

## II. Mathematische und physikalische Mittheilungen besonders aus dem Unterricht.

### 1. Constructionen der dreiseitigen körperlichen Ecke oder des sphärischen Dreiecks in der Ebene.

Anstatt der gewöhnlichen wohl von Monge herrührenden Constructionen bediene ich mich seit langer Zeit der folgenden, die ich schon im Programm der Petrischule für 1840 angedeutet habe. — Es seien zunächst die 3 Seiten  $a, b, c$  des sphärischen Dreiecks gegeben, man soll die 3 Winkel  $C, A$  und  $B$  finden. — Die Construction beruht auf einem ebenen Dreiecke. In diesem sind zwei Seiten die auf der gemeinsamen Kante errichteten den Neigungswinkel einschliessenden Lothe, die bis zu den beiden anderen Kanten verlängert werden; die Verbindungslinie der beiden Durchschnittspunkte bildet die dritte Seite des Dreiecks. — Man legt also um den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt  $M$  (Fig. 1) die Winkel  $a, b$  und  $c$  in dieselbe Ebene, nimmt  $MP$  beliebig, errichtet in  $P$  ein Loth auf  $MP$ , das verlängert die beiden anderen Kanten in  $Q$  und  $N$  schneidet.  $MN'$  wird gleich  $MN$  genommen und mit  $N'Q$  aus  $Q$  ein Kreis beschrieben, so wie aus  $P$  mit  $PN$  ein zweiter Kreis, dann erhält man das Dreieck  $LPQ$ , worin  $\angle LPQ = C$  im sphärischen Dreieck. Dieselbe Construction giebt den Winkel  $A$ . Um den dritten Winkel  $B$  zu erhalten, verfährt man eigentlich auf dieselbe Weise, wenn man  $MD' = MD$  nimmt, und in  $D'$  ein Loth auf  $MD'$ , in  $D$  ein Loth auf  $MD$  errichtet. Beide Lothe bestimmen die Punkte  $E$  und  $F$  und schliessen in dem Dreieck  $EGF$ , worin  $EG = D'E$ , und  $GF = FD$ , den sphärischen Winkel  $B$  ein.

Sind im sphärischen Dreieck 2 Seiten  $a$  und  $b$ , so wie der von ihnen eingeschlossene Winkel  $C$  gegeben, so bleibt ein Theil der obigen Construction, nur macht man  $\angle QPL = C$ .  $PL = PN$ , beschreibt mit  $QL$  aus  $Q$  einen Kreis, der den mit dem Radius  $MN$  beschriebenen Kreis in  $N'$  schneidet und so den zweiten Schenkel des Winkels  $c$  festlegt. Man kann durch diese Construction unter anderen die Aufgabe lösen: auf der Erdkugel die Entfernung zweier Punkte durch ihre geographischen Breiten und ihren Längenunterschied zu bestimmen.

Die Construction der dritten Aufgabe, aus einer Seite  $a$ , dem anliegenden Winkel  $C$  und der  $C$  gegenüberliegenden Seite  $c$ , die Seite  $b$  zu finden, lässt sich auf folgende Weise lösen. Das Loth von  $N'O$  auf  $MQ$  trifft verlängert den Punkt  $H$ , den Fusspunkt der Höhe des Dreiecks  $QLP$ . Sonach lässt sich um das Viereck  $MOHP$  ein Kreis beschreiben, dessen Durchmesser  $= MH$ . Man hat dazu nur nöthig,  $HP$  zu bestimmen, welches Kathete im rechtwinkl. Dreieck  $MHP$  und im rechtwinkl. Dreieck  $LHP$  ist. In diesem ist die Hypotenuse  $PL = PN$ ,  $\angle HPL = C$  bekannt. Der mit dem Durchmesser  $MH$  beschriebene Kreis, und der mit dem Radius  $OM$  beschriebene Kreis ( $OM$  anliegende Kathete im rechtwinkl. Dreieck, dessen Hypotenuse  $= MN$ ,  $\angle NMO = c$ ) bestimmen in ihrem Durchschnitt den Punkt  $O$ , womit der zweite Schenkel des Winkels oder die Seite  $b$  festgelegt wird.

Ist die dem Winkel  $C$  gegenüberliegende Seite  $c < a$ , so ist ein zweites Dreieck vorhanden, welches die Stücke  $a, c$  und  $C$  enthält, weil der zum Durchmesser  $MH$  gehörige Kreis von dem mit dem Radius  $MO$  beschriebenen Kreise in 2 Punkten geschnitten wird. Nimmt man z. B.  $a = 60^\circ$ ,  $c = 40^\circ$ ,  $C = 33^\circ$ , so findet man für das eine Dreieck  $b = 85^\circ 8'$ , für das andere  $b, = 25^\circ 46'$ .

Die Uebereinstimmung der geometrischen Construction mit der Rechnung lässt sich leicht nachweisen. In Fig. 3 ist PK senkrecht auf MQ, HV parallel zu MQ, deshalb für  $MN = 1$ ,  $\cos. c = MK + KO = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \cos. C$ . Hieraus ist nun b zu bestimmen, wenn c, C und a gegeben sind, oder aus einer Gleichung  $m \cos. \theta + n \sin. \theta = p$  ist  $\cos. \theta$  und  $\sin. \theta$  zu finden.

Da  $m \sin. \theta - n \cos. \theta = \pm \sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$ , so findet man

$$\cos. \theta (m^2 + n^2) = mp \mp n \sqrt{m^2 + n^2 - p^2},$$

$$\sin. \theta (m^2 + n^2) = np \pm m \sqrt{m^2 + n^2 - p^2}.$$

Sonach ist  $m = \cos. a$ ,  $n = \sin. a \cos. C$ ,  $p = \cos. c$  und deshalb  $\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{1 - \sin. a^2 \sin. C^2} =$  dem Durchmesser MH,  $m^2 + n^2 - p^2 = MH^2 - MO^2 = \sin. c^2 - \sin. a^2 \sin. C^2$ . u. s. w.

Die 3 übrigen Hauptfälle, die beim sphärischen Dreieck vorkommen, können auf das Polardreieck zurückgeführt werden.

## 2. Eine Aufgabe aus der beschreibenden Geometrie.

Gegeben ist ein ebener Spiegel durch seinen Durchschnitt AB mit der vertikalen und BC mit der horizontalen Ebene, ferner ein leuchtender Punkt und der Ort des Auges, man sucht die Stelle auf dem Spiegel, wo die Reflexion erfolgt. Fig. 4. — Zu dem Ende fällt man aus L und O, den horizontalen Projectionen des leuchtenden Punktes und des Auges Perpendikel auf BC und eben so aus den vertikalen Projectionen L' und O' auf AB. Nachdem so die vertikale Projection M'N' und die horizontale Projection des Durchschnitts der Reflexionsebene mit dem Spiegel gefunden ist, wird O'N' über N' verlängert und N'S' = N'O' (die auch in der Projection gleich sind) genommen, dann trifft die Linie S'L' in T den gesuchten Reflexionspunkt, welchen man nun in der bekannten Weise auf die horizontale Projection überträgt, wodurch der Punkt T erhalten wird.

## 3. Durchschnitt zweier unendlich naher gerader Linien.

Die Gleichung der Geraden, die durch einen Punkt geht, dessen Coordinaten x und y, und mit der Axe, der x einen Winkel bildet, dessen trigon. Tangente P, ist.

$$Y - y = P(X - x) \dots (1)$$

Wird y, x und P als veränderlich betrachtet, so hat man durch Differenzirung der Gleichung (1)

$$- dy = (X - x) dP - P dx \dots (2)$$

X und Y bestimmen die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien (1) und (2). Man findet  $(X - x) \frac{dP}{dx} = P - p$ ,  $(Y - y) \frac{dP}{dx} = P(P - p)$ . Denken wir uns eine Tangente an einen

Punkt (x, y) einer Curve gezogen, so ist  $p = \frac{dy}{dx}$ . In der Gleichung der Normale ist  $P = -\frac{1}{p}$ ,

$X - x = -\frac{(1 + p^2)}{p}$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$ , folglich  $X - x = -\frac{p(1 + p^2)}{q}$ ,  $Y - y = \frac{(1 + p^2)}{q}$ , folglich

der Radius r des zwei auf einander folgende Tangenten einer Curve berührenden Kreises, oder des Krümmungskreises  $= \pm \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ . Ist auf der Ellipse ein Punkt durch seine rechtwinklichen

Coordinaten  $x = a \cos. \theta$ ,  $y = b \sin. \theta$  gegeben, so erhält man  $r = \frac{(a^2 \sin. \theta^2 + b^2 \cos. \theta^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2} = \frac{b'^3}{a^2 b}$ , wenn b' der halbe conjugirte Durchmesser zu  $a' = \sqrt{a^2 \cos. \theta^2 + b^2 \sin. \theta^2}$ .

## 4. Geometrische Ableitung des Krümmungsradius in der Ellipse.

Sieht man die Ellipse als orthographische Projection des Kreises mit zusammenfallendem Durchmesser  $2a$  an, und bildet die Ebene der Projection mit der Ebene des Kreises einen Winkel, dessen cosinus  $= \frac{b}{a}$ , so bleiben die auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser genommenen  $x$  unverändert, die darauf senkrechten  $y$  werden in dem Verhältnisse  $\frac{b}{a}$  verkürzt. Fig. 5. Nimmt man nun ein System conjugirter Durchmesser im Kreise, so ist dieses rechtwinklig, in der Projection ist das System der Durchmesser wieder conjugirt nur schiefwinklig, aber leicht durch die Coordinaten bestimmbar. Ist im Kreise die halbe Sehne  $z$  senkrecht auf  $AM = a$ ,  $BM = a$  parallel  $z$ , so sind  $A'M = a'$ ,  $B'M$  ihre Projectionen. Ist  $z'$  die Projection von  $z$ , so hat man für die entsprechende halbe elliptische Sehne die Proportion  $z : a = z' : b'$ , für eine zweite halbe Kreissehne  $u$  und die entsprechende elliptische  $u'$  und den conjugirten Halbmesser  $b''$ ,  $u : a = u' : b''$ , für eine dritte halbe Kreissehne  $s$  und die entsprechende elliptische  $s'$ ,  $s : a = s' : b'''$ . Bilden nun die 3 Kreissehnen und die entsprechenden elliptischen Sehnen Dreiecke, so ist der Radius  $R$  des um das elliptische Dreieck beschriebenen Kreises  $R = \frac{2z' \cdot 2u' \cdot 2s'}{4F'}$ , wo  $F'$  die Fläche dieses Dreiecks.

$R = \frac{2z \cdot 2u \cdot 2s \cdot b' \cdot b'' \cdot b'''}{a^3 \cdot 4 \cdot \frac{b}{a} F}$ , wo  $F$  die Fläche des Sehnen-dreiecks im Kreise. Da aber  $F = \frac{2z \cdot 2u \cdot 2s}{4a}$ , so ist  $R = \frac{b' \cdot b'' \cdot b'''}{a \cdot b}$ .

Fallen die 3 Punkte des elliptischen Dreiecks in Einen zusammen, dessen Coordinaten  $a \cos. \Theta$  und  $b \sin. \Theta$ , dessen halber Durchmesser  $= a' = \sqrt{a^2 \cos. \Theta^2 + b^2 \sin. \Theta^2}$ ,  $b' = \sqrt{a^2 \sin. \Theta^2 + b^2 \cos. \Theta^2}$ , so wird der Krümmungsradius  $R = \frac{b^3}{a \cdot b}$ .

In Fig. 6 liegen der Halbkreis und seine orthographische Projection, die halbe Ellipse in Einer Ebene.

## 5. Dimensionen des Erdsphäroids.

Wenn  $\varphi$  die Polhöhe eines Punktes auf dem elliptischen Meridian bezeichnet, so findet man leicht  $\operatorname{tg} \Theta = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi$  und damit den zugehörigen Krümmungsradius  $R = \frac{a^2 b^2}{(b^2 \sin. \varphi^2 + a^2 \cos. \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

Sind nun  $L$  und  $L'$  die im elliptischen Meridian unter den Polhöhen  $\varphi$  und  $\psi$  gemessenen Längen eines Breitengrades, so ist  $L^3 : L'^3 = b^2 \sin. \psi^2 + a^2 \cos. \psi^2 : b^2 \sin. \varphi^2 + a^2 \cos. \varphi^2$ ,

woraus hervorgeht  $\frac{b}{a} = \left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos. \varphi \cdot \cos. \alpha}{\sin. \psi \cdot \cos. \beta}$

$a = \frac{180 \cdot L^{\frac{3}{2}} \cdot L'^{\frac{3}{2}} [\sin. (\psi + \varphi) \sin. (\psi - \varphi)]^{\frac{3}{2}}}{\pi \cdot \sin. \psi \cdot \cos. \beta \cdot \cos. \varphi^2 \cdot \cos. \alpha^2}$

$b = \frac{180 \cdot L^{\frac{3}{2}} \cdot L'^{\frac{3}{2}} [\sin. (\psi + \varphi) \sin. (\psi - \varphi)]^{\frac{3}{2}}}{\pi \cdot \sin. \psi^2 \cdot \cos. \beta^2 \cdot \cos. \varphi \cdot \cos. \alpha}$

wenn man setzt  $\sin. \alpha = \frac{\cos. \psi}{\left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3}{2}} \cos. \varphi}$ ,  $\sin. \beta = \left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sin. \varphi}{\sin. \psi}$ .

Nimmt man nach dem Encke'schen Jahrbuch für 1852,  $L = 56727, 53$  Toisen,  $L' = 57232, 57$  Toisen unter den Polhöhen von  $\varphi = 1^\circ$ ,  $\psi = 70^\circ$ , so wird erhalten  $\alpha = 20^\circ 3' 53''$ ,  $67$ ,  $\beta = 1^\circ 3' 39''$ ,  $76$  und  $\log. a = 6, 5148235$ ,  $a = 3372077$  Toisen,  $\log. b = 6, 5133694$ ,  $b = 3261139$  T. Die genaueren Werthe sind  $a = 3272077, 14$ ,  $b = 3261139, 33$ .

Da 15 geographische Meilen auf einen Grad des Aequators gehen, so folgt hieraus die Länge einer geographischen Meile in Toisen 3807, 235. Da die preussische Ruthe = 12 preuss. Fuss, die preuss. Meile = 2000 Ruthen, der preuss. Fuss = 139, 13 Pariser Linien, so enthält die preussische Meile 3864, 722, die geographische Meile 3807, 235 Toisen. Die geographische Meile ist also um 57, 487 Toisen oder um  $29\frac{1}{4}$  Ruthen kürzer als die preussische Meile.

Aus den Werthen von  $a$  und  $b$  findet man die Länge des Erdquadranten nach der Formel

$$q = \frac{1}{4} (a + b) \pi \cdot \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \left( \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \right)^2 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \left( \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^6 + \dots \right]$$

5131179, 811 Toisen, wobei die gewöhnliche Multiplikation ohne Logarithmen angewendet werden kann. Die Länge des Erdquadranten  $q$  beträgt hiernach 4433339356, 704 Par. Lin., der 10 Milliontheil dieser Zahl 443, 33394. Der gesetzlich angenommene Meter ist = 443, 296 Lin., folglich um 0, 03794 Par. Linien zu klein.

Die Oberfläche  $F$  des Erdsphäroids wird bestimmt durch die Formel

$$F = 2 a^2 \pi + \frac{b^2 \pi}{e} \cdot \log. \text{hyp.} \left( \frac{1+e}{1-e} \right), \text{ oder durch die Reihe}$$

$$F = 2 a^2 \pi + 2 b^2 \pi \cdot \left[ 1 + \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{5} + \frac{e^6}{7} + \frac{e^8}{9} + \dots \right], \text{ wo } e \text{ die Excentricität der Meridian-Ellipse. Hieraus ergibt sich die Oberfläche } F \text{ der Erde} = 9261238, 3 \text{ geogr. Quadratmeilen.}$$

Der Cubikinhalte des Ellipsoids mit 3 ungleichen Axen ist =  $\frac{4}{3} a b c \pi$ , folglich der Inhalt des Rotationsellipsoids der Erde =  $\frac{4}{3} a^2 b \pi = 2650184445$  geogr. Cubikmeilen.

## 6. Bestimmung der Centralkraft, welche einen Körper in seiner Bahn erhält.

Zunächst werde angenommen, der Körper bewege sich auf einer Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Centralkraft sich befindet. — Ist in  $M$  der angezogene Körper,  $r$  der Radiusvector, so lässt sich die anziehende Kraft in zwei auf einander senkrechte Componenten zerlegen, deren eine in die Richtung der Tangente, die andere der Normale fällt. Ist  $l$  die Senkrechte aus dem Brennpunkte  $F$  auf die Tangente,  $K$  die Grösse der Centralkraft in  $M$ , so ist die Componente in der Richtung der Normale =  $\frac{K \cdot l}{r}$ ; da nun diese der Centrifugalkraft gleich sein muss, wenn der Körper in seiner elliptischen Bahn bleiben soll, so hat man die Gleichung

$$K \frac{l}{r} = \frac{v^2}{R}$$

wo  $v$  die Geschwindigkeit im Punkte  $M$ ,  $R$  der Krümmungsradius in diesem Punkte. Nach dem 2ten Kepler'schen Gesetze ist aber für die unendlich kleine Zeit  $\tau$ ,  $\frac{v \cdot l}{2} \cdot \tau = \frac{a b \pi}{T} \cdot \tau$ , wo  $T$  die Umlaufzeit in Secunden ausgedrückt darstellt. Sonach ist  $K = \frac{4 r \cdot a^2 b^2 \pi^2}{T \cdot l \cdot R}$ , nun aber ist  $l = \frac{r \cdot b}{b'}$ ,

was auf mehrfache Art leicht bewiesen werden kann, und hat man deshalb  $R l^3 = \frac{r^3 b^3 b'^3}{a b b'^3}$ , folglich

$$K = \frac{4 a^3 \pi^2}{T^2 r^2} \cdot *)$$

Man kann aber die Auffassung über die Wirkung der Centrakraft erweitern, indem man die Lage des anziehenden Punktes allgemein durch seine Entfernung vom Mittelpunkte auf der grossen Axe durch  $m$  bezeichnet. Die Entfernung des Durchschnitts der Tangente in  $M$  vom Mittelpunkte ist  $= \frac{a}{\cos. \Theta}$ , die trigonometrische Tangente des Winkels der geometrischen Tangente mit der grossen Axe ist  $= \frac{b}{a} \cotg. \Theta$ , der sinus dieses Winkels  $= \frac{b \cos. \Theta}{b'}$ , folglich die Senkrechte  $l$  vom Endpunkte der Linie  $m$  auf die Tangente  $= \left( \frac{a}{\cos. \Theta} - m \right) \frac{b}{b'} \cos. \Theta = (a - m \cos. \Theta) \cdot \frac{b}{b'}$ , folglich die Geschwindigkeit  $v$  im Punkte  $M = \frac{2 a \pi \cdot b'}{T (a - m \cos. \Theta)}$  und die Centrakraft  $K = \frac{r v^2}{R} = \frac{r \cdot 4 a^3 \pi^2}{T^2 (a - m \cos. \Theta)^3}$ . Wenn  $m = c$ , oder die Centrakraft im Brennpunkte sich befindet, so ist  $a - c \cos. \Theta = r$ , folglich wie früher  $K = \frac{4 a^3 \pi^2}{T^2 r^2}$ ; ist dagegen die Centrakraft im Mittelpunkte der Ellipse, so wird  $m = 0$ , und deshalb  $K = \frac{4 r \pi^2}{T^2}$ . Im ersten Falle verhalten sich also die Anziehungen, wie die umgekehrten Quadrate der Entfernungen, im zweiten wie die Entfernungen.

Man kann sich jetzt die allgemeine Aufgabe stellen, die Grösse der Centrakraft zu bestimmen, welche einen Körper in seiner bekannten Bahn erhält.

Aus der Gleichung der Tangente  $Y - y = \frac{d y}{d x} (X - x)$ , findet man  $X$  für den Durchschnitt der Tangente mit der Abscissenaxe und daraus  $X - m = \frac{(x - m) d y - y d x}{d y}$ , die Senkrechte  $l$  vom Endpunkte der Linie  $m$  auf die Tangente  $= \frac{[(x - m) p - y]}{\sqrt{1 + p^2}}$ , wo  $p = \frac{d y}{d x}$ . Geht

man nun wieder von der Gleichung  $K \frac{1}{r} = \frac{v^2}{R}$  aus und setzt für  $R$  seinen Ausdruck  $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$ ,

so erhält man zuletzt  $K = \frac{C^2 \cdot r \cdot \frac{d^2 y}{d x^2}}{[(x - m) p - y]^3}$

Führt man Polarcoordinaten ein, indem man setzt  $x = r \cos. \Theta$ ,  $y = r \sin. \Theta$ , so erhält man

$$K = \frac{C^2}{r^5} \left[ r^2 + 2 \left( \frac{d r}{d \Theta} \right)^2 - r \left( \frac{d^2 r}{d \Theta^2} \right) \right]$$

Ist die Centrakraft in einem Brennpunkte des Kegelschnitts, auf den sich die Polargleichung  $v = \frac{m}{2(1 + e \cos. \Theta)}$  bezieht, wo  $m$  der Parameter,  $\Theta$  die wahre Anomalie, so

hat man  $\frac{1}{r} = \frac{2(1 + e \cos. \Theta)}{m}$ ,  $\frac{d r}{r^2} = \frac{2 e \sin. \Theta d \Theta}{m}$ . Drückt man noch  $\frac{d^2 r}{d \Theta^2}$  durch  $r$  und  $\Theta$  aus,

\*) Für eine Planetenbahn wäre also an der Oberfläche der Sonne, deren Radius  $\varrho$ ,  $K = \frac{4 a^3 \pi^2}{T^2 \varrho^2}$

so erhält man zuletzt

$$K = \frac{2 C^2}{m \cdot r^2}.$$

Es versteht sich von selbst, dass man die obigen allgemeinen Ausdrücke für  $K$ , auch ohne Einführung des Krümmungsradius, aus den bekannten Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{x}{r} K \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{y}{r} K \quad \text{ableiten kann.}$$

### 7. Erläuterung des Newton'schen Grundgesetzes über die Anziehung.

Wenn  $r$  der Radius einer Kugel,  $g$  die Intensität einer vom Centrum derselben radial auf eine sehr kleine Flächeneinheit wirkenden Kraft, so ist die Gesamtwirkung auf die ganze innere Kugelfläche  $= 4 r^2 \pi \cdot g$ . Für eine concentrische Kugelschale, deren Radius  $r'$ , ist bei derselben Flächeneinheit und der darauf bezogenen Intensität  $g'$  die Gesamtwirkung  $= 4 r'^2 \pi \cdot g'$ . Da nun bei vorausgesetzter freier radialer Wirkung aus demselben Centrum beide Wirkungen einander gleich sein müssen, so folgt

$$\frac{g'}{g} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Sind die Massen zweier Kugeln  $M$  und  $M'$ , ihre Radien  $r$  und  $r'$ ,  $g$  und  $g'$  an ihren Oberflächen die Wirkungen der von den Mittelpunkten ausgehenden Anziehungen, und nimmt man einen dritten Körper an mit der Anziehungswirkung  $\gamma$  an der Oberfläche, der mit der ersten Kugel die Masse  $M$  mit der zweiten den Radius  $r'$  gemein hat, so ist nach dem Vorigen

$$g : \gamma = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}$$

$$\gamma : g' = M : M'$$

$$\text{deshalb } g : g' = \frac{M}{r^2} : \frac{M'}{r'^2}$$

### 8. Vergleichung zweier Geschwindigkeiten.

Die Geschwindigkeit  $v$  eines auf der Ellipse unter dem Einflusse der Centralkraft im Brennpunkte  $F$  sich bewegenden Körpers ist für den Punkt  $M$  der Ellipse  $= \frac{2 a \pi \cdot b'}{r T}$ , wo  $b'$  der zu  $M$  gehörige halbe conjugirte Durchmesser. Fig. 7. Da  $b'^2 = r(2a - r)$ , so ist

$$v^2 = \frac{4 a^3 \pi^2}{T^2} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \dots (1)$$

Beschreibt man aus dem Brennpunkte  $F$  der Ellipse mit der grossen Axe  $2a$  einen Kreis, so erhält ein Körper, der aus  $B$  des Kreises in der Richtung des Radiusvector  $r$  bis  $M$  gefallen ist, in diesem Punkte dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er sich unter dem Einflusse der Centralkraft in  $F$  bis  $M$  bewegt hat. Denn ein Körper, der auf der Erde aus der Höhe  $h$  mit veränderter Schwere gefallen ist, erreicht an der Oberfläche in der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkte die Geschwindigkeit  $v$ , deren Quadrat  $= \frac{2 g h r}{r + h}$ . Bei der vorausgesetzten Bewegung ist hier  $h = 2a - r$

$r + h = 2a$ ,  $g = \frac{4 a^3 \pi^2}{T^2 r^2}$ , folglich

$$v^2 = \frac{4 a^3 \pi^2}{T^2} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

übereinstimmend mit (1). In der Hyperbel ist  $v^2 = C^2 \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)$ . Es müsste also der Körper schon mit einer gewissen Geschwindigkeit in den mit  $2a$  beschriebenen Kreis eintreten, wenn eine Hyperbel beschrieben werden soll. (Siehe Schröder van der Kolk. Astronom. Nachrichten Nr. 1417).

### 9. Aufgabe.

In der Ebene zweier der Lage nach gegebener gerader Linien, bewegen sich auf diesen die Mittelpunkte zweier Kreise, deren Radien  $r$  und  $r'$ , mit den bekannten Geschwindigkeiten  $a'$  und  $b'$ . Zu einer gewissen Zeit ist der Mittelpunkt des ersten Kreises um  $a$  entfernt von dem Fusspunkt der Projection des Centrums des auf der zweiten Linie gehenden Kreises,  $b$  sei der senkrechte Abstand des Centrums dieses Kreises von der ersten Linie. Man soll die Zeiten  $t$  der inneren und äusseren Berührungen der Kreise angeben, von jenem Momente an, da die Bestimmungen  $a$  und  $b$  gelten.

Auflösung. Man hat offenbar für die Berührungen die Gleichung  $(a + a' t)^2 + (b + b' t)^2 = (r \pm r')^2 = k^2$ , deren Auflösung ergibt:

$$t (a'^2 + b'^2) = - (a a' + b b') \mp \sqrt{k^2 (a'^2 + b'^2) - (a b' - a' b)^2}.$$

Setzt man  $m \sin. M = a$ ,  $m \cos. M = b$ ,  $n \sin. N = a'$ ,  $n \cos. N = b'$ ,

$\cos. \psi = \frac{m}{k} \sin. (M - N)$ , so erhält man die Zeiten der Berührungen durch die Formel:

$$t = - \frac{m}{n} \cos. (M - N) \mp \frac{k}{n} \sin. \psi.$$

(Vergl. Bessel's Vorausberechnung der Sternbedeckungen im Berliner Astronom. Jahrbuch 1831.)

Die Formel für  $t$  ist namentlich bei Mondfinsternissen nicht selten von Schülern der ersten Klasse angewendet worden. Ausserdem wurden auch graphische Darstellungen construiert. Auf der einen Geraden, der Ekliptik waren die Centra des Erdschattens von Stunde zu Stunde verzeichnet; auf der zweiten Linie, der Mondbahn, waren die Stellen des Mondcentrums von 5 zu 5' eingetragen. Verzeichnete man nun auf zwei Glimmerblättern die Kreise des Erdschattens und des Mondes durch Einritzen, ohne etwa diese Kreise nach ihrer richtigen Grösse auszuschneiden, so liessen sich die inneren und äusseren Berührungen durch Uebereinanderschicken der beiden Glimmerblätter bis auf ein paar Minuten genau bestimmen. Für die Darstellung der totalen Mondfinsterniss am 12ten Juli 1870 lagen folgende Data vor:

	Länge des Erdschattens.	Halbm.	Länge $\zeta$	Breite $\zeta$	Halbm. $\odot$	Halbm. $\zeta$
10 U.	290° 14',1	43',6	289° 26',1	— 0° 1',3	15' 45",3	15' 58",2
11	290 16,5		290 0,8	— 0 4,5		
12	290 18,8		290 35,4	— 0 7,7		
13	290 21,2		291 10,0	— 0 10,9		

### 10. Mathematisches Pendel. (Gauss determin. attract.)

Nimmt man  $m' = \frac{m+n}{2}$ ,  $a' = \sqrt{mn}$ ,  $m'' = \frac{m'+n'}{2}$ ,  $n'' = \sqrt{m'n'}$  u. s. w. so convergiren die  $m$  und  $n$  gegen eine Grenze  $\mu$ , welche Gauss das arithmetisch geometrische Mittel nennt. Gauss zeigt in der angeführten Abhandlung, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T^2 + n^2 \sin^2 T^2}} = \frac{2\pi}{\mu}$$

Es wird vorausgesetzt, dass

$$\sin. T = \frac{2 m \sin. T'}{(m+n) \cos. T'^2 + 2 m \sin. T'^2} = \frac{2 m \sin. T'}{N}$$

und es lässt sich beweisen, dass

$$\frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T^2 + n^2 \sin^2 T^2}} = \frac{dT'}{\sqrt{m'^2 \cos^2 T'^2 + n'^2 \sin^2 T'^2}}$$

Denn wird  $\sqrt{m^2 \cos^2 T^2 + n^2 \sin^2 T^2} = \sqrt{K}$ ,  $\sqrt{m'^2 \cos^2 T'^2 + n'^2 \sin^2 T'^2} = \sqrt{K'}$  gesetzt,  $L = (m+n) \cos. T'^2 + 2 n \sin. T'^2$ , so findet man leicht

$$\cos. T = \frac{2 \cos. T' \sqrt{K'}}{N}$$

$$\cos. T dT = \frac{2 m \cos. T' dT' L}{N^2}$$

$$\sqrt{K} = \frac{m \cdot L}{N}$$

$$\text{folglich } \frac{dT}{\sqrt{K}} = \frac{dT'}{\sqrt{K'}}$$

Bei weiterer Fortsetzung hat man zuletzt

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \Theta^2 + \mu'^2 \sin^2 \Theta^2}} = \frac{2\pi}{\mu}$$

Zu dem arithmetisch geometrischen Mittel und der dadurch zu erlangenden Integration von  $\frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T^2 + n^2 \sin^2 T^2}}$  gelangt man auch durch die Landen'sche Substitution.

Denn man hat bei dieser zur Bestimmung von  $F(e_1, \Theta) = \int_0^\Theta \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Theta^2}}$

$$e_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \quad \text{tang. } \Theta_1 = \frac{\sin. 2\Theta}{e_1 + \cos. 2\Theta}$$

$$e_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - e_1^2}}{1 + \sqrt{1 - e_1^2}}, \quad \text{tang. } \Theta_2 = \frac{\sin. 2\Theta'}{e_2 + \cos. 2\Theta'}$$

u. s. w.

u. s. w.

Bezeichnet man den Grenzwert für die  $\Theta$ 's durch  $\Theta$ , so wird zuletzt erhalten:

$$F(e_1, \Theta) = \Theta \cdot (1 + e_1) (1 + e_2) (1 + e_3) \dots$$

Setzt man aber in Bezug auf eine Ellipse, deren grosse Halbaxe  $a$ , kleine Halbaxe  $b$ ,  $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ , so wird

$$e_1 = \frac{a - b}{a + b}$$

$$e_2 = \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}$$

$$= \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}, \quad \text{wenn man setzt } \frac{a+b}{2} = a_1, \quad \sqrt{ab} = b_1.$$

u. s. w.

folglich  $F(e, \theta) = \Theta \cdot \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right) \left(1 + \frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}\right) \left(1 + \frac{a_2-b_2}{a_2+b_2}\right) \dots$

$$= \frac{\Theta \cdot 2 a \cdot 2 a_1 \cdot 2 a_2 \dots}{(a+b)(a_1+b_1)(a_2+b_2) \dots} = \frac{\Theta \cdot a \cdot a_1 \cdot a_2 \dots}{a_1 a_2 a_3 \dots}$$

$F(e_1, \theta) = \frac{\Theta \cdot a}{\mu}$ , wenn  $\mu$  die Grenze für das arithmetisch-geometrische Mittel von  $a, b, a_1, b_1$  u. s. w. was mit dem früheren zusammenfällt, wenn  $\Theta = 2\pi, a = 1$ .

Ist  $\Theta$  die Grenze für die Amplituden, so sind diese bei beiden Berechnungen auf den verschiedenen Stufen mit Ausnahme der ersten ungleich,\*) wenn auch die  $e$  gleich sind. Uebrigens bedient sich auch Lagrange und nach ihm Legendre zur Berechnung von  $\int d\theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}$  ebenfalls des arithmetisch-geometrischen Mittels; (Klügel's math. Wörterbuch Th. 4, S. 220 u. 222). Denn dort ist  $\frac{1 - \cos. \varepsilon}{1 + \cos. \varepsilon} = \sin. \varepsilon'$ , und  $\frac{1 - \cos. \varepsilon'}{1 + \cos. \varepsilon'} = \sin. \varepsilon''$  identisch mit der Landen'schen Substitution. Die Anwendung des Vorigen auf das mathematische Pendel ist nun leicht. Die Differenzialgleichung für die Bewegung desselben ist

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin. \frac{1}{2} \varphi'^2 - \sin. \frac{1}{2} \varphi^2}}, \text{ wo } \varphi' \text{ der Winkel ist, den das Pendel}$$

beim Anfange der Bewegung mit der Vertikale macht,  $\varphi$  der veränderliche. Setzt man  $\sin. \frac{1}{2} \varphi = \sin. \frac{1}{2} \varphi' \cdot \sin. v$ , so wird

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{\cos. v^2 + \cos. \frac{1}{2} \varphi'^2 \sin. v^2}}$$

Man hat demnach zur Bestimmung von  $t$  das frühere  $m = 1, n = \cos. \frac{1}{2} \varphi'$  zu nehmen, und erhält für Eine Schwingung zu beiden Seiten der Vertikale

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Für  $\varphi' = 60^\circ$  ist  $m''' = n'''$  bis auf 7 Decimalen und  $\frac{1}{\mu} = 1,0731820$ .

\*) Man ersieht dies aus den zur Berechnung der Amplituden dienenden Formeln.

#### Nach Gauss.

$$\text{tang. } \psi = \frac{b}{a} \text{ tang. } \varphi$$

$$\sin. \varphi' = \frac{\sin. \frac{1}{2} (\varphi + \psi)}{\cos. \frac{1}{2} (\varphi - \psi)}$$

$$\text{tang. } \varphi' = \frac{\sin. \frac{1}{2} (\varphi + \psi)}{\sqrt{\cos. \varphi \cdot \cos. \psi}}$$

$$\text{tang. } \psi' = \frac{b'}{a'} \text{ tang. } \varphi'$$

$$\sin. \varphi'' = \frac{\sin. \frac{1}{2} (\varphi' + \psi')}{\cos. \frac{1}{2} (\varphi' - \psi')}$$

$$\text{tang. } \varphi'' = \frac{\sin. \frac{1}{2} (\varphi' + \psi')}{\sqrt{\cos. \varphi' \cdot \cos. \psi'}}$$

u. s. w.

$$\varphi^\infty = \Theta$$

#### Landen'sche Substitution.

$$\text{tang. } (\theta' - \theta) = \frac{b}{a} \text{ tang. } \theta$$

$$\text{tang. } (\theta'' - \theta') = \frac{b'}{a'} \text{ tang. } \theta'$$

$$\text{tang. } (\theta''' - \theta'') = \frac{b''}{a''} \text{ tang. } \theta''$$

u. s. w.

$$\theta^\infty = \Theta$$

Die bekannte Reihenentwicklung

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{1}{2} \varphi^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots \right]$$

würde die Berechnung von 3mal mehr Gliedern verlangen, um eine gleiche Genauigkeit zu erreichen.

Wenn man in der Differentialgleichung für die Bewegung des Pendels imaginäre Faktoren benutzt, so kann man folgende stark convergirende Reihe erhalten:

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} \varphi^2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{4} \varphi^2} \left( \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{1}{4} \varphi^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \operatorname{tg}^6 \frac{1}{4} \varphi^6 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \operatorname{tg}^8 \frac{1}{4} \varphi^8 + \dots \right) \right]$$

Die Berechnung von 3 Gliedern derselben ergibt

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot 1.0731820.$$

### 10. Zwei Beispiele der Catacaustica.

Wenn die Gleichung einer Geraden, die durch einen Punkt  $(x, y)$  geht, und mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente  $= P$ , so ist für eine reflectirende Curve, wenn  $p = \frac{dy}{dx}$

Wenn  $q = \frac{dp}{dx}$ , so sind die Coordinaten  $X$  und  $Y$  des dem Punkte  $(x, y)$  entsprechenden Punktes der Catacaustica:

$$\frac{X}{2} = \frac{p(p x - y)^2 - q x(x^2 + y^2)}{(1 + p^2)(p x - y) - 2 q(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{Y}{2} = \frac{(p x - y)^2 + q y(x^2 + y^2)}{-(1 + p^2)(p x - y) + 2 q(x^2 + y^2)}$$

vorausgesetzt, dass die Strahlen aus dem Punkte  $(x, y)$  divergiren. Für Parallelstrahlen wird

$$X = x + \frac{p}{2q}(1 - p^2), \quad Y = y + \frac{p^2}{q}.$$

Als erstes Beispiel nehmen wir den Mittelpunkt einer Ellipse als stralenden Punkt.

Man kann diese Catacaustica durch geometrische Construction darstellen, indem man die Normalen der verschiedenen Punkte des Umfangs der Ellipse construirt, die mit den Leitstrahlen aus den Brennpunkten gleiche Winkel bilden müssen. Setzt man  $x = a \cos. \theta$ ,  $y = b \sin. \theta$ , so wird  $p = -\frac{b}{a} \cot. \theta$ ,  $q = -\frac{b}{a^2 \sin. \theta}$ ,  $p x - y = -\frac{b}{\sin. \theta}$ ,  $1 + p^2 = \frac{a^2 \sin. \theta^2 + b^2 \cos. \theta^2}{a^2 \sin. \theta^2}$ ,  $x^2 + y^2 = a^2 \cos. \theta^2 + b^2 \sin. \theta^2$  und man erhält

$$X = \frac{2 a c^2 \cos. \theta^3}{2 b^2 - a^2 + 3 c^2 \cos. \theta^2}, \quad Y = \frac{2 b c^2 \sin. \theta^3}{2 b^2 - a^2 + 3 c^2 \cos. \theta^2}$$

\*) J. Herschel's Optik, § 137.

Man kann die durch Reflexion entstandenen Linien nach Brewster's Vorgange sehr schön durch schmale gutpolirte Stahlfedern darstellen, die man nach den zuvor auf einem Reissbrette entworfenen Curven biegt. Es ist interessant, die construirten Brennlilien mit den durch Sonnen-Magnesium- und Lampenlicht hervorgebrachten zu vergleichen.

Als zweites Beispiel einer Brennlilie durch Zurückwerfung für Parallelstralen diene die Cycloide. Die Gleichungen der Cycloide sind, wenn  $r$  der Radius des Erzeugungskreises,  $\theta$  der Winkel, den dieser Radius mit der Ordinatenaxe macht,  $x = r\theta - r \sin. \theta$ ,  $y = r - r \cos. \theta$ . Nach Vertauschung der Axen, damit die Parallelstralen in die Richtung der Ordinatenaxe fallen,

$$\text{hat man } p = \text{tg.} : \theta. \quad 2q = \frac{1}{r \cos. : \theta^2 \sin. \theta},$$

$$\text{folglich } \left. \begin{aligned} X &= \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \cos. 2\theta = Y' \\ Y &= \frac{r \cdot 2\theta}{2} - \frac{r}{2} \sin. 2\theta = X' \end{aligned} \right\} \text{ durch Zurückführung auf die ursprünglichen Axen,}$$

woraus man sieht, dass die Catacaustica der Cycloide wieder eine Cycloide von den halben Dimensionen ist; jede Hälfte der reflectirenden Cycloide erzeugt eine ganze Cycloide der Catacaustica.

## 11. Eine Diacaustica.

Es sei A Fig. 9. ein leuchtender Punkt unter Wasser,  $AB = h$  die kürzeste Entfernung von A bis zur Oberfläche desselben, AC ein Lichtstral, der mit  $h$  den Winkel  $i'$  bildet, CD der in die Luft gebrochene Stral, der mit dem Einfallslothe den Winkel  $i$  bildet, dann ist  $CB = h \text{ tang. } i'$ . Ein 2ter Stral mache mit  $h$  den Winkel  $k'$ , an der Oberfläche des Wassers mit dem Einfallslothe den Winkel  $k$ , dann bilden die beiden gebrochenen Stralen rückwärts verlängert ein Dreieck, dessen Grundlinie in der Wasserebene. Die Höhe dieses Dreiecks ist

$$y = \frac{h \cos. \frac{(i' - k')}{2} \cos. i. \cos. k. \cos. \frac{(i + k)}{2}}{n \cos. \frac{(i - k)}{2} \cos. i'. \cos. k'. \cos. \frac{(i' + k')}{2}}$$

für zwei unendlich nahe Stralen, die aus A ausgehen, also für die Diacaustica wird

$$y = \frac{h \cos. i'^3}{n \cos. i'^3}, \text{ der Abstand von } h$$

$$x = \frac{h (n^2 - 1) \sin. i'^3}{\cos. i'^3},$$

$$\text{woraus folgt } \left(\frac{y \cdot n}{h}\right)^{\frac{2}{3}} + (n^2 - 1) \left(\frac{x}{h}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Vertauscht man  $x$  mit  $y$ , so erhält man die Gleichung der Evolute einer Ellipse, deren grosse Halbaxe  $= hn$ , kleine Halbaxe  $= h\sqrt{n^2 - 1}$ , Abstand des Brennpunktes vom Centrum  $= h$ . Die Führung der Tangenten an die Brennlilien aus einem gegebenen Augenpunkte lässt sich am genauesten durch Rechnung vollführen, wobei eine kleine Hülftafel bequeme Dienste leistet.

## 12. Brechung des Lichtes in einem 3seitigen Prisma.

Sind  $a$  und  $a'$  die äusseren in derselben das Prisma schneidenden Ebene liegenden Winkel,  $b$  und  $b'$  die entsprechenden inneren,  $c$  der von den Seitenebenen des Prisma's gebildete Winkel, so ist  $b + b'$  bekannt und man braucht nur  $b' - b$  zu suchen. Aus den Gleichungen  $\sin. a' = n \sin. b'$  und  $\sin. a = n \sin. b$  wird aber ganz leicht erhalten

$$\text{tang.} \left( \frac{b' - b}{2} \right) = \frac{\text{tg.} \frac{(a' - a)}{2}}{\text{tg.} \frac{(a' + a)}{2}} \cdot \text{tg.} \left( \frac{b' + b}{2} \right)$$

$$n = \frac{\sin. \frac{a' + a}{2} \cos. \frac{(a' - a)}{2}}{\sin. \frac{c}{2} \cos. \frac{(b' - b)}{2}} = \frac{\sin. \frac{(a' - a)}{2} \cos. \frac{(a' + a)}{2}}{\cos. \frac{c}{2} \sin. \frac{(b' - b)}{2}}$$

$$n^2 = \frac{\sin. (a' + a) \cdot \sin. (a' - a)}{\sin. c \cdot \sin. (b' - b)}$$

## 13. Brechung und Reflexion des Lichtes in einer durchsichtigen Kugel.

Wenn der Winkel, welchen der auf eine durchsichtige Kugel fallende Lichtstrahl mit dem austretenden im Innern einmal reflectirten Strale bildet, mit  $\Delta$  für die wirksamsten Stralen bezeichnet wird, so ist

$$\cos. \frac{\Delta}{2} = \frac{(n^2 + 8) \cdot \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}}{3 n^2}$$

$$n^2 \sin. \frac{\Delta}{2} = \frac{(4 - n^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Für die zweimal gebrochenen und zweimal reflectirten wirksamsten Stralen ist für

$$\sin. a = \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}, \quad \sin. b = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}$$

$$\frac{1}{2} \Delta = 90^\circ - (3b - a)$$

$$\sin. (3b - a) = \frac{\sqrt{n^2 - 1} \cdot (9 - n^2)^{\frac{3}{2}}}{8 n^3}$$

$$\cos. (3b - a) = \frac{(n^2 + 9)(n^2 - 3)}{8 n^3} + \frac{3}{2n}$$

## 14. Klangfiguren.

Es ist auffallend, dass in keiner französischen oder englischen Schrift naturgetreue Abbildungen der Klangfiguren vorkommen. In dem neuesten Werke Tyndall's über den Schall ist eine ganze Reihe unrichtiger Darstellungen von Klangfiguren auf schwingenden Quadratscheiben enthalten, darunter auch die zu Fig. 8 gehörige geschlossene Curve. Die Resultate meiner auf 3 verschiedenen planparallelen Glasscheiben vorgenommenen Messungen stellen sich in den 3 empirischen Formeln dar:

$$\left. \begin{aligned} r &= 0,40143 + 0,0171 \cos. 4t + 0,00127 \cos. 8t \\ r &= 0,40148 + 0,0172 \cos. 4t + 0,00127 \cos. 8t \\ r &= 0,4019 + 0,0168 \cos. 4t + 0,0013 \cos. 8t \end{aligned} \right\} \text{für die Seite des Quadrats} = 1.$$

Die Uebereinstimmung der Formel mit den Messungen erreicht beinahe die Zehntausendtheile des Ganzen. Dagegen verfällt Tyndall bei dieser Curve in den gewöhnlichen Fehler, dass er sie als ein Quadrat mit sanft abgerundeten Ecken ansieht, während Manche nach ihren Pseudo-Theorien sogar herausbringen, diese Figur sei ein vollständiges Quadrat. Andere setzen die Klangfiguren wie Stickmuster aus einzelnen, sich wiederholenden einfachen Figuren zusammen, obgleich in Wahrheit jeder schwingende Körper ein Ganzes bildet, der sich in solche Theile zerlegt, die von den Gleichgewichtsbedingungen des ganzen Körpers abhängen. So nähern sich bei den mit beiden freien Enden schwingenden Stäben für die höheren Töne die Abstände der Knoten von den Rändern dem Verhältnisse 4 : 11 : 12, aber man darf nicht von diesem, bei den einfachsten Schwingungen gar nicht stattfindenden Verhältnisse ausgehen, welches aus der Theorie der schwingenden Stäbe für die höheren Töne desselben Stabes sich als eine nothwendige Folge ergibt. Aehnlich wird es sich auch bei den schwingenden Quadratscheiben verhalten, wenn die wahre Theorie derselben entdeckt sein wird, wozu nach einer Aeusserung des grössten Meisters in der theoretischen Akustik des Professor Kirchhoff in Heidelberg bis jetzt noch gar keine Aussicht vorhanden ist. Als verfehlt muss Terquem's Theorie der rechteckigen Scheiben\*) angesehen werden, wenn sie auch auf der bekannten richtigen Differentialgleichung für die schwingenden Scheiben beruht, weil durch unrichtige Schlüsse aus ihr die Identität der festen Punkte der schwingenden Quadratscheiben und der Knoten der frei schwingenden Stäbe gefolgert wird, was der Erfahrung vollständig widerspricht. Nach der Angabe mancher Lehrbücher eignen sich zu den Versuchen über schwingende Scheiben am besten Scheiben aus Fensterglas; aber diese natürlich sehr unregelmässigen, sonst sehr billigen Scheiben, sind zu genauen Versuchen gar nicht geeignet, auch nicht einmal genau gearbeitete Metallscheiben wegen des unregelmässigen crystallinischen Gefüges. Nur planparallele Scheiben von Spiegelglas, auf denen man die Klangfiguren in Reihen einzelner Sandkörner durch Ueberstreuung mit wenig Sand hervorbringt, sind allein brauchbar. Wenn einer der jüngeren Akustiker meint, ich sei durch sehr genaue Versuche zu unrichtigen Resultaten gelangt, so möchte ich gegenüber einer solchen ungewöhnlichen Ansicht fragen, wie ungenau man denn beobachten müsse, um zu richtigen Resultaten zu gelangen. Natürlich werden meine Versuche dadurch nicht weiter aufgehoben werden, nachdem sich zwischen Kirchhoff's Theorie der schwingenden Kreisscheiben und meinen Messungen eine so gute Uebereinstimmung gezeigt hat, die sich bis auf die Tausendtel des Radius erstreckt. — Programm der Petrischule 1855.

\*) Comptes rendus Nr. 16. 1865.

### 15. Polarisation des Lichtes.

Eine Anzahl planparalleler, dicker Stücke von durchsichtigem Bernstein zeigte im polarisirten Lichte keine Farbenercheinungen. Die gleichartige Dichtigkeit des Bernsteins mag durch den gleichmässigen, Jahrtausende hindurch fortgesetzten Wasserdruck hervorgebracht sein. —

Den einfachsten Polarisations-Apparat hat man an jeden planparallelen schnell gekühlten Glase. Wird ein solches gegen eine um 90° von der Sonne entfernte Stelle des heiteren Himmels gehalten, so sieht man die Farbenkreuze des polarisirten Lichtes oft sehr schön. Wird ein Theil der Hinterwand des Glases mit Tusche geschwärzt, so verschwindet für diese Stelle die Erscheinung. Polarisations-Erscheinungen im aufthauenden Eise der Fensterscheiben gegenüber der polarisirenden Stelle des heiteren Himmels, beobachtet man im analysirenden abgetropften Wasser der Fensterbank unter den Scheiben.

Das Licht des Regenbogens ist bekanntlich polarisirt, ebenso des künstlichen Regenbogens oder Farbenkreises, den man zu jeder Zeit im Sonnenlichte erhält, wenn man eine Bürste in's Wasser taucht, sie schräg gegen einen dunkelen Hintergrund hält und die Haare derselben von oben nach unten streicht. Bei der Nähe der Augen an der Tropfenwand sieht jedes Auge seine beiden Regenbogen. Bei Anwendung eines Nicol'schen Prisma's in bestimmter Lage verschwindet der natürliche und künstliche Regenbogen vollständig.

### 16. Der Leidenfrost'sche Versuch.

Tyndall hat durch Anwendung einer Linse gezeigt, dass bei diesem Versuche der Wassertropfen in keiner unmittelbaren Berührung mit dem erhitzten Metalle steht. Vor vielen Jahren habe ich einen Versuch angestellt, der hiermit übereinstimmt. Man bringt den umgekehrten Deckel eines Platintiegels mit erhöhtem Seitenrande über eine Weingeistflamme und erhitzt den Deckel so stark, dass der darauf gebrachte Tropfen nicht verdunstet. Bläst man nun mit dem horizontal gehaltenen Löthrohr auf den Tropfen, so verschwindet dieser für das Auge vollständig wegen der schnellen, durch keine oder geringste Reibung gehinderten Bewegung, wird aber wieder sichtbar, wenn man das Blasen einstellt.

### 17. Zwei electriche Versuche.

Bringt man zwei auf den Kugeln des Henly'schen allgemeinen Ausladers befindliche Phosphorstücke in gleiche Entfernung von einer Lichtflamme des isolirten Tischchens und setzt die Kugeln in Verbindung mit dem positiven und negativen Conductor einer mässig bewegten Electricitätsmaschine bei schwachem Druck der Reibzeuge, so brennt nach kurzer Zeit jedesmal der negative Phosphor, indem die für sich positive Flamme nach der negativen Kugel sich neigend diese stärker erwärmt. Befinden sich dagegen die beiden Phosphorstücke unter gleichen Umständen zwischen einem Stück brennenden Phosphors, so brennt sehr bald der positive Phosphor. Zudem wirft sich die bis zur Decke des Zimmers reichende Wolke der phosphorigen Säure auch bei beträchtlicher Länge des positiven Conductors in Form eines verschwindenden Nebels an den Conductor und bildet an diesem eine Verbindung der Phosphorsäure mit dem Metall.

Wenn man die Luft in der Glocke der Luftpumpe bis auf einige Zolle der Barometerprobe verdünnt und nun eine elektrische Batterie durch die Glocke von der metallenen Decke zum Teller entladet, so zeigt sich ein starker bläulich weisser Funke von der Mitte des oberen Metalls bis zum unteren, selbst wenn die Glocke über 3 Fuss hoch ist. Verdünnt man die Luft etwa bis zu 2 Linien, so ist die ganze Glocke bei der Entladung der Batterie mit einem röthlichen Nebel erfüllt, aber in der Mitte steht vom Boden des Tellers bis zur Mitte der Decke ein carminrothes Ellipsoid. Bei manchen Verdünnungen, die ich noch nicht habe feststellen können, hat das Ellipsoid oben und unten weisse, blätterartige Einfassungen; auch habe ich zuweilen einen weissen und einen rothen Funken gleichzeitig gesehen. Ueberdies scheint bei derselben Stärke der elektrischen Ladung das Luftvolumen von Einfluss. So habe ich bei 4 Fuss langen Röhren von  $1\frac{1}{2}$  Zoll Durchmesser kein Purpurlicht wahrgenommen.

### 18. Schwerpunkt einer Fläche zwischen Abscisse und Ordinate

und dem Bogen einer Curve, deren Gleichung  $y^n = p x^m$ .

Die bekannten Formeln  $F = \int_0^x y dx$ ,  $F x_1 = \int_0^x y x dx$ ,  $F y_1 = \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx$ ,  
ergeben für diese Curve:

$$x_1 = \frac{(m+n)x}{m+2n}, \quad y_1 = \frac{(m+n)y}{2(m+n)}$$

### 19. Schwerpunkt eines dreieckigen gleichmässig beschwerten Rahmens, in welchem die 3 parallelen Seiten den Abstand $m$ von einander haben.

Bezeichnet  $h$  die Höhe des äusseren Dreiecks,  $r$  den Radius des einbeschriebenen Kreises,  $y$  den Abstand des Schwerpunktes von der zu  $h$  gehörigen Grundlinie, so ist  $y(2r - m) = (r - m)(h - r + m) + \frac{h m^2}{3r}$ . Setzt man  $m = r$ , so erhält man den Schwerpunkt der gleichmässig beschwerten Dreiecksfläche; ist  $m = 0$ , so erhält man  $2y = h - r$ , oder den Schwerpunkt des Dreiecks, dessen 3 Seiten gleichmässig beschwert sind. Die beiden bekannten Aufgaben vom Schwerpunkte des Dreiecks erscheinen also hier als besondere Fälle einer allgemeineren Aufgabe.

### 20. Maxima und Minima.

Aufgabe. Wie hoch über einer begrenzten Horizontalen  $a$  muss ein leuchtender Punkt stehen, um eine am Ende derselben befindliche kleine horizontale Fläche am stärksten zu beleuchten?

Auflösung. Es sei  $J$  die Intensität des Lichtes in der Entfernung 1,  $\Theta$  der Winkel, unter welchem das Licht die kleine horizontale Fläche trifft, so ist in der Entfernung  $a$  die Intensität  $= \frac{J \cdot (x - x^2)}{a^2}$ , wenn  $\sin. \Theta = x$ , folglich für das Maximum  $x^2 = \frac{1}{3}$ , die grösste Intensität selbst  $= \frac{2}{9} \sqrt{3} \cdot \frac{J}{a^2}$ .

**Aufgabe.** Aus einer mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kreisfläche soll ein Sector geschnitten werden, der als Mantel eines senkrechten Kegels den grössten Cubikinhalte einschliesst.

**Auflösung.** Der Winkel am Centrum sei  $= C$ ,  $\cos. \Theta = \frac{C^\circ}{360^\circ}$ , so ist der Cubikinhalte des Kegels  $= \frac{1}{3} r^3 (\sin. \Theta - \sin. \Theta^3) \pi$ , folglich für das Maximum  $\sin. \Theta^2 = \frac{1}{3}$ ,  $\cos. \Theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $C = 360^\circ \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ , der cubische Inhalt  $= \frac{2}{27} r^3 \sqrt{3} \pi$ . — Der in die Kugel eingeschriebene senkrechte Kegel mit grösstem Mantel. Der Radius der Kugel sei  $= r$ , der Winkel, den ein vom Centrum nach einem beliebigen Punkte im Umfange der Basis des Kegels gezogener Radius mit dessen Axe bildet, sei  $= \Theta$ , so ist die krumme Oberfläche  $F$  des Kegels, dividirt durch die Oberfläche  $S$  der Kugel oder  $\frac{F}{S} = \sin. \frac{1}{2} \Theta - \sin. \frac{1}{2} \Theta^3$ , folglich für das Maximum  $\cos. \Theta = \frac{1}{3}$ ,  $F = \frac{2}{9} \sqrt{3} S$ . — Wenn die Gesamtoberfläche des Kegels, d. h. Mantel und Basis zusammen ein Maximum sein soll, und  $F$  die Gesamtoberfläche bezeichnet, so ist

$\frac{F'}{S} = 2 \sin. \frac{\Theta}{2} \cos. \frac{1}{2} \Theta^2 \sin. (45^\circ + \frac{1}{2} \Theta)^2 = x + x^2 - x^3 - x^4$ , wenn  $x = \sin. \frac{\Theta}{2}$ . Für das Maximum ist  $8x = 1 + \sqrt{17}$ ,  $F' = \frac{(107 + 51\sqrt{17})}{512}$ . — Der cubische Inhalt des einbeschriebenen Kegels ist  $= \frac{1}{3} r^3 \pi (1 - \cos. \Theta^2) (1 + \cos. \Theta)$ . Für  $\cos. \Theta = \frac{1}{3}$  findet das Maximum statt, der cubische Inhalt des grössten Kegels  $= \frac{32}{81} r^3 \pi$ . — Der cubische Inhalt des grössten in die Kugel einbeschriebenen Cylinders  $= \frac{4}{9} \sqrt{3} r^3 \pi$ ,  $\cos. \Theta^2 = \frac{1}{3}$ . — Der Mantel des einbeschriebenen Cylinders  $= 2 r^2 \pi$ , wobei  $\Theta = 45^\circ$ . — Die Gesamtoberfläche  $Q$  des einbeschriebenen Cylinders dividirt durch  $r^2 \pi = 2 \sin. 2\Theta + 1 - \cos. 2\Theta$ , folglich für das Maximum  $\tan. 2\Theta = -2$ , und  $\frac{Q}{r^2 \pi} = 1 + \sqrt{5}$ .

**Aufgabe.** Man soll den Winkel finden, unter dem ein Körper gegen den Horizont geworfen werden muss, damit der von diesem und dem parabolischen Bogen begrenzte Flächenraum ein Maximum werde.

**Auflösung.** Die  $i$  bestimmende Gleichung ist  $3 \cos. i^2 - \sin. i^2 = 0$ , folglich  $i = 60^\circ$ .

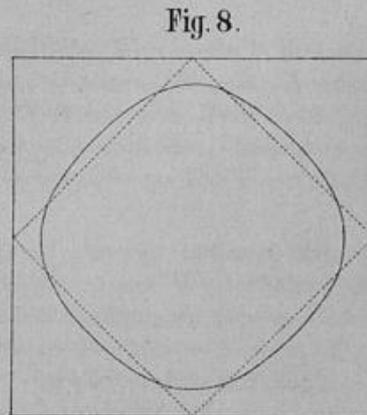
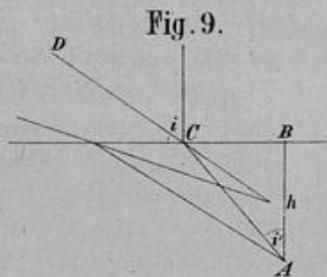
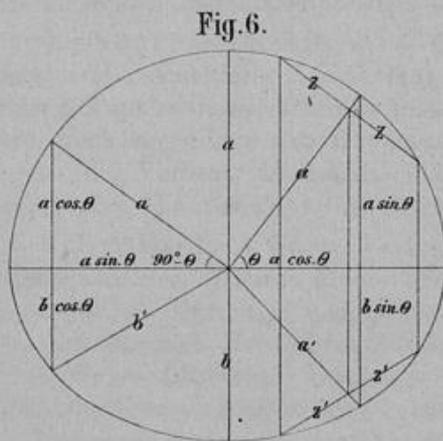
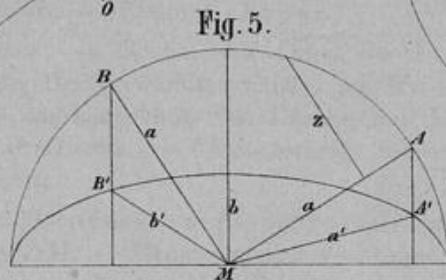
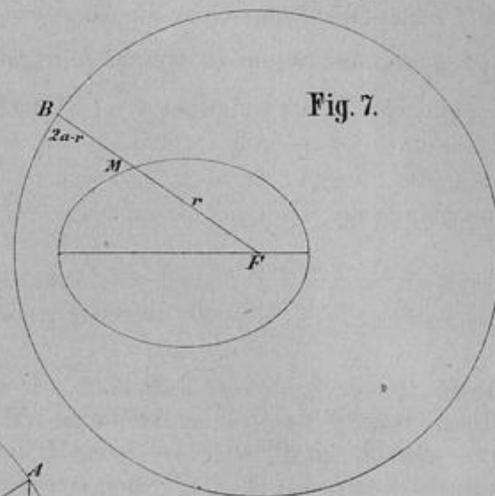
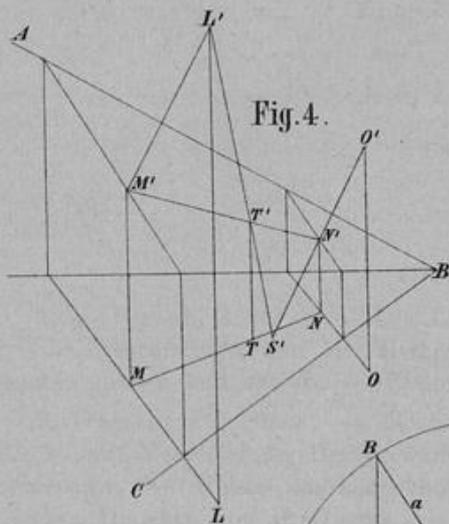
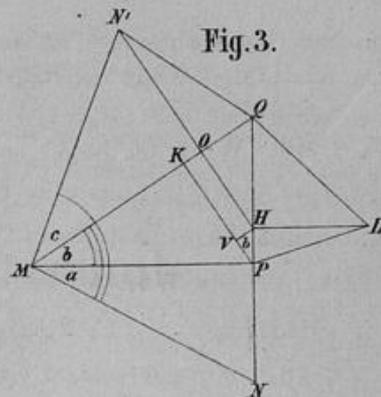
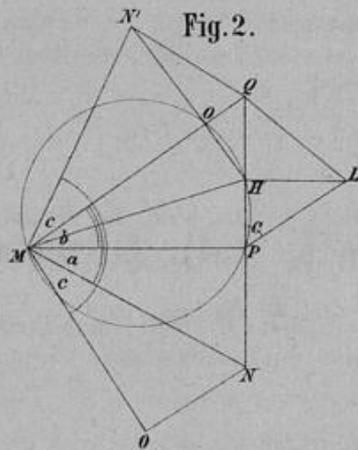
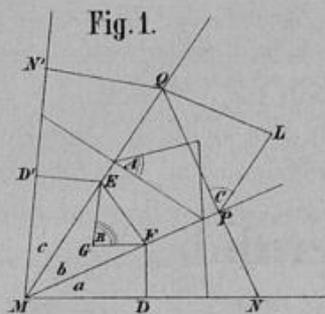
**Aufgabe.** Den Winkel des Wurfs zu bestimmen, wenn der parabolische Weg oder die Länge der Parabel zwischen den beiden Endpunkten im Horizont ein Maximum sein soll.

**Auflösung.** Die Länge des parabolischen Bogens  $s$  zwischen den beiden Punkten des Horizonts ist  $= \frac{2k^2}{2g} \left( \sin. i + \cos. i^2 \log. \frac{(1 + \sin. i)}{\cos. i} \right)$  wo  $g$  die Schwere,  $k$  die Geschwindigkeit.

$\frac{ds}{di} = 0$  führt auf die Gleichung  $1 = \sin. i \cdot \log. \tan. (45^\circ + \frac{1}{2} i)$ , woraus man durch Näherung findet  $i = 56^\circ 27' 57''$ . — Ueber die Körper vom grössten Volumen bei gleicher Oberfläche und kleinster Oberfläche bei gleichem Volumen. — Comptes rendus. 1866. Nr. 9. — Die Bedingungsgleichungen sind  $dV = 0$ ,  $dS = 0$ , wenn  $V$  das Volumen,  $S$  die Oberfläche bezeichnet. — Für ein cylindrisches Gefäss mit Kreisbasis, deren Radius  $= r$ , Höhe  $= h$ , ist die Oberfläche der Wände  $S = \pi r^2 + 2\pi r h$ ,  $V = \pi r^2 h$ . Durch Differentiation und Elimination von  $dr$  und  $dh$  wird erhalten  $h = r$  für das Maximum des Inhalts. — Wenn das Volumen eines

konischen Gefässes gegeben ist, so hat man  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ , und  $S = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$ , woraus man findet  $h = r\sqrt{2}$ . — Wenn der Kegel, statt offen zu sein, durch eine ebene Kreisfläche  $\pi r^2$  geschlossen ist, so wird  $S = \pi r^2 + \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$ ,  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ . Man erhält für  $dV = 0$ ,  $dS = 0$ ,  $h = 2r\sqrt{2}$ . Wird der Kegel anstatt der ebenen Grundfläche durch eine Halbkugel geschlossen, so ist  $V = \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ,  $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} + 2\pi r^2$ . Die Differentiation und Elimination von  $dh$  und  $dr$  ergibt, wenn  $\frac{h}{r} = z$  gesetzt wird die Gleichung  $z^4 + 12z^3 + 16z^2 - 24z - 12 = 0$ . Die Wurzeln dieser Gleichung sind  $x_0 = 1, 125983$ ,  $x_1 = -0, 418583$ ,  $x_2 = -2, 492487$ ,  $x_3 = -10, 214913$ , deshalb für unseren Fall  $\frac{h}{r} = 1, 125983$ .

Für eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Seite  $a$  ist  $V = \frac{1}{3} a^2 h$ , die Oberfläche ohne die Basis  $= 2a \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + h^2}$ . Dies ergibt für das grösste Volumen  $\frac{h}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ , und wenn die Pyramide durch die quadratische Grundfläche geschlossen ist,  $\frac{h}{a} = \sqrt{2}$ . Das regelmässige Oktaeder hat den grössten Inhalt und die kleinste Oberfläche unter allen Oktaedern, die aus zwei senkrechten Pyramiden mit gemeinschaftlicher quadratischer Basis bestehen. Eben so findet man, dass unter allen senkrechten Pyramiden mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche das regelmässige Tetraeder das grösste Volumen bei kleinster Oberfläche besitzt.



Lith. Anst. v. R. Emmendorffer, Danzig.

