Bemerkungen

zu

Laplace's Hypothese über die Entstehung unsers Planetensystems.

1. Die Feier des vierhundertsten Geburtsfestes des *Nicolaus Copernicus* am 19. Februar dieses Jahres, mit dessen Werk „*de revolutionibus orbium coelestium*“ eine wissenschaftliche Behandlung der Astronomie auf richtiger Grundlage beginnt, fordert zu einer Betrachtung des glänzenden Entwicklungsganges auf, den diese erhabene Wissenschaft bis zu unsern Zeiten genommen. Die Hauptepochen für den Ausbau ihrer Theorie knüpfen sich meiner Ansicht nach an die grossen Namen Keppler, Newton und Laplace, obwohl nicht wenige andere Genien ersten Ranges in diesem Forschungsgebiet durch ihre Geistesthaten gleichen oder fast gleichen Ruhm errungen haben. Dass ich neben Newton, der uns das Gesetz der Gravitation, das Grundgesetz des Weltbaus, entdeckt, noch einen andern und zwar Laplace glaube setzen zu müssen, findet seinen Grund zunächst darin, dass er vor Allen die Consequenzen jenes Grundgesetzes gezogen hat, dass durch ihn die „Mechanik des Himmels“ in gewissem Sinne fertig und vollendet hingestellt und die Stabilität unsers Planetensystems gegenüber den aus dem Gravitationsgesetz sich ergebenden Störungen durch die Ergebnisse dieses selben Gesetzes bewiesen ist. Aber noch in andrer Hinsicht hat er die Wissenschaft von dem Standpunkte, den sie durch Newton erreichte, einen mächtigen Schritt vorwärts geführt. Je grossartiger der Fortschritt war, den unsere ganze Weltanschauung durch Entdeckung des Gravitationsgesetzes machte, nach welchem die Bewegungen aller Weltkörper allein in Folge der dem Stoffe, also ihnen selbst, innewohnenden Kraft der Anziehung nach einem festen Gesetze vor sich gehen und sich regeln und in alle Ewigkeit so fortdauern, wofern nur jeder derselben zu irgend einer Zeit in dem ihm zukommenden Abstand von seinem Centralkörper aufgestellt wurde und einen einmaligen Anstoss in einer nicht durch das Centrum desselben gehenden Richtung erhielt: desto mehr musste der Wunsch, ja, ich möchte sagen, die Forderung sich geltend machen, auch das letzte in der Bewegung der Himmelskörper Unerklärte, jenen einmaligen Anstoss bei Beginn ihrer Wanderung, einem gewissermassen ausserweltlichen Eingreifen zu entziehen und auf das Wirken bekannter Naturgesetze zurückzuführen.

Eine Hypothese, welche hierüber Rechenschaft zu geben unternimmt, muss natürlich auch mit allen übrigen thatsächlichen Erscheinungen in Bau und Anordnung unsers Sonnensystems in Einklang stehn, muss auch diese als nothwendige Folgerungen aus ihren Grundannahmen herfliessen lassen, namentlich, da diese Anordnung so besondere Verhältnisse zeigt, dass dieselben unmöglich rein zufällig sein können. Beiden Anforderungen genügt die sogenannte Nebeltheorie von Laplace in vollem Maasse.

Aber warum verbinde ich mit Erwähnung dieser mir so wichtig erscheinenden Geistesthat nicht den Namen Kants, warum spreche ich nicht von der Kant-Laplaceschen Theorie, wie es so allgemein, selbst in wissenschaftlichen Werken geschieht, zumal Kants Aufstellungen nicht nur der Zeit nach den Vorgang haben, sondern auch viel vollständiger und ausgeführter sind, als die Laplace's? Um den Vorwurf einer Herabsetzung vaterländischen Verdienstes zu Gunsten der Fremde abzuwenden, die ich mir wahrlich nicht möchte zu Schulden kommen lassen, kann ich hier nur kurz darauf hinweisen, dass die Hypothesen beider grossen Männer zwar in dem einen wichtigen Punkte übereinstimmen, dass sie zur Erklärung der Phänomene, welche unser Sonnensystem zeigt, von der Annahme eines Weltnebels, von einem frühern Zustand äusserst weiter Ausbreitung und feiner Vertheilung der Materie, welche gegenwärtig die Sonne sammt ihren Planeten und deren Monden bildet, ausgehen, im übrigen aber auf durchaus verschiedenen Principien beruhen.

Während sich Laplaces Hypothese vielleicht kurz als die Centrifugal-Nebeltheorie characterisiren lässt, müsste man Kants Ansichten als eine Centripetal-Nebeltheorie bezeichnen. So interessant eine nähere Betrachtung uud Würdigung der Kantischen Abhandlung auch sein würde, die, eine Jugendarbeit des Königsberger Weltweisen, wenn sie auch nicht das Richtige trifft, doch von der grossartigen Auffassung und dem genialen Scharfsinn desselben auch auf dem Gebiet der exacten Wissenschaften einen glänzenden Beleg giebt, so muss ich hier wegen des beschränkten mir zugemessenen Raums davon Abstand nehmen.

Auf wenigen Seiten am Schluss seines „système du monde“ (Bch. V. Cap. 6) hat Laplace seine kühne Hypothese entwickelt. Es ist tief zu bedauern, dass dieser geniale Mathematiker sich darauf beschränkt hat, nur die allgemeinsten Grundsätze seiner Theorie, die er übrigens mit allem Vorbehalt als rein hypothetisch hinstellt, zu entwerfen, ohne im Einzelnen ihre Consequenzen zu ziehn und sie mit den Thatsachen zusammenzuhalten. So besitzen wir in ihr gleichsam den Schlussstein des stolzen Gewölbes, der es auf's herrlichste zusammenhalten und krönen würde, aber er ist noch nicht behauen und eingefügt, wozu freilich eine titanenhafte Kraft erforderlich sein würde. Da sie in ihren wesentlichen Momenten rein mathematischer Natur ist, entzieht sie sich einer analytischen Behandlung an sich nicht; nur sind die dabei sich darbietenden Probleme so schwer und complicirt, dass einer vollständigen Lösung derselben die mathematische Technik auf ihrem jetzigen Standpunkt nicht gewachsen ist.

Trotzdem ist eine nähere Betrachtung derselben, welche das, was dort nur angedeutet ist genauer entwickelt und verfolgt und die Consequenzen der Theorie so weit thunlich mit den thatsächlichen Verhältnissen vergleicht, von hohem Interesse, wenn die Untersuchung auch oft nach wenigen Schritten vor unübersteiglich scheinenden Hindernissen anzuhalten und statt bestimmter Resultate sich mit ungefähren Schätzungen zu begnügen genöthigt ist. Der Unterzeichnete, seit längerer Zeit mit diesem Gegenstande beschäftigt, möchte in diesen Blättern zunächst eine Darlegung der Theorie selbst geben und dann einige Punkte derselben, für welche dies in der Kürze möglich ist, einer etwas näheren Betrachtung unterziehen, den Gang wenigstens andeuten, den eine eingehendere Prüfung zu nehmen haben würde. Zuvor aber müssen die schon erwähnten besondern Verhältnisse in der Anordnung unsers Sonnensystems, welche eine Erklärung durch die Theorie erfordern, und auf denen sie beruht, etwas näher in Rücksicht auf dieselbe dargelegt werden.

2. Diese Verhältnisse, die mit dem Grundgesetz der Gravitation an sich in gar keinem Zusammenhang stehen, sind namentlich folgende:

1. Alle Planeten (mit theilweiser Ausnahme der Asteroiden) bewegen sich in Bahnen, deren Ebenen nur sehr kleine Winkel mit einander bilden. Für unsern Zweck ist es wichtig, diese

kleinen Abweichungen in der Richtung der Planetenbahnebenen nicht, wie es sonst geschieht, alle auf die Ekliptik zu beziehen, sondern darauf hinzuweisen, dass die Bahnen der Planeten sämmtlich mit der Ebene des Sonnenäquators beinahe zusammenfallen und dass namentlich, wenn man von der äussersten, der des Neptun anfangend, nach und nach zu den der Sonne nähern bis zu der der Erde, der Venus, des Merkur und zu der des Sonnenäquators übergeht, die Winkel, welche zwischen je zwei aufeinander folgenden liegen, immer sehr klein sind, nur zwischen 1 und 5 Grad betragen. Es würde somit, wenn man auf jeder der Bahnebenen im Mittelpunkt der Sonne, durch welchen alle hindurchgehen, Senkrechte, gewissermassen als Achsen der betreffenden Bahnen, errichtete, jede folgende beinahe mit der vorhergehenden zusammenfallen, nur einen sehr kleinen Winkel mit derselben bald nach der, bald nach der Richtung hin (denn ein Gesetz lässt sich in diesen kleinen Abweichungen nicht entdecken) bilden.

Dasselbe gilt im Allgemeinen, soweit man hat beobachten können, für die Neigungen der Mondbahnen gegen einander und gegen den Aequator ihres Hauptplaneten. Sehr klein sind namentlich diese Neigungen bei den Jupitersmonden, wo sie zum Theil nur wenige Minuten betragen. Für die Monde des Saturn, deren Bahnebenen zum Theil noch nicht mit genügender Genauigkeit festgestellt sind, zeigt sich wenigstens für den 3ten, 6ten Mond und für das Ringsystem dasselbe Verhältniss sehr entschieden, der 7te Mond dagegen scheint beträchtlich davon abzuweichen. Bemerkenswerth ist, dass die Bahnebene des Mondes unserer Erde zwar mit der Ekliptik nur einen ziemlich kleinen Winkel von 5^0 bis $5^0\ 18'$, dagegen mit dem Erdäquator einen beträchtlichen Winkel bildet.

2. Die vorrückenden Bewegungen aller Planeten in ihren Bahnen um die Sonne und der Monde in ihren Bahnen um ihren Centralkörper, ferner die Rotationsbewegungen der Sonne, aller Planeten und Monde, soweit uns dieselben bekannt sind, erfolgen alle (mit einer einzigen Ausnahme) in demselben Sinne, von Westen nach Osten.

Dieses Verhalten ist um so auffallender, da bei den doch gleichfalls zu unserm Sonnensystem gehörigen Kometen, deren Bewegungen um die Sonne ebenfalls dem Gravitationsgesetze folgen, sich die Sache ganz anders verhält. Unter den 197 Kometen, die Arago in seiner Astronomie (17. Buch 10. Cap.) als bis zum Jahre 1853 beobachtet und nach ihren Bahnelementen berechnet angiebt, waren fast genau die Hälfte, nämlich 99 rechtläufig, die übrigen 98 rückläufig. Wir müssen hieraus nothwendig den Schluss machen, dass, während für die Kometen kein Grund vorliegt, der ihnen die Bewegung in einer bestimmten Richtung anweist, für die Bewegung der Planeten und Monde ein zwingender Grund zu diesem Verhalten vorhanden ist. Hierbei an ein „zufälliges“ Zusammentreffen zu denken wäre widersinnig. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Bewegungen, die an sich ebenso gut in einer Richtung, als in der entgegengesetzten stattfinden können, zufällig alle in demselben Sinne erfolgen, ist $= \frac{1}{2^n - 1}$, also bei dem grossen Werthe von n (auch für die Schaar der Asteroiden greift dasselbe Gesetz Platz) beinahe gleich Null.

Allerdings machen die Monde des Uranus, deren nach Herrschel 6, nach den spätern Beobachtungen Lassell's nur 4 sind, davon eine Ausnahme, da wenigstens die beiden äussersten derselben entschieden rückläufig sind; von den andern ist die Bewegungsrichtung noch nicht mit Sicherheit festgestellt. Höchst wahrscheinlich stimmen die Bewegungen derselben in ihren Bahnen aber, wie das die Eigenschaft aller Trabanten in Bezug auf ihren Hauptplaneten, aller Planeten in Bezug auf die Sonne ist, mit der Rotationsrichtung des Uranus überein, die freilich durch directe Beobachtung nicht festgestellt ist. Dessen Achsendrehung müsste dann allerdings rückläufig sein, als einzige Ausnahme von jener sonst so allgemeinen Regel. Uebrigens muss hervorgehoben werden, dass für die Theorie die Uebereinstimmung in Bezug auf die Achsendrehung nicht ganz so bedeutsam ist, als in Betreff der fortschreitenden Bewegung, die nach derselben durchaus die Richtung der Achsendrehung des Centralkörpers einhalten muss.

3. Newton's Gravitationsgesetz verlangt, dass ein von einem Centralkörper angezogener Körper (wenn derselbe entweder kugelförmig, oder der Abstand desselben von dem Centralkörper sehr gross gegen die Dimensionen desselben ist), sich in einem Kegelschnitt bewege; dies kann ebensowohl eine Parabel oder Hyperbel, als eine Ellipse (oder ein Kreis) sein. Aber die Bahnen sämmtlicher Planeten und Monde in Bezug auf ihren Centralkörper sind Ellipsen und zwar im Allgemeinen sehr wenig excentrische Ellipsen, die sich wenig vom Kreise unterscheiden. Abgesehn von den Asteroiden, deren Bahnen zum Theil ziemlich lang gestreckte Ellipsen sind, hat nur der innerste Planet Merkur eine nicht ganz unbeträchtliche Excentricität von etwa $^1/_5$ der grossen Achse, alle übrigen sind unter $^1/_{10}$, die der Venus am kleinsten $=0{,}006859\ldots$ Um uns die Bedeutung dieses Verhaltens klarer zu machen, müssen wir die Gleichung der Bahn eines nach dem Gravitationsgesetz um ein Anziehungscentrum bewegten Körpers etwas näher betrachten, zumal die gleich anzugebenden Formeln auch in dem Folgenden gebraucht werden. Die Bahn hängt ausser von der Stärke der bewegenden Kraft offenbar von der Anfangsstellung des bewegten Körpers, von der Richtung und Stärke des einmaligen Anstosses, den er erhalten hat, ab. Diese Gleichung für Polarcoordinaten, auf die Haupt-Achse des Kegelschnitts bezogen und den Anfangspunkt in das Centrum der Anziehung verlegt, ist:

$$r = \frac{r_0^2\, v_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu + \cos \vartheta \sqrt{\sin^2 \alpha\, (\mu - r_0 v_0^2)^2 + \cos^2 \alpha\, \mu^2}}$$

Hier bedeutet r den radius vector, ϑ den variabeln Winkel, den er mit der Haupt-Achse und zwar mit dem nach dem Perihelium gerichteten Theil derselben bildet, r_0 den Werth des Leitstrahls für den Anfang der Bewegung, α den Winkel, den die Richtung der Bewegung am Anfang (also die des ursprünglichen Impulses) mit dem radius vector bildet, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, endlich μ die anziehende Kraft in der Einheit des Abstandes; dieselbe ist $=(M+m)\,f$, wenn M und m die Massen des Centralkörpers und des angezogenen Körpers und f die gegenseitige Anziehung zweier auf Punkte reducirten Masseneinheiten, die um die Einheit der Länge von einander abstehn, bedeuten.

Die Bahncurve ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem $2\mu - r_0\, v_0^2$ positiv, oder gleich 0, oder negativ ist.

Bezeichnet man die Halbachsen des betreffenden Kegelschnitts mit a, b, die halbe Excentricität mit e, so ist

$$a^2 = \frac{\mu^2\, r_0^2}{(2\,\mu - r_0\, v_0^2)^2}$$

$$b^2 = \frac{r_0^3\, v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\,\mu - r_0\, v_0^2}$$

$$e^2 = \frac{r_0^2}{(2\,\mu - r_0\, v_0^2)^2} \left[\sin^2 \alpha\, (\mu - r_0\, v_0^2)^2 + \cos^2 \alpha \mu^2\right]$$

Soll daher die Curve ein Kreis sein, so müssen die beiden Bedingungen

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0} \text{ und } \cos \alpha = o, \text{ also } \alpha = R \text{ erfüllt werden.}$$

Um die Bedingungen zwischen den Constanten am Anfange der Bewegung zu finden, unter welchen die Bahn eine Ellipse von kleiner Excentricität im Verhältniss zur grossen Achse sei, setze noch

$$\frac{e}{a} = \varepsilon$$

Dann muss zunächst cos α zwischen 0 und ε, oder α zwischen R und arc. cos ε liegen, da der kleinste Werth von α, an den Endpunkten der kleinen Achse, sich durch $\cos \alpha = \varepsilon$ bestimmt.

Und v_0^2 liegt zwischen den Grenzen

$$\frac{\mu}{a}\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] \text{ und } \frac{\mu}{a}\left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right],$$

oder, wenn man statt μ, der anziehenden Kraft in der Einheit der Entfernung, die anziehende Kraft in dem Abstand, welchen der Körper bei Beginn der Bewegung hatte, $= p_0$ einführt, liegt v_0^2 zwischen den Grenzen

$$p_0\, r_0\, (1-\varepsilon) \text{ und } p_0\, r_0\, (1+\varepsilon), \text{ während für den Kreis } v_0^2 = p_0\, r_0 \text{ ist. —}$$

3. Ich gebe nunmehr Laplace's Hypothese mit seinen eigenen Worten:

Nach Erwähnung der eben besprochenen Eigenthümlichkeiten in der Einrichtung unsers Sonnensystems und nachdem er kurz nachgewiesen, wesshalb Buffon's Hypothese zu verwerfen sei, der bekanntlich meinte, dass die Planeten durch den Schweif eines Kometen, der die glühend geschmolzene Sonnenkugel gestreift, von ihr losgerissen und weggeschleudert seien, fährt er fort:

„Welches auch die Natur dieser Ursache (der erwähnten Besonderheiten) sei, sie muss, da sie die Bewegungen der Planeten und der Nebenplaneten hervorgebracht oder gelenkt hat, alle diese Körper umfasst haben; und mit Rücksicht auf den ungeheuren Abstand, der sie trennt, kann sie nur ein Fluidum von unermesslicher (immense) Ausdehnung gewesen sein. Um ihnen allen in demselben Sinne eine fast kreisförmige Bewegung um die Sonne gegeben zu haben, muss dieses Fluidum dieses Gestirn wie eine Atmosphäre umgeben haben. Die Betrachtung der Planetenbahnen führt uns also auf den Gedanken, dass in Folge einer ausserordentlichen Hitze die Atmosphäre der Sonne sich Anfangs bis jenseits der Bahnen aller Planeten ausgedehnt und dass sie sich nach und nach (successivement) bis zu ihren gegenwärtigen Grenzen zusammengezogen hat.

Man kann also vermuthen (conjecturer), dass sich die Planeten an den successiven Grenzen dieser Atmosphären gebildet haben durch die Verdichtung der Zonen, welche sie, sich nach und nach an der Oberfläche dieses Gestirns abkühlend und verdichtend, in der Ebene des Aequators hat zurücklassen müssen. Man kann ferner vermuthen, dass die Nebenplaneten auf eine ähnliche Weise durch die Atmosphäre der Planeten gebildet sind. Die erwähnten Eigenthümlichkeiten der Bewegungserscheinungen in unserm Sonnensystem folgen auf natürliche Weise aus dieser Hypothese, denen die Ringe des Saturn einen neuen Grad von Wahrscheinlichkeit hinzufügen. —"

Ueber das Zurückbleiben dieser Zonen um den Aequator herum spricht sich Laplace noch an einer andern Stelle desselben Werks (Bch. IV. Cap. 9) deutlicher aus. Er macht hier darauf aufmerksam, dass in Folge des Princips von der Erhaltung der Flächen, wenn durch irgend eine Ursache die einen Weltkörper umgebende Atmosphäre sich zusammenzieht, oder wenn ein Theil derselben an der Oberfläche sich verdichtet, die Rotationsbewegung des Körpers und der Atmosphäre dadurch beschleunigt wird. Nun kann sich die Atmosphäre am Aequator nur bis zu dem Punkte ausdehnen, wo die Centrifugalkraft der Schwere genau das Gleichgewicht hält; denn über diese Grenze hinaus muss das Fluidum sich zerstreuen. Der Punkt, wo dieses Gleichgewicht eintritt, liegt um so näher dem Körper, je schneller die Umdrehungsbewegung ist. Nimmt man nun an, dass die Atmosphäre sich bis zu dieser Grenze ausdehnt und darauf sich zusammenzieht und durch Abkühlung an der Oberfläche des Körpers verdichtet, so wird die Rotationsbewegung schneller und schneller werden und die äusserste Grenze der Atmosphäre wird sich unaufhörlich ihrem Centrum nähern. Die Atmosphäre wird also nach einander in der Ebene ihres Aequators

Zonen des Fluidums zurücklassen, die um den Körper zu kreisen fortfahren werden, weil ihre Centrifugalkraft der Schwere gleich ist; aber da diese Gleichheit nicht Platz greift in Bezug auf die Theilchen der Atmosphäre, die vom Aequator entfernt sind, werden diese fortfahren, ihr anzugehören.“ —

4. Gehen wir nun zu einer etwas näheren Betrachtung der grossartigen Hypothese über, wobei wir uns aber hier nur an die mechanische Seite derselben halten wollen.

Gegen Laplace's Aufstellungen scheint zunächst folgendes Bedenken erhoben werden zu müssen:

Wenn bei zunehmender Drehungsgeschwindigkeit des Nebelballs, wobei sich derselbe nach mechanischen Gesetzen mehr und mehr abplattet, der Zeitpunkt eingetreten ist, wo die Centrifugalkraft der Schwere erst das Gleichgewicht hält und dann dieselbe überwiegt, so dass eine Zone um den Aequator herum „zurückbleibt“, müsste dann nicht diese Loslösung der Materie um den Aequator herum stets weiter und weiter fortschreiten? Das centrale Sphäroid plattet sich ja bei schneller werdender Drehung mehr und mehr ab; und da die Abkühlung und daher die Zunahme der Drehungsgeschwindigkeit doch gewiss nur höchst allmählich vor sich gehen kann, sollte man glauben, dass der sich loslösende Nebelring stetig an Masse zunehmen und immer dicht an den Centralkörper sich anschliessen müsste. Dies stimmt mit den thatsächlichen Verhältnissen durchaus nicht überein, denn die Erfahrung zeigt, dass, nachdem ein Nebelring sich losgelöst, der sich später zu einem Planeten zusammenballen soll, und der an Masse immer nur einen sehr kleinen Theil des ganzen Gasballes ausmacht, dasselbe Ereigniss sich erst wieder in einem beträchtlichen Abstande, also offenbar auch nach sehr langer Zeit wiederholt. Dasselbe Verhalten zeigen die Monde in Bezug auf ihren Hauptplaneten.

Der Grund hievon liegt offenbar in Folgendem:

Während in einem System von Körpern, wenn nur allmähliche Veränderungen in der gegenseitigen Stellung derselben vor sich gehen, die Summe der lebendigen Kräfte, $\int m\, v^2$, wo m die Masse, v die Geschwindigkeit des betreffenden Moleculs bedeutet, ungeändert bleibt, geht bei plötzlichen Ortsveränderungen derselben ein Theil der lebendigen Kraft verloren. Mithin muss nach Loslösung eines äquatorialen Ringes der Centralkörper eine geringere Drehungsgeschwindigkeit erhalten; dadurch wird auch seine Abplattung geringer, er wird zu einem weniger excentrischen, der Kugelgestalt näher kommenden Ellipsoid, wodurch sich offenbar die Lücke zwischen ihm und dem Ringe vergrössert.

Dann wird bei fortschreitender Abkühlung zwar Drehungsgeschwindigkeit und Abplattung wieder zunehmen, aber auch wegen der gleichzeitig zunehmenden Verdichtung der Durchmesser des Centralkörpers kleiner werden. Steigert sich dann wieder die Centrifugalkraft bis zu der Höhe, dass sie der Schwere das Gleichgewicht hält, so erfolgt die Geburt eines neuen Weltkörpers und so fort.

Nach dieser Vorstellungsweise werden die Massen der losgelösten Ringe, aus denen nachher die betreffenden Planeten und Monde sich bilden, wahrscheinlich in einem gesetzmässigen Zusammenhange mit der bei ihrer Trennung stattfindenden Drehungsgeschwindigkeit stehn. Dasselbe wird mit den Abständen vom Centrum, in welchen die successiven Loslösungen erfolgten und die wir annähernd in den jetzigen mittlern Entfernungen derselben von ihrem Centralkörper wiederfinden, der Fall sein. Ob derselbe vielleicht in dem Gesetze des Titius und ähnlichen Beziehungen, die man zwischen den Abständen der Jupiters- und Saturnsmonde gefunden haben will, bereits empirisch richtig angegeben ist und nur seiner Erklärung wartet, wie die Kepplerschen Gesetze dieselbe in dem Newtonschen Gravitatitionsgesetz fanden?

Zwar ist die Gestalt des Sphäroids in dem Zeitpunkt, wo die Grenze des Gleichgewichts der Schwere und der Centrifugalkraft überschritten wird, nicht bekannt, aber jedenfalls wird dasselbe eine beträchtliche Excentricität haben. Versetzen wir uns nun, immer den Voraussetzungen unserer Hypothese folgend, in die Zeit, wo der Centralkörper, die Sonne, den Nebelring des innersten Planeten, des Merkur, abgestossen hat. Wenn darauf auch aus dem eben angeführten Grunde die Excentricität des Centralsphäroids abnahm, so musste sie immer noch beträchtlich sein, die Gestalt desselben sehr merklich von der Kugelgestalt abweichen und bei weiterer Zusammenziehung musste die Abplattung wieder zunehmen. Gegenwärtig aber zeigt die Sonne und ebenso alle Planeten eine fast kugelförmige Gestalt, denn selbst die ziemlich starken Abplattungen des Jupiter und Saturn sind doch wohl entschieden kleiner, als nach der angenommenen Bildungsweise erwartet werden müsste.

Meiner Ansicht nach erklärt sich dies so:

Als der Sonnenball bis zur Merkursbahn reichte, musste seine Materie nothwendiger Weise noch eine äusserst geringe Dichtigkeit haben und, wenn nicht ganz, so doch grösstentheils in gasförmigem Zustand sich befinden. Gegenwärtig ist die Hauptmasse des Sonnenkörpers — wenn wir die wohl noch nicht spruchreife Frage über seine Constitution hier auch sonst unberührt lassen — jedenfalls nicht mehr gasförmig, sondern in tropfbar flüssigem oder festem Zustand. Wenn nun bei fortschreitender Abkühlung dieser Uebergang aus dem gasförmigen in den tropfbarflüssigen Zustand stattfand, was wegen der verschiedenen Höhe des Siedepunkts für die verschiedenen den Körper bildenden Stoffe mehrmals zu verschiedenen Zeiten eingetreten sein muss, so hat dies jedenfalls plötzliche höchst beträchtliche Aenderungen der mittlern Dichtigkeit des Sonnenballs, also gewaltige Ortsveränderungen seiner Molecule, Strömungen innerhalb desselben in den verschiedensten Richtungen hervorgerufen, wodurch die Drehungsgeschwindigkeit so sehr vermindert werden musste, dass die derselben entsprechende Gleichgewichtsfigur nur sehr wenig von der Kugelgestalt abwich. Dasselbe gilt natürlich für alle Weltkörper unsers Sonnensystems, da sie alle diesen Uebergang aus dem gasförmigen in den tropfbarflüssigen und festen Zustand durchgemacht haben. Die geringe Abweichung von der Kugelgestalt, welche Sonne, Planeten und Monde gegenwärtig zeigen, steht also nicht im Widerspruch mit der Theorie.

5. An die eben angestellten Betrachtungen knüpft sich leicht und naturgemäss eine Prüfung der Lage der Bahnebenen der verschiedenen unserm Planetensystem angehörigen Weltkörper im Lichte der Hypothese.

Die Loslösung eines Planetenringes musste nothwendig, wenn nicht noch andre Kräfte darauf einwirkten, um den Aequator des Centralkörpers herum stattfinden; in der Ebene desselben musste er auch weiterhin rotiren und in dem Vorgange des Zusammenballens der Stücke desselben zu dem Planetsphäroid, welcher später eingetreten sein muss, kann auch nicht füglich ein Grund zu merklicher Aenderung seiner Bahnebene liegen. Nach Loslösung des Planetenringes musste natürlich der Centralkörper eine neue, seinem nunmehrigen etwas veränderten Volumen und seiner neuen Drehungsgeschwindigkeit entsprechende Gleichgewichtsfigur annehmen. Dabei blieb natürlich die Lage der Drehungsachse beinahe unverändert; unbedeutende Verrückungen derselben aber konnten und mussten eintreten, wofern nicht der abgelöste Ring in seiner ganzen Ausdehnung von absolut gleicher Gestalt und Festigkeit war und um den ganzen Aequator herum genau zu derselben Zeit sich von dem Sonnenball trennte. Die geringen Neigungen, welche die Bahnebenen der Planeten von der des Neptun der Reihe nach bis zu der des Merkur und zu dem Sonnenäquator gegen einander haben und welche annähernd die successiven Aequatorebenen des sich nach und nach verdichtenden und immer neue Planetenringe gebährenden Sonnenballs darstellen, sind, wie man sieht, völlig im Einklang mit solchen unbedeutenden Aenderungen der Achsenrichtung, wie sie in Folge unserer Theorie eintreten mussten.

Offenbar wird eine merkliche Verrückung der Achse einestheils besonders bei der schliesslichen Consolidation des Centralkörpers und den gewaltigen bei Aenderung seines Aggregatzustandes eintretenden Dichtigkeits- und Gestaltsveränderungen sich erwarten lassen, so dass zwischen der Bahnebene des innersten Körpers, der den Centralkörper umkreist und der Aequatorebene desselben eine ziemlich beträchtliche Neigung nicht auffallen kann. Andererseits wird die Verrückung der Achse um so merklicher sein können, wenn ein verhältnissmässig grosser Theil der Masse des Centralkörpers sich losgelöst hat. Beide Umstände treffen bei dem Mond der Erde zu, woraus sich die ziemlich grosse Neigung seiner Bahnebene gegen den Erdäquator erklärt.

6. Versetzen wir uns nun in die Zeit, wo ein Ring sich von dem Centralkörper losgelöst und dieser aus den oben angeführten Gründen durch Verminderung der Excentricität sich um einen gewissen Zwischenraum von ihm getrennt hatte. Im Augenblick der Trennung hatten alle Theile des Ringes die damalige Drehungsgeschwindigkeit des Centralkörpers angenommen; ihre weitere Bewegung bestimmte sich also durch die Stärke des erhaltenen Impulses und die Anziehung, welche derselbe nunmehr auf sie ausübte.

Um eine annähernde Vorstellung von der Stärke dieser Anziehung und den Veränderungen, denen dieselbe unterworfen war, zu gewinnen, wollen wir uns der Formeln für die Anziehung eines homogenen Rotationsellipsoids auf einen ausserhalb gelegenen Punkt bedienen, obwohl diese Annahme der Natur nicht entspricht, da gewiss die Dichtigkeit in unseren Sphäroiden von der Oberfläche nach dem Centrum hin zugenommen hat.

Die Formeln für die Componenten der Anziehung eines homogenen Rotationsellipsoids auf einen ausserhalb gelegenen Punkt sind

$$X = -\frac{3\,Mf\,\alpha}{\lambda^3\,b^3}\left(\frac{\lambda\,b}{b_1} - \operatorname{arc}tg\,\frac{\lambda\,b}{b_1}\right)$$

$$Y = -\frac{3\,Mf\,\beta}{2\,\lambda^3\,b^3}\left(\operatorname{arc}tg\,\frac{\lambda\,b}{b_1} - \frac{\lambda\,bb_1}{b_1^2 + \lambda^2\,b^2}\right)$$

$$Z = -\frac{3\,Mf\,\gamma}{2\,\lambda^3\,b^2}\left(\operatorname{arc}tg\,\frac{\lambda\,b}{b_1} - \frac{\lambda\,bb_1}{b_1^2 + \lambda^2\,b^2}\right)$$

Hier ist die Rotationsachse des Ellipsoids (die kürzeste) als $x =$ Achse angenommen, M, f, a, b haben dieselbe Bedeutung wie in den vorigen Formeln, ferner ist $\frac{a^2-b^2}{b^2} = \lambda^2$ gesetzt, α, β, γ sind die Coordinaten des angezogenen Punktes und b_1 bestimmt sich durch die Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{b_1^2} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{b_1^2 + a^2 - b^2} = 1.$$

Wir vernachlässigen bei unsrer Betrachtung die geringe Neigung, welche der rotirende Ring vielleicht gegen die Aequatorebene des Centralkörpers angenommen hat und setzen also $\alpha = o$. Dann wird

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{b_1^2 + a^2 - b^2} = 1, \text{ also } b_1^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \lambda^2\,b^2.$$

Da es uns immer nur auf die Componente der Anziehung in der nach dem Mittelpunkt des Centralkörpers gehenden Richtung ankommt, wollen wir diese mit R und den Abstand des betreffenden Punktes vom Mittelpunkt mit r bezeichnen. Dann ist

$$r^2 = \beta^2 + \gamma^2 \text{ und}$$

$$R = \sqrt{Y^2 + Z^2} = -\frac{3\, Mf\, r}{2\,\lambda^3\, b^3}\left[\text{arc } tg \frac{\lambda\, b}{\sqrt{r^2 - \lambda^2 b^2}} - \frac{\lambda\, b \sqrt{r^2 - \lambda^2 b^2}}{r^2}\right]$$

und wenn man noch $\frac{\lambda\, b}{r} = \frac{e}{r} = \eta$ setzt,

$$R = -\frac{3\, Mf}{2\,\eta^3\, r^2}\left[\text{arc sin } \eta - \eta\,(1-\eta^2)^{1/2}\right]$$

$$\left(\text{da arc } tg \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \text{arc sin } \eta \text{ ist}\right).$$

Entwickelt man die in der Klammer stehenden Grössen nach den steigenden Potenzen von η, so erhält man

$$R = -\frac{Mf}{r^2}\left[1 + {}^3/_{10}\,\eta^2 + {}^9/_{56}\,\eta^4 + \ldots\right]$$

Der Factor $-\frac{Mf}{r^2}$ giebt die Anziehung an, welche die Masse des Centralkörpers ausüben würde, wenn sie in einem Punkte vereinigt, oder wenn der anziehende Körper kugelförmig wäre. Der Werth der Klammer ist in Bezug auf einen Punkt des sich loslösenden Ringes im Augenblick der Trennung am grössten, wird gleich nachdem dieselbe erfolgt ist, kleiner und nimmt bei fortschreitender Condensation des Centralkörpers mehr und mehr ab, da der absolute Werth der Excentricität e kleiner wird, wenn auch die durch den Quotient $\frac{e}{a}$ bestimmte Abplattung bei stärkerer Verdichtung und daraus hervorgehender Beschleunigung der Rotation zunimmt. Am kleinsten wird der Werth der Klammer, nämlich $= 1$, wenn die Excentricität $= 0$ wird, welcher Zeitpunkt offenbar da eingetreten ist, als die Sonne nach Geburt des Merkursringes sich zu ihrer jetzigen fast genau kugelförmigen Gestalt consolidirte.

Abgesehen von dieser stetigen Verminderung des Werthes von R in Folge der zunehmenden Verdichtung, durch welche $\eta = \frac{e}{r}$ stetig abnimmt, (freilich nach einem complicirten uns unbekannten Gesetze) vermindert sich die Anziehung des Centralkörpers bei jeder neuen Abstossung eines Planetenringes gewissermassen ruckweise um eine merkliche, wenn auch meistens verhältnissmässig kleine Grösse, da M dadurch kleiner wird.

Der grösste Werth, den R annehmen kann, ergiebt sich, wenn $r = a$, wenn also der angezogene Punkt noch auf der Oberfläche des Centralkörpers sich befindet und wenn $\eta = \frac{e}{a} = 1$ ist (dies findet freilich nur statt, wenn das Ellipsoid in eine unendliche kreisförmige Scheibe übergeht) und für diesen Grenzfall ist $R = -{}^3/_4\,\pi\,\frac{Mf}{r^2} = -2{,}3562\ldots\frac{Mf}{r^2}$. Aber auch wenn die Excentricität überhaupt nur nicht unbeträchtlich im Verhältniss zur grossen Achse des Sphäroids ist, was der Fall sein muss, wenn die Centrifugalkraft am Aequator der Schwerkraft gleich sein soll, wird der Factor, mit welchem $-\frac{Mf}{r^2}$ zu multipliciren ist, nicht unbeträchtlich grösser als 1 werden. Es scheint also, dass der Werth von R, welcher die ursprüngliche Bahn des sich loslösenden Nebelrings bestimmt, beträchtlich grösser ist, als der, welchen R endlich angenommen hat und der für die jetzigen Planetenbahnen massgebend ist.

Aber es ist zu bedenken, dass, wie erwähnt, die Sphäroide, mit denen wir es hier zu thun haben, gewiss nicht homogen sind, sondern dass die Dichtigkeit in ihnen jedenfalls von der Oberfläche nach dem Centrum, vielleicht nach dem Mariotte'schen Gesetz, zugenommen haben wird. Bei einem so beschaffenen rotirenden Körper haben nun aber die auf einander folgenden Niveauflächen gleicher Dichtigkeit Excentricitäten, die von der Oberfläche nach dem Centrum hin abnehmen, so dass sie sich mehr und mehr der Kugelgestalt nähern. Es wird daher die von einem solchen Sphäroid ausgeübte Anziehung nicht so beträchtlich von der, welche eine Kugel von gleicher Masse, oder die im Centrum vereinigt gedachte Masse ausüben würde, abweichen, da die äussern, stark excentrischen Schichten geringe Dichtigkeit haben und die Stärke der Anziehung daher vorzugsweise von dem innern massenhaftern Kern, dessen Excentricität gegen den Abstand des Punktes klein ist, abhängt.

7. Bis jetzt ist uns nur für homogene rotirende Flüssigkeiten bekannt, welche Gleichgewichtsfigur sie bei gegebener Dichtigkeit und Winkelgeschwindigkeit annehmen. Für die hier in Betracht kommenden Gasbälle ist dieses Problem nicht gelöst, schon weil wir nicht wissen, nach welchem Gesetz die Dichtigkeit derselben von der Oberfläche nach dem Centrum hin zunimmt; wir kennen also auch nicht die Bedingungen, unter welchen die Loslösung der äquatorialen Ringe erfolgt. Einigen Aufschluss darüber giebt uns indessen folgender Satz der Mechanik, den ich hier der Kürze wegen ohne Beweis hinstelle:

> Ist irgend eine rotirende Masse M, deren Dichtigkeitszunahme von der Oberfläche nach dem Mittelpunkt hin einem beliebigen Gesetze folgt, und deren halbe Drehungsachse $= b$ und mittlere Dichtigkeit $= \varrho$ ist, bei der Umdrehungszeit T im Gleichgewicht, so ist auch eine andre ihr ähnliche, aus ähnlich liegenden Schichten (zwischen den betreffenden Niveauflächen) bestehende Masse M_1, bei der die Dichtigkeitszunahme also demselben Gesetze folgt, deren halbe Drehungsachse b_1, mittlere Dichtigkeit ϱ_1, Umdrehungszeit T_1 ist, im Gleichgewicht,

wenn
$$\varrho : \varrho_1 = \frac{M}{b^3} : \frac{M_1}{b_1{}^3}$$
und
$$T^2 : T_1{}^2 = \frac{b^3}{M} : \frac{b_1{}^3}{M_1{}^3} \quad \text{ist.}$$

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn eine Masse M die Grenze der Abplattung erreicht hat, über welche hinaus die Trennung eines äquatorialen Ringes erfolgen muss, eine solche Trennung auch bei allen Massen M_1, die den eben angegebenen Bedingungen unterworfen sind, stattfindet. Denn gesetzt es könnte M_1 bei etwas zunehmender Dichtigkeit und Abplattung im Gleichgewicht bleiben, so würde das entsprechende auch bei M stattfinden müssen, was der Voraussetzung widerspricht.

Da diese Grenzgestalten der rotirenden Massen ähnlich sind, kann man in obigen Proportionen auch statt der Drehungsachsen die Aequatorialachsen setzen, also
$$\varrho : \varrho_1 = \frac{M}{a^3} : \frac{M_1}{a_1{}^3}$$
$$T^2 : T_1{}^2 = \frac{a^3}{M} : \frac{a_1{}^3}{M_1}$$
(wenn die rotirenden Massen keine Rotationskörper im mathematischen Sinne, also z. B. dreiachsige Ellipsoide sind, können a und a_1, irgend welche gleichartige Parameter bedeuten).

Wir sehen also, dass die Rotationen der Nebelbälle, in dem Augenblick, wo sie den Planeten- oder Trabantenringen die Entstehung geben, dem dritten Kepplerschen Gesetz folgen; und da wir schliessen müssen, dass die gegenwärtigen Bewegungen derselben nicht sehr beträchtlich von denen abweichen, die sie im Augenblicke der Entstehung hatten, scheint mir hierin eine entschiedene Bestätigung von Laplace's Hypothese zu liegen.

Freilich gilt der obige von mir aufgestellte Satz und daher die aus ihm abgeleitete Folgerung, nur unter der Voraussetzung, dass die Dichtigkeitszunahme innerhalb der rotirenden Nebelbälle von der Geburt des Neptun bis zu der des Merkur und ebenso in den Planetenbällen, wenn sie ihre Monde aus sich gebären, demselben Gesetze folgen, woraus sich dann die Aehnlichkeit ihrer Grenzgestalten ergiebt. Aber diese Annahme scheint mir die einfachste und naturgemässeste, die dem wirklichen Sachverhalt, wenn auch gewiss nicht in aller Strenge, doch höchst wahrscheinlich annähernd entsprechen dürfte.

8. Sehen wir nun zu, was mit den Ringen nach ihrer Loslösung von dem Aequator vor sich gehen musste. Die Bewegung eines Punkts derselben war im Augenblick der Loslösung kreisförmig, und die Geschwindigkeit bestimmte sich, da in diesem Momente die Centrifugalkraft der Centripetalkraft gleich sein musste, nach der Formel

$$V^2 = Rr.$$

Da nun aber, wie gezeigt, nach der Trennung der Werth von R abnimmt, kann die Bahn desselben nicht kreisförmig bleiben. Sie wird auch nicht genau elliptisch, da die von dem Sphäroid auf den bewegten Punkt ausgeübte Anziehung nicht $= -\frac{Mf}{r^2}$ ist, sondern da dieser Ausdruck mit einem Factor multiplicirt ist, der nicht constant ist, sondern sich gleichzeitig mit r ändert. Die Ermittlung der Bahncurve hat für unsern Zweck kein Interesse; sie wird übrigens, wenigstens anfangs, nicht beträchtlich von der Kreisgestalt abweichen.

Welche Veränderungen etwa in der Gestalt des rotirenden Gasrings und seiner Bewegung dadurch eintreten mögen, dass jeder materielle Punkt desselben für sich bestrebt ist, die ihm zukommende Bewegung einzuhalten und darin zum Theil von den andern behindert wird, muss dahingestellt bleiben. Wahrscheinlich wird dieser Umstand darauf hinwirken, die Bewegung mehr einer gleichförmigen Kreisbewegung anzunähern, so dass die Bewegung des Ringes im Ganzen weniger excentrisch und ungleichmässig vor sich geht, als wenn ein einzelner materieller Punkt unter denselben Verhältnissen seine Bahn beschriebe.

Aber bei fortschreitender Zusammenziehung des Centralkörpers nimmt, wie wir gesehen haben, die von demselben ausgeübte Anziehung mehr und mehr ab, wodurch der Abstand der bewegten Punkte vom Centrum sich vergrössert, der Ring sich also erweitert, einen grössern Durchmesser bekommen muss. Da sich die ihn bildende Masse zugleich durch Abkühlung, die in ihm viel schneller als in dem Centralkörper vor sich geht, zusammenzieht, so sieht man leicht, wie diese Umstände im Allgemeinen ein Auseinanderbrechen des Ringes in Stücke zur Folge haben müssen. Dass die Saturnsringe sich in dieser Gestalt erhalten haben, hat vermuthlich nur darin seinen Grund, dass sie bald nach ihrer Trennung von dem Planeten eine verhältnissmässig stärkere Consistenz annahmen, die ihr Auseinanderfallen verhinderte. In der That kann auch, als der Saturnsball dieselben absonderte, die Masse desselben sich gar nicht mehr in einem Zustande sehr feiner Vertheilung befunden haben. Die Ringe sind vielleicht bald nach ihrer Trennung von dem Centralkörper aus dem gasförmigen in den tropfbar flüssigen Zustand übergegangen.

Da die Stücke fast genau die Bahnbewegung einhalten, die der ganze Ring besass und doch in der Art davon abweichen werden, dass die Bewegung des einen etwas schneller, die des andern etwas langsamer ist, als die gewissermaassen mittlere Bewegung, die der ganze Ring annehmen musste, so werden sie sich, zumal auch ihre gegenseitigen Anziehungen ins Spiel kommen, bald wieder vereinigen, natürlich eine ungefähr kugelförmige Gleichgewichtsfigur annehmen, worauf dann der Planet oder Mond fortfährt den Centralkörper zu umkreisen, in einer Bahn, die nicht beträchtlich von der des Ringes, aus dem er entstanden ist, abweichen wird. Aus dieser Entstehungsweise ergiebt sich auch, dass die Rotationen der neu entstehenden Sphäroide in demselben Sinne, wie die Drehung des Ringes, von Westen nach Osten erfolgen werden, zumal der äussere Rand der Ringstücke eine schnellere Bewegung besitzt als der innere. Aber man sieht zugleich, dass die Lage der Achse der auf so gewaltsame Art sich bildenden Bälle gegen die Ebene der Bahn, je nach der Art, wie die Ringstücke auf einander stiessen, eine ganz verschiedene werden konnte. In der That finden wir bei den Planeten, deren Achsenrichtung wir kennen, in dieser Hinsicht die grössten Verschiedenheiten. Die Achse des Jupiter steht fast senkrecht auf seiner Bahnebene, die der Erde macht mit ihr einen Winkel von etwa $66^1/_2$ Grad und die des Uranus fällt wahrscheinlich mit der Bahnebene fast zusammen. Wir müssen dies daraus schliessen, dass er sich uns zu gewissen Zeiten fast genau kreisförmig, zu andern *sehr merklich* abgeplattet zeigt, was sich füglich nur so erklären lässt, dass er uns im ersten Fall einen seiner Pole zukehrt, während wir im andern Fall uns fast genau in der Ebene seines Aequators befinden. Dies wird aber nur dadurch möglich, dass seine Achse beinahe mit der Ebene der Ekliptik zusammenfällt, welche ihrerseits mit der Uranusbahn nur einen Winkel von weniger als 1^0 macht. Nehmen wir nun an, dass sein Nordpol nicht nur in der Bahnebene liegt, sondern sich gewissermaassen noch unter dieselbe herabsenkt, so wird seine Rotation im entgegengesetzten Sinne wie die *aller übrigen* Weltkörper erfolgen. Diese so auffallend erscheinende einzige Ausnahme von einem sonst durchgreifenden Gesetz verliert dadurch nicht wenig an Bedeutung, dass wir sie als im Zusammenhang stehend mit der der Natur der Sache nach so grosser Mannichfaltigkeit fähigen Achsenstellung der aus den Ringen sich bildenden Planetenbälle erkennen. Die beobachtete Rückläufigkeit seiner Monde ist dann ein nothwendiges Ergebniss der Hypothese.

9. Verfolgen wir nun die Planeten nach ihrer Entstehung aus den Ringen noch weiter in ihrem Lebenslauf: Abgesehen davon, dass sie sich condensirten, dadurch eine grössere Drehungsgeschwindigkeit erhielten, sich stärker abplatteten und zum Theil ihrerseits Ringe abstiessen, die später zu Monden wurden, musste auch ihre Bahnbewegung, da der Centralkörper fortfuhr sich zu concentriren und Theile seiner Masse zu verlieren, sich ändern. Diese Veränderungen erstreckten sich natürlich auf alle Bahnelemente und waren nothwendiger Weise viel beträchtlicher als jetzt, wo in Bezug auf dieselben ein Zustand der Stabilität oder periodischer Schwankung innerhalb enger Grenzen eingetreten ist.

Wir betrachten hier nur die Aenderung der mittlern Abstände von dem Centralkörper (der halben grossen Achsen) und die Aendernng des Werthes von $\frac{e}{a}$, des Verhältnisses der Excentricität zur grossen Achse, wodurch die *Gestalt* der Bahncurve sich bestimmt, um zu beurtheilen, ob der gegenwärtige Zustand mit der Hypothese im Einklang ist. Die Richtungen der grossen Achsen, die auch jetzt höchst variabel sind, und die Neigungen der Bahnebenen gegen einander, die, wenn auch früher wahrscheinlich grösseren Schwankungen unterworfen, doch gerade in Folge der Voraussetzungen unserer Theorie von jeher in engen Grenzen bleiben mussten, können unberücksichtigt bleiben. Für diese Elemente waren die maassgebenden Verhältnisse in der Periode der Entstehung der Planeten nicht wesentlich von denen verschieden, die nach dem Ausbau oder vielmehr der Gestaltung des ganzen Systems zu seinem jetzigen Zustand, also nach dem Zeitpunkt, wo die Sonne ihre jetzige fast kugelförmige Gestalt angenommen, Platz gegriffen haben. So verhält es sich aber durchaus nicht mit den mittlern Abständen vom Centralkörper und den Gestalten der Bahncurven.

Sehen wir zu, wie die halbe grosse Achse der Bahncurve sich ändert, wenn μ die Centripetalkraft in der Einheit des Abstandes einen andern Werth μ_1 erhält und nehmen zunächst an, dass diese Aenderung an der Stelle der Bahn eintrete, den wir als Anfangspunkt der Bewegung angenommen haben.

Es ist
$$a = \frac{r_0 \mu}{2\mu - r_0 v_0^2},$$
also wird
$$a_1 = \frac{r_0 \mu_1}{2\mu_1 - r_0 v_0^2}.$$

Geht nun in einem Augenblick, wenn der Planet nach einem oder mehreren Umläufen wieder an denselben Punkt gekommen ist, μ_1 in μ_2, nach einer spätern Ankunft in demselben Punkt μ_2 in μ_3 über u. s. w., so werden die Halbachsen der successive veränderten Bahnen die Werthe annehmen:

$$a_2 = \frac{r_0 \mu_2}{2\mu_2 - r_0 v_0^2}$$

$$a_3 = \frac{r_0 \mu_3}{2\mu_3 - r_0 v_0^2}$$ u. s. w., da r_0 und v_0^2 dabei ungeändert bleiben.

Wenn daher die Veränderungen in dem Werthe von μ immer an derselben Stelle eintreten, so würde der Erfolg, in sofern es nur auf den Werth der grossen Achse und daher der Umlaufszeit ankommt, derselbe sein, gleichviel ob μ nach einander die Werthe $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_n$ annimmt, oder auf einmal von μ in μ_n übergeht. Immer erhält man als Werth, welcher dem letzten Werth μ_n entspricht,

$$a_n = \frac{r_0 \mu_n}{2\mu_n - r_0 v_0^2}.$$

So verhält es sich aber nicht, wenn die Aenderungen an verschiedenen Stellen der Bahn eintreten, wie es in Wirklichkeit natürlich der Fall ist. Wenn in einem Punkte der Bahn, der durch den radius vector r_1 bestimmt ist, μ in μ_1 übergeht, so muss, um den Werth der Halbachse, den wir mit a_1' bezeichnen wollen, zu finden, zuvor der zu r_1 gehörige Werth von v bestimmt werden. Dieser ergiebt sich aus der Formel

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Macht man die nöthigen Substitutionen, so ergiebt sich

$$a_1' = \frac{r_0 r_1 \mu_1}{2\mu_1 r_0 - 2\mu(r_0 - r_1) - r_0 r_1 v_0^2}.$$

Um zu untersuchen, ob dieser Werth sich beträchtlich von dem vorher erhaltenen a_1 unterscheidet, bilde

$$a_1' - a_1 = \frac{r_0 \mu_1}{2\mu_1 - r_0 v_0^2} \cdot \frac{2(r_0 - r_1)(\mu - \mu_1)}{r_1(2\mu - r_0 v_0^2) - 2 r_0 (\mu - \mu_1)}$$
$$= a_1 \cdot \frac{2(r_0 - r_1)(\mu - \mu_1)}{r_1(2\mu - r_0 v_0^2) - 2 r_0(\mu - \mu_1)}.$$

Der Factor, mit welchem a_1 multiplicirt ist, wird natürlich gleich Null, sowohl wenn $r_0 = r_1$, als auch wenn $\mu = \mu_1$ ist. Er wird aber ferner sehr klein, wenn die Differenz $r_0 - r_1$ sehr klein ist, d. h. wenn die betreffende Ellipse wenig excentrisch ist, und wenn $\mu - \mu_1$, d. h. wenn die Aenderung in dem Werthe von μ klein ist und nähert sich um so mehr der Null, wenn beide Umstände gleichzeitig Platz greifen. Der Nenner nämlich hat, so lange $\mu - \mu_1$ klein bleibt, stets einen gegen den Zähler grossen Werth.

Der Werth von $a_1 - a_1'$ ist positiv, wenn $r_0 > r_1$ und negativ, wenn $r_0 < r_1$ ist. Daraus ergiebt sich, dass eine gleiche Verminderung des Werthes von μ, wenn sie an der dem kürzesten radius vector entsprechenden Stelle der Bahncurve (im Perihelium) eintritt, den Werth der grossen Achse am stärksten vergrössert und eine um so geringere Vergrösserung der Achse zur Folge hat, je weiter der Punkt der Bahn, an welchem μ in μ_1 übergeht, von dem Centrum der Anziehung absteht, die geringste Vergrösserung also im Aphelium.

Je nach der Stelle der Bahn, an welcher μ in μ_1 übergeht, erhält man für die halbe grosse Achse die Werthe:

Im Perihelium: $$\frac{\mu_1(a-e)}{(2\mu_1-\mu)\,a-\mu e}\cdot a$$

An den Enden der kleinen Achse: $$\frac{\mu_1}{2\mu_1-\mu}\cdot a$$

Im Aphelium: $$\frac{\mu_1(a+e)}{(2\mu_1-\mu)\,a+\mu e}\cdot a$$

Der zweite Werth ist ein Mittelwerth zwischen den beiden andern, liegt aber dem zweiten näher als dem ersten.

10. Sehen wir nun zu, wie sich die Grösse $\frac{e}{a}$, die das Verhältniss der Excentricität zur grossen Achse angiebt, ändert, wenn μ in μ_1 übergeht.

Es ist
$$\frac{e^2}{a^2} = \frac{\sin^2\alpha(\mu - r_0 v_0^2)^2 + \cos^2\alpha\,\mu^2}{\mu^2}$$
$$= \sin^2\alpha\left(1 - \frac{r_0 v_0^2}{\mu}\right)^2 + \cos^2\alpha.$$

Ob dieser Ausdruck bei Abnahme des Werths von μ grösser oder kleiner wird, hängt davon ab, ob

$$1 > \frac{r_0 v_0^2}{\mu} \text{ oder } 1 < \frac{r_0 v_0^2}{\mu} \text{ ist und zwar}$$

wächst $\frac{e^2}{a^2}$ bei abnehmendem μ, wenn $1 < \frac{r_0 v_0^2}{\mu}$ und

nimmt ab „ „ „ „ $1 > \frac{r_0 v_0^2}{\mu}$ ist.

Nun ist $r_0 v_0^2$ am grössten im Perihelium, am kleinsten im Aphelium. Eine Verminderung der Centripetalkraft bewirkt also, wenn sie im Perihelium stattfindet, eine Vergrösserung der Excentricität, wenn im Aphelium eine Verkleinerung derselben (vorausgesetzt, dass die Verminderung nicht über eine gewisse Grenze hinausgeht).

Wenn im Perihelium μ in μ_1 übergeht, wird der zugehörige Werth:
$$\frac{e_1^2}{a_1^2} = \left[\frac{\mu e + (\mu - \mu_1)a}{\mu_1 a}\right]^2$$

Wenn im Aphelium, so wird
$$\frac{e_2^2}{a_2^2} = \left[\frac{\mu e - (\mu - \mu_1)a}{\mu_1 a}\right]^2.$$

Ersteres ist stets grösser als $\frac{e^2}{a^2}$, letzteres kleiner als $\frac{e^2}{a^2}$, so lange $\frac{\mu}{\mu_1} < \frac{a+e}{a-e}$ ist. (Wird im Aphelium $\mu_1 = \frac{\mu(a-e)}{a}$, so wird die Excentricität $= 0$ und die Bahncurve ein Kreis. Nimmt μ_1 noch mehr ab, so wird der Werth von $\frac{e}{a}$ negativ, das bisherige Aphelium zum Perihelium, die Excentricität wächst und wird der anfänglichen Excentricität $\frac{e}{a}$ gleich, wenn $\mu_1 = \mu \frac{(a-e)}{a+e}$ wird. Nimmt μ_1 noch weiter ab, so wird der Werth von $\frac{e}{a}$ natürlich grösser als der ursprüngliche). Bei allmählicher Abnahme von μ wird also durch dieselbe im Perihelium die Exentricität vergrössert, im Aphelium verkleinert.

Die im Perihelium bewirkte Zunahme von $\frac{e}{a}$ ist

$$= \frac{(\mu-\mu_1)(a+e)}{\mu_1 a},$$

die im Aphelium bewirkte Abnahme

$$= \frac{(\mu-\mu_1)(a-e)}{\mu_1 a}.$$

Die Zunahme überwiegt also die Abnahme.

An den Endpunkten der kleinen Achse wird der Werth von $\frac{e^2}{a^2}$, wenn μ in μ_1 übergeht,

$$= \frac{b^2}{a^2}\frac{(\mu-\mu_1)^2}{\mu_1{}^2} + \frac{e^2}{a^2}.$$

Wenn also die Aenderung von μ allmählich um sehr kleine Grössen stattfindet, bleibt in diesem Falle $\frac{e^2}{a^2}$ ungeändert. Eine stetige, allmähliche Aenderung von μ würde mithin vom Perihelium bis zu dem einen Endpunkt der kleinen Achse eine Vermehrung der Excentricität, von da bis zum Aphelium eine Verminderung derselben hervorbringen. (In der zweiten Hälfte der Bahn natürlich dieselben Erscheinungen in umgekehrter Reihenfolge). Da die Vergrösserung der Excentricität in der zum Perihelium gehörenden Hälfte der Bahn in stärkerem Maasse erfolgt, als die Verminderung im Aphelium, so scheint bei einer stetigen allmählichen Abnahme von μ die Vermehrung die Verminderung überwiegen zu müssen, so dass die Excentricität der Bahn jedenfalls nach und nach zunehmen würde. Dem gegenüber muss aber erwogen werden, dass sich der Weltkörper in der Bahnhälfte des Periheliums nach dem zweiten Kepplerschen Gesetz kürzere Zeit aufhält als im Aphelium, dass also die an sich bei gleicher Abnahme von μ geringere Verminderung der Excentricität während längerer Zeit wirkt. Die vermehrenden und vermindernden Einflüsse können sich also die Waage halten; welche von beiden überwiegen, lässt sich, so lange nicht feststeht, welche Function der Zeit μ ist, natürlich nicht feststellen. Doch geht aus den vorangehenden Betrachtungen hervor, dass bei allmählicher Abnahme von μ, selbst wenn der endlich erreichte Werth μ_n beträchtlich von dem Anfangswerthe μ abweicht, das Verhältniss der Excentricität zur grossen Achse $\frac{e}{a}$ ziemlich ungeändert bleiben, dass namentlich eine beinahe kreisförmige Bahn durch eine derartige Veränderung des Werthes von μ von der Kreisform nur wenig entfernt werden wird.

11. Machen wir nun von den obigen allgemeinen Betrachtungen eine Anwendung auf die Veränderungen der Planetenbahnen von der Zeit an, wo sie, zu Kugeln zusammengeballt, in wahrscheinlich beinahe kreisförmiger Bahn um den noch stark ellipsoidischen Sonnen-Gasball in geringem Abstand von seinem Aequator rotirten bis zu dem Zeitpunkt, wo derselbe sich zu seiner jetzigen fast kugelförmigen Gestalt consolidirte und dadurch Stabilität in die Bewegungen der aus ihr geborenen Weltkörper brachte.

Wir haben gesehen, dass durch Abnahme der Centrifugalkraft in Folge der Zusammenziehung der Sonnenkugel der Abstand der Planeten vom Mittelpunkt des Centralkörpers stetig zunimmt, die Excentricität (d. h. der Werth $\frac{e}{a}$) periodisch in wahrscheinlich ungefähr gleichem Maasse zu- und abnehmen musste. Wir haben uns daher die Bewegung eines Planeten als von der ursprünglich beinahe kreisförmigen Bahn in die einer sehr allmählich sich erweiternden Spirale übergehend zu denken, deren Windungen, welchem Gesetze sie auch folgen mochten, nicht beträchtlich von der Kreisgestalt abweichen, eine nur geringe Excentricität zeigen konnten. In diesem Verlauf musste eine Aenderung nur durch zwei Umstände hervorgebracht werden: Einmal durch die Loslösung neuer Planetenringe, welche den Werth von μ nicht stetig, sondern discontinuirlich um merkliche, wenn auch verhältnissmässig kleine Grössen verminderte; dann aber durch die nach Geburt des jüngsten Planeten eintretenden plötzlichen Volumen- und daher Gestaltsveränderungen des Sonnenballs. Natürlich ist an eine auch nur annähernde Berechnung des Betrags dieser Veränderungen in dem Werthe von a und $\frac{e}{a}$ nicht zu denken; indessen ergeben sich doch aus den vorangehenden Betrachtungen gewisse ungefähre Schätzungen:

Im Augenblick der Loslösung der Planetenringe war die Centrifugalkraft unterm Aequator der von dem Centralkörper auf einen Punkt desselben ausgeübten Anziehung gleich. Diese Anziehung war also $= \frac{4\,\pi^2\,a}{T^2}$, wo a die halbe grosse Achse des Rotationsellipsoids, T die Umdrehungszeit bedeutet. Daher ist die in der Einheit des Abstandes ausgeübte Anziehung $= \frac{4\,\pi^2\,a^3}{T^2}$. Die Anziehungen verschiedener derartiger Rotationskörper in der Einheit des Abstandes sind also dem Ausdruk $\frac{a^3}{T^2}$ proportional. Nach dem von mir in Nr. 7 aufgestellten Satze verhält sich aber für rotirende Körper unter der dort gemachten Voraussetzung in dem Augenblick, dass sie die Grenze des möglichen Gleichgewichts erreicht haben und äquatoriale Ringe abstossen

$$M : M_1 = \frac{a^3}{T^2} : \frac{a^3_{\ 1}}{T^2_{\ 1}}$$

Also verhalten sich die von verschiedenen Rotationskörpern zur Zeit der Loslösung der Ringe in der Einheit der Entfernung ausgeübten Centrifugalkräfte wie die Massen derselben. Da nun aber dasselbe bei den der Gravitation unterworfenen bewegten Körpern, wenn die anziehende Kraft in einem Punkte concentrirt ist, oder von einer Kugel ausgeübt wird, stattfindet, so müssen die von dem Centralkörper auf einen Punkt des Aequators beim Beginn der Trennung geübten Centripetalkräfte (in der Einheit des Abstandes) denen proportional sein, welche dieselben Massen in einen Punkt concentrirt, oder bei kugelförmiger Gestalt der Körper ausüben würden. Bezeichnet man also diese Centripetalkraft bei Loslösung der Ringe mit μ und die von derselben Masse in einem Punkt concentrirt mit μ', so ist $\mu = \varkappa\,\mu' = \varkappa\,(M + m)\,f$, wo $\varkappa$ einen Werth hat, welcher grösser als 1, dessen Betrag uns aber unbekannt ist.

Wir können nunmehr berechnen, um wieviel die Excentricität $\frac{e}{a}$ durch die Verminderung, welche die Masse des Centralkörpers durch die Geburt neuer Planeten erlitten hat, höchstens vermehrt worden ist. Stellen wir diese Berechnung für den äussersten Planeten Neptun an: Die Bahn desselben war Anfangs kreisförmig und änderte, wie wir gesehen haben, durch die allmähliche Concentration und Gestaltsveränderung des Sonnenballs diese Gestalt nur wenig. Bei Loslösung des Uranusringes ging aber M in einen kleinern Werth M_1 über, wodurch dieselbe eine Excentricität erhielt. Der zugehörige Werth $\frac{e}{a}$, lässt sich, da wir wissen, um den wievielten Theil sich M, also auch μ' und μ verminderte, berechnen. Eine weitere Verminderung des nunmehrigen Werthes von M tritt durch die Loslösung des folgenden Gasringes ein, aus welchem sich das System des Saturn, seiner Monde und seines Ringes bildete.

Wie ich früher gezeigt, wirkt eine Verminderung der Centripetalkraft am stärksten auf Vergrösserung der Excentricität, wenn sie im Perihelium eintritt. Wir wollen annehmen, dass das nicht nur diesesmal, sondern auch bei der Geburt der folgenden Weltkörper, von Jupiter bis Merkur, immen geschehe und für diesen der Vermehrung der Excentricität günstigsten Fall den successiven Betrag derselben berechnen. Der endlich erhaltene Werth wird demnach für die Vermehrung des Werthes von $\frac{e}{a}$ in sofern sie durch Verminderung der Masse M verursacht wird, die obere Grenze ergeben. Diese Vermehrung kann weit geringer sein, da ja diese Verminderungen von M ebenso gut innerhalb des Apheliums stattfinden konnten, wo sie $\frac{e}{a}$ nicht vermehrt, sondern vermindert haben würden. Die dabei in Betracht kommenden Werthe von μ bezeichne ich der Reihe nach mit μ, μ_1, μ_2. Wenn im Perihelium μ in μ_1 übergeht, so wird die Excentricität der veränderten Bahn

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{\mu e + (\mu - \mu_1)\, a}{\mu_1\; a} = \frac{\mu \,.\, \frac{e}{a} + (\mu - \mu_1)}{\mu_1}$$

Da die Werthe von μ und μ_1 den betreffenden M proportional sind und es nur auf ihr Verhältniss ankommt, können überall statt derselben die Massen gesetzt werden.

Dann wird μ die Masse der Sonne und aller Planeten von Merkur bis Neptun, sammt den dazu gehörigen Monden bedeuten, μ_1 dieselbe nach Abzug der Masse des Uranus und $\frac{e}{a}$ ist nach unserer Voraussetzung $= 0$. Ist hiernach $\frac{e_1}{a_1}$ bestimmt so berechnen wir

$$\frac{e_2}{a_2} = \frac{\mu_1 \frac{e_1}{a_1} + (\mu_1 - \mu_2)}{\mu_2}$$

wo $\mu_2 = \mu_1$ vermindert um die Masse des Saturn ist, und sofort, bis endlich die Masse des innersten Planeten Merkur zum Abzug gebracht wird. Stellt man die Rechnung für die Verminderung der Masse des Centralballs um die Massen des Uranus, Saturn und Jupiter an, von einer ursprünglich kreisförmigen Bahn des Neptun ausgehend, so erhält man für $\frac{e_1}{a_1}$ nach einander die Werthe

0,0000422 . . . 0,0003265 . . 0,0012508 . . .

Die verhältnissmässig sehr kleinen Verluste, welche der Centralball später durch Abstossung der Asteroiden und der innern Planeten erfährt, können die Excentricität nicht beträchtlich erhöhen und da in Wirklichkeit die Verminderungen von M gewiss nicht immer im Perihelium stattfinden werden, da ferner für die der Sonne nähern Planeten dieser Grund zu Vergrösserung der Excentricität in noch geringerem Maasse Platz greift, so können wir schliessen, dass dieser Umstand überhaupt, wenn er allein in dieser Beziehung wirksam wäre, nur sehr geringe Excentricitäten hervorbringen würde.

Aber wir haben bereits gesehen, dass auch die allmählichen Gestaltänderungen des Centralballs, obwohl ihre Wirkungen sich zum Theil compensiren, eine Vergrösserung der Excentricität hervorbringen können, und da die Verminderung von M um so wirksamer ist, je excentrischer die Bahn bereits ist, so können beide Umstände in ihrer Wirkung sich unterstützen. Starke Excentricitäten können aber die Verminderungen von M, da sie so klein gegen die Hauptmasse sind, überhaupt nicht hervorbringen.

Nehmen wir z. B. an, dass die Bahn des Saturn in dem Augenblick, als sich der Jupitersring loslöste, bereits ihre jetzige Excentricität $= 0,05615\ldots$ gehabt, und dass die Trennung des Jupiters genau im Perihelium stattgefunden hätte, so würde, wie die Rechnung ergiebt, die Excentricität der Saturnsbahn doch nur um einen geringen Betrag, bis auf $0,0571\ldots$ vermehrt worden sein.

Aber ausser den bisher betrachteten Ursachen für eine Ellipticirung der ursprünglich beinahe kreisförmigen Bahnen, die wir nach dem Betrag ihrer Wirksamkeit im Obigen ungefähr zu schätzen versucht haben, machte sich kurz vor Schluss der grossartigen Vorgänge, welche den Weltkörpern unsers Sonnensystems Entstehung und Ordnung gaben, noch ein Umstand geltend, der in dieser Hinsicht besonders mächtig eingewirkt zu haben scheint, die Volumen- und Gestaltveränderung des Sonnenballs, die beim Uebergang seiner Masse, oder doch eines sehr grossen Theils derselben aus dem gasförmigen in den tropfbarflüssigen Zustand eintreten musste. Wenn diese auch gewiss nicht auf einmal, sondern in mehrfach wiederholten, vielleicht durch ungeheure Zeiträume von einander getrennten Epochen in gewaltsamen Revolutionen den Sonnenball von einem sehr viel grösseren auf sein jetziges Volumen und von einem Ellipsoid mit starker Excentricität zu fast kugelförmiger Gestalt umwandelte, so werden doch die dadurch in dem Werthe der Centripetalkraft hervorgebrachten Aenderungen viel beträchtlicher sein, als die, welche wir vorher besprochen. Mithin werden sie auch die Bahnen stärker umgestalten können als jene. —

Diese Gestaltveränderungen werden unter sonst gleichen Umständen (d. h. wenn sie an entsprechenden Stellen gleich stark excentrischer Bahnen in Kraft treten), um so stärkere Veränderungen in der Gestalt der Bahnen hervorbringen, je näher der Planet dem Centralkörper liegt. Daraus folgt aber nicht, dass in Folge dessen die Excentricitäten von der Bahn des Merkur bis zu der des Neptun stetig abnehmen müssten, was dem thatsächlichen Verhalten durchaus widersprechen würde. Wir haben ja gesehen, dass eine Verminderung von μ, jenachdem sie im Perihelium oder Aphelium Platz greift, die Excentricität bald vermehrt bald vermindert. Wenn beide Einflüsse bei stetiger Abnahme wahrscheinlich sich ungefähr das Gleichgewicht halten mussten, so ist dieser Schluss, wenn es sich um mehrere plötzliche Verminderungen von beträchtlicher Grösse handelt, nicht mehr zulässig. Hier muss, jenachdem bei den verschiedenen Planeten mehr und stärkere Verluste an Centripetalkraft im Perihelium oder im Aphelium eintraten, die dadurch hervorgebrachte Excentricität eine sehr verschiedene sein.

Es ergiebt sich also aus diesen Betrachtungen zunächst das freilich eigentlich nur negative Resultat, dass gemäss unsrer Hypothese eine gesetzmässige Zu- oder Abnahme der Excentricität vom Merkur bis Neptun sich nicht erwarten lässt, wie sie auch thatsächlich nicht stattfindet. Ferner lässt sich schliessen, dass die letzterwähnten beträchtlichen Gestaltveränderungen des Sonnenballs wahrscheinlich die bis dahin äusserst wenig excentrischen Bahnen aller oder doch der meisten Planeten, wenn auch in verschiedenem Grade excentrischer gemacht haben. Darauf musste der Umstand wirken, dass überhaupt bei gleicher Abnahme des Werths von μ die Zunahme der Excentricität im Perihelium stärker ist, als die Abnahme im Aphelium, und dass überdem, wenn die Bahn sehr wenig von einem Kreise abweicht, eine merkliche Abnahme von μ auch im Aphelium Vergrösserung der Excentricität bewirkt. In der That ist auch selbst die kleinste Excentricität der gegenwärtigen Planetenbahnen, die der Venus (= 0,006859 . . .) beträchtlich grösser als der Werth, den nach unserer Schätzung die Bahn eines Planeten bis zum Eintritt jener Katastrophen des Centralkörpers höchstens hat annehmen können (= 0,0012508).

Endlich muss offenbar die grösste Excentricität bei der Bahn des innersten Planeten erwartet werden, da die Veränderungen der Centripetalkraft, die, wie wir eben gesehen, im Allgemeinen mehr auf Vergrösserung als auf Verminderung der Excentricität hinwirken, bei ihm einen grösseren Einfluss ausüben müssen, als bei den entfernteren Planeten. Dies trifft bei den Planeten in vollstem Maasse zu, da die Excentricität des Merkur = 0,2056 . . die aller übrigen bei weitem übertrifft. Die Monde des Jupiter und Saturn scheinen sich diesem, der Natur der Sache nach keinesweges als absolut auszusprechenden Gesetz nicht so ganz zu fügen. Doch ist die Excentricität des innersten Saturnsmondes = 0,0689 . . wenigstens entschieden grösser als der fünf folgenden, deren grösste, die des 6. Mondes = 0,0292 . . beträgt. Die des 7. und 8. Mondes dagegen ist grösser = 0,115 und 0,284 . . Wahrscheinlich erklärt sich dies durch die Einwirkung des Sonnenballs, die namentlich in der Zeit vor Entstehung des Jupiter beträchtliche Störungen hervorbringen musste und natürlich besonders auf die äussersten Monde des Saturn.

Aus der Excentricität des Merkur können wir eine annähernde Schätzung machen über das Verhältniss der Centripetalkraft (es ist hier immer von der Anziehung in der Einheit des Abstandes die Rede) vor Eintritt jener starken und plötzlichen Gestaltveränderung der Sonne zu der, welche sie in ihrer jetzigen Gestalt ausübt. Bis dahin musste die Merkursbahn beinahe kreisförmig sein. Nehmen wir nun an, dass die Verminderung des Werthes von μ auf einmal eintrat, so lässt sich berechnen, in welchem Verhältniss $\mu : \mu_1$ stehen musste, um die Kreisbahn in die jetzige Ellipse umzuwandeln. Aus der Gleichung

$$\frac{\mu e + (\mu - \mu_1) a}{\mu_1 a} = \frac{e_1}{a_1},$$ ergiebt sich, da wir $e = 0$ annehmen,

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu_1} = \frac{e_1}{a_1},$$ und daraus

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{a_1 + e_1}{a_1} = 1 + \frac{e_1}{a_1}$$

Mithin, da $\frac{e_1}{a_1} = 0{,}2056 \ldots$ ist

$$\frac{\mu}{\mu_1} = 1{,}2056.$$

Dies ist aber nur eine untere Grenze. Denn wenn, wie doch wahrscheinlich der Fall gewesen ist, die Abnahme von μ bald vergrössernd, bald verkleinernd auf die Excentricität gewirkt hat, so müsste, um als Endresultat den angegebenen Betrag derselben hervorzubringen $\frac{\mu}{\mu_1}$ grösser sein als unsre unter einer andern Voraussetzung gemachte Schätzung ergiebt.

12. Bei den bisherigen Betrachtungen ist die Gruppe der Asteroiden ganz unberücksichtigt geblieben. — Die Eigenthümlichkeiten in Anordnung und Gestalt aller übrigen Planetenbahnen, auf welche ja vorzugsweise Laplace's Hypothese gegründet war, greifen bei ihnen durchaus nicht Platz. Und doch dürfen die besondern Erscheinungen, welche sie zeigen, mit der Hypothese nicht im Widerspruch stehn, wenn nicht die ernstesten Zweifel gegen ihre Richtigkeit erwachsen sollen, wie gut sie auch Anordnung und Bewegung aller übrigen Planeten und Monde erklären mag.

Offenbar können diese kleinen Körper nicht dieselbe Entstehungsweise haben, wie die grössern Planeten. Besonders auffallend an ihnen ist ihre Kleinheit und ihre schnelle Aufeinanderfolge in Abständen vom Centralkörper, die nur wenig von einander abweichen. Es ist durchaus nicht abzusehn, wesshalb, während sonst immer erst in grossen Zwischenräumen die Loslösung von Ringen von verhältnissmässig beträchtlicher Masse aus dem Centralkörper erfolgte, an dieser Stelle des Planetensystems dieser Vorgang sich so schnell hinter einander wiederholt haben sollte, *wenn eben nicht noch andere Gründe, die bei den andern Planeten nicht Platz griffen, dies veranlassten.*

In freilich viel geringerm Maassstabe scheint sich dasselbe bei dem Ringsystem des Saturn zu zeigen, das aus mehreren durch sehr kleine Zwischenräume von einander getrennten concentrischen Ringen besteht. Doch glaube ich nicht an eine ähnliche Entstehungsweise beider so eigenthümlichen Gebilde unsers Planetensystems. Ich bin vielmehr der Meinung, dass der Saturnring auf einmal, ebenso wie die frühern Ringe, aus welchen seine Monde entstanden, sich von seinem Centralkörper loslöste und erst später in Folge seiner allmählichen Condensation und den nach und nach sich etwas ändernden Gleichgewichtsbedingungen sich in mehrere Theile trennte.

Um der Ursache, welche für Entstehung der Asteroiden maassgebend gewesen sein mochte, auf die Spur zu kommen, müssen wir die Abstände derselben vom Centralkörper etwas näher in's Auge fassen. (Die Zahlenangaben habe ich aus Petermann's geographischen Mittheilungen 1869 Heft VIII., wo die Umlaufszeiten derselben nach der Berechnung von Luther zusammengestellt sind, und Aragos Astronomie entnommen. Der mittlere Abstand für den äussersten derselben, für Sylvia, beträgt, die Entfernung der Erde von der Sonne alt Einheit angenommen, 3,35 oder 69 Millionen Meilen, für den innersten die Flora 2,201 Sonnenweiten oder 44 Millionen Meilen, welchen Abständen die Umlaufszeiten von 6,53 und 3,27 Jahren oder 2386 und 1193 Tagen entsprechen. Der Unterschied beträgt 1193 Tage und da wir bis jetzt 110 dieser kleinen Weltkörper kennen, so würde bei *gleichmässiger* Vertheilung der durchschnittliche Unterschied der Umlaufszeiten zweier aufeinander folgender Asteroiden 10 bis 11 Tage betragen.

So ist die Vertheilung derselben aber keinesweges; sondern es finden sich verschiedene Male zwei Planetoiden von fast gleicher Umlaufszeit, die daher auch fast genau gleiche mittlere Entfernung von der Sonne haben müssen. Bei dem grösseren Theil dieser zusammengehörigen Asteroidenpaare haben die Bahnebenen beinahe dieselbe Neigung gegen die Ekliptik, fallen also beinahe zusammen. Ich führe die, bei denen die Umlaufszeit sich um nicht mehr als einen Tag unterscheidet, aus dem Verzeichniss von Luther an und setze die Neigung ihrer Bahnen gegen die Ekliptik daneben.

	Umlaufszeit in Tagen.	Neigung gegen die Ekliptik.	Unterschied.
Flora	1193	5° 53′	2° 25′
Ariadne ...	1195	3° 28′	
Feronia ...	1246	5° 24′	1° 8′
Harmonia ..	1247	4° 16′	
Melpomene .	1270	10° 9′	1° 33′
Sapho	1271	8° 36′	
Vesta	1325	7° 8′	2° 14′
Clio	1326	9° 22′	
Nemausa ..	1329	9° 57′	7° 51′
Urania ...	1329	2° 6′	
Iris	1346	5° 28′	8′
Metis	1347	5° 36′	
Asia	1377	6° 0′	2° 18′
Nysa	1377	3° 42′	

	Umlaufszeit in Tagen.	Neigung gegen die Eleptik.	Unterschied.
Isis	1392	8° 34′	7° 2′
Fortuna . . .	1393	1° 32′	
Egeria . . .	1511	16° 32′	11° 13′
Asträa . . .	1511	5° 19′	
Calypso . . .	1550	5° 7′	3° 31′
Diana , . . .	1551	8° 38′	
Maja	1577	3° 2′	14′
Virginia . .	1577	2° 48′	
Juno	1591	13° 1′	
Clotho . . .	1592	?	?
Eurydice . .	1593	5° 0′	
Alcmene . .	1675	2° 51′	4° 23′
Pandora . .	1676	7° 14′	
Thisbe . . .	1683	5° 10′	5° 26′
Ceres	1684	10° 36′	24° 7′
Pallas	1684	34° 43′	
Galathea . .	1693	3° 59′	3° 59′
Leto	1694	7° 58′	
Hygiea . . .	2046	3° 49′	11° 19′
Mnemosyne .	2047	15° 8′	

Von diesen 16 Paaren zeigen 10 einen Neigungsunterschied der Bahnen von weniger als 5, meistens weniger als 3 Graden. Uebrigens finden sich noch manche andere Paare, deren Umlaufszeiten sich nur um wenige Tage unterscheiden und deren Bahnebenen dann auch meistens nur kleine Winkel mit einander bilden. Dieses Verhältniss gewinnt dadurch an Bedeutung, dass in dieser Gruppe von Weltkörpern die Neigungen der Bahnebenen gegen die Ekliptik im Gegensatz zu denen aller übrigen Planeten sehr verschieden und zum Theil beträchtlich sind (bei $^1/_5$ bis $^1/_4$ derselben beträgt dieselbe mehr als 10°; die grösste Neigung von allen = 34° 43′ zeigt Pallas).

Die früher wohl ausgesprochene Ansicht, dass der Schwarm der Asteroiden als Bruchstücke eines Planeten, der durch irgend eine gewaltsame Katastrophe zertrümmert wäre, anzusehen seien, ist wohl entschieden zu verwerfen, theils weil man sich kaum eine Ursache für einen so ungeheuerlichen Vorgang denken kann, theils wegen der so sehr verschiedenen Abstände derselben von dem Centralkörper. Eine gewisse Zusammengehörigkeit muss ihnen aber nach unsrer Hypothese zugesprochen werden, insofern ihre Bildung natürlich zwischen die Zeiten der Loslösung des Jupiters- und des Marsringes gefallen sein muss.

Dass sich auf einmal ein Nebelring von der gewaltigen Breite von etwa 26 Millionen Meilen — denn so viel beträgt der Unterschied zwischen den mittlern Abständen der Flora und Sylvia — losgelöst und später, wie wir es bei den Ringen des Saturn vermuthet, in eine so grosse Anzahl concentrischer Ringe getrennt haben sollte, ist aus vielen Gründen höchst unwahrscheinlich. Viel eher ist anzunehmen, dass eine grosse Anzahl, hier ausnahmsweise sehr schnell auf einander folgende Loslösungen von sehr geringer Masse stattgefunden haben, aus denen diese kleinen Körperchen sich bildeten.

Den Grund dafür suche ich in der Nähe der gewaltigen Jupiterskugel, die an Masse mehr als doppelt so gross als alle übrigen Planeten zusammengenommen ist. Der Jupitersball musste offenbar in dem ihm noch sehr nahen Centralkörper eine beträchtliche Fluthanschwellung seines Fluidums nnd zwar natürlich am stärksten an zwei diametral entgegengesetzten Enden desselben bewirken.

Versetzen wir uns nun in die Zeit, wo der Centralkörper beinahe schon die Grenze des möglichen Gleichgewichts für sein Rotationsellipsoid erreicht hat, wo die Schwere bereits beinahe von der Centrifugalkraft aufgehoben ist, während zugleich die Attraction der Jupiterskugel an den beiden Endpunkten des ihr zugekehrten Sonnendurchmessers Fluthberge sich erheben lässt, so scheint die Loslösung eines Theils der Masse erfolgen zu müssen. Und zwar wird diese sich loslösende Masse nicht wie bei den andern Planeten die Gestalt eines concentrischen Ringes haben können, sondern aus zwei halbmondförmigen Massen, die sich diametral gegenüber liegen bestehen.

Jeder dieser Theile wird zu einem Sphäroid zusammenfliessen, die dann beide auch in der Folge Bahnen mit fast gleicher Umlaufszeit beschreiben müssen. Offenbar liegt für diese gleichzeitig losgetrennten Stücke nicht derselbe Grund einer späteren Vereinigung vor, wie für die Trümmer eines Gasringes, die später einem Planeten oder Monde die Entstehung gaben. Sie werden im Gegentheil anfangs sich so bewegen, dass ihre Stellungen immer beinahe diametral entgegengesetzt sind, in welchem Verhalten nur die spätern allmählichen Bahnveränderungen die sie erleiden, nach und nach eine Veränderung hervorrufen können.

So lässt sich, wie mir scheint, sowohl die grosse Anzahl in geringem Abstande sich folgender Loslösungen von geringer Masse, als auch das auffallend häufige paarweise Vorkommen von Planetoiden mit fast gleicher Umlaufszeit, deren Bahnen in der Regel beinahe zusammenfallen, erklären.

Möglicher Weise hat sich bisweilen auch nur der dem Jupiter zugekehrte Fluthberg, als der grössere, losgetrennt, oder es sind doch einmal beide gleichzeitig sich ablösende Stücke zu einem verschmolzen, so dass ausser Asteroidenpaaren auch einzelne vorkommen können.

In Folge dieser Entstehungsart werden übrigens die Bahnen der Asteroiden gleich anfangs nicht völlig kreisförmig sein. Aber überdem ist es natürlich, dass in diesem dichten Gewirr von Weltköpern, die in verhältnissmässig engem Raume kreisen, durch ihre gegenseitigen Anziehungen beträchtliche Störungen entstehen mussten, ja selbst ein Zusammenstoss unter einander nicht ausserhalb des Bereichs der Möglichkeit lag, worin sowohl die beträchtliche Excentricität, als die starken Neigungen gegen die Ekliptik, welche die Bahnen mancher von ihnen zeigen, eine genügende Erklärung finden.