

(3) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha : \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta = \frac{\sin (s-b)}{\sin (s-a)}$

oder anders geschrieben:

(4) $\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta} = \frac{\sin (s-c)}{\sin s}$

(5) $\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta} = \frac{\sin (s-b)}{\sin (s-a)}$.

Wendet man auf diese beiden Verhältnisgleichungen den Satz von der korrespondierenden Addition und Subtraktion an, so ergibt sich:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta + \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta - \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta} = \frac{\sin s + \sin (s-c)}{\sin s - \sin (s-c)} \text{ oder}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{2 \sin (s - \frac{1}{2} c) \cos \frac{1}{2} c}{2 \cos (s - \frac{1}{2} c) \sin \frac{1}{2} c} \text{ oder}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b) \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} (a + b) \sin \frac{1}{2} c} \text{ oder}$$

(6) $\frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b)$.

Ferner:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta - \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta + \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta} = \frac{\sin (s-b) - \sin (s-a)}{\sin (s-b) + \sin (s-a)} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{2 \cos \left(s - \frac{1}{2} (a + b)\right) \sin \frac{1}{2} (a - b)}{2 \sin \left(s - \frac{1}{2} (a + b)\right) \cos \frac{1}{2} (a - b)} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a - b)} \text{ oder}$$

$$(7)\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b).$$

Die Mollweideschen Gleichungen in der ebenen Trigonometrie lassen sich aus der Formel:

$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\rho}{s-a}$, wo $\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)s-c)}{s}}$ ist, in ganz analoger Weise ableiten. — Noch eine andere Ableitung der Neperschen Gleichungen teilt Herr Professor Dr. Schmidt an derselben Stelle mit. Diese gründet sich auf Hilfsdreiecke, die man erhält, wenn man der Reihe nach $a+b$ und $a-b$ oder $\alpha+\beta$ und $\alpha-\beta$ in die Figur bringt.

Anmerkung. 1. Eine geometrische Entwicklung der Neperschen Analogien ist mitgeteilt in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von B. G. Teubner 1901, 8. Heft von Adalbert Breuer, k. k. Professor an der Staatsrealschule im III. Bezirke Wiens. Diese Ableitung, die aber weniger einfach als die mitgeteilten ist, gründet sich auf Betrachtungen an der dreiseitigen körperlichen Ecke und ihrer Polarecke.

Anmerkung 2. In manchen Lehrbüchern findet sich zur Berechnung des sphärischen Exzesses aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die Formel entwickelt:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin\gamma}{\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\cos\gamma}.$$

Zur bequemeren logarithmischen Rechnung setze man:

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a\,\cos\gamma.$$

Dann ist: $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\sin\gamma\,\cos\varphi}{\cos(\varphi-\frac{1}{2}b)}.$

Man gelangt aber in diesem Falle viel rascher und einfacher zum Ziel, wenn man nach der Neperschen Analogie

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$$

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ berechnet. Dann hat man direkt die Winkelsumme und daraus den sphärischen Exzeß.

IV. Zwei Aufgaben aus der sphärischen Astronomie.

In der Darstellung der Himmelskugel befolgen die Lehrbücher keine einheitliche Methode. In einigen wird der Nordpunkt rechts und der Ostpunkt nach vorn gelegt, und das Azimut von Norden aus gerechnet, während trotzdem dann der Stundenwinkel von Süden aus angenommen wird. Wenn nun in einer Aufgabe eine Nachmittagszeit und ein westliches Azimut in Betracht kommt, so liegen die zu ziehenden Kreise auf der nicht sichtbaren Seite der Himmelskugel, was die Darstellung erheblich erschwert. Legt man den Südpunkt nach rechts und den Westpunkt nach vorn, so wird man das Azimut und den Stundenwinkel von Süden aus rechnen. Bei einem östlichen Azimut und einer Vormittagszeit fallen dann die Kreise auf den nicht sichtbaren Teil dieser Kugel. Manche Lehrbücher, z. B. das Spiekersche, legen den Nordpunkt immer links und zählen das Azimut von Norden aus nach Osten bis 180° und in entgegengesetzter Richtung von Norden aus nach Westen bis 180°, während der Stundenwinkel immer von Mittags 12 Uhr über Westen gerechnet wird. Solche Annahmen erschweren in vielen Fällen die Auffassung und das Verständnis der betreffenden Aufgabe. Nach meiner Erfahrung werden diese Schwierigkeiten vermieden, wenn man für die Vormittagszeit den Nordpunkt nach rechts und den Ostpunkt nach vorn legt. Dann werden Azimut und Stundenwinkel von Norden aus, bzw. von 12 Uhr mitternachts gerechnet im Sinne der scheinbaren Drehung der Sonne. Für die Nachmittagszeit lege man den Südpunkt nach rechts und den Westpunkt nach vorn. Dann werden Azimut und Stundenwinkel von Süden aus, bzw. von 12 Uhr mittags an gerechnet. Zu jedem Falle will ich eine Aufgabe zur Auflösung bringen. Ich bemerke dazu, daß die Zeichnungen nicht den Anforderungen der schiefen Parallelprojektion entsprechen; denn das Schrägbild einer Kugel ist ja kein Kreis, sondern eine Ellipse. Die von mir ausgeführten Zeichnungen sind also mehr schematisch aufzufassen. Ob man die erstere oder die zweite Art wählen soll, darüber bestehen in den Kreisen der Fachmänner verschiedene Meinungen, wie ich aus schriftlichen und mündlichen Äußerungen zu erfahren Gelegenheit gehabt habe. Ausführlich ist dieser Gegenstand behandelt in meiner sphärischen Astronomie und mathematischen Geographie, zweiter Abschnitt, § 7—19.

Aufgabe 1. Um wieviel Uhr wahrer Zeit und in welcher Himmelsgegend geht die Sonne in München am

1. August auf? Geographische Breite von München $\varphi = 48^0 8' 46''$; Deklination der Sonne $\delta = +17^0 58' 56''$.

Auflösung (Fig. 25). ZSN_aN_o ist der Meridian von München (C), N_oOSW ist der Horizont, PP' die Weltachse ($N_oP = \varphi$), $AOQW$ ist der Himmelsäquator, FA_uEU ist der Parallelkreis, den die Sonne am

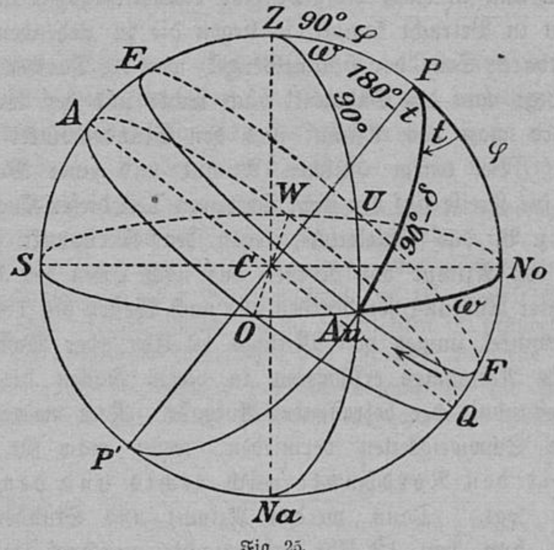

Fig. 25.

1. August durchläuft. Durch den Aufgangspunkt A_u wird der Deklinationskreis PA_uP' und der Scheitelkreis ZA_uN_a gezogen. Dann kann die Aufgabe auf zwei Arten gelöst werden.

a) Mit Anwendung des bei N_o rechtwinkligen Dreiecks PA_uN_o, in dem die Hypotenuse $PA_u = 90^0 - \delta$ und eine Kathete $PN_o = \varphi$ gegeben sind. Aus der Gleichung $\cos t = \operatorname{cotg}(90^0 - \delta) \cdot \operatorname{tang} \varphi$ folgt:

$$\cos t = \operatorname{tang} \delta \cdot \operatorname{tang} \varphi$$

$$\log \operatorname{tang} \delta = 9{,}51132 - 10$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi = 0{,}04780 - 10$$
$$\log \cos t = 9{,}55912 - 10$$
$$t = 68^0\, 45'\, 20''.$$

$$68^0\, 45'\, 20'' : 15 = 4^h$$
$$\begin{array}{l} 60 \\ \hline 8 \cdot 60 \\ \hline 525 : 15 = 35^m \\ 75 \\ \hline 20 : 15 = 1{,}3^s \\ 50 \end{array}$$

Aus der Gleichung $\cos(90^0 - \delta) = \cos \varphi \cdot \cos \omega$ folgt $\cos \omega = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$.

$$\begin{array}{r}\log \sin \delta = 9{,}48957 - 10 \\ \log \cos \varphi = 9{,}82427 - 10 \\ \hline \log \cos \omega = 9{,}66530 - 10 \\ \omega = 62^0\, 26'\, 17''.\end{array}$$

b) Mit Anwendung des nautischen (rechtseitigen) Dreiecks ZPA_u, in dem die drei Seiten gegeben sind: $PZ = 90^0 - \varphi$, $PA_u = 90^0 - \delta$, $ZA_u = 90^0$.

Aus der Gleichung $\cos 90^0 = \cos(90^0 - \varphi) \cdot \cos(90^0 - \delta) + \sin(90^0 - \varphi) \cdot \sin(90^0 - \delta) \cdot \cos(180^0 - t)$ folgt $0 = \sin\varphi \sin\delta \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$, woraus $\cos t = \tang\delta \cdot \tang\varphi$, welche Gleichung mit der oben gefundenen übereinstimmt.

Aus der Formel $\frac{\sin\omega}{\sin(180^0 - t)} = \frac{\sin(90^0 - \delta)}{\sin 90^0}$ folgt $\sin\omega = \cos\delta \cdot \sin t$.

$$\begin{array}{r}\log \cos \delta = 9{,}97825 - 10 \\ \log \sin t = 9{,}96944 - 10 \\ \hline \log \sin \omega = 9{,}94769 - 10 \\ \omega = 62^0\, 26'\, 20''.\end{array}$$

Oder aus der Formel $\cos(90^0 - \delta) = \cos 90^0 \cdot \cos(90^0 - \varphi) + \sin 90^0 \cdot \sin(90^0 - \varphi) \cdot \cos\omega$ folgt $\sin\delta = \cos\varphi \cdot \cos\omega$, woraus $\cos\omega = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$, welche Formel mit der oben gefundenen übereinstimmt.

Die Sonne geht in München am 1. August auf um $4^h\, 35^m\, 1^s$ vormittags bei einem Azimut von $62^0\, 26'\, 17''$, von Norden nach Osten; d. h. die Morgenweite ist $27^0\, 33'\, 43''$.

Anmerkung. Über eine dritte Art der Auflösung vgl. Schmehl, Sphärische Astronomie und mathematische Geographie, Seite 28, Anmerkung.

Aufgabe 2. Am 16. Januar, als die Deklination der Sonne $\delta = -22^0\, 28'$ betrug, wurde $59^m\, 52^s$ nach ihrer Kulmination die Höhe derselben $h = 20^0\, 50'$ beobachtet. Welche geographische Breite hatte der Beobachtungsort?

Auflösung (Fig. 26). Der Südpunkt wird nach rechts gelegt; die Figur ist im übrigen in ähnlicher Weise hergestellt wie die bei der 1. Aufgabe; nur ist zu beachten, daß der Parallelkreis, den die Sonne an diesem Tage durchläuft, südlich von dem Äquator liegt. Der Zeit $59^m\, 52^s$ entspricht ein Stundenwinkel von $59^m\, 52^s \cdot 15 = 14^0\, 58'$. In dem nautischen Dreieck $PZ\Sigma$ sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender

Winkel gegeben: $P\Sigma = 90^0 + \delta$, $Z\Sigma = 90^0 - h$, $\sphericalangle ZP\Sigma = t$. Man muß zuerst den anderen gegenüberliegenden Winkel berechnen.

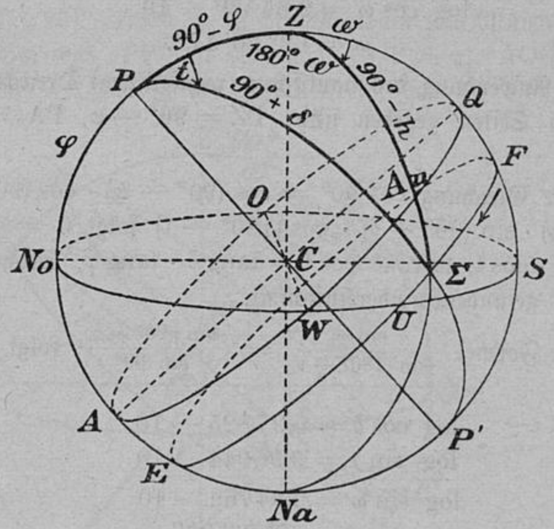

Fig. 26.

Aus dem Satze: $\dfrac{\sin(180^0 - \omega)}{\sin t} = \dfrac{\sin(90^0 + \delta)}{\sin(90^0 - h)}$ folgt:

$$\sin\omega = \frac{\cos\delta \cdot \sin t}{\cos h}$$

$$\begin{array}{rl} \log\cos\delta & = 9{,}96\,572 - 10 \\ \underline{\log\sin t} & \underline{= 9{,}41\,205 - 10} \\ \log Z & = 9{,}37\,777 - 10 \\ \underline{-\log\cos h} & \underline{= 9{,}97\,063 - 10} \\ \log\sin\omega & = 9{,}40\,714 - 10 \\ \omega & = 14^0\,47'\,40''. \end{array}$$

$180^0 - \omega > t$, weil $90^0 + \delta > 90^0 - h$ ist; daher ist $180^0 - \omega = 165^0\,12'\,20''$ und $\omega = 14^0\,47'\,40''$. Daß das Azimut der Sonne zur Beobachtungszeit spitz ist, geht auch schon aus den Bedingungen der Aufgabe selbst hervor. Die Seite $90^0 - \varphi$ wird nach der Neperschen Analogie

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c$$

berechnet. Aus dieser folgt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a - b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Man setzt $90^0 + \delta = 112^0\,28' = a$ $\quad 180^0 - \omega = 165^0\,12'\,20'' = \alpha$

$$
\begin{array}{rlrl}
90^0 - h = & 69^0\,10' = b & t = & 14^0\,58' \quad = \beta \\
\hline
a - b = & 43^0\,18' & \alpha + \beta = & 180^0\,10'\,20'' \\
\frac{1}{2}(a - b) = & 21^0\,39' & \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = & 90^0\;\;5'\,10'' \\
a + b = & 181^0\,38' & \alpha - \beta = & 150^0\,14'\,20'' \\
\frac{1}{2}(a + b) = & 90^0\,49' & \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & 75^0\;\;7'\,10''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = & 0{,}00\,000 \\
\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b) = & 9{,}59\,872 - 10 \\
\hline
\log Z = & 9{,}59\,872 - 10 \\
-\log \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & 9{,}98\,518 - 10 \\
\hline
\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = & 9{,}61\,354 - 10
\end{array}
$$

$$\frac{1}{2}c = 22^0\,19'\,43''; \; c = 44^0\,39'\,26'' = 90^0 - \varphi, \text{ also}$$

$$\varphi = 45^0\,20'\,34''.$$

Da $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ungenau ist, so wendet man besser die andere Analogie mit den Kosinusfunktionen an. Dann ist:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

$$
\begin{array}{rl}
\log \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = & 7{,}17\,693 - 10\ (n) \\
\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a + b) = & 1{,}84\,605\ (n) \\
\hline
\log Z = & 9{,}02\,298 - 10 \\
\log \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & 9{,}40\,960 - 10 \\
\hline
\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = & 9{,}61\,338 - 10 \\
\frac{1}{2} c = & 22^0\,19'\,17''
\end{array}
$$

$$c = 44^0\,38'\,34'' = 90^0 - \varphi, \text{ also } \varphi = 45^0\,21'\,26''.$$

Der Beobachtungsort hat eine geographische Breite von $45^0\,21'\,26''$.

Nachträgliche Bemerkung zu dem Satze 1), X.

Wenn in der Fig. 23 der Winkel C als stumpf angenommen wird, so ergibt sich die Formel für $\sin(\alpha - \beta)$.

Berichtigungen.

In Fig. 15, Seite 11, ist der vierte Quadrant mit IV (statt II) zu bezeichnen.
In Fig. 18, Seite 12, ist der dritte Quadrant durch III zu bezeichnen.