

Ueber Summirung unendlicher Reihen.

Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe wurde zuerst von Archimedes bestimmt. Von Archimedes bis zur 2ten Hälfte des 17ten Jahrhunderts befasste sich Niemand mit diesem Gegenstande. Von da an führte die Ausbildung der Analysis des Unendlichen alle bedeutenden Mathematiker zu Untersuchungen über unendliche Reihen.

Die Leipziger „Acta Eruditorum“ brachten 1682 die Abhandlung von Leibnitz: „De proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus.“ Unter vielen interessanten Gegenständen dieser Schrift, die auf Quadraturen des Kreises und der Hyperbel führen, gibt Leibnitz die Summen verschiedener unendlichen Reihen an, aber ohne Beweise; zum Beispiel: $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} \dots = \frac{3}{4}$. Die Summe der ungeraden Glieder dieser Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} \dots = \frac{1}{2}$; die der geraden $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} \dots = \frac{1}{4}$. Die Beweise dafür gab Jacob Bernoulli in der Abhandlung: „Tractatus de seriebus infinitis, earumque summa finita.“

In der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} \dots$ sind die Zähler 1, die Nenner die um 1 verminderten Quadrate der natürlichen Zahlen, mit Ausnahme von 1^2 .

Bernoulli geht von der unendlichen harmonischen Reihe aus:

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots = A - 1 - \frac{1}{2} = A - \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \frac{2}{48} + \dots = A - B.$$

$$C = A - A + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \text{ daher } D = \frac{1}{2}C = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \dots = \frac{3}{4}.$$

Nimmt man die ungeraden Glieder der harmonischen Reihe:

$$E = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots \text{ und setzt}$$

$$F = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots = E - 1, \text{ so wird}$$

$$E - F = G = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \dots \text{ folglich } G = E - E + 1 = 1 \text{ und}$$

$$H = \frac{1}{2}G = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Die geraden Glieder der harmonischen Reihe sind:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \dots \\ K &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots = I - \frac{1}{2} \\ I - K : L &= \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120} + \frac{2}{168} + \dots = I - I + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ woraus} \\ M &= \frac{1}{2} L = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \dots = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise summirt Bernoulli noch viele andere Reihen, in denen die Zähler constant und die Nenner die Quadratzahlen sind, vermindert um irgend ein Quadrat Q, oder die Trigonalzahlen, vermindert um eine Trigonalzahl T; eben so unendliche Reihen von Brüchen, deren Zähler in arithmetischer, und deren Nenner in geometrischer Progression wachsen. Die Probleme der Wahrscheinlichkeits-Rechnung führten Nicolas Bernoulli und de Moivre zur Summirung unendlicher Reihen um 1712, und Moivre förderte diesen Gegenstand bedeutend durch Untersuchungen über recurrirende Reihen, die er in dem Werke: „Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini 1730“ bekannt machte.

Alle diese Untersuchungen bezogen sich jedoch nur auf bestimmte Arten von Reihen: allgemein für beliebige Reihen waren die Methoden von Stirling und Leonhard Euler, die im Folgenden näher betrachtet werden sollen. Stirlings Methode ist in dem Werke bekannt gemacht: „Methodus differentialis, sive Tractatus de Summatione et Interpolatione serierum infinitarum, Londini 1730.“

Die eine Reihe definirende Differentialgleichung ist diejenige, welche die Relationen der Glieder allgemein aus den gegebenen Abständen derselben vom Anfange der Reihe angibt. Die Glieder sind aufzufassen als Ordinaten auf einer gegebenen geraden Linie, deren gemeinschaftliche Distanz die Einheit ist. Die Anfangsglieder der Reihe werden mit A . B . C . D . . . bezeichnet, irgend ein Glied mit T, die darauf folgenden mit T^I, T^{II}, T^{III} . . . Ist der Abstand des Gliedes T von irgend einem Gliede der Reihe = z, so werden die Abstände der Glieder T^I, T^{II}, T^{III} . . . von dem genannten Gliede = z + 1, z + 2, z + 3 . . . Ist die Reihe 1, $\frac{1}{2}x$, $\frac{3}{8}x^2$, $\frac{5}{16}x^3$, $\frac{35}{128}x^4$, $\frac{63}{256}x^5$. . ., in welcher die Relationen der Glieder folgende sind: B = $\frac{1}{2}Ax$, C = $\frac{3}{4}Bx$, D = $\frac{5}{8}Cx$, E = $\frac{7}{8}Dx$. . ., so ist die definirende Gleichung: T^I = $\frac{z + \frac{1}{2}}{z + 1}Tx$, wenn z den Abstand des Gliedes T vom ersten Gliede der Reihe bezeichnet; denn setzt man für z successive 0, 1, 2, 3 . . ., so erhält man

$$1, \frac{1}{2}x, \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{3}{8}x^2, \frac{2 + \frac{1}{2}}{3} \cdot \frac{3}{8}x^2 \cdot x = \frac{5}{16}x^3 \dots$$

Bezeichnet z den Abstand des Gliedes T vom zweiten Gliede der Reihe, so ist die definirende Gleichung T^I = $\frac{z + \frac{3}{2}}{z + 2}Tx$, worin für z zu setzen ist: - 1, 0, 1, 2, 3 . . ., um die Glieder der Reihe zu erhalten. Nimmt man für z die Werthe 1, 2, 3, 4 . . ., so wird die definirende Gleichung T^I = $\frac{z - \frac{1}{2}}{z}Tx$. Es können daher unzählige Differential-Gleichungen dieselbe Reihe definiren, je nachdem in diesem oder jenem Punkte der Anfang der Abscisse z genommen wird. Eben so definirt dieselbe Gleichung unzählige Reihen, wenn man verschiedene Werthe für z annimmt. Denn wird in der Gleichung T^I = $\frac{z - \frac{1}{2}}{z}Tx$, z = 1 $\frac{1}{2}$, 2 $\frac{1}{2}$, 3 $\frac{1}{2}$. . ., so werden die

Relationen der Glieder: $B = \frac{2}{3}Ax$, $C = \frac{1}{3}Bx$, $D = \frac{2}{3}Cx$, $E = \frac{1}{3}Dx \dots$ und die Glieder $A, \frac{2}{3}Ax, \frac{4}{9}Ax^2, \frac{8}{27}Ax^3 \dots$

Das Fundament von Stirlings Operationen ist die Reduction der Gleichungen auf folgende zwei Formen:

$$T = A + B \cdot z + C \cdot z(z-1) + D \cdot z(z-1)(z-2) + E \cdot z(z-1)(z-2)(z-3) + \dots$$

$$T = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z(z+1)} + \frac{D}{z(z+1)(z+2)} + \frac{E}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots$$

Soll der Ausdruck $(z-3) \cdot z(z+1)(z+4)$ umgeformt werden, so setzt man $(z-3) \cdot z(z+1)(z+4) = a \cdot z(z-1)(z-2)(z-3) + b \cdot z(z-1)(z-2) + c \cdot z(z-1) + d \cdot z$, und erhält durch Multiplication

$$z^4 + 2z^3 - 11z^2 - 12z = z(z-1)(z-2)(z-3) + 8z(z-1)(z-2) + 2z(z-1) - 20z.$$

Um die Multiplication in den einzelnen Fällen zu ersparen, berechnet Stirling eine Tabelle für die Coefficienten, aus den Reihenentwickelungen von $\frac{1}{(n-1)}, \frac{1}{(n-1)(n-2)}, \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} \dots$ indem nur die Zähler beachtet werden:

1	1	1	1	1	1	1	...
	1	3	7	15	31	63	...
		1	6	25	90	301	...
			1	10	65	350	...
				1	15	140	...
					1	21	...
						1	

Die Zahlen in den verticalen Columnen geben die Reductions-Coefficienten. Man erhält $z = z$, $z^2 = z + z(z-1)$, $z^3 = z + 3z(z-1) + z(z-1)(z-2)$, $z^4 = z + 7z(z-1) + 6z(z-1)(z-2) + z(z-1)(z-2)(z-3)$, $z^5 = z + 15z(z-1) + 25z(z-1)(z-2) + 10z(z-1)(z-2)(z-3) + z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4) \dots$

In ähnlicher Weise wird die andere Umformung vollzogen. Soll der Ausdruck reducirt werden:

$$\frac{A}{z+2} + \frac{B}{(z+2)(z+3)} + \frac{C}{(z+2)(z+3)(z+4)} + \frac{D}{(z+2)(z+3)(z+4)(z+5)} + \frac{E}{(z+2)(z+3) \dots (z+6)} + \dots$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{A}{z+2} &= \frac{A}{z} - \frac{2A}{z(z+1)} + \frac{2A}{z(z+1)(z+2)} \\ \frac{B}{(z+2)(z+3)} &= \frac{B}{z(z+1)} - \frac{4B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{6B}{z(z+1)(z+2)(z+3)} \\ \frac{C}{(z+2)(z+3)(z+4)} &= \frac{C}{z(z+1)(z+2)} - \frac{6C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{12C}{z(z+1) \dots (z+4)} \\ \frac{D}{(z+2) \dots (z+5)} &= \frac{D}{z(z+1)(z+2)(z+3)} - \frac{8D}{z(z+1) \dots (z+4)} + \dots \\ \frac{E}{(z+2) \dots (z+6)} &= \frac{E}{z(z+1) \dots (z+4)} - \dots \end{aligned}$$

die umgeformte Reihe ist daher:

$$= \frac{A}{z} + \frac{(B-2A)}{z(z+1)} + \frac{(C-4B+2A)}{z(z+1)(z+2)} + \frac{(D-6C+6B)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{(E-8D+12C)}{z(z+1) \dots (z+4)} + \dots$$

Um Brüche zu transformiren, deren Nenner Potenzen sind, setzt man

$$\frac{1}{z^2} = \frac{a}{z(z+1)} + \frac{b}{z(z+1)(z+2)} + \frac{c}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{d}{z(z+1) \dots (z+4)} + \frac{e}{z(z+1) \dots (z+5)} + \dots$$

und erhält durch Multiplication $z^5 + 15z^4 + 85z^3 + 225z^2 + 274z + 120$
 $= a \cdot z^5 + (14a+b)z^4 + (71a+12b+c)z^3 + (154a+47b+9c+d)z^2 + (120a+60b+20c+5d+e)z$;
 folglich $a = 1$, $b = 1$, $c = 1 \cdot 2$, $d = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $e = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, ...

Man kann auch hiebei die Multiplication für einzelne Fälle vermeiden, wenn man n mit $1 + n$, $2 + n$, $3 + n$, ... $(n + n)$ multiplicirt und die Coefficienten der gleichen Potenzen von n zu folgender Tabelle zusammen stellt:

1								
1	1							
2	3	1						
6	11	6	1					
24	50	35	10	1				
120	274	225	85	15	1			
720	1764	1624	735	175	21	1		
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Die Zahlen in den verticalen Columnen sind die gesuchten Zähler, so dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1 \cdot 2}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{z(z+1) \dots (z+4)} + \dots \\ \frac{1}{z^3} &= \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{11}{z(z+1) \dots (z+4)} + \frac{50}{z(z+1) \dots (z+5)} + \dots \\ \frac{1}{z^4} &= \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{6}{z(z+1) \dots (z+4)} + \frac{35}{z(z+1) \dots (z+5)} + \frac{225}{z(z+1) \dots (z+6)} + \dots \\ \frac{1}{z^5} &= \frac{1}{z(z+1) \dots (z+4)} + \frac{10}{z(z+1) \dots (z+5)} + \frac{85}{z(z+1) \dots (z+6)} + \frac{735}{z(z+1) \dots (z+7)} + \dots \\ \frac{1}{z^6} &= \frac{1}{z(z+1) \dots (z+5)} + \frac{15}{z(z+1) \dots (z+6)} + \frac{175}{z(z+1) \dots (z+7)} + \frac{1960}{z(z+1) \dots (z+8)} + \dots \end{aligned}$$

Soll die Potenzen-Reihe $\frac{a}{z^2} + \frac{b}{z^3} + \frac{c}{z^4} + \frac{d}{z^5} + \frac{e}{z^6} + \dots$ in eine Factoren-Reihe umgeformt werden, so benutzt man die Zahlen aus den horizontalen Columnen, setzt $\alpha = a$, $\beta = a + b$, $\gamma = 2a + 3b + c$, $\delta = 6a + 11b + 6c + d$, $\varepsilon = 24a + 50b + 35c + 10d + e$, ... und die Reihe wird: $\frac{\alpha}{z(z+1)} + \frac{\beta}{z(z+1)(z+2)} + \frac{\gamma}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{\delta}{z(z+1) \dots (z+4)} + \dots$

Wenn die Glieder einer Reihe gebildet werden, indem man in dem Ausdruck $T = A + B \cdot z + C \cdot z(z-1) + D \cdot z(z-1)(z-2) \dots$ für z die Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots$ schreibt, so stellt Stirling die Proposition auf, dass die Summe der Glieder, deren Anzahl $= z$ ist, bestimmt wird durch $S = A \cdot z + (z+1) [\frac{1}{2} B \cdot z + \frac{1}{3} C \cdot z(z-1) + \frac{1}{4} D \cdot z(z-1)(z-2) \dots]$ und führt den Beweis in folgender Weise:

Wenn $S = A \cdot z + \frac{1}{2} B \cdot z(z+1) + \frac{1}{3} C \cdot z(z+1)(z-1) + \frac{1}{4} D \cdot z(z+1)(z-1)(z-2) \dots$ sein soll, so geht der Ausdruck in $S - T$ über, wenn man für z den folgenden Werth $(z-1)$ nimmt, so dass $S - T = A(z-1) + \frac{1}{2} B \cdot z(z-1) + \frac{1}{3} C \cdot z(z-1)(z-2) + \frac{1}{4} D \cdot z(z-1)(z-2)(z-3) \dots$

Wird diese Gleichung von S subtrahirt, so erhält man

$S - S + T = T = A(z-z+1) + \frac{1}{2} B \cdot z(z+1-z+1) + \frac{1}{3} C \cdot z(z-1)(z+1-z+2) \dots$
 $= A + B \cdot z + C \cdot z(z-1) + \dots$, und da dies der gegebene Ausdruck ist, so ist die Proposition bewiesen.

Für die Summe der Quadratzahlen ist

$$T = z^2 = z + z(z-1), \text{ mithin } A = 0, B = 1, C = 1, D = 0 \dots$$

$$S = (z+1) \left[\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z(z-1) \right] = \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z.$$

Für die Summe der Kubikzahlen ist

$$T = z^3 = z + 3z(z-1) + z(z-1)(z-2), \text{ mithin } A = 0, B = 1, C = 3, D = 1, E = 0 \dots$$

$$S = (z+1) \left[\frac{1}{2}z + z(z-1) + \frac{1}{2}z(z-1)(z-2) \right] = \frac{1}{4}z^4 (z+1)^2.$$

Soll $S = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots$ bestimmt werden, so ist

$$T = z^4 = z + 7z(z-1) + 6z(z-1)(z-2) + z(z-1)(z-2)(z-3),$$

mithin $A = 0, B = 1, C = 7, D = 6, E = 1, F = 0 \dots$

$$S = (z+1) \left[\frac{1}{2}z + \frac{7}{2}z(z-1) + \frac{3}{2}z(z-1)(z-2) + \frac{1}{4}z(z-1)(z-2)(z-3) \right] = \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z.$$

Wenn die Glieder einer Reihe gebildet werden, indem man beliebige Zahlen, die sich um die Einheit unterscheiden, in folgendem Ausdruck für z schreibt:

$$T = \frac{A}{z(z+1)} + \frac{B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{D}{z(z+1)\dots(z+4)} + \frac{E}{z(z+1)\dots(z+5)} \dots$$

so ist die Summe der Reihe

$$S = \frac{A}{z} + \frac{B}{2z(z+1)} + \frac{C}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{D}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{E}{5z(z+1)\dots(z+4)} \dots$$

Wird für z der folgende Werth $(z+1)$ genommen, so erhält man

$$S - T = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{2(z+1)(z+2)} + \frac{C}{3(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{D}{4(z+1)\dots(z+4)} + \frac{E}{5(z+1)\dots(z+5)} \dots$$

und wird diese Gleichung von S subtrahirt, so ist

$$\begin{aligned} S - S + T = T &= \frac{A}{z} + \frac{B}{2z(z+1)} + \frac{C}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{D}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{E}{5z(z+1)\dots(z+4)} \dots \\ &- \frac{A}{z+1} - \frac{B}{2(z+1)(z+2)} - \frac{C}{3(z+1)(z+2)(z+3)} - \frac{D}{4(z+1)\dots(z+4)} - \frac{E}{5(z+1)\dots(z+5)} \dots \\ &= \frac{A}{z(z+1)} + \frac{B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{D}{z(z+1)\dots(z+4)} + \frac{E}{z(z+1)\dots(z+5)} \dots \end{aligned}$$

Dieses ist der gegebene Ausdruck, und die Formel für die Summe S ist richtig.

Enthält T nur ein Glied, so findet man die Summe der Reihe, indem man den letzten Factor im Nenner weglässt und durch die Anzahl der übrigen Factoren dividirt.

$$\text{Soll die Reihe summirt werden } \frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} + \frac{1}{10 \cdot 13 \cdot 16} + \frac{1}{13 \cdot 16 \cdot 19} + \dots$$

welche durch die Gleichung defnirt wird $T = \frac{1}{3z(3z+3)(3z+6)} = \frac{1}{27z(z+1)(z+2)}$, wenn

man für $z = \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{3} \dots$ setzt; so ist $S = \frac{1}{54z(z+1)}$. Für $z = \frac{1}{3}$ erhält man die Summe

der ganzen Reihe $S = \frac{9}{54 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{1}{24}$; der zweite Werth für $z = 1\frac{1}{3}$ gibt die Summe weniger

dem ersten Gliede $\frac{3 \cdot 3}{54 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{168} = \frac{1}{24} - \frac{1}{28}$. Diese Formel gibt auch die Summe für die

Leibnitzschen Reihen. Die Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \dots$ wird durch die Gleichung

defnirt $T = \frac{1}{z(z+2)}$, wenn die Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots$ für z gesetzt werden.

Um $\frac{1}{z(z+2)}$ in summirbare Factoren zu zerlegen, setzt man

$$\frac{1}{z(z+2)} = \frac{a}{z(z+1)} + \frac{b}{z(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

und es wird $S = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z(z+1)}$, $z=1$ gibt die Summe der ganzen Reihe $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$;
 $z=2$ gibt die Summe, vermindert um das erste Glied $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$. Für die
 Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots$ ist $T = \frac{1}{4z(z+1)}$, wenn $z = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \dots$
 $S = \frac{1}{4 \cdot z} = \frac{1}{2}$, für den ersten Werth $z = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{2}$, gibt $S = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.

Soll die Reihe der reciproken Quadrate summirt werden $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$, so ist
 $T = \frac{1}{z^2}$; die Zahlen aus der ersten Columne der 2ten Tabelle geben:

$$T = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1 \cdot 2}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{z(z+1) \dots (z+4)} + \dots$$

$$S = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z(z+1)} + \frac{1 \cdot 2}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5z(z+1) \dots (z+4)} + \dots$$

Bezeichnet $A = \frac{1}{z}$, $B = \frac{A}{z+1}$, $C = \frac{2B}{z+2}$, $D = \frac{3C}{z+3} \dots$, so wird

$$S = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \frac{1}{6}F + \dots$$

Diese Reihe convergirt schwach, wenn man sie vom ersten Gliede an für $z=1$ berechnen wollte.
 Addirt man jedoch die ersten 24 Glieder $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots + \frac{1}{576}$, deren Summe
 $= 1,604\,123\,403\,591\,000\,854 \dots$, so gibt der 25ste Werth für z die Summe der unendlichen
 Reihe vom 25sten Gliede an, und da $z=25$, $A = \frac{1}{25}$, $B = \frac{A}{26}$, $C = \frac{2B}{27}$, $D = \frac{3C}{28}$, $E = \frac{4D}{29} \dots$,
 so wird die gesuchte Summe $S' = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \dots$, wovon für 18 Decimal-
 stellen 30 Glieder zu berechnen sind, deren Summe $= 0,040\,810\,663\,257\,225\,579 \dots$, dazu
 die Summe der 24 ersten Glieder addirt, gibt $S = 1,644\,934\,066\,848\,226\,433 \dots$. Die
 Summe der reciproken Kuben ist nicht so einfach zu berechnen, weil die Reductions-Zahlen der
 zweiten Columne sehr stark, und nach keinem so einfachen Gesetze wachsen, als die der ersten.

Um den Vortheil seiner Methode anschaulich zu machen, summirt Stirling die Reihe,
 welche Brounker für die Quadratur der Hyperbel fand $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots$. Die defini-
 rende Gleichung ist $T = \frac{1}{4z(z+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2z(2z+1)}$, wenn $z = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \dots$

Um T auf eine summirbare Form zu bringen, setzt man

$$\frac{1}{2z(2z+1)} = \frac{a}{z(z+1)} + \frac{b}{z(z+1)(z+2)} + \frac{c}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{d}{z(z+1) \dots (z+4)} + \frac{e}{z(z+1) \dots (z+5)} + \dots$$

und findet durch Multiplication $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1 \cdot 3}{16}$, $d = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{32}$, $e = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{64}$,
 $f = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{128} \dots$; daher

$$T = \frac{1}{4z(z+1)} + \frac{1}{8z(z+1)(z+2)} + \frac{1 \cdot 3}{16z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{32z(z+1) \dots (z+4)} + \dots$$

$$S = \frac{1}{4z} + \frac{1}{16z(z+1)} + \frac{1 \cdot 3}{48z(z+1)(z+2)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{128z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{320z(z+1) \dots (z+4)} + \dots$$

Der leichteren Uebersicht wegen setzt man

$$A = \frac{1}{4z}, B = \frac{A}{2z+2}, C = \frac{3B}{2z+4}, D = \frac{5C}{2z+6}, E = \frac{7D}{2z+8} \dots$$

$$S = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \frac{1}{6}F + \frac{1}{7}G + \frac{1}{8}H + \dots$$

Die Reihe convergirt um so schneller, je grösser z ist. Berechnet man die Summe der 13 ersten Glieder durch Addition, und nimmt für z den 14ten Werth = $13\frac{1}{2}$, so ist die Summe der unendlichen Reihe vom 14ten Gliede an sehr einfach für 10 – 12 Decimalen zu berechnen. Für $z = 13\frac{1}{2}$ ist $A = \frac{1}{3^1}$, $B = \frac{1}{3^2} A$, $C = \frac{1}{3^3} B$, $D = \frac{1}{3^4} C$, $E = \frac{1}{3^5} D \dots$ Die Summe von 16 solcher Glieder ist = 0, 018 861 219 477 . . . , dazu die Summe der 13 ersten Glieder mit 0, 674 285 961 078 . . . addirt, gibt die Summe der unendlichen Reihe = 0, 693 147 180 555 . . . Diese Zahl ist der natürliche Logarithmus von 2. Stirling bemerkt bei diesem Beispiel, dass es unausführbar wäre, die Summe der Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \dots$ durch gewöhnliche Addition für mehrere Decimalstellen zu berechnen, indem für 9 Stellen Tausend Millionen Glieder zu addiren wären, und gibt die Summe von je 100, 1000, 10000 bis Tausend Millionen Glieder so an: 0, 690 653 446 . . . , 0, 692 897 242 . . . , 0, 693 122 181 . . . , 0, 693 144 680 . . . , 0, 693 146 930 . . . , 0, 693 147 155 . . . , 0, 693 147 187 . . . , 0, 693 147 180 . . .

Um die Convergenz der Reihe für eine beträchtliche Anzahl von Decimalstellen zu prüfen, habe ich die 62 ersten Glieder der Reihe $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} \dots + \frac{1}{123.124}$ addirt, ihre Summe ist = 0, 689 131 181 071 879 791 234 708 551 970 708 826 245 515 125 884 078 162 . . . Der 63ste Werth für $z = 62\frac{1}{2}$ gibt die Summe der unendlichen Reihe vom 63sten Gliede an, und es ist $A = \frac{1}{250}$, $B = \frac{A}{127}$, $C = \frac{3B}{129}$, $D = \frac{5C}{131}$, $E = \frac{7D}{133}$, $F = \frac{9E}{135} \dots$ Zu 54 Decimalen sind 114 Glieder zu summiren, von der Form $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \frac{1}{6}F + \dots$, deren Summe = 0, 004 015 999 488 065 518 182 523 569 487 467 741 829 985 008 476 177 075 . . .

Addirt man hiezu die Summe der 62 ersten Glieder, so erhält man
Log. nat. 2 = 0, 693 147 180 559 945 309 417 232 121 458 176 568 075 500 134 360 255 237 . . .

Bezeichnet T einen Ausdruck von der Form

$$T = x \left\{ \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z(z+1)} + \frac{\gamma}{z(z+1)(z+2)} + \frac{\delta}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right\}$$

und werden für z Zahlen gesetzt, die sich um die Einheit von einander unterscheiden, so ist die Summe der dadurch gebildeten Reihe vom ersten Gliede an:

$$S = x \left\{ \frac{\alpha}{(1-x)z} + \frac{(\beta - \alpha x)}{(1-x)z(z+1)} + \frac{(\gamma - 2\beta x)}{(1-x)z(z+1)(z+2)} + \frac{(\delta - 3\gamma x)}{(1-x)z(z+1)\dots(z+3)} + \frac{(\epsilon - 4\delta x)}{(1-x)z\dots(z+4)} + \dots \right\}$$

Wenn $a = \frac{\alpha}{1-x}$, $b = \frac{\beta - \alpha x}{1-x}$, $c = \frac{\gamma - 2\beta x}{1-x}$, $d = \frac{\delta - 3\gamma x}{1-x}$, $e = \frac{\epsilon - 4\delta x}{1-x} \dots$ gesetzt wird, so ist

$$S = x \left\{ \frac{a}{z} + \frac{b}{z(z+1)} + \frac{c}{z(z+1)(z+2)} + \frac{d}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{e}{z(z+1)\dots(z+4)} + \dots \right\}$$

Wird für z der folgende Werth $(z+1)$ genommen, so erhält man die Summe der Reihe, vermindert um das erste Glied,

$$S' = S - T = x \left\{ \frac{a}{z+1} + \frac{b}{(z+1)(z+2)} + \frac{c}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{d}{(z+1)\dots(z+4)} + \dots \right\}$$

$$= x \left\{ \frac{ax}{z+1} + \frac{bx}{(z+1)(z+2)} + \frac{cx}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{dx}{(z+1)\dots(z+4)} + \dots \right\}$$

Da aber $\frac{ax}{z+1} = \frac{ax}{z} - \frac{ax}{z(z+1)}$, $\frac{bx}{(z+1)(z+2)} = \frac{bx}{z(z+1)} - \frac{2bx}{z(z+1)(z+2)}$,

$$\frac{cx}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{cx}{z(z+1)(z+2)} - \frac{3cx}{z\dots(z+3)}$$
, $\frac{dx}{(z+1)\dots(z+4)} = \frac{dx}{z\dots(z+3)} - \frac{4dx}{z\dots(z+4)}$...

so wird $(S-T) = x \left\{ \frac{ax}{z} + \frac{(bx-ax)}{z(z+1)} + \frac{(cx-2bx)}{z(z+1)(z+2)} + \frac{(dx-3cx)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right\}$

und wenn man diesen Ausdruck von

$$S = z \left\{ \frac{a}{z} + \frac{b}{z(z+1)} + \frac{c}{z(z+1)(z+2)} + \frac{d}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right\}$$

subtrahirt, so erhält man

$$S-S+T = T = x \left\{ \frac{a(1-x)}{z} + \frac{b(1-x)+ax}{z(z+1)} + \frac{c(1-x)+2bx}{z(z+1)(z+2)} + \frac{d(1-x)+3cx}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right\}$$

$$= x \left\{ \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z(z+1)} + \frac{\gamma}{z(z+1)(z+2)} + \frac{\delta}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \right\}$$

weil $a(1-x) = \alpha$, $b(1-x) + ax = \beta$, $c(1-x) + 2bx = \gamma$, $d(1-x) + 3cx = \delta$...

T ist der gegebene Ausdruck, daher ist die Formel für die Summe richtig.

Wenn $1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^5 + \dots$ definiert durch $T = t \cdot \frac{1}{2z}$ summiert werden soll, wenn $z = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \dots$, so gibt die Vergleichung mit dem allgemeinen Ausdruck: $x = t$, $n = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 0 \dots$ $a = \frac{1}{2(1-t)}$, $b = -\frac{at}{(1-t)} = -\frac{t}{2(1-t)^2}$,

$$c = -\frac{2bt}{1-t} = +\frac{2t^2}{2(1-t)^3}$$
, $d = -\frac{3ct}{1-t} = -\frac{3 \cdot 2t^3}{2(1-t)^4}$, $e = -\frac{4dt}{1-t} = +\frac{4 \cdot 3 \cdot 2t^4}{2(1-t)^5} \dots$

$$S = t \left\{ \frac{1}{2(1-t)z} - \frac{t}{2(1-t)^2z(z+1)} + \frac{2t^2}{2(1-t)^3z(z+1)(z+2)} - \frac{3 \cdot 2t^3}{2(1-t)^4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2t^4}{z(1-t)^5z(z+1)\dots(z+4)} - \dots \right\}$$

Der Werth $t = -1$ gibt die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1}$, welche Leibnitz für die Kreisfläche fand, deren Durchmesser = 1, ohne sie zu summieren.

Die Summe ist:

$$S = \frac{1}{4z} + \frac{1}{2 \cdot 4z(z+1)} + \frac{1}{2 \cdot 2^2z(z+1)(z+2)} + \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2^3z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2^4z(z+1)\dots(z+4)} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2^5z(z+1)\dots(z+5)} + \dots$$

Wendet man Newtons Bezeichnung an, indem man jedes folgende Glied durch das vorhergehende ausdrückt, so wird $S = \frac{1}{4z} + \frac{A}{2z+2} + \frac{2B}{2z+4} + \frac{3C}{2z+6} + \frac{4D}{2z+8} + \frac{5E}{2z+10} + \dots$

Der erste Werth $z = \frac{1}{2}$ gibt die Summe der ganzen Reihe, der zweite $z = 1\frac{1}{2}$ die Summe der Reihe vermindert um das erste Glied, u. s. w.

Stirling berechnet die Summe der ersten 12 Glieder durch Addition, und die Summe aller übrigen Glieder, da $z = 12\frac{1}{2}$, bis 10 Decimalstellen durch $\frac{1}{50} + \frac{A}{27} + \frac{2B}{29} + \frac{3C}{31} + \frac{4D}{33} + \frac{5E}{35} + \dots$

Man kann jedoch mit verhältnissmässig geringer Mühe den Kreis bis auf viele Decimalstellen berechnen, wenn man mehrere Anfangsglieder addirt, und für z eine um so grössere Zahl erhält. Zur Probe habe ich die ersten 62 Glieder der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \dots + \frac{1}{121} - \frac{1}{123}$ bis 84 Stellen berechnet. Die Summe der positiven Glieder ist

$$= + 1, 913 \ 346 \ 896 \ 239 \ 804 \ 901 \ 399 \ 125 \ 113 \ 610 \ 736 \ 651 \ 501 \ 733$$

$$303 \ 370 \ 360 \ 865 \ 652 \ 510 \ 436 \ 624 \ 478 \ 281 \ 472 \ 076 \ 723 \ 714 \dots$$

die der negativen = - 1, 131 980 728 748 451 466 330 588 547 124 987 763 373 930

$$176 \ 106 \ 996 \ 439 \ 157 \ 669 \ 947 \ 647 \ 703 \ 861 \ 388 \ 663 \ 603 \ 111 \dots$$

die Summe der 62 Glieder

$$= + 0, 781 \ 366 \ 167 \ 491 \ 353 \ 435 \ 068 \ 536 \ 566 \ 485 \ 748 \ 888 \ 127 \ 803$$

$$127 \ 263 \ 364 \ 426 \ 494 \ 840 \ 488 \ 976 \ 774 \ 420 \ 083 \ 413 \ 120 \ 603 \dots$$

Für die Summe der übrigen Glieder erhält man, da $z = 62\frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{4z} = \frac{1}{250}$ ist:

$$\frac{1}{250} + \frac{A}{127} + \frac{2B}{129} + \frac{3C}{131} + \frac{4D}{133} + \frac{5E}{135} + \frac{6F}{137} + \dots$$

wovon 140 Glieder für 84 Decimalen zu berechnen sind, deren Summe

$$= + 0, 004 \ 031 \ 995 \ 906 \ 094 \ 874 \ 547 \ 124 \ 279 \ 334 \ 126 \ 832 \ 921 \ 489$$

$$222 \ 580 \ 412 \ 028 \ 748 \ 895 \ 659 \ 100 \ 179 \ 681 \ 488 \ 139 \ 129 \ 062 \dots$$

kommt dazu die Summe der 62 ersten Glieder, so wird

$$\frac{\pi}{4} = 0, 785 \ 398 \ 163 \ 397 \ 448 \ 309 \ 615 \ 660 \ 845 \ 819 \ 875 \ 721 \ 049 \ 292$$

$$349 \ 843 \ 776 \ 455 \ 243 \ 736 \ 148 \ 076 \ 954 \ 101 \ 571 \ 552 \ 249 \ 665 \dots$$

$$\pi = 3, 141 \ 592 \ 653 \ 589 \ 793 \ 238 \ 462 \ 643 \ 383 \ 279 \ 502 \ 884 \ 197 \ 169$$

$$399 \ 375 \ 105 \ 820 \ 974 \ 944 \ 592 \ 307 \ 816 \ 406 \ 286 \ 208 \ 998 \dots$$

Nach mehreren anderen Beispielen kommt Stirling noch einmal auf die Summe der Reihe zurück $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$, deren Ableitung jedoch zu weit führen würde. Wenn eine beliebige Anzahl von Gliedern addirt ist, dann wird das folgende mit A bezeichnet und der dazu gehörige Werth von z bestimmt, dann ist $B = \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{2(z+1)} \cdot \frac{1^2}{(z+1)^2}$, $C = \frac{1}{2}B \cdot \frac{2}{(2z+3)} \cdot \frac{3^2}{(z+2)^2}$,

$D = \frac{1}{2}C \cdot \frac{3}{(2z+5)} \cdot \frac{5^2}{(z+3)^2}$, $E = \frac{1}{2}D \cdot \frac{4}{(2z+7)} \cdot \frac{7^2}{(z+4)^2} \dots$ und die Summe der Reihe vom Gliede A

$$S = \frac{1}{4z} \{ (2z+1)A - (2z+5)B + (2z+9)C - (2z+13)D + (2z+17)E - \dots \}$$

Werden wieder die ersten 62 Glieder addirt, so ist $A = \frac{1}{125}$, $z = 62\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{126} \cdot \frac{2}{127^2}A$,

$$C = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3^2}{128 \cdot 129^2}B, \quad D = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2}{130 \cdot 131^2}C, \quad E = \frac{2 \cdot 4 \cdot 7^2}{132 \cdot 133^2} \dots, \text{ und}$$

$$S = \frac{1}{125} [63A - 65B + 67C - 69D + 71E - \dots]$$

Die Zahlen $A \cdot B \cdot C \cdot D \dots$ nehmen so schnell ab, dass man für 90 Decimalstellen nur 42 Glieder zu berechnen hat.

Eulers Methode Reihen zu summiren unterscheidet sich von der Stirlings wesentlich durch Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung. Sie wurde bekannt gemacht im 8ten Bande der Petersburger Commentarien für 1736, in den Abhandlungen „Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali“ und „Methodus universalis series summandi ulterius promota“.

Ist y irgend eine Funktion von x , und man vermehrt x um dx , so geht y über in $y + dy$, und in $y + 2dy + d^2y$, oder $y + 3dy + 3d^2y + d^3y$, wenn $x + 2dx$, oder $x + 3dx$ statt x gesetzt wird.

Wird x um mdx vermehrt, so geht y über in

$$y + \frac{m}{1} dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^2y + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3y + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4y + \dots$$

Ist m eine so grosse Zahl, dass mdx als eine endliche Grösse angesehen werden kann, so erhält man $y + \frac{m}{1} dy + \frac{m^2}{1 \cdot 2} d^2y + \frac{m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3y + \frac{m^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4y + \dots$, oder wenn $mdx = a$,

$$m = \frac{a}{dx} \text{ gesetzt wird, } y + \frac{a}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \dots$$

Ist y eine solche Funktion von x , dass sie, für $x = 0$, verschwindet, und man setzt $x = -a$, so dass $x + a = 0$, so wird

$$0 = y - \frac{x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} - \dots$$

$$y = \frac{x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \dots$$

Wenn irgend eine Reihe gegeben ist $A + B + C + D \dots + X$, in der A das erste Glied ist, B das zweite, und X dasjenige, dessen Index $= x$, so heisst X das allgemeine Glied dieser Reihe. Bezeichnet S die Summe der Reihe, so heisst S das summatorische Glied; und wenn die Reihe bestimmt ist, so werden X und S durch constante Grössen und x ausgedrückt. Da S die Summe so vieler Glieder bedeutet, als x Einheiten enthält, so erhält man, wenn $x - 1$ statt x gesetzt wird, die vorige Summe, vermindert um das Glied X . Durch diese Substitution geht S über in $S - X$, und die Vergleichung mit der vorigen Formel gibt $y = S$, $a = -1$,

$$S - X = S - \frac{dS}{1 \cdot dx} + \frac{d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \dots$$

$$X = \frac{dS}{1 \cdot dx} - \frac{d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \frac{d^5S}{5! \cdot dx^5} - \dots$$

Das allgemeine Glied ist hier durch das summatorische bestimmt, man kann aber auch das summatorische Glied durch das allgemeine ausdrücken. Setzt man

$$\frac{dS}{dx} = \alpha X + \beta \cdot \frac{dX}{dx} + \gamma \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \delta \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \dots$$

so wird

$$S = \alpha \int X dx + \beta X + \gamma \cdot \frac{dX}{dx} + \delta \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \varepsilon \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \dots$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \alpha \cdot \frac{dX}{dx} + \beta \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \gamma \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \delta \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \varepsilon \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots$$

$$\frac{d^3S}{dx^3} = \alpha \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \beta \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \gamma \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \delta \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots$$

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \alpha \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \beta \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \gamma \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots$$

$$\frac{d^5S}{dx^5} = \alpha \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \beta \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots$$

$$\frac{d^6S}{dx^6} = \alpha \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots$$

Werden diese Werthe in die Gleichung gesetzt:

$$X = \frac{dS}{1 \cdot dx} - \frac{d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \frac{d^5S}{5! \cdot dx^5} - \frac{d^6S}{6! \cdot dx^6} + \dots$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
X &= \alpha X + \beta \cdot \frac{dX}{dx} + \gamma \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \delta \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \eta \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots \\
&\quad - \alpha \cdot \frac{dX}{2 \cdot dx} - \beta \cdot \frac{d^2X}{2 \cdot dx^2} - \gamma \cdot \frac{d^3X}{2 \cdot dx^3} - \delta \cdot \frac{d^4X}{2 \cdot dx^4} - \varepsilon \cdot \frac{d^5X}{2 \cdot dx^5} - \dots \\
&\quad + \alpha \cdot \frac{d^2X}{6 \cdot dx^2} + \beta \cdot \frac{d^3X}{6 \cdot dx^3} + \gamma \cdot \frac{d^4X}{6 \cdot dx^4} + \delta \cdot \frac{d^5X}{6 \cdot dx^5} + \dots \\
&\quad - \alpha \cdot \frac{d^3X}{24 \cdot dx^3} - \beta \cdot \frac{d^4X}{24 \cdot dx^4} - \gamma \cdot \frac{d^5X}{24 \cdot dx^5} - \dots \\
&\quad + \alpha \cdot \frac{d^4X}{120 \cdot dx^4} + \beta \cdot \frac{d^5X}{120 \cdot dx^5} + \dots \\
&\quad - \alpha \cdot \frac{d^5X}{720 \cdot dx^5} - \dots
\end{aligned}$$

$$\alpha = 1, \beta - \frac{\alpha}{2} = 0, \gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} = 0, \delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} = 0,$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} = 0, \eta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} = 0, \text{ woraus}$$

$$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{12} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}, \delta = 0, \varepsilon = -\frac{1}{6!}, \eta = 0.$$

Die Rechnung kann beliebig fortgesetzt werden, und gibt folgende Coefficienten:

$$\begin{aligned}
&+ 1, + \frac{1}{1 \cdot 2}, + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}, 0, -\frac{1}{6!}, 0, + \frac{1}{7! \cdot 6}, 0, -\frac{3}{10!}, 0, + \frac{5}{11! \cdot 6}, 0, -\frac{691}{13! \cdot 210}, \\
&0, + \frac{35}{15! \cdot 2}, 0, -\frac{3617}{17! \cdot 30}, 0, + \frac{2423279}{19! \cdot 1890}, 0, \dots \text{ Die Substitution dieser Coefficienten gibt das summatorische} \\
\text{Glied } S &= \int X dx + \frac{X}{1 \cdot 2} + \frac{dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot dx} - \frac{d^3X}{6! \cdot dx^3} + \frac{d^5X}{7! \cdot 6 \cdot dx^5} - \frac{3 d^7X}{10! \cdot dx^7} + \frac{5 d^9X}{11! \cdot 6 \cdot dx^9} \\
&\quad - \frac{691 d^{11}X}{13! \cdot 210 \cdot dx^{11}} + \frac{35 d^{13}X}{15! \cdot 2 \cdot dx^{13}} - \frac{3617 d^{15}X}{17! \cdot 30 \cdot dx^{15}} + \frac{2423279 d^{17}X}{19! \cdot 1890 \cdot dx^{17}} - \dots
\end{aligned}$$

Dem Integral $\int X dx$ ist eine solche Constante hinzuzufügen, dass für $x = 0$, auch S verschwindet. Nach dieser Formel können Reihen summirt werden, deren Glieder ganze positive Potenzen von x enthalten, deren Differential-Quotienten einmal verschwinden. Soll z. B. die

Potenzen-Reihe der natürlichen Zahlen summirt werden $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \dots + x^n$, so ist

$$\begin{aligned}
X &= x, \int X dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1}, \frac{dX}{dx} = nx, \frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x \dots \frac{d^{2k+1}X}{dx^{2k+1}} \\
&= n(n-1)(n-2) \dots (n-2k)x \\
S &= C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6!} x^{n-3} + \frac{n(n-1) \dots (n-4)}{7! \cdot 6} x^{n-5} \\
&\quad - \frac{3n(n-1) \dots (n-6)}{10!} x^{n-7} + \frac{5n(n-1) \dots (n-8)}{11! \cdot 6} x^{n-9} - \frac{691n(n-1) \dots (n-10)}{13! \cdot 210} x^{n-11} + \dots
\end{aligned}$$

Nimmt man für n die natürlichen Zahlen, so wird $Sx^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$, $Sx^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$, $Sx^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x+1)^2$, $Sx^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$, $Sx^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2 \dots$ Die von x unabhängigen Glieder, die bei den ungeraden Potenzen vorkommen, sind wegzulassen, weil die Constante so beschaffen sein muss, dass für $x = 0$ auch $S = 0$ wird. Wenn in dem allgemeinen Gliede der Reihe andere als ganze positive Exponenten vorkommen, kann die Summe nur durch eine unendliche Anzahl von Gliedern

bestimmt werden. Euler wendet jedoch seine Methode auch auf Reihen dieser Art an, die wenig convergiren. Bei der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{x}$ ist das allgemeine Glied $X = \frac{1}{x}$, $\int X dx = C + \text{Log. } x$, $\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{6}{x^4}$, $\frac{d^4X}{dx^4} = \frac{24}{x^5}$, $\frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{120}{x^6}$, $\frac{d^6X}{dx^6} = \frac{720}{x^7}$... und das summatorische Glied:

$$S = C + \text{Log. } x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \frac{3617}{8160x^{16}} - \dots$$

Die Constante kann hieraus nicht bestimmt werden, weil für $x = 0$ $\frac{1}{2x}$ und alle übrigen Glieder unendlich werden. Wenn man aber eine beliebige Anzahl von Gliedern addirt, z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = 2,928\,968\,253\,968\,253\,968 \dots$, dann $x = 10$ setzt, und

$$S = C + \text{Log. } 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{120000} - \frac{1}{252 \cdot 10^6} + \frac{1}{240 \cdot 10^8} - \frac{1}{132 \cdot 10^{10}} + \frac{691}{3276 \cdot 10^{12}} - \frac{1}{12 \cdot 10^{14}} + \frac{3617}{816 \cdot 10^{16}} - \dots$$

berechnet, so kann die Constante bestimmt werden. Die Summe der positiven Glieder ist

$$= + 0,050\,000\,833\,375\,021\,093 \dots, \text{ der negativen}$$

$$= - 0,000\,833\,337\,302\,345\,709 \dots, \text{ die Reihe}$$

$$= + 0,049\,167\,496\,072\,675\,384 \dots, \text{ dazu}$$

$$\text{Log. nat. } 10 = + 2,302\,585\,092\,994\,045\,684 \dots, \text{ gibt}$$

$$= + 2,928\,968\,253\,968\,253\,968 \dots, \text{ folglich}$$

$$C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,900 \dots$$

Ist die Constante bestimmt, so berechnet man mit Leichtigkeit die Summe von jeder beliebigen Anzahl von Gliedern für so viele Decimalen, als die Constante enthält. Für die Summe von 1000 Gliedern ist $\text{Log. nat. } 1000 = 3 \cdot \text{Log. nat. } 10$, und man braucht von der Reihe nur 3 Glieder $+ \frac{1}{2000} - \frac{1}{12 \cdot 1000^2} + \frac{1}{120 \cdot 1000^4}$, deren Summe

$$= 0,000\,499\,916\,666\,675\,000 \dots$$

$$\text{Log. nat. } 1000 = 6,907\,755\,278\,982\,137\,052 \dots$$

$$C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,900 \dots$$

$$S(1000) = 7,485\,470\,860\,550\,344\,952 \dots$$

Soll die Reihe summirt werden: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$, so ist

$$X = \frac{1}{2x-1}, \int X dx = C + \frac{1}{2} \text{Log. } (2x-1), \frac{dX}{dx} = -\frac{2}{(2x-1)^2}, \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{8}{(2x-1)^3}, \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{24}{(2x-1)^4},$$

$$\frac{d^4X}{dx^4} = \frac{96}{(2x-1)^5}, \frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{384}{(2x-1)^6}, \frac{d^6X}{dx^6} = \frac{1536}{(2x-1)^7} \dots$$

$$S = C + \frac{1}{2} \text{Log. } (2x-1) + \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{6(2x-1)^2} + \frac{1}{15(2x-1)^3} - \frac{8}{63(2x-1)^4} + \frac{8}{15(2x-1)^5} - \frac{128}{33(2x-1)^6} + \frac{256 \cdot 691}{4095(2x-1)^7} - \frac{2048}{3(2x-1)^8} + \frac{1024 \cdot 3617}{255(2x-1)^9} - \dots$$

Hier kann die Constante nicht so einfach, wie bei der vorigen Reihe durch Addition einiger Glieder bestimmt, aber aus der vorigen Constante abgeleitet werden.

Wird die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$ ins Unendliche fortgesetzt, so ist ihre Summe $= C + \frac{1}{2} \text{Log. } \infty$, weil alle übrigen Glieder verschwinden. Wird von dem Doppelten dieser Reihe die einfache harmonische subtrahirt:

$$\begin{aligned}
 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \frac{2}{8} + \dots &= 2C' + \text{Log. } \infty \\
 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \dots &= -(C + \text{Log. } \infty) \\
 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots &= 2C' - C.
 \end{aligned}$$

Die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ ist der natürliche Logarithmus von 2, daher ist

$$\text{Log. nat. } 2 = 2C' - C, \quad C' = \frac{1}{2}(\text{Log. nat. } 2 + C)$$

$$\text{Log. nat. } 2 = 0,693\,147\,180\,559\,945\,309\dots$$

$$C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,900\dots$$

$$\text{Log. nat. } 2 + C = 1,270\,362\,845\,461\,478\,209\dots$$

$$C' = 0,635\,181\,422\,730\,739\,105\dots$$

Für die Summe der reciproken Quadrate $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$ ist

$$X = \frac{1}{x^2}, \quad \int X dx = C - \frac{1}{x}, \quad \frac{dX}{dx} = -\frac{2}{x^3}, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, \quad \frac{d^4X}{dx^4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{x^6},$$

$$\frac{d^k X}{dx^k} = -\frac{8!}{x^9} \dots \frac{d^{(2k+1)} X}{dx^{(2k+1)}} = -\frac{(2k+2)!}{x^{(2k+3)}}$$

$$S = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \frac{5}{66x^{11}} + \frac{691}{2730x^{13}} - \frac{7}{6x^{15}} + \frac{3617}{510x^{17}} - \dots$$

Die Summe der ersten 10 Glieder ist $= 1,549\,767\,731\,166\,540\,690\dots$, dazu kommt, weil $x = 10$:

$$C - \frac{1}{10} + \frac{1}{200} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{30 \cdot 10^5} - \frac{1}{42 \cdot 10^7} + \frac{1}{30 \cdot 10^9} - \frac{5}{66 \cdot 10^{11}} + \frac{691}{273 \cdot 10^{13}} - \frac{7}{6 \cdot 10^{15}} + \frac{3617}{51 \cdot 10^{17}} - \dots$$

Für 18 Stellen reichen diese 10 Glieder aus, deren Summe

$$= -0,095\,166\,335\,681\,685\,742\dots$$

$$+ 1,549\,767\,731\,166\,540\,690\dots$$

$$= C - 0,095\,166\,335\,681\,685\,742\dots$$

$$C = 1,644\,934\,066\,848\,226\,432\dots$$

Diese Constante ist die Summe der ins Unendliche verlängerten Reihe, denn wenn $x = \infty$, bleibt $S = C$, weil alle übrigen Glieder verschwinden. Soll die Summe der reciproken Kuben berechnet

werden $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots$, so ist $X = \frac{1}{x^3}$, $\int X dx = C - \frac{1}{2x^2}$, $\frac{dX}{dx} = -\frac{3}{x^4}$,

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{3 \cdot 4}{x^5}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{x^6}, \quad \frac{d^4X}{dx^4} = -\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{x^7} - \dots$$

$$S = C - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{12x^6} - \frac{1}{12x^8} + \frac{1}{20x^{10}} - \frac{5}{12x^{12}} + \frac{691}{420x^{14}} - \frac{35}{4x^{16}} + \frac{3617}{60x^{18}} - \dots$$

Die Summe der 10 ersten Glieder $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} \dots + \frac{1}{1250} + \frac{1}{10000}$ ist

$$= 1,197\,531\,985\,674\,193\,251\dots$$

$$= C - \frac{1}{200} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{12 \cdot 10^6} - \frac{1}{12 \cdot 10^8} + \frac{1}{20 \cdot 10^{10}} - \frac{5}{12 \cdot 10^{12}} + \frac{691}{42 \cdot 10^{14}} - \frac{35}{4 \cdot 10^{16}} + \frac{3617}{6 \cdot 10^{18}} - \dots$$

Für 18 Decimalstellen sind 10 Glieder der Reihe ausreichend, deren Summe

$$= C - 0,004\,524\,917\,485\,401\,030\dots$$

$$= + 1,197\,531\,985\,674\,193\,251\dots, \text{ folglich}$$

$$C = 1,202\,056\,903\,159\,594\,281\dots$$

Die Constante ist ebenfalls der Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe gleich.

In der zweiten Abhandlung: „Methodus universalis series summandi ulterius promota“, bemerkt Euler, dass die Formel

$$\int X dx + \frac{X}{2} + \frac{dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot dx} - \frac{d^2 X}{6! \cdot dx^3} + \frac{d^3 X}{7! \cdot 6 \cdot dx^5} - \frac{3 d^4 X}{10! \cdot dx^7} + \dots$$

nach der man aus dem allgemeinen Gliede die Summe einer Reihe vom ersten bis zu einem bestimmten Gliede berechnet, auf Reihen nicht anwendbar sei, in denen X keine algebraische Funktion von x ist; auch nicht auf solche, in denen X zwar eine algebraische Funktion von x ist, deren Differentiale aber complicirt sind, und auf schwach convergirende Reihen führen. Nach vielem Nachdenken aber sei es ihm gelungen, aus demselben Princip, mit dessen Hilfe er die genannte Formel gefunden, zwei andere abzuleiten, von denen eine geeignet ist, Reihen vom ersten bis zu einem bestimmten Gliede zu summiren, die zweite aber die Summe von einem bestimmten Gliede bis ins Unendliche gibt. Nimmt man eine Reihe an, deren allgemeines Glied zwar algebraisch auszudrücken ist, in der aber die Indices in einer arithmetrischen Progression

fortschreiten, wie $S = A + B + C + D \dots + X$, in welcher die Indices um b wachsen, und setzt statt x den Index $(x - b)$, so erhält man die vorige Summe, vermindert um das Glied X . Die Substitution von $(x - b)$ gibt:

$$S - X = S - \frac{b \cdot dS}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 \cdot d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{b^3 \cdot d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 \cdot d^4 S}{4! \cdot dx^4} - \frac{b^5 \cdot d^5 S}{5! \cdot dx^5} + \dots$$

$$X = \frac{b \cdot dS}{1 \cdot dx} - \frac{b^2 \cdot d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{b^4 \cdot d^4 S}{4! \cdot dx^4} + \frac{b^5 \cdot d^5 S}{5! \cdot dx^5} - \dots$$

Dieselbe Umformung, wie vorhin, gibt:

$$S = \int \frac{X dx}{b} + \frac{X^2}{2} + \frac{b \cdot dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot dx} - \frac{b^3 \cdot d^3 X}{6! \cdot dx^3} + \frac{b^5 \cdot d^5 X}{7! \cdot 6 \cdot dx^5} - \frac{3 b^7 \cdot d^7 X}{10! \cdot dx^7} + \frac{5 b^9 \cdot d^9 X}{11! \cdot 6 \cdot dx^9}$$

$$- \frac{691 b^{11} \cdot d^{11} X}{13! \cdot 210 \cdot dx^{11}} + \frac{35 b^{13} \cdot d^{13} X}{15! \cdot 2 \cdot dx^{13}} - \frac{3617 b^{15} \cdot d^{15} X}{17! \cdot 30 \cdot dx^{15}} + \dots$$

Die noch hinzuzufügende Constante muss der Art sein, dass für $x = a$, $S = A$ wird, oder $S = 0$, für $x = a - b$.

Setzt man $X = x^n$, so dass die Summe folgender Reihe zu bestimmen ist:

$$a^n + (a + b)^n + (a + 2b)^n + (a + 3b)^n + (a + 4b)^n \dots + x^n$$

so wird $\int X dx = \frac{X^{n+1}}{n+1}$, $\frac{dX}{dx} = nx$, $\frac{d^2 X}{dx^2} = n(n-1)(n-2)x$, $\frac{d^3 X}{dx^3} = n(n-1) \dots (n-4)x \dots$

$$S = \frac{x^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{x^n}{1 \cdot 2} + \frac{nb \cdot x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3 \cdot x^{n-3}}{6!} + \frac{n(n-1) \dots (n-4)b^5 \cdot x^{n-5}}{7! \cdot 6} \dots$$

$$- \frac{a^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{a^n}{1 \cdot 2} - \frac{nb a^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3 \cdot a^{n-3}}{6!} - \frac{n(n-1) \dots (n-4)b^5 \cdot a^{n-5}}{7! \cdot 6} \dots$$

Werden für n die Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots$ genommen, so werden die Summen der Reihen:

$$a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) \dots + x = \frac{x^2 - a^2 + bx + ab}{2b}$$

$$a^2 + (a + b)^2 + (a + 2b)^2 + (a + 3b)^2 \dots + x^2 = \frac{2x^3 - 2a^2 + 3bx^2 + 3a^2b + b^2x - ab^2}{6b}$$

$$a^3 + (a + b)^3 + (a + 2b)^3 + (a + 3b)^3 \dots + x^3 = \frac{x^4 - a^4 + 2bx^3 + 2ba^3 + x^2 - a^2}{4b}$$

$$a^4 + (a + b)^4 + (a + 2b)^4 + (a + 3b)^4 \dots + x^4 = \frac{6x^5 - 6a^5 + 15bx^4 + 15ba^4 + 10b^2x^3 - 10b^2a^3 - b^4x + b^4a}{30b}$$

Um die Summe einer unendlichen Reihe von einem bestimmten Gliede X , dessen Index $= x$, zu berechnen, setzt man $X + Y + Z + U + \dots \infty = S$, und die Substitution von $(x + b)$ statt x gibt:

$$S - X = S + \frac{b \cdot dS}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 \cdot d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 \cdot d^4S}{4! \cdot dx^4} + \frac{b^5 \cdot d^5S}{5! \cdot dx^5} + \dots$$

$$X = -\frac{b \cdot dS}{1 \cdot dx} - \frac{b^2 \cdot d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{b^3 \cdot d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{b^4 \cdot d^4S}{4! \cdot dx^4} - \frac{b^5 \cdot d^5S}{5! \cdot dx^5} - \dots$$

und dieselbe Umformung, wie vorher

$$S = -\int \frac{X \cdot dx}{b} + \frac{X}{1 \cdot 2} - \frac{b \cdot dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot dx} + \frac{b^2 \cdot d^2X}{6! \cdot dx^3} - \frac{b^3 \cdot d^3X}{7! \cdot 6 \cdot dx^5} + \frac{3b^4 \cdot d^4X}{9! \cdot 10 \cdot dx^7} - \dots$$

$$- \frac{5b^5 \cdot d^5X}{11! \cdot 5 \cdot dx^9} + \frac{691b^{11} \cdot d^{11}X}{13! \cdot 210 \cdot dx^{11}} - \frac{35b^{13} \cdot d^{13}X}{15! \cdot 2 \cdot dx^{13}} + \frac{3617b^{15} \cdot d^{15}X}{17! \cdot 30 \cdot dx^{15}} - \dots$$

Dieser Formel ist eine solche Constante zuzusetzen, dass $S = 0$ wird, wenn x unendlich wird; denn wenn X das letzte Glied in der Reihe ist, so muss die Summe der Formel verschwinden, wenn die Reihe eine endliche Summe hat, für welchen Fall die Formel berechnet ist.

Ist z. B. $X = \frac{1}{x^2}$ oder die Reihe zu summiren: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+b)^2} + \frac{1}{(x+2b)^2} + \frac{1}{(x+3b)^2} + \dots$, so ist

$$\int X dx = -\frac{1}{x}, \quad \frac{dX}{dx} = -\frac{2}{x^3}, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{6!}{x^7}, \quad \frac{d^4X}{dx^4} = \frac{8!}{x^9}, \quad \frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{10!}{x^{11}} \dots$$

$$S = \frac{1}{b \cdot x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{b}{6x^3} - \frac{b^2}{30x^5} + \frac{b^3}{42x^7} - \frac{b^4}{30x^9} + \frac{5b^5}{66x^{11}} - \dots$$

Der Ausdruck bedarf keiner Constanten, weil er verschwindet, wenn x unendlich wird.

Diese Formel ist jedoch nicht auf Reihen anwendbar, deren Glieder abwechselnde Zeichen haben. Soll die Reihe summirt werden $A - B + C - D \dots + X - Y = S$, in welcher Y eine ähnliche Funktion von $(x + b)$ ist, als X von x , so ist

$$Y = X + \frac{b \cdot dX}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 \cdot d^4X}{4! \cdot dx^4} + \frac{b^5 \cdot d^5X}{5! \cdot dx^5} + \dots$$

und wenn man in der Formel für S , $(x - 2b)$ statt x schreibt, so wird

$$S - X + Y = S - \frac{2b \cdot dS}{1 \cdot dx} + \frac{4b^2 \cdot d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{8b^3 \cdot d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{16b^4 \cdot d^4S}{4! \cdot dx^4} - \frac{32b^5 \cdot d^5S}{5! \cdot dx^5} + \dots$$

$$- Y + X = \frac{2b \cdot dS}{1 \cdot dx} - \frac{4b^2 \cdot d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{8b^3 \cdot d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{16b^4 \cdot d^4S}{4! \cdot dx^4} + \frac{32b^5 \cdot d^5S}{5! \cdot dx^5} - \dots$$

$$- Y + X = -\frac{b \cdot dX}{1 \cdot dx} - \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{b^3 \cdot d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{b^4 \cdot d^4X}{4! \cdot dx^4} - \frac{b^5 \cdot d^5X}{5! \cdot dx^5} - \dots$$

und wenn man $\frac{dS}{dx} = \alpha \cdot \frac{dX}{dx} + \beta \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \gamma \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \delta \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \epsilon \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \dots$ annimmt, so wird

$$+ \frac{2b \cdot dS}{dx} = \frac{2b\alpha \cdot dX}{dx} + \frac{2b\beta \cdot d^2X}{dx^2} + \frac{2b\gamma \cdot d^3X}{dx^3} + \frac{2b\delta \cdot d^4X}{dx^4} + \frac{2b\epsilon \cdot d^5X}{dx^5} + \dots$$

$$- \frac{2b^2 \cdot d^2S}{dx^2} = -\frac{2b^2\alpha \cdot d^2X}{dx^2} - \frac{2b^2\beta \cdot d^3X}{dx^3} - \frac{2b^2\gamma \cdot d^4X}{dx^4} - \frac{2b^2\delta \cdot d^5X}{dx^5} - \dots$$

$$+ \frac{4b^3 \cdot d^3S}{3 dx^3} = + \frac{4b^3\alpha \cdot d^3X}{3 dx^3} + \frac{4b^3\beta \cdot d^4X}{3 dx^4} + \frac{4b^3\gamma \cdot d^5X}{3 dx^5} + \dots$$

$$- \frac{2b^4 \cdot d^4S}{3 dx^4} = -\frac{2b^4\alpha \cdot d^4X}{3 dx^4} - \frac{2b^4\beta \cdot d^5X}{3 dx^5} - \dots$$

$$+ \frac{4b^5 \cdot d^5S}{15 dx^5} = + \frac{4b^5\alpha \cdot d^5X}{15 dx^5} + \dots$$

$$= -\frac{b \cdot dX}{1 \cdot dx} - \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{b^3 \cdot d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{b^4 \cdot d^4X}{4! \cdot dx^4} - \frac{b^5 \cdot d^5X}{5! \cdot dx^5} - \dots$$

Die Gleichsetzung der homologen Glieder gibt: $2b\alpha = -b$, $2b\beta - 2b^2\alpha = -\frac{b^2}{1 \cdot 2}$,
 $2b\gamma - 2b^2\beta + \frac{1}{3}b^3\alpha = -\frac{b^3}{6}$, $2b\delta - 2b^2\gamma + \frac{1}{3}b^3\beta - \frac{1}{3}b^4\alpha = -\frac{b^4}{24}$,
 $2b\varepsilon - 2b^2\delta + \frac{1}{3}b^3\gamma - \frac{1}{3}b^4\beta + \frac{1}{15}b^5\alpha = -\frac{b^5}{120} \dots$, mithin $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{3b}{4}$,
 $\gamma = -\frac{b^2}{2}$, $\delta = -\frac{3b^3}{16}$, $\varepsilon = -\frac{b^4}{24} \dots$ und wenn man die Rechnung beliebig weiter führt

und die Werthe für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ substituirt:

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{dX}{2dx} - \frac{3b \cdot d^2X}{4dx^2} - \frac{b^2 \cdot d^3X}{2dx^3} - \frac{3b^3 \cdot d^4X}{16dx^4} - \frac{b^4 \cdot d^5X}{24dx^5} - \frac{b^5 \cdot d^6X}{160dx^6} - \frac{b^6 \cdot d^7X}{720dx^7} - \frac{33b^7 \cdot d^8X}{8! \cdot 2dx^8} \\ - \frac{b^8 \cdot d^9X}{8! \cdot dx^9} - \frac{135b^9 \cdot d^{10}X}{10! \cdot 2dx^{10}} - \frac{b^{10} \cdot d^{11}X}{10! \cdot dx^{11}} - \frac{2097b^{11} \cdot d^{12}X}{12! \cdot 2dx^{12}} - \frac{b^{12} \cdot d^{13}X}{12! \cdot dx^{13}} - \frac{38199b^{13} \cdot d^{14}X}{14! \cdot 2dx^{14}} - \frac{b^{14} \cdot d^{15}X}{14! \cdot dx^{15}} \dots$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man:

$$S = C - \frac{X}{2} - \frac{3b \cdot dX}{4dx} - \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{3b^3 \cdot d^3X}{16dx^3} - \frac{b^4 \cdot d^4X}{24dx^4} - \frac{b^5 \cdot d^5X}{160dx^5} - \frac{b^6 \cdot d^6X}{6! \cdot dx^6} - \frac{33b^7 \cdot d^7X}{8! \cdot 2dx^7} - \frac{b^8 \cdot d^8X}{8! \cdot dx^8} \\ - \frac{135b^9 \cdot d^9X}{10! \cdot 2dx^9} - \frac{b^{10} \cdot d^{10}X}{10! \cdot dx^{10}} - \frac{2097b^{11} \cdot d^{11}X}{12! \cdot 2dx^{11}} - \frac{b^{12} \cdot d^{12}X}{12! \cdot dx^{12}} - \frac{38199b^{13} \cdot d^{13}X}{14! \cdot 2dx^{13}} - \frac{b^{14} \cdot d^{14}X}{14! \cdot dx^{14}} \dots$$

= A - B + C - D ... + X - Y. Addirt man dazu

$$Y = X + \frac{b \cdot dX}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 \cdot d^4X}{24 \cdot dx^4} + \frac{b^5 \cdot d^5X}{5! \cdot dx^5} + \frac{b^6 \cdot d^6X}{6! \cdot dx^6} + \frac{b^7 \cdot d^7X}{7! \cdot dx^7} \\ + \frac{b^8 \cdot d^8X}{8! \cdot dx^8} + \frac{b^9 \cdot d^9X}{9! \cdot dx^9} + \frac{b^{10} \cdot d^{10}X}{10! \cdot dx^{10}} + \frac{b^{11} \cdot d^{11}X}{11! \cdot dx^{11}} + \dots$$

so fallen alle geraden Differentialquotienten aus, und es wird

$$S + Y = A - B + C - D + \dots + X \\ = C + \frac{X}{2} + \frac{b \cdot dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{4! \cdot 2dx^3} + \frac{3b^5 \cdot d^5X}{6! \cdot 2dx^5} - \frac{17b^7 \cdot d^7X}{8! \cdot 2dx^7} + \frac{155b^9 \cdot d^9X}{10! \cdot 2dx^9} \\ - \frac{2073b^{11} \cdot d^{11}X}{12! \cdot 2dx^{11}} + \frac{38227b^{13} \cdot d^{13}X}{14! \cdot 2dx^{13}} \dots$$

Die Constante ist so zu bestimmen, dass $S = A$ wird, wenn man $x = a$ annimmt. Nach dieser Formel berechnet man die Summe einer Reihe vom Anfange, bis zu einem bestimmten Gliede X.

Soll dagegen die Summe einer Reihe von einem bestimmten Gliede bis ins Unendliche berechnet werden, wie $S = X - \frac{x}{x+b} + \frac{x}{x+2b} - \frac{x}{x+3b} \dots \infty$, in der Y dieselbe Funktion von $(x+b)$ ist, als X von x, so ist

$$Y = X + \frac{b \cdot dX}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 \cdot d^4X}{4! \cdot dx^4} + \dots$$

Setzt man $(x+2b)$ statt x, so erhält man die Summe der Reihe von Z ab, oder $S - X + Y$.

Für $(x+2b)$ statt x, wird der Ausdruck:

$$S - X + Y = S + \frac{2b \cdot dS}{1 \cdot dx} + \frac{4b^2 \cdot d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{8b^3 \cdot d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{16b^4 \cdot d^4S}{4! \cdot dx^4} + \frac{32b^5 \cdot d^5S}{5! \cdot dx^5} + \dots \\ - X + Y = \frac{2b \cdot dS}{1 \cdot dx} + \frac{4b^2 \cdot d^2S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{8b^3 \cdot d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{16b^4 \cdot d^4S}{4! \cdot dx^4} + \frac{32b^5 \cdot d^5S}{5! \cdot dx^5} + \dots \\ = \frac{b \cdot dX}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 \cdot d^4X}{4! \cdot dx^4} + \frac{b^5 \cdot d^5X}{5! \cdot dx^5} + \dots$$

Um das summatorische Glied durch das allgemeine auszudrücken, nimmt man:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dx} &= \alpha \cdot \frac{dX}{dx} + \beta \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \gamma \cdot \frac{d^3X}{dx^3} + \delta \cdot \frac{d^4X}{dx^4} + \epsilon \cdot \frac{d^5X}{dx^5} + \eta \cdot \frac{d^6X}{dx^6} + \dots \\
 \frac{2b \cdot dS}{dx} &= \frac{2b\alpha \cdot dX}{dx} + \frac{2b\beta \cdot d^2X}{dx^2} + \frac{2b\gamma \cdot d^3X}{dx^3} + \frac{2b\delta \cdot d^4X}{dx^4} + \frac{2b\epsilon \cdot d^5X}{dx^5} + \frac{2b\eta \cdot d^6X}{dx^6} + \dots \\
 \frac{2b^2 \cdot d^2S}{dx^2} &= \quad + \frac{2b^2\alpha \cdot d^2X}{dx^2} + \frac{2b^2\beta \cdot d^3X}{dx^3} + \frac{2b^2\gamma \cdot d^4X}{dx^4} + \frac{2b^2\delta \cdot d^5X}{dx^5} + \frac{2b^2\epsilon \cdot d^6X}{dx^6} + \dots \\
 \frac{4b^3 \cdot d^3S}{3 dx^3} &= \quad + \frac{4b^3\alpha \cdot d^3X}{3 dx^3} + \frac{4b^3\beta \cdot d^4X}{3 dx^4} + \frac{4b^3\gamma \cdot d^5X}{3 dx^5} + \frac{4b^3\delta \cdot d^6X}{3 dx^6} + \dots \\
 \frac{2b \cdot d^4S}{3 dx^4} &= \quad + \frac{2b^4\alpha \cdot d^4X}{3 dx^4} + \frac{2b^4\beta \cdot d^5X}{3 dx^5} + \frac{2b^4\gamma \cdot d^6X}{3 dx^6} + \dots \\
 \frac{4b^5 \cdot d^5S}{15 dx^5} &= \quad + \frac{4b^5\alpha \cdot d^5X}{15 dx^5} + \frac{4b^5\beta \cdot d^6X}{15 dx^6} + \dots \\
 \frac{4b^6 \cdot d^6S}{45 dx^6} &= \quad + \frac{4b^6\alpha \cdot d^6X}{45 dx^6} + \dots
 \end{aligned}$$

Die Summe dieser Glieder ist gleich dem zweiten Ausdruck für

$$-X + Y = \frac{b \cdot dX}{dx} + \frac{b^2 \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 \cdot d^4X}{4! \cdot dx^4} + \frac{b^5 \cdot d^5X}{5! \cdot dx^5} + \frac{b^6 \cdot d^6X}{6! \cdot dx^6} + \dots$$

daher gibt die Vergleichung der homologen Glieder

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{2}, \beta = -\frac{b}{4}, \gamma = 0, \delta = +\frac{b^3}{4! \cdot 2}, \epsilon = 0, \eta = -\frac{3b^5}{6! \cdot 2} \dots \\
 \frac{dS}{dx} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{dX}{dx} - \frac{b \cdot d^2X}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 \cdot d^4X}{4! \cdot 2 dx^4} - \frac{3b^5 \cdot d^6X}{6! \cdot 2 dx^6} + \frac{17b^7 \cdot d^8X}{8! \cdot 2 dx^8} - \dots \\
 S &= C + \frac{X}{2} - \frac{b \cdot dX}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot dx} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{4! \cdot 2 dx^3} - \frac{3b^5 \cdot d^5X}{6! \cdot 2 dx^5} + \frac{17b^7 \cdot d^7X}{8! \cdot 2 dx^7} - \dots
 \end{aligned}$$

Die Constante muss so beschaffen sein, dass S verschwindet, wenn $x = 0$ wird.

Euler setzt die Reihe bis zum 13ten Differentialquotienten fort, und berechnet den Kreis bis 12 Decimalstellen.

Für so wenige Decimalen convergirt die Reihe stark, und man rechnet nach Eulers Methode eben so schnell, als nach Stirlings; dies ändert sich jedoch bei mehr Decimalstellen. Um die Rechnung nach beiden Methoden zu vergleichen, habe ich Eulers Formel bis zum 55sten Differentialquotienten erweitert, und

$$\begin{aligned}
 S = C + \frac{X}{2} &- \frac{b \cdot dX}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot dx} + \frac{b^3 \cdot d^3X}{4! \cdot 2 dx^3} - \frac{3b^5 \cdot d^5X}{6! \cdot 2 dx^5} + \frac{17b^7 \cdot d^7X}{8! \cdot 2 dx^7} - \frac{155b^9 \cdot d^9X}{10! \cdot 2 dx^9} + \frac{2073b^{11} \cdot d^{11}X}{12! \cdot 2 dx^{11}} \\
 &- \frac{38227b^{13} \cdot d^{13}X}{14! \cdot 2 dx^{13}} + \frac{929569b^{15} \cdot d^{15}X}{16! \cdot 2 dx^{15}} - \frac{28820619b^{17} \cdot d^{17}X}{18! \cdot 2 dx^{17}} + \frac{1109652905b^{19} \cdot d^{19}X}{20! \cdot 2 dx^{19}} \\
 &- \frac{51943281731b^{21} \cdot d^{21}X}{22! \cdot 2 dx^{21}} + \frac{2905151042481b^{23} \cdot d^{23}X}{24! \cdot 2 dx^{23}} - \frac{191329672483963b^{25} \cdot d^{25}X}{26! \cdot 2 dx^{25}} \\
 &+ \frac{14655626154768697b^{27} \cdot d^{27}X}{28! \cdot 2 dx^{27}} - \frac{1291885088448017715b^{29} \cdot d^{29}X}{30! \cdot 2 dx^{29}} + \frac{129848163681107301953b^{31} \cdot d^{31}X}{32! \cdot 2 dx^{31}} \\
 &- \frac{14761446733784164001387b^{33} \cdot d^{33}X}{34! \cdot 2 dx^{33}} + \frac{1884515541728818675112649b^{35} \cdot d^{35}X}{36! \cdot 2 dx^{35}} \\
 &- \frac{268463531464165471482681379b^{37} \cdot d^{37}X}{38! \cdot 2 dx^{37}} + \frac{42433626725491925313195071185b^{39} \cdot d^{39}X}{40! \cdot 2 dx^{39}} \\
 &- \frac{7403610342602172448449261632091b^{41} \cdot d^{41}X}{42! \cdot 2 dx^{41}} + \frac{1419269729459188512167209628047961b^{43} \cdot d^{43}X}{44! \cdot dx^{43}} \\
 &- \frac{297670324015849154718455710038555923b^{45} \cdot d^{45}X}{46! \cdot 2 dx^{45}} + \frac{68041658377475993470566379406771713377b^{47} \cdot d^{47}X}{48! \cdot 2 dx^{47}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{16890450341293965779175629389101669683275 b^{49} \cdot d^{49}X}{50! \cdot 2 dx^{49}} \\
& + \frac{4538527836046550440396187741233670828537833 b^{51} \cdot d^{51}X}{52! \cdot 2 dx^{51}} \\
& - \frac{131608787333261622284134709253478826377772547 b^{53} \cdot d^{53}X}{54! \cdot 2 dx^{53}} \\
& + \frac{410710549795313669217134138031963472719424991729 b^{55} \cdot d^{55}X}{56! \cdot 2 dx^{55}} - \dots \text{erhalten.}
\end{aligned}$$

Euler summirt als Zahlenbeispiel die Leibnitzsche Reihe für den Kreis, dessen Durchmesser = 1.

$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots \frac{1}{\infty}$. Für $X = \frac{1}{x}$ erhält man die Reihe

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+2b} - \frac{1}{x+3b} + \frac{1}{x+4b} - \dots \\
\frac{dX}{dx} &= -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{2 \cdot 3}{x^3}, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^4}, \quad \frac{d^4X}{dx^4} = -\frac{7!}{x^5} \dots \\
S &= \frac{1}{2x} + \frac{b}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x^2} - \frac{b^3}{4 \cdot 2 \cdot x^4} + \frac{3b^5}{6 \cdot 2 \cdot x^6} - \frac{17b^7}{8 \cdot 2 \cdot x^8} + \frac{155b^9}{10 \cdot 2 \cdot x^{10}} - \frac{2073b^{11}}{12 \cdot 2 \cdot x^{12}} \\
&+ \frac{38227b^{13}}{14 \cdot 2 \cdot x^{14}} - \frac{929569b^{15}}{16 \cdot 2 \cdot x^{16}} + \frac{28820619b^{17}}{18 \cdot 2 \cdot x^{18}} - \frac{1109652905b^{19}}{20 \cdot 2 \cdot x^{20}} + \frac{51943281731b^{21}}{22 \cdot 2 \cdot x^{22}} - \dots
\end{aligned}$$

Diesem Ausdruck ist keine Constante zuzusetzen, weil alle Glieder verschwinden, wenn x unendlich wird. Für $b = 2$ erhält man die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$, und setzt man $x = 25$, so erhält man die Summe der Reihe von $\frac{1}{25} = \frac{1}{100}$ bis ins Unendliche:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2}{100} + \frac{8}{100^2} - \frac{256}{100^4} + \frac{8 \cdot 4^6}{100^6} - \frac{8 \cdot 17 \cdot 4^8}{100^8} + \frac{128 \cdot 31 \cdot 4^{10}}{100^{10}} - \frac{691 \cdot 256 \cdot 4^{12}}{100^{12}} + \frac{5461 \cdot 2048 \cdot 4^{14}}{100^{14}} \\
&- \frac{929569 \cdot 1024 \cdot 4^{16}}{100^{16}} + \frac{3202291 \cdot 32768 \cdot 4^{18}}{100^{18}} - \frac{221930581 \cdot 65536 \cdot 4^{20}}{100^{20}} + \dots
\end{aligned}$$

Diese Formel gibt die Zahl π nur bis auf 16 Decimalstellen, indem durch das Anwachsen der Coefficienten die Convergenz nach dem 17ten Gliede aufhört.

Die Summe der positiven Glieder ist

$$= + 0, 020 800 032 809 915 445 636 \dots$$

$$\text{der negativen} = - 0, 000 002 560 894 300 092 875 \dots$$

$$\text{der Reihe} = + 0, 020 797 471 915 615 352 761 \dots$$

Addirt man hiezu die 12 ersten Glieder $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots + \frac{1}{21} - \frac{1}{23}$

$$= 0, 764 600 691 481 832 954 440 \dots$$

$$\text{so wird } \frac{\pi}{4} = 0, 785 398 163 397 448 307 201 \dots$$

$$\text{und } \pi = 3, 141 592 653 589 793 228 804 \dots$$

wovon nur 16 Stellen richtig sind. Um mehr Decimalstellen zu erhalten, addirt man die 62 ersten

Glieder $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots + \frac{1}{127} - \frac{1}{129}$, deren Summe

$$= + 0, 781 366 167 491 353 435 068 536 566 485 748 888 127 803 127 263 364 426 494 840 \dots$$

Dann ist $x = 125$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{125} = \frac{8}{1000}$ und man erhält für die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{125} - \frac{1}{127} + \frac{1}{129} - \frac{1}{131} + \dots$$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{4}{1000} + \frac{32}{1000^2} - \frac{8^4}{1000^4} + \frac{8 \cdot 8^6}{1000^6} - \frac{17 \cdot 8 \cdot 8^8}{1000^8} + \frac{31 \cdot 128 \cdot 8^{10}}{1000^{10}} - \frac{691 \cdot 256 \cdot 8^{12}}{1000^{12}} + \frac{5461 \cdot 2048 \cdot 8^{14}}{1000^{14}} \\
& - \frac{929569 \cdot 1024 \cdot 8^{16}}{1000^{16}} + \frac{3202291 \cdot 32768 \cdot 8^{18}}{1000^{18}} - \frac{221930581 \cdot 65536 \cdot 8^{20}}{1000^{20}} + \frac{4722116521 \cdot 524288 \cdot 8^{22}}{1000^{22}} \\
& - \frac{968383680827 \cdot 524288 \cdot 8^{24}}{1000^{24}} + \frac{14717667114151 \cdot 8388608 \cdot 8^{26}}{1000^{26}} - \frac{2093660879252671 \cdot 16777216 \cdot 8^{28}}{1000^{28}} \\
& + \frac{86125672563201181 \cdot 134217828 \cdot 8^{30}}{1000^{30}} - \frac{129848163681107301953 \cdot 33554432 \cdot 8^{32}}{1000^{32}} \\
& + \frac{868320396104950823611 \cdot 2147483648 \cdot 8^{34}}{1000^{34}} - \frac{209390615747646519456961 \cdot 4294967296 \cdot 8^{36}}{1000^{36}} \\
& + \frac{14129659550745551130667441 \cdot 34359738368 \cdot 8^{38}}{1000^{38}} - \frac{8468725345098385062639014237 \cdot 34359738368 \cdot 8^{40}}{1000^{40}} \\
& + \frac{352552873457246307069012458671 \cdot 549755813888 \cdot 8^{42}}{1000^{42}} \\
& - \frac{129024520859926228378837238913451 \cdot 1099511627776 \cdot 8^{44}}{1000^{44}} \\
& + \frac{1294218800689093683411117827763301 \cdot 8796093022208 \cdot 8^{46}}{1000^{46}} \\
& - \frac{22680552792491997823522126468923904459 \cdot 4398046511104 \cdot 8^{48}}{1000^{48}} \\
& + \frac{675618013651758631167025175564066787331 \cdot 140737488355328 \cdot 8^{50}}{1000^{50}} \\
& - \frac{349117525849734649261245210864128525272141 \cdot 281474976710656 \cdot 8^{52}}{1000^{52}} \\
& + \frac{48743995308245045290420262686473633399176761 \cdot 2251799813685248 \cdot 8^{54}}{1000^{54}} \\
& - \frac{58672935685044809888162019718851924674203570247 \cdot 2251799813685248 \cdot 8^{56}}{1000^{56}} + \dots
\end{aligned}$$

Die Summe der positiven Glieder ist = + 0, 004 032 000 002 097 156 260 656 747 837 611 816
769 745 432 315 451 306 901 759 . . .

der negativen = - 0, 000 000 004 096 002 281 713 532 468 503 484 983
847 986 209 735 039 278 156 624 . . .

die Summe der unendlichen Reihe = + 0, 004 031 995 906 094 874 547 124 279 334 126 832
921 489 222 580 412 028 745 134 . . .

Addirt man hiezu die Summe der 62 ersten Glieder, so wird

$$\frac{\pi}{4} = + 0, 785 398 163 397 448 309 615 660 845 819 875 721 \\
049 292 349 843 776 455 239 975 \dots$$

$$\text{folglich: } \pi = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 \\
197 169 399 375 105 820 959 \dots$$

Die bis zum 55sten Differentialquotienten fortgesetzte Eulersche Reihe gibt nur 55 Decimalstellen richtig, und die weitere Ausdehnung derselben würde für mehr Stellen keinen Vortheil gewähren. Stirlings Methode ist daher zur Berechnung vieler Decimalstellen vorzuziehen; besonders die zweite, vorhin nur angedeutete Formel. Wenn man von der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$ $\dots + \frac{1}{21} - \frac{1}{23}$ die ersten 312 Glieder addirt, so wird $z = 312\frac{1}{2}$, $A = \frac{1}{25}$ und man berechnet die Reihe von $\frac{1}{25} - \frac{1}{27} \dots$ bis ins Unendliche durch eine stark convergirende Reihe.

Für die Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen, und deren reciproken Werthe, sind die Eulerschen Formeln vortheilhafter und allgemeiner.

Eulers Methode hat den Vorzug, dass sie die Formel für die Summe aus dem Differentialquotienten $\frac{dS}{dx}$ unmittelbar durch Integration ableitet, während Stirling die Summenformel fertig hinstellt, und ihre Richtigkeit dadurch beweist, dass er sie wieder auf den ursprünglichen Ausdruck zurückführt.

