Ueber die Vorzeichenbestimmmung in Formeln der Determinanten-Theorie. — Anwendung auf die Herleitung des Sylvester'schen und Jacobi'schen Satzes; Verallgemeinerung des letzteren.

1.

Bezeichnet

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{q_1}^{(p_1)},\ \varepsilon_{q_2}^{(p_1)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_1)} \\ \varepsilon_{q_1}^{(p_2)},\ \varepsilon_{q_2}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{q_1}^{(p_n)},\ \varepsilon_{q_2}^{(p_n)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_n)} \end{array}\right.$$

ein System von n^2 beliebigen Grössen und permutirt man in dem Product $\varepsilon_{q_1}^{(p_1)} \cdot \varepsilon_{q_2}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_n}^{(p_n)}$ die unteren Indices $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ auf jede mögliche Weise, während die oberen eine unveränderte Reihenfolge behalten (oder auch umgekehrt die oberen unter Beibehaltung der unteren), so wird die Summe der resultirenden $1.2 \ldots . n = n!$ Producte, jedes mit einem sogleich festzustellenden Vorzeichen versehen, die Determinante jenes Systems genannt; sie heisst überdies n^{ten} Grades, weil jedes ihrer Glieder ein Product aus n Elementen ε ist.

Unter den $n!$ möglichen Permutationen, welche aus n Grössen gebildet werden können, pflegt eine als den übrigen zu Grunde liegend angesehen zu werden; die Reihenfolge, welche die n Permutationselemente in ihr einnehmen, mag rangirt genannt werden; das in der rangirten Reihenfolge eine vom Anfang entferntere Stelle einnehmende Permutationselement, heisse ein höheres, das eine dem Anfang nähere Stelle einnehmende ein niederes Element, als jenes, worauf eben seine Stellung bezogen wird. Derangirt heisst entsprechend jede Complexion, in welcher die Elemente eine von der rangirten abweichende Reihenfolge besitzen; und ins Besondere wird jeder einzelne Fall, in welchem ein niederes Element hinter einem höheren steht, ein Derangement jener Complexion genannt.

Bei der Bildung der Determinante des Systems (1) seien $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ resp. $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$ die rangirten Reihenfolgen, auf welche alle Permutationen der oberen resp. der unteren Indices bezogen werden. Unter der Voraussetzung, dass die oberen Indices in jenen Eingangs erwähnten, die Determinante n^{ten} Grades zusammensetzenden Producten durchweg rangirt bleiben, erhält jedes der Producte zum Vorzeichen $(-1)^K$, wenn K die Anzahl der Derangements in seinen unteren Indices bezeichnet.

Um die Anzahl von Derangements zu bezeichnen, welche sich in einer Complexion vorfinden, mag über diese Complexion die rangirte Reihenfolge gesetzt und vor das Ganze ein δ geschrieben werden; die Determinante des Systems (1) werde durch $\underset{n}{\boxed{\varepsilon_q^p}}$ vertreten. Die Gleichungen:

$$(2) \quad \underset{n}{\boxed{\varepsilon_q^p}} = \sum_{k_1\, k_2 \ldots\, k_n \,=\, Perm.\,(q_1\, q_2 \ldots\, q_n)} (-1)^K \varepsilon_{k_1}^{(p_1)} \varepsilon_{k_2}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{k_n}^{(p_n)} \text{ und } K = \delta\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \ldots\ldots & q_n \\ k_1 & k_2 & \ldots\ldots & k_n \end{pmatrix}$$

enthalten dann die Definition der Determinante n^{ten} Grades.

2.

Wird in der Complexion $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, deren rangirte Reihenfolge $a_1 \ldots a_n$ sein mag, eins der Elemente um eine Stelle vor- oder rückwärts gerückt, so tritt zu den schon vorhandenen Derangements eins hinzu im ersten Falle, wenn das vorstehende Element ein niederes, im zweiten Falle, wenn das hinterstehende Element ein höheres, als das gerückte ist; dagegen fällt unter entgegengesetzten Verhältnissen in beiden Fällen eins von den vorhandenen Derangements fort: unter allen Umständen wird daher durch eine „Rückung" die Anzahl der in $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ enthaltenen Derangements um ± 1 geändert. Jede fernere Rückung bringt dieselbe Wirkung hervor; nach 2 Rückungen ist daher die Anzahl jener Derangements um 0 oder ± 2, nach 3 Rückungen um ± 1 oder ± 3 geändert etc., überhaupt nach einer **ungraden** Anzahl von Rückungen um eine positive oder negative **ungrade** Zahl, nach einer **graden** Anzahl von Rückungen um eine positive oder negative **grade** Zahl. Es ergiebt sich somit der Satz:

> „Wird in einer Complexion die Reihenfolge der Elemente geändert, so ist die dadurch entstandene Differenz in der Anzahl von Derangements modulo 2 congruent der Anzahl von Rückungen, durch welche die geänderte Reihenfolge aus der ursprünglichen hervorgegangen gedacht werden kann."

Nimmt man an, dass die Rückungen alle in einem Sinne d. h. alle entweder vorwärts oder alle rückwärts und überdies in der Reihenfolge vor sich gegangen sind, dass im ersten Falle mit dem vordersten Element begonnen, mit dem nächst vorderen fortgefahren wurde u. s. w., im zweiten Falle dagegen in umgekehrter Aufeinanderfolge: so ist die Anzahl von Rückungen identisch mit der Anzahl der Derangements, welche die in ihrer Reihenfolge geänderte Complexion bezogen auf die ursprüngliche Reihenfolge als rangirte besitzt, und man erhält die geänderte Reihenfolge mit $\alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n$ bezeichnend,

$$\text{(a)}\quad \delta\begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} \text{ mod. } 2,$$ eine

Relation, welche das Mittel liefert, statt irgend einer rangirten Reihenfolge eine andere als solche einzuführen; sie schliesst den Satz in sich:

„Die Anzahl von Derangements einer Complexion bezogen auf eine beliebige andere Complexion als rangirte Reihenfolge ist modulo 2 congruent der Differenz der Anzahlen von Derangements, welche diese beiden Complexionen bezogen auf eine beliebige dritte, als rangirte Reihenfolge geltende, besitzen."

Wenn die Rückungen in der Complexion $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ sich auf die Vertauschung zweier Elemente beschränken, ergiebt sich ein nicht minder wichtiger Satz. Es sei nämlich die Anzahl der zwischen den beiden zu vertauschenden Elementen liegenden Elemente g; um zunächst das erste jener beiden Elemente hinter das zweite zu bringen, sind $g + 1$ Rückungen erforderlich; um dann das zweite an die frühere Stelle des ersteren zu bringen, reichen, da seine Stelle schon frei ist, g Rückungen aus: im Ganzen erfordert daher die Vertauschung der beiden Elemente $2g + 1$ Rückungen, und es gilt, was auch g immer sein mag, d. h. welche gegenseitige Stellung die beiden Elemente auch haben mögen, die Relation

$$\text{(b)}\quad \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_{h-1}\, \alpha_h\, \alpha_{h+1} \cdots \alpha_{i-1}\, \alpha_i\, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_\nu \end{pmatrix}$$
$$- \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \cdots \alpha_{h-1}\, \alpha_i\, \alpha_{h+1} \cdots \alpha_{i-1}\, \alpha_h\, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_\nu \end{pmatrix} \equiv 1 \text{ mod. } 2,$$

d. h.: „Werden in einer Complexion zwei beliebige Elemente vertauscht, so ist die dadurch entstandene Aenderung in der Anzahl der Derangements stets congruent 1 modulo 2."

Wenn in $\delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ Rückungen der Art vorgenommen werden, dass mit jedem unteren Element zugleich das über ihm stehende Element der rangirten Reihenfolge die Rückungen mitmacht, dass also in dem durch solche gleichzeitigen Rückungen der correspondirenden oberen und unteren Elemente hervorgegangenen Ausdruck $\delta\begin{pmatrix} a'_1 \ldots\ldots a'_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix}$ jedes Element sein früher über ihm stehendes Element wieder über sich hat, und wenn die Anzahl dieser gemeinschaftlichen Rückungen mit r bezeichnet wird, so ist

$$\delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} \equiv r \text{ mod. } 2$$

$$\text{und } \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \equiv r \text{ mod. } 2$$

$$\text{folglich: } \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ a'_1 \ldots\ldots a'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} \text{ mod. } 2$$

Es ist aber nach Gleichung (a):

$$\delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ a'_1 \ldots\ldots a'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix} a'_1 \ldots\ldots a'_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \text{ mod. } 2$$

Daher (c) $\delta\begin{pmatrix} a'_1 \ldots\ldots a'_n \\ \alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ mod. 2, vorausgesetzt, dass $a'_1 \ldots\ldots a'_n$ aus $a_1 \ldots\ldots a_n$ durch dieselben Rückungen hervorgegangen ist, wie $\alpha'_1 \ldots\ldots \alpha'_n$ aus $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$:

„Werden in einer Complexion beliebige Umstellungen der Elemente vorgenommen, so ist die Anzahl der Derangements jener Complexion bezogen auf eine beliebige rangirte Reihenfolge modulo 2 congruent der Anzahl von Derangements der Complexion in ihrer neuen Ordnung bezogen auf eine durch dieselben Umstellungen aus der rangirten Reihenfolge hervorgegangene Complexion."

Wenn die Elemente der rangirten Reihenfolge nur durch an ein und dasselbe Symbol gesetzte Indices, welche durch die natürlichen Zahlen von *1* an vertreten werden, von einander unterschieden sind, so mögen diese Indices Rang-Indices genannt werden.

Die Complexion $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ enthält ausser den Derangements, welche 2 beliebige Theile von ihr $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ und $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ in sich besitzen, noch diejenigen, welche durch die in $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ befindlichen, in Bezug auf die Elemente $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ niederen Elemente, oder, was dasselbe ist, durch die in $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ befindlichen in Bezug auf die Elemente $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ höheren Elemente hervorgehen. Die Anzahl dieser letzteren Derangements ändert sich nicht, wenn $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ für sich rangirt gedacht wird; es möge dadurch $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$ in $a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_k}$ übergehen, wobei dann $i_1\, i_2 \ldots\ldots i_k$ die Rang-Indices der Elemente $a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_k}$ sind. Das niedrigste Element in $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k$, a_{i_1} hat dann in der Complexion $\alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n$ $i_1 - 1$ niedere Elemente, das nächst niedrige

a_{i_2} deren $i_2 - 2$ etc., das höchste a_{i_k} deren $i_k - k$. Die Summe der Derangements, welche die Elemente $a_{k+1} \ldots\ldots a_n$ gegen die Elemente $a_1 \ldots\ldots a_k$ besitzen ist daher $\sum\limits_{1\ldots k} i \;-(1+2+\ldots\ldots k) = \sum\limits_{1\ldots k} i - \frac{k(k+1)}{2}$, und man hat die Relation:

$$\text{(d)}\quad \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_1 \ldots\ldots \alpha_k \end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ \alpha_{k+1} \ldots\ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{1\ldots k} i - \frac{k(k+1)}{2}$$

d. h. „Wird eine Complexion beliebiger Elemente der Art in 2 andere getheilt, dass die eine die ersten k jener Elemente in unveränderter Reihenfolge, die andere die übrigen in ebenfalls unveränderter Reihenfolge enthält, so übertrifft die Anzahl der in der vollständigen Complexion enthaltenen Derangements die Summe der in den beiden Theilcomplexionen enthaltenen Derangements um ebensoviel, als die Summe der Rang-Indices jener ersten k Elemente die Summe der natürlichen Zahlen 1 bis k übertrifft."

Mit Hülfe der Rang-Indices lassen sich übrigens die Gleichungen (a), (b), (c), (d) in beträchtlich einfachere Form bringen.

Statt der auf die rangirte Reihenfolge $a_1 \ldots\ldots a_n$ bezogenen Complexion $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$, welche die Elemente $a_1 \ldots\ldots a_n$ sämmtlich und nur in veränderter Reihenfolge enthält, werde die Complexion $a_{i_1}\; a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_n}$ substituirt, wobei $\alpha_1 = a_{i_1}$, $\alpha_2 = a_{i_2}$ etc. ... $\alpha_n = a_{i_n}$ ist und natürlich $i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n$ die Rang-Indices vorstellen. Es ist ohne Weiteres die Identität von $\delta\begin{pmatrix} a_1\; a_2 \ldots\ldots a_n \\ a_{i_1}\; a_{i_2} \ldots\ldots a_{i_n} \end{pmatrix}$ mit $\delta\begin{pmatrix} 1,\; 2 \ldots\ldots n \\ i_1\; i_2 \ldots\ldots i_n \end{pmatrix}$ zu erkennen; und, wenn überdies festgesetzt wird, dass bei Complexionen, deren Derangements auf die Reihenfolge der natürlichen Zahlen bezogen werden, das Ueberschreiben dieser letzteren unterbleibt, ist ebenfalls identisch

$$\delta\begin{pmatrix} a_1 \ldots\ldots a_n \\ a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_n} \end{pmatrix} = \delta\,(\,i_1 \ldots\ldots i_n\,).$$

Die Gleichungen (a), (b), (c), (d) transformiren sich durch die letzte Relation unmittelbar in die folgenden:

$$(a')\quad \delta\begin{pmatrix} i_1 \ldots\ldots i_n \\ i_1' \ldots\ldots i_n' \end{pmatrix} \equiv \delta\,(\,i_1' \ldots\ldots i_n'\,) - \delta\,(\,i_1 \ldots\ldots i_n\,) \bmod 2$$

$$(b')\quad \delta\,(i_1 \ldots i_{g-1}\; i_g\; i_{g+1} \ldots i_{h-1}\; i_h\; i_{h+1} \ldots i_n) - \delta\,(i_1 \ldots i_{g-1}\; i_h\; i_{g+1} \ldots i_{h-1}\; i_g,\, i_{h+1} \ldots i_n) \equiv 1 \bmod 2$$

(c') $\delta\begin{pmatrix} i''_1 \ldots\ldots i''_n \\ i'_1 \ldots\ldots i'_n \end{pmatrix} \equiv \delta\,(i_1 \ldots\ldots i_n) \bmod 2$ (unter der Voraussetzung, dass $i''_1 \ldots\ldots i''_n$ aus $1 \ldots\ldots n$ durch dieselben Rückungen hervorgegangen ist, wie $i'_1 \ldots\ldots i'_n$ aus $i_1 \ldots\ldots i_n$)

$$(d')\quad \delta\,(i_1 \ldots\ldots i_n) - \delta\,(i_1 \ldots\ldots i_k) - \delta\,(i_{k+1} \ldots\ldots i_n) = \sum_{1\ldots k} i - \frac{k(k+1)}{2}$$

3.

Die Gleichungen *(2)*, welche die Definition der zum System *(1)* gehörigen Determinante enthielten, gehen, wenn man $k_1 \ldots\ldots k_n$ durch $q_{i_1} \ldots\ldots q_{i_n}$ ersetzt, unmittelbar über in:

$$(2\text{a}) \quad \left[\varepsilon_q^p\right]_n = \sum_{i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n \,=\, Perm\,(1 \ldots\ldots n)} (-1)^J\, \varepsilon_{q_{i_1}}^{(p_1)}\, \varepsilon_{q_{i_2}}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{i_n}}^{(p_n)}\,; \quad J = \delta\,(i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n)$$

Werden die Factoren des Product's $\varepsilon_{q_{i_1}}^{(p_1)}\, \varepsilon_{q_{i_2}}^{(p_2)} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{i_n}}^{(p_n)}$ beliebig versetzt, so dass die Reihenfolge der obern Indices $p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n$ übergeht in $p_{i''_1}\, p_{i''_2} \ldots\ldots p_{i''_n}$ und die der unteren Indices $q_{i_1}\, q_{i_2} \ldots\ldots q_{i_n}$ in $q_{i'_1}\, q_{i'_2} \ldots\ldots q_{i'_n}$, so ist offenbar $i''_1\, i''_2 \ldots\ldots i''_n$ aus $1 \ldots\ldots n$ durch dieselben Rückungen hervorgegangen, wie $i'_1\, i'_2 \ldots\ldots i'_n$ aus $i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n$ und es erhält daher die Formel *(c')* Geltung $\delta\,(i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n) \equiv \delta \begin{pmatrix} i''_1\, i''_2 \ldots\ldots i''_n \\ i'_1\, i'_2 \ldots\ldots i'_n \end{pmatrix}$ mod 2, welche durch Hinzuziehung der Formel *(a')* übergeht in:

$$\delta\,(i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n) \equiv \delta\,(i'_1\, i'_2 \ldots\ldots i'_n) - \delta\,(i''_1\, i''_2 \ldots\ldots i''_n) \text{ mod } 2.$$

Berücksichtigt man ferner, dass modulo 2 congruente Zahlen als Exponenten für die Basis (-1) stets durch einander ersetzt werden dürfen, und führt endlich $h_1 \ldots\ldots h_n$ statt $i''_1 \ldots\ldots i''_n$, $k_1 \ldots\ldots k_n$ statt $i'_1 \ldots\ldots i'_n$ ein, so nehmen die Gleichungen (2a) die folgende Form an:

$$(3) \quad \left[\varepsilon_q^p\right]_n = \sum_{k_1 \ldots\ldots k_n \,=\, Perm\,(1 \ldots\ldots n)} (-1)^{H-K}\, \varepsilon_{q_{k_1}}^{(p_{h_1})}\, \varepsilon_{q_{k_2}}^{(p_{h_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{k_n}}^{(p_{h_n})}\,; \quad \begin{array}{l} H = \delta\,(h_1 \ldots\ldots h_n) \\ K = \delta\,(k \ldots\ldots k_n) \end{array}$$

Die Gleichungen (3) besitzen vor den Gleichungen (2) den Vorzug grösserer Allgemeinheit; in ihnen lässt sich überdiess die Variabilität der unteren Indices unmittelbar in die der oberen Indices transformiren; man hat:

$$(3\text{a}) \quad \left[\varepsilon_q^p\right]_n = \sum_{h_1 \ldots\ldots h_n \,=\, Perm\,(1 \ldots\ldots n)} (-1)^{H-K}\, \varepsilon_{q_{k_1}}^{(p_{h_1})}\, \varepsilon_{q_{k_2}}^{(p_{h_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{k_n}}^{(p_{h_n})}\,; \quad \begin{array}{l} H = \delta\,(h_1 \ldots\ldots h_n) \\ K = \delta\,(k_1 \ldots\ldots k_n) \end{array}$$

Die Determinante $\left[\varepsilon_q^p\right]_n$, welche zu ihrer Bildung alle n^2 Elemente des Systems (1) in Anspruch nimmt, wird die vollständige Determinante dieses Systems genannt, im Gegensatz zu denjenigen Determinanten von niederem Grade, als der n^{te}, zu deren Bildung nur ein Theil jener n^2 Elemente verwendet wird. Solche unvollständigen Determinanten des Systems (1), bei deren Bildung eine gleiche Anzahl oberer und unterer Indices ausgeschlossen, dagegen alle Elemente, die nicht mit den ausgeschlossenen Indices behaftet sind, verwendet werden, heissen in's Besondere partielle Determinanten des Systems (1) oder der Determinante $\left|\varepsilon_q^p\right|_n$. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die Graderniedrigung, welche eine partielle Determinante erfährt, der Anzahl der ausgeschlossenen Indices einer Art gleich ist.

Für die partiellen Determinanten wird im Folgenden, je nach Bedürfniss, eine zweifache Bezeichnungsart angewendet werden: entweder werden die bei ihrer Bildung auszuschliessenden Indices neben das bisherige Determinanten-Zeichen $\left|\varepsilon_q^p\right|$ in Klammern beigefügt und zugleich der sich unten an $\left|\varepsilon_q^p\right|$ befindende Grad-Exponent um die Anzahl der ausgeschlossenen Indices einer Art vermindert werden; oder an Stelle des Zeichens $\left|\varepsilon_q^p\right|$ wird $\triangle\varepsilon_q^p$ eintreten, neben welches letztere dann die bei der Bildung der betreffenden partiellen Determinante zu verwendenden Indices in Klammern beigefügt und auch unten der erniedrigte Gradexponent gesetzt werden soll.

Es ist daher identisch:

$$\left(\triangle\varepsilon_q^p\right)_{\lambda}\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} = \left|\varepsilon_q^p\right|_{n-(n-\lambda)}\begin{pmatrix} h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n \\ k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_n \end{pmatrix}$$

Es ist selbstverständlich, dass jede in Bezug auf das System (1) partielle Determinante in Bezug auf das aus den betreffenden Elementen bestehende System als vollständig angesehen werden darf; und dass daher die zunächst für vollständige Determinanten geltenden Gleichungen (2) oder (3) auch für partielle Determinanten in Anwendung gebracht werden dürfen.

Unter der Voraussetzung, dass $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ und $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ zwar beliebige, aber nach der Reihenfolge der natürlichen Zahlen geordnete Zahlen aus der Reihe $1 \ldots\ldots n$ sind, und dass $h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_n$ und $k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_n$ diejenigen, ebenfalls in natürlicher Ordnung befindlichen Zahlen sind, welche nach Wegnahme von $h_1 \ldots\ldots h_\lambda$ resp. $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ von der Reihe $1 \ldots\ldots n$ übrig bleiben, gelten daher die Gleichungen:

$$\left(\triangle\varepsilon_q^p\right)_{\lambda}\begin{pmatrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{pmatrix} = \sum_{l_1 \ldots l_\lambda = Perm.(k_1 \ldots k_\lambda)} (-1)^{L'}\, \varepsilon_{q_{l_1}}^{(p_{h_1})}\, \varepsilon_{q_{l_2}}^{(p_{h_2})} \ldots\ldots \varepsilon_{q_{l_\lambda}}^{(p_{h_\lambda})}\,;\quad L' = \delta(l_1 \ldots\ldots l_\lambda)$$

und $$\underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix} = \underset{n-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\begin{pmatrix} h_{\lambda+1} \dots h_n \\ k_{\lambda+1} \dots k_n \end{pmatrix} = \sum_{l_{\lambda+1} \dots l_n = Perm.(k_{\lambda+1} \dots k_n)} (-1)^{L''} \varepsilon_{q l_{\lambda+1}}^{(p h_{\lambda+1})} \dots \varepsilon_{q l_n}^{(p h_n)};$$

$$L'' = \delta(l_{\lambda+1} \dots \dots l_n)$$

Folglich $$\underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\begin{pmatrix} h_1 \dots \dots h_\lambda \\ k_1 \dots \dots k_\lambda \end{pmatrix} \underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\begin{pmatrix} h_1 \dots \dots h_\lambda \\ k_1 \dots \dots k_\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{l_1 \dots l_\lambda = Perm.(k_1 \dots k_\lambda);\; l_{\lambda+1} \dots l_n = Perm.(k_{\lambda+1} \dots k_n)} (-1)^{L'+L''} \varepsilon_{q l_1}^{(p h_1)} \dots \varepsilon_{q l_\lambda}^{(p h_\lambda)} \varepsilon_{q l_{\lambda+1}}^{(p h_{\lambda+1})} \dots \varepsilon_{q l_n}^{(p h_n)}$$

Es ist aber nach Formel (δ') der vorigen Nummer:

$$\underbrace{\delta(h_1 \dots h_n)}_{H} = \underbrace{\delta(h_1 \dots h_\lambda) + \delta(h_{\lambda+1} \dots h_n) + \sum_{1 \dots \lambda} h - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}_{\sum\limits_{1 \dots \lambda} h - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}$$

$$\underbrace{\delta(l_1 \dots l_n)}_{L} = \underbrace{\delta(l_1 \dots l_\lambda) + \delta(l_{\lambda+1} \dots l_n) + \sum_{1 \dots \lambda} l - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}_{L' + L'' + \sum\limits_{1 \dots \lambda} k - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}}$$, wobei H für $\delta(h_1 \dots h_n)$,

L für $\delta(l_1 \dots \dots l_n)$ gesetzt, $\sum k$ für $\sum l$ eingetreten ist, weil $l_1 \dots l_\lambda$ stets die Zahlen $k_1 \dots k_\lambda$ in veränderter Reihenfolge bedeuten, endlich $\delta(h_1 \dots h_\lambda)$ sowohl wie $\delta(h_{\lambda+1} \dots h_n)$ fortgelassen sind, weil $h_1 \dots h_\lambda$ und $h_{\lambda+1} \dots h_n$ nach der obigen Voraussetzung keine Derangements enthalten sollen. Es folgt daher: $L' + L'' = L - H + \sum\limits_{1 \dots \lambda} h - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k$; multiplicirt man daher obige Gleichung mit $(-1)^{\sum\limits_{1 \dots \lambda} h - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k}$, wobei dieser Factor wegen seiner Unabhängigkeit von den Summationsvariabeln l auch unter das Summenzeichen gebracht werden darf, so resultirt:

$$(-1)^{\sum\limits_{1 \dots \lambda} h - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix} \underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{l_1 \dots l_\lambda = Perm.(k_1 \dots k_\lambda);\; l_{\lambda+1} \dots l_n = Perm.(k_{\lambda+1} \dots k_n)} (-1)^{H-L} \varepsilon_{q l_1}^{(p h_1)} \dots \varepsilon_{q l_\lambda}^{(p h_\lambda)} \varepsilon_{q l_{\lambda+1}}^{(p h_{\lambda+1})} \dots \varepsilon_{q l_n}^{(p h_n)}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung würde identisch sein mit dem in Gleichung (3) für $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ aufgestellten Ausdruck, sobald $l_1 \dots\dots l_n$ die Werthe aller Permutationen von $1 \dots\dots n$ annehmen könnte. Die Bildung aller Permutationen von n Elementen kann aber in der Weise vorgenommen werden, dass sämmtliche Combinationen λ^{ter} Klasse aus diesen Elementen gebildet werden, jede dieser Combinationen auf jede nur mögliche Weise permutirt und endlich jede Permutation der Reihe nach durch jede mögliche Permutation der übrigen $(n-\lambda)$ Elemente ergänzt wird. Macht man daher in der letzten Gleichung die Indices $k_1 \dots\dots k_\lambda$ zu neuen Summationsvariabeln und bildet beiderseits die Summen unter der Bedingung, dass $k_1 \dots\dots k_\lambda$ alle möglichen Combinationen λ^{ter} Klasse von $1 \dots\dots n$ bedeuten soll, so geht die rechte Seite über in $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ und man erhält, wenn noch $C_\lambda\ (1 \dots. n)$ zur Abkürzung für die Combinationen λ^{ter} Klasse der Zahlen $1 \dots\dots n$ eingeführt wird:

$$\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right) = \sum_{(k_1 \dots\, k_\lambda) = C_\lambda\ (1 \dots\, n)} (-1)^{\sum\limits_{1 \dots \lambda} h - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k} \underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right) \begin{pmatrix} h_1 \dots\dots h_\lambda \\ k_1 \dots\dots k_\lambda \end{pmatrix} \underset{n-\lambda}{D}\left(\varepsilon_q^p\right) \begin{pmatrix} h_1 \dots\dots h_\lambda \\ k_1 \dots\dots k_\lambda \end{pmatrix}$$

als Ausdruck für die Determinante n^{ten} Grades. Es ist dieser Ausdruck noch einer geringen Verallgemeinerung fähig, die sich auf Wegschaffung der beschränkenden Bedingung, dass $h_1 \dots. h_\lambda,\ h_{\lambda+1} \dots\dots h_n,\ k_1 \dots\dots k_\lambda,\ k_{\lambda+1} \dots\dots k_n$ sich in natürlicher Reihenfolge befinden sollen, bezieht.

Ist in $\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} a_1 \dots\dots a_\lambda \\ b_1 \dots\dots b_\lambda \end{pmatrix}$ sowohl $a_1 \dots\dots a_\lambda$ als auch $b_1 \dots\dots b_\lambda$ nach der Folge der natürlichen Zahlen geordnet, dagegen in $\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} a'_1 \dots\dots a'_\lambda \\ b'_1 \dots\dots b'_\lambda \end{pmatrix}$ $a'_1 \dots a'_\lambda$ die Indices $a_1 \dots\dots a_\lambda$, $b'_1 \dots. b'_\lambda$ die Indices $b_1 \dots\dots b_\lambda$ in beliebig veränderter Reihenfolge, so hat erstere Determinante zu ihrem Ausdruck nach Gleichung (3)

$$\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} a_1 \dots\dots a_\lambda \\ b_1 \dots\dots b_\lambda \end{pmatrix} = \sum_{\beta_1 \dots.\, \beta_\lambda = \text{Perm.}\ (b_1 \dots.\, b_\lambda)} (-1)^{A-B}\, \varepsilon_{\beta_1}^{(p_{a'_1})}\, \varepsilon_{\beta_2}^{(p_{a'_2})} \dots\dots \varepsilon_{\beta_\lambda}^{(p_{a'_\lambda})}\ ; \quad \begin{aligned} A &= \delta\,(a'_1 \dots\dots a'_\lambda) \\ B &= \delta\,(\beta_1 \dots\dots \beta_n) \end{aligned}$$

und die letztere Determinante nach Gleichung (2a)

$$\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\begin{pmatrix} a'_1 \dots\dots a'_\lambda \\ b'_1 \dots\dots b'_\lambda \end{pmatrix} = \sum_{\beta_1 \dots \beta_\lambda = \text{Perm.}\ (b'_1 \dots b'_\lambda) = \text{Perm.}\ (b_1 \dots b_\lambda)} (-1)^{B'}\, \varepsilon_{\beta_1}^{(p_{a'_1})}\, \varepsilon_{\beta_2}^{(p_{a'_2})} \dots\dots \varepsilon_{\beta_\lambda}^{(p_{a'_\lambda})}\ ; \ B' = \delta\begin{pmatrix} b'_1 \dots. b'_\lambda \\ \beta_1 \dots. \beta \end{pmatrix}$$

Es ist aber nach Gleichung (a'):

$$\begin{aligned}\delta\begin{pmatrix} b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda \\ \beta_1 \ldots\ldots \beta_\lambda \end{pmatrix} &\equiv \delta(\beta_1 \ldots\ldots \beta_\lambda) - \delta(b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda) \bmod. 2. \\ B' \quad &\;\; B - \delta(b'_1 \ldots\ldots b'_\lambda)\end{aligned}$$

Multiplicirt man daher die für $\Delta^{p}_{\varepsilon q}\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}$ aufgestellte Gleichung beiderseits mit $(-1)^{\delta(a'_1 \ldots a'_\lambda) - \delta(b'_1 \ldots b'_\lambda)}$, so wird ihre rechte Seite identisch mit dem für $\Delta^{p}_{\varepsilon q}\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_\lambda \\ b_1 \ldots b_\lambda \end{pmatrix}$ hingestellten Ausdruck. Es ergiebt sich daraus die Regel:

„Soll eine Determinante bezogen auf ein System, dessen Elemente ihre Indices nach der Folge der natürlichen Zahlen geordnet haben, statt dessen auf ein System, das zwar aus denselben Elementen aber mit beliebig anders geordneten Indices besteht, bezogen werden: so ist diese letztere noch mit demjenigen Vorzeichen zu versehen, welches den Derangements der Aufeinanderfolge der Indices in der neuen Ordnung entspricht".

Der Vereinfachung wegen mag dieses Vorzeichen, welches aus der Umstellung der Indices der Systems-Elemente hervorgeht, dadurch vertreten werden, dass diese Indices, statt wie bisher in einfacher Klammer, in doppelter Klammer neben das Determinantenzeichen Δ gesetzt werden; man hat daher unter der obigen Voraussetzung, dass $a_1 \ldots a_\lambda$ die nach der Folge der natürlichen Zahlen geordneten Indices $a'_1 \ldots a'_\lambda$ und $b_1 \ldots b_\lambda$ die in derselben Weise geordneten Indices $b'_1 \ldots b'_\lambda$ bedeuten:

$$\underset{\lambda}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\left(\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}\right) = (-1)^{\delta(a'_1 \ldots a'_\lambda) - \delta(b'_1 \ldots b'_\lambda)} \; \underset{\lambda}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}$$

und auch $\underset{\lambda}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\left(\begin{pmatrix} a'_1 \ldots a'_\lambda \\ b'_1 \ldots b'_\lambda \end{pmatrix}\right) = \underset{\lambda}{\Delta^{p}_{\varepsilon q}}\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_\lambda \\ b_1 \ldots b_\lambda \end{pmatrix}$, zwei Gleichungen, die die Doppelklammern in zweifacher Weise auffassen lassen: entweder vertreten sie das den Derangements der von ihnen eingeschlossenen Indices entsprechende Vorzeichen; oder sie zeigen an, dass diese Indices in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen zu denken sind. Die Ausdehnung der Anwendung solcher Doppelklammern auf die zweite Bezeichnungsart partieller Determinanten, die in Beifügung der bei der Determinantenbildung auszuschliessenden Indices neben das Zeichen D bestand, ergiebt sich aus dem Vorstehenden von selbst: entweder werden auch hier die zurückbleibenden Indices durch die Doppelklammern in die Folge der natürlichen Zahlen gebracht; oder es wird durch sie, wenn die Art der Untersuchung es vortheilhafter erscheinen lässt, keine bestimmte Reihenfolge der Indices vorauszusetzen, das den etwaigen Derangements der zurückbleibenden Indices entsprechende Vorzeichen vertreten. Je nach Umständen wird es geeignet sein, die Doppelklammern in der einen oder der anderen Bedeutung aufzufassen: für solche Fälle, in denen aus gegebenen Elementen resp. Indices die Determinante zu bilden ist, würde die erstere Bedeutung vorzuziehen sein; für allgemeine Untersuchungen dagegen, deren Natur es widerspricht, sich an andere als durch sie selbst bedingte Voraussetzungen zu binden — die letztere.

Indem den partiellen Determinanten, als deren Productensumme $\underset{n}{D}\left[\varepsilon_q^p\right]$ oben dargestellt wird, solche Doppelklammern beigegeben werden, streift die dortige Gleichung die Voraussetzung ab, dass die Indices $h_1 \dots h_\lambda$, $h_{\lambda+1} \dots h_n$, $k_1 \dots k_\lambda$, $k_{\lambda+1} \dots k_n$ je nach der Reihenfolge der natürlichen Zahlen geordnet zu denken sind, und man erhält nunmehr als allgemeinen Ausdruck der vollständigen Determinante n^{ten} Grades die Gleichung:

$$(4)\quad \underset{n}{D}\left[\varepsilon_q^p\right] = \sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)} (-1)^{\sum h - \sum k}\, \underset{\lambda}{\Delta}\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\!\binom{h_1 \dots h_\lambda}{k_1 \dots k_\lambda}\!\right) \underset{n-\lambda}{D}\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\!\binom{h_1 \dots h_\lambda}{k_1 \dots k_\lambda}\!\right)$$

Die entsprechende Gleichung:

$$(4\text{a})\quad \underset{n}{D}\left[\varepsilon_q^p\right] = \sum_{h_1 \dots h_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)} (-1)^{\sum h - \sum k}\, \underset{\lambda}{\Delta}\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\!\binom{h_1 \dots h_\lambda}{k_1 \dots k_\lambda}\!\right) \underset{n-\lambda}{D}\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\!\binom{h_1 \dots h_\lambda}{k_1 \dots k_\lambda}\!\right),$$

in welcher die oberen Indices als variabel, die unteren als constant auftreten, bedarf keiner besonderen Herleitung: sie folgt unmittelbar aus der Gleichberechtigung der oberen und unteren Indices in $\underset{n}{D}\left[\varepsilon_q^p\right]$.

Wird das in Gleichung (*4*) ausgedrückte Princip der Zerlegung einer Determinante in ein Aggregat von Producten je 2er partiellen Determinanten auf $\underset{n-\lambda}{D}\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\!\binom{h_1 \dots h_\lambda}{k_1 \dots k_\lambda}\!\right)$ von Neuem angewandt, indem diese partielle Determinante für eine vollständige in Bezug auf das System der mit den zurückbleibenden Indices behafteten Elemente angesehen wird, so erhält man, wenn μ eine beliebige zwischen λ und n liegende Zahl bezeichnet:

$$\underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) =$$

$$\sum_{k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1 \ldots\ldots n;\ excl.\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda)} (-1)^{\sum\limits_{\lambda+1..\mu} h' - \sum\limits_{\lambda+1..\mu} k'} \underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_\mu \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\mu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_\mu \\ k_1 \ldots\ldots k_\lambda & k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_\mu \end{matrix}\right)\right),$$

wobei $\sum\limits_{\lambda+1 \ldots\ldots \mu} h' - \sum\limits_{\lambda+1 \ldots\ldots \mu} k'$ die Summen der Rang-Indices vorstellen, welche $p_{h_{\lambda+1}} \ldots\ldots p_{h_\mu}$ resp. $q_{k_{\lambda+1}} \ldots\ldots q_{k_\mu}$ in $p'_1 \ldots\ldots p'_{n-\lambda}$ resp. $q'_1 \ldots\ldots q'_{n-\lambda}$ besitzen, falls die beiden letzten Complexionen die nach Ausschluss von $p_{h_1} \ldots\ldots p_{h_\lambda}$ resp. $q_{k_1} \ldots\ldots q_{k_\lambda}$ aus $p_1 \ldots\ldots p_n$ resp. $q_1 \ldots\ldots q_n$ zurückbleibenden Indices-Reihen darstellen.

Um das Vorzeichen hierin durch $h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_\mu$ resp. $k_{\lambda+1} \ldots\ldots k_\mu$ selbst, d. h. durch die auf die ursprünglichen Indices-Reihen $p_1 \ldots p_n$ resp. $q_1 \ldots q_n$ bezogenen Rang-Indices auszudrücken, ist es nöthig, noch einmal auf die Gleichung (d') am Schlusse von Nummer *2* zurückzugehen.

Es war dort $\sum\limits_{1 \ldots\ldots k} i - \frac{k\,(k+1)}{2} = \delta\,(i_1 \ldots i_n) - \delta\,(i_1 \ldots i_k) - \delta\,(i_{k+1} \ldots i_n)$.

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung von sämmtlichen Derangements der Complexion $i_1 \ldots\ldots i_n$ die Derangements der Theilcomplexionen $i_1 \ldots\ldots i_k$ und $i_{k+1} \ldots\ldots i_n$ in Abzug kommen, so stellt sie die Anzahl von Derangements vor, welche die Indices-Gruppe $i_{k+1} \ldots\ldots i_n$ gegen die Indices-Gruppe $i_1 \ldots\ldots i_k$ (ohne Rücksicht auf irgend welche in jeder einzelnen Gruppe für sich bestehenden Derangements) besitzt. Solche Derangements von Indices-Gruppen gegeneinander mögen für den Augenblick durch Vorsetzung des Buchstabens d vor die nebeneinander gestellten und durch verticale Striche von einander getrennten Gruppen bezeichnet werden; so dass man also die identische Relation hat:

$$d\,(a_1 \ldots\ldots a_\alpha \mid a_{\alpha+1} \ldots\ldots a_\beta \mid a_{\beta+1} \ldots\ldots a_\gamma \mid \ldots\ldots \mid a_{\mu+1} \ldots\ldots a_\nu) =$$
$$\delta\,(a_1 \ldots a_\nu) - \delta(a_1 \ldots c_\alpha) - \delta(a_{\alpha+1} \ldots a_\beta) - \delta(a_{\beta+1} \ldots a_\gamma) \ldots - \delta(a_{\mu+1} \ldots a_\nu)$$

Mit Benutzung dieser Bezeichnung hat man daher:

$$\sum_{\lambda+1 \ldots\ldots \mu} h' - \frac{(\mu-\lambda)\,(\mu-\lambda+1)}{2} = d\,(h_{\lambda+1} \ldots\ldots h_\mu \mid h_{\mu+1} \ldots\ldots h_n)$$

Es ist aber:

$$d\,(h_1 .. h_\lambda \mid h_{\lambda+1} .. h_\mu \mid h_{\mu+1} .. h_n) = d\,(h_1 .. h_\lambda \mid h_{\lambda+1} .. h_n) + d\,(h_{\lambda+1} .. h_\mu \mid h_{\mu+1} .. h_n)$$
$$\left\{ \sum_{1 \ldots \lambda} h - \frac{\lambda\,(\lambda+1)}{2} + d\,(h_{\lambda+1} .. h_\mu \mid h_{\mu+1} .. h_n) \right)$$

und auch:

$$d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu \mid h_{\mu+1}..h_n) = \begin{cases} d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + d(h_1..h_\mu \mid h_{\mu+1}..h_n) \\ d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + \sum\limits_{1\ldots\mu} h - \frac{\mu(\mu+1)}{2} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen 3 Gleichungen $d(h_1\ldots h_\lambda \mid h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \mid h_{\mu+1}\ldots h_n)$ und $d(h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \mid h_{\mu+1}\ldots h_n)$, so resultirt:

$$\sum_{\lambda+1\ldots\mu} h' = \begin{cases} d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + \sum\limits_{1\ldots\mu} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda+1)}{2} \\ d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) + \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} h - \lambda(\mu-\lambda) \end{cases}$$

In derselben Weise

$$\sum_{\lambda+1\ldots\mu} k' = d(k_1\ldots\ldots k_\lambda \mid k_{\lambda+1}\ldots\ldots k_\mu) + \sum_{\lambda+1\ldots\mu} k - \lambda(\mu-\lambda)$$

Folglich

$$\sum_{\lambda+1\ldots\mu} h' - \sum_{\lambda+1\ldots\mu} k' = \sum_{\lambda+1\ldots\mu} h - \sum_{\lambda+1\ldots\mu} k + d(h_1..h_\lambda \mid h_{\lambda+1}..h_\mu) - d(k_1..k_\lambda \mid k_{\lambda+1}..k_\mu)$$

Setzt man nun fest, dass die Anbringung verticaler Trennungsstriche zwischen einzelnen Gruppen derjenigen Indices, welche sich neben dem Determinantenzeichen der einen oder der anderen Art befinden, der betreffenden Determinante das den Derangements der Gruppen gegeneinander entsprechende Vorzeichen beilege, also dass man die identischen Relationen hat:

$$\Delta_{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} a_1..a_\alpha \\ b_1..b_\alpha \end{matrix}\middle|\begin{matrix} a_{\alpha+1}..a_\beta \\ b_{\alpha+1}..b_\beta \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} a_{\mu+1}..a_\nu \\ b_{\mu+1}..b_\nu \end{matrix}\right)\right) =$$
$$(-1)^{d(a_1..a_\alpha \mid a_{\alpha+1}..a_\beta \mid \cdots \mid a_{\mu+1}..a_\nu) - d(b_1..b_\alpha \mid b_{\alpha+1}..b_\beta \mid \cdots \mid b_{\mu+1}..b_\nu)} \Delta_{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} a_1..a_\nu \\ b_1..b_\nu \end{matrix}\right)\right)$$

und

$$D_{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} a_1..a_\alpha \\ b_1..b_\alpha \end{matrix}\middle|\begin{matrix} a_{\alpha+1}..a_\beta \\ b_{\alpha+1}..b_\beta \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} a_{\mu+1}..a_\nu \\ b_{\mu+1}..b_\nu \end{matrix}\right)\right) =$$
$$(-1)^{d(a_1..a_\alpha \mid a_{\alpha+1}..a_\beta \mid \cdots \mid a_{\mu+1}..a_\nu) - d(b_1..b_\alpha \mid b_{\alpha+1}..b_\beta \mid \cdots \mid b_{\mu+1}..b_\nu)} D_{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix} a_1..a_\nu \\ b_1..b_\nu \end{matrix}\right)\right),$$

so geht die obige Gleichung für $\underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right)$ über in:

$$\underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda \\ k_1..k_\lambda \end{matrix}\right)\right) =$$
$$\sum_{k_{\lambda+1}\ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1\ldots n;\ \text{excl. } k_1\ldots k_\lambda)} (-1)^{\sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} h - \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} k} \underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_{\lambda+1}..k_\mu \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\mu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda \\ k_1..k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\lambda+1}..h_\mu \\ k_{\lambda+1}..k_\mu \end{matrix}\right)\right)$$

In derselben Weise folgt, wenn ν eine zwischen μ und n, ϱ eine zwischen ν und n befindliche, sonst beliebige Zahl bezeichnet:

$$\underset{n-\mu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c|c} h_1 \ldots h_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_1 \ldots k_\lambda & k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{array}\right)\right) =$$

$$\sum_{k_{\mu+1} \ldots k_\nu = C_{\nu-\mu}\,(1 \ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\mu)} (-1)^{\sum\limits_{\mu+1 \ldots \nu} h - \sum\limits_{\mu+1 \ldots \nu} k}\ \underset{\nu-\mu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\mu+1} \ldots h_\nu \\ k_{\mu+1} \ldots k_\nu \end{array}\right)\right) \underset{n-\nu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c|c|c} h_1 \ldots h_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots h_\mu & h_{\mu+1} \ldots h_\nu \\ k_1 \ldots k_\lambda & k_{\lambda+1} \ldots k_\mu & k_{\mu+1} \ldots k_\nu \end{array}\right)\right)$$

$$\underset{n-\nu}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c|c|c} h_1 \ldots h_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots h_\mu & h_{\mu+1} \ldots h_\nu \\ k_1 \ldots k_\lambda & k_{\lambda+1} \ldots k_\mu & k_{\mu+1} \ldots k_\nu \end{array}\right)\right) =$$

$$\sum_{k_{\nu+1} \ldots k_\varrho = C_{\varrho-\nu}\,(1 \ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\nu)} (-1)^{\sum\limits_{\nu+1 \ldots \varrho} h - \sum\limits_{\nu+1 \ldots \varrho} k}\ \underset{\varrho-\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\nu+1} \ldots h_\varrho \\ k_{\nu+1} \ldots k_\varrho \end{array}\right)\right) \underset{n-\varrho}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c|c|c|c} h_1 \ldots h_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots h_\mu & h_{\mu+1} \ldots h_\nu & h_{\nu+1} \ldots h_\varrho \\ k_1 \ldots k_\lambda & k_{\lambda+1} \ldots k_\mu & k_{\mu+1} \ldots k_\nu & k_{\nu+1} \ldots k_\varrho \end{array}\right)\right)$$

. . . .

Substituirt man in Gleichung (4) der Reihe nach die eben für die partiellen Determinanten $(n-\lambda)^{\text{ten}}$, $(n-\mu)^{\text{ten}}$, $(n-\nu)^{\text{ten}}$ u. s. w. Grades hergestellten Ausdrücke und berücksichtigt zugleich, dass

$$\sum_{1 \ldots \lambda} h + \sum_{\lambda+1 \ldots \mu} h + \sum_{\mu+1 \ldots \nu} h + \ldots\ldots + \sum_{\sigma+1 \ldots \tau} h = \sum_{1 \ldots \tau} h$$

und desgleichen

$$\sum_{1 \ldots \lambda} k + \sum_{\lambda+1 \ldots \mu} k + \sum_{\mu+1 \ldots \nu} k + \ldots\ldots + \sum_{\sigma+1 \ldots \tau} k = \sum_{1 \ldots \tau} k$$

ist, so resultirt:

$$(5)\quad \underset{n}{D_{\varepsilon_q^p}} =$$

$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1 \ldots n);\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}\,(1 \ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\lambda);\ \ldots;\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}\,(1 \ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\sigma)} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \tau} h - \sum\limits_{1 \ldots \tau} k}\ \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{array}\right)\right) \underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{array}\right)\right) \cdots \underset{\tau-\sigma}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{array}\right)\right) \underset{n-\tau}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\left(\begin{array}{c|c|c} h_1 \ldots h_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots h_\mu & \ldots h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_1 \ldots k_\lambda & k_{\lambda+1} \ldots k_\mu & \ldots k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{array}\right)\right)$$

Die entsprechende Gleichung für variable obere und constante untere Indices erhält man unmittelbar, wenn statt der k's die h's als Summationsvariabeln angesehen werden; ihre besondere Aufführung mag daher unterbleiben.

Nimmt man an, dass $\lambda = \mu - \lambda = \nu - \mu =$ etc. .... $= \tau - \sigma = n - \tau = 1$ ist, so gehen sämmtliche partiellen Determinanten in Elemente des Systems über. Das Vorzeichen jedes Product's wird

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots n-1} h - \sum\limits_{1\ldots n-1} k + d(h_1 \mid h_2 \mid h_3 \mid \ldots\ldots \mid h_{n-1}) - d(k_1 \mid k_2 \mid k_3 \mid \ldots\ldots \mid k_{n-1})} =$$

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots n-1} h - \sum\limits_{1\ldots n-1} k + \delta(h_1\, h_2 \ldots\ldots h_{n-1}) - \delta(k_1\, k_2 \ldots\ldots k_{n-1})};$$

da aber $\delta(h_n)$, sowohl wie $\delta(k_n) = 0$ ist, so folgt

$$\sum_{1\ldots n-1} h + \delta(h_1\, h_2 \ldots\ldots h_{n-1}) = \delta(h_1 \ldots\ldots h_n) - \frac{(n-1)\,n}{2}$$

und auch
$$\sum_{1\ldots n-1} k + \delta(k_1\, k_2 \ldots\ldots k_{n-1}) = \delta(k_1 \ldots\ldots k_n) - \frac{(n-1)\,n}{2}$$

und daher das Vorzeichen jedes Productes $(-1)^{\delta(h_1\, h_2 \ldots\ldots h_n) - \delta(k_1\, k_2 \ldots\ldots k_n)}$: es wird die Uebereinstimmung dieses speciellen Falles der Gleichung (5) mit der obigen, zur Definition der Determinante n^{ten} Grades dienenden Gleichung (3) hierdurch ersichtlich. Die in den Gleichungen (4) und (5) ausgedrückte Eigenschaft der Determinante n^{ten} Grades ist augenscheinlich keine andere als diejenige, welche das bekannte Theorem von der Zerlegbarkeit einer Determinante in ein Aggregat von Producten partieller Determinanten ausspricht. Abgesehen von der ihnen eigenthümlichen und für jeden bestimmten Fall einer Determinanten-Entwickelung vortheilhaften Art der Vorzeichenbestimmung der einzelnen Terme, eigenen diese Gleichungen sich durch die streng algebraische Form, in welcher sie die Determinanten allgemein darstellen, zur vortheilhaften Grundlage für allgemeine Untersuchungen auf dem Determinanten-Gebiet: in's Besondere werden durch sie die meist umständlichen Feststellungen der Vorzeichen bei Transformationen ganz und gar entbehrlich erscheinen.

4.

Wenn in dem System der n^2 Elemente, auf welches sich die Determinante $\underset{n}{D}\left(\varepsilon_q^p\right)$ bezieht, die Indices p_{λ_1} und p_{λ_2} mit einander vertauscht werden, so ändert sich auf der rechten Seite der Gleichung (4) Nichts bis auf das durch die Doppelklammer bei $\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k\lambda \end{matrix}\right)\right)$ vertretene Vorzeichen, welches in das entgegengesetzte übergehen muss, weil $\delta(h_1\, h_2\, h_3 \ldots\ldots h\lambda)$ und $\delta(h_2\, h_1\, h_3 \ldots\ldots h\lambda)$ um eine Einheit verschieden sind. Aus demselben Grunde geht in Gleichung (4a) das Vorzeichen, welches durch die bei $\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon_q^p\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h\lambda \\ k_1 \ldots\ldots k\lambda \end{matrix}\right)\right)$ befindliche Doppelklammer vertreten wird, in das entgegengesetzte über, wenn im System der

Elemente die Indices q_{k_1} mit q_{k_2} vertauscht werden. Da jedem bestimmten oberen Index im System der Elemente eine sogenannte Horizontal-Reihe, jedem bestimmten unteren Index eine sogenannte Vertical-Reihe des Systems entspricht, so folgt aus Obigem der bekannte Satz, dass die Vertauschung zweier parallelen Reihen im System der Elemente einen Zeichenwechsel der Determinante nach sich zieht. Aus diesem Satze pflegt die für die Determinanten-Theorie überaus wichtige Eigenschaft der Determinanten, durch Gleichheit zweier oberen oder unteren Indices im System der Elemente zu verschwinden, als Folgerung entnommen zu werden: da die Vertauschung jener Indices einerseits, wie die eines jeden andern Paars, das Vorzeichen der Determinante ändern muss, andererseits aber auch als die Vertauschung von Gleichem keine Werthänderung der Determinante hervorrufen kann. Die Gleichung (4) oder Gleichung (5) lässt diese Eigenschaft der Determinanten auch direkt, von dem ersterwähnten Satze unabhängig, erkennen, indem für den Fall, dass $\lambda = 2, h_1 = h_2 = h$ gesetzt wird, die partielle Determinante 2ten Grades $\underset{2}{\Delta}\varepsilon^{p}_{q}\left(\binom{h\;h}{k_1 k_2}\right) = \pm\left(\varepsilon^{(p\,h)}_{q\,k_1}\varepsilon^{(p\,h)}_{q\,k_2} - \varepsilon^{(p\,h)}_{q\,k_2}\varepsilon^{(p\,h)}_{q\,k_1}\right)$ identisch und unabhängig von den Werthen der Summationsvariabeln k_1, k_2 Null wird.

Wenn man in Gleichung (4) eine bestimmte Combination der unteren Indices, etwa $i_1 \ldots\ldots i_\lambda$, herausgreift, so wird, weil jede Combination unter dem Summenzeichen rechter Hand nur einmal vorkommen darf, $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i}\underset{n-\lambda}{D}\varepsilon^{p}_{q}\left(\binom{h_1 \ldots h_\lambda}{i_1 \ldots i_\lambda}\right)$ das Resultat der Zusammenziehung aller derjenigen Factoren vorstellen müssen, mit denen sich $\underset{\lambda}{\Delta}\varepsilon^{p}_{q}\left(\binom{h_1 \ldots\ldots h_\lambda}{i_1 \ldots\ldots i_\lambda}\right)$ in der vollständigen Determinante $\underset{n}{D}\varepsilon^{p}_{q}$ multiplicirt vorfindet, d. h. es ist $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i}\underset{n-\lambda}{D}\varepsilon^{p}_{q}\left(\binom{h_1 \ldots\ldots h_\lambda}{i_1 \ldots\ldots i_\lambda}\right)$ der Coefficient von $\underset{\lambda}{\Delta}\varepsilon^{p}_{q}\left(\binom{h_1 \ldots\ldots h_\lambda}{i_1 \ldots\ldots i_\lambda}\right)$ und umgekehrt $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i}\underset{\lambda}{\Delta}\varepsilon^{p}_{q}\left(\binom{h_1 \ldots\ldots h_\lambda}{i_1 \ldots\ldots i_\lambda}\right)$ der Coefficient von $\underset{n-\lambda}{D}\varepsilon^{p}_{q}\left(\binom{h_1 \ldots\ldots h_\lambda}{i_1 \ldots\ldots i_\lambda}\right)$ in $\underset{n}{D}\varepsilon^{p}_{q}$. Dieser Zusammenhang zwischen den erwähnten partiellen Determinanten λ^{ten} und $(n-\lambda)^{\text{ten}}$ Grades rechtfertigt nachträglich die 2te Bezeichnungsart der letzteren, welche in Beifügung der bei ihrer Bildung auszuschliessenden Indices neben das Determinantenzeichen $D\varepsilon^{p}_{q}$ bestand; es schliesst sich übrigens diese Bezeichnungsart an die für die Coefficienten der partiellen Determinanten 1sten Grades d. h. der Elemente selbst sonst übliche Bezeichnungsweise an.

Die Auffassung der Determinante $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} i} \underset{n-\lambda}{\left|\varepsilon^p_q\right|}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right)$ als Coefficient von $\underset{\lambda}{\Delta}(\varepsilon^p_q)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_\lambda \\ i_1 \ldots\ldots i_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right)$ in $\underset{n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}$ führt zu der für die Specialisirung allgemeiner Theoreme nicht unwichtigen Erkenntniss, dass die Determinanten 0^{ten} Grades der Einheit gleich sind. Denn es ist dieser Auffassung zu Folge $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots n} h - \sum\limits_{1\ldots n} i} \underset{n-n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_n \\ i_1 \ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right)$ der Coefficient von $\underset{n}{\Delta}(\varepsilon^p_q)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots\ldots h_n \\ i_1 \ldots\ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right)$ in $\underset{n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}$; da aber dabei sowohl $\sum\limits_{1\ldots n} h$ wie $\sum\limits_{1\ldots n} i = 1 + 2 + \ldots\ldots + n$, ausserdem $\underset{n}{\Delta}(\varepsilon^p_q)\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_n \\ i_1 \ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{n}{\Delta}(\varepsilon^p_q)\left(\begin{matrix} 1 \ldots n \\ 1 \ldots n \end{matrix}\right) = \underset{n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}$ und endlich $\underset{n-n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_n \\ i_1 \ldots i_n \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{0}{\Delta}(\varepsilon^p_q)$ ist, so folgt, dass $\underset{0}{\Delta}(\varepsilon^p_q)$ der Coefficient von $\underset{n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}$ in $\underset{n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}$ ist, d. h. die Determinante 0^{ten} Grades ist gleich 1.

Den unmittelbaren Inhalt der Gleichungen (4) und (5) bildete das Theorem von der Zerlegbarkeit einer vollständigen (oder als vollständig angesehenen) Determinante in ein Aggregat von Producten aus partiellen Determinanten, wobei die linke Seite dieser Gleichungen d. i. die vollständige Determinante als durch die rechter Hand befindlichen Summenausdrücke dargestellt angesehen wurde. Die umgekehrte Auffassung, welche den Summenausdruck als zuerst bestehend gelten lässt und aus ihm die vollständige Determinante entstanden ansieht, führt unmittelbar zur Umkehrung jenes Theorems, d. h. zur Zusammensetzung von Determinanten niederen Grades zu einer Determinante höheren Grades. In Bezug auf die, rechter Hand nur 2 Factoren in jedem Term enthaltende Gleichung (4) würde diese Umkehrung lauten:

> „Wenn in dem Product zweier beliebigen Determinanten λ^{ten} und ν^{ten} Grades, die unteren Indices der Art als variabel angesehen werden, dass die der ersteren Determinante nach und nach alle Combinationen λ^{ter} Klasse aus den zu beiden Determinanten gehörenden $\lambda + \nu$ unteren Indices, die der anderen Determinante die jedesmal von diesen $\lambda + \nu$ noch übrig bleibenden ν Indices vorstellen; und wenn jedes der so entstehenden Produkte mit einem Vorzeichen $(-1)^{\sum h - \sum k}$ versehen wird (wobei $\sum h$ sowohl wie $\sum k$ die Summe der Rang-Indices bedeutet, welche sämmtlichen oberen resp. unteren Indices einer der beiden partiellen Determinanten in den rangirten Reihenfolgen der Gesammtheit aller oberen resp. unteren $\lambda + \nu$ Indices zukommen): so ist die Summe aller

dieser Producte diejenige Determinante $(\lambda+\nu)^{\text{ten}}$ Grades, welche in ihren oberen wie unteren Indices sämmtliche $\lambda+\nu$ Indices jener beiden Determinanten umfasst."

Das hierdurch ausgesprochene Zusammensetzungs-Princip für Determinanten drückt sich aus in der Gleichung:

$$(6)\quad \sum_{k_1..k_\lambda = C_\lambda(i_1..i_\lambda\, i'_1..i'_\nu);\; k_1..k_\lambda\, k'_1..k'_\nu = i_1..i_\lambda\, i'_1..i'_\nu} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda \\ k_1..k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1..h'_\nu \\ k'_1..k'_\nu \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{\lambda+\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1..h_\lambda\; h'_1..h'_\nu \\ i_1..i_\lambda\; i'_1..i'_\nu \end{matrix}\right)\!\!\right)$$

Da, wenn hier einer der Indices $h_1\ldots\ldots h_\lambda$ einem der Indices $h'_1\ldots\ldots h'_\nu$ gleich ist, die rechte Seite eine Determinante mit 2 gleichen oberen Indices wird, also verschwindet, und da die Gleichung (4) als in der Gleichung (6) enthalten anzusehen ist, weil letztere in erstere übergeht, sobald $\nu = n-\lambda$, $h'_1..h'_\nu = h_{\lambda+1}..h_n$, $h_1..h_n = 1..n$ und $i_1..i_\lambda\; i'_1..i'_\nu = 1..n$ gesetzt wird: so folgt auch, dass, wenn in Gleichung (4) einer der oberen Indices, welche zur partiellen Determinante λ^{ten} Grades gehören, durch einen der übrigen $n-\lambda$ Indices ersetzt wird, der Summenausdruck rechter Hand verschwindet. Es führt dies zur Gleichung:

$$\sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots n)}^{h'_1\ldots h'_\lambda = C_\lambda(1\ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1\ldots.h'_\lambda \\ k_1\ldots.k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1\ldots.h_\lambda \\ k_1\ldots.k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{n}{D_{\varepsilon_q^p}},$$

deren Richtigkeit einleuchtet, sobald man berücksichtigt, dass alle Combinationen λ^{ter} Klasse der Zahlen $1..n$, mit Ausnahme von $h_1..h_\lambda$, mindestens eine von $h_1..h_\lambda$ verschiedene und natürlich zu den übrigen $(n-\lambda)$ Indices gehörende Zahl unter sich haben; dass also von allen Termen, die durch die Variabilität von $h'_1\ldots\ldots h'_\lambda$ auf der linken Seite entstehen, nur der eine, der Combination $h_1\ldots\ldots h_\lambda$ entsprechende Term zurückbleibt, und dass dieser Term eben zu Folge der Gleichung (4) gleich $\underset{n}{D_{\varepsilon_q^p}}$ ist.

Werden den Summationsvariabeln $h'_1\ldots.h'_\lambda$ einige von den Werthen $1\ldots.n$ unzugänglich gemacht, so ist zu unterscheiden, ob unter den unzugänglichen Werthen sich einer oder mehrere von den Indices $h_1\ldots\ldots h_\lambda$ vorfinden, oder ob sie sämmtlich zu den Indices $h_{\lambda+1}\ldots\ldots h_n$ gehören. Im letzteren Falle vermag noch immer eine der Combinationen C_λ gleich $h_1\ldots\ldots h_\lambda$ zu werden und es bleibt der Werth jenes Aggregats $\underset{n}{D_{\varepsilon_q^p}}$; im ersteren Falle ist $h_1\ldots\ldots h_\lambda$ nicht mehr von C_λ zu erreichen, und jenes Aggregat wird gleich Null. Die beiden folgenden Gleichungen drücken das Vorstehende aus:

$$(7)\quad \sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots n)}^{h'_1\ldots h'_\lambda = C_\lambda(h_1\ldots h_\lambda,\ h_{\lambda+\mu+1}\ldots h_n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\ \Delta_{\lambda}^{(\varepsilon_q^p)}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1\ldots\ldots h'_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) D_{n-\lambda}^{(\varepsilon_q^p)}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1\ldots\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) = D_{n}^{(\varepsilon_q^p)}$$

und

$$(7\text{a})\quad \sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots n)}^{h'_1\ldots h'_\lambda = C_\lambda(h_1\ldots h_{\lambda-\varrho},\ h_{\lambda+\mu+1}\ldots h_n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\ \Delta_{\lambda}^{(\varepsilon_q^p)}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1\ldots\ldots h'_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) D_{n-\lambda}^{(\varepsilon_q^p)}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1\ldots\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) = D_{n}^{(\varepsilon_q^p)}$$

Die Gleichung (7) ist streng genommen identisch mit Gleichung (4), und Gleichung (7a) identisch Null. Ihre Bedeutung erhalten diese Gleichungen erst durch den Umstand, dass jede unter dem auf $h'_1\ldots\ldots h'_\lambda$ bezüglichen Summenzeichen sich befindende Function von $h'_1\ldots\ldots h'_\lambda$ aufgefasst werden darf als dieselbe Function der constanten Indices $h_1\ldots\ldots h_\lambda$ und als solche natürlich vor das Summenzeichen treten darf; und dass umgekehrt jede vor dem Summenzeichen befindliche Function von $h_1\ldots\ldots h_\lambda$ als Function der variablen Indices $h'_1\ldots\ldots h'_\lambda$ unter das Summenzeichen gebracht werden darf: ein Umstand, welcher zu weiteren Transformationen als Mittel dient.

5.

Die Allgemeinheit der folgenden Entwickelung wird dadurch nicht beschränkt werden, dass in den Gleichungen (7) und (7a), welche ihr zum Ausgangspunkt dienen sollen, statt der constanten oberen Rang-Indices $h_1\ldots\ldots h_\lambda$, $h_{\lambda+\mu+1}\ldots\ldots h_n$ die Rang-Indices $1\ldots\ldots\lambda$, $\lambda+\mu+1\ldots\ldots n$ substituirt werden, da die dem System der Elemente zu Grunde gelegten rangirten Reihenfolgen $p_1\ldots\ldots p_n$ resp. $q_1\ldots\ldots q_n$ durch Willkürlichkeit ihrer Anordnung unter $p_1\ldots\ldots p_\lambda$, $p_{\lambda+\mu+1}\ldots\ldots p_n$ ganz beliebige von den zum System gehörenden oberen Indices zu verstehen gestatten. Durch diese Substitution geht in jenen Gleichungen $\sum\limits_{1\ldots\lambda} h$ in $\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$ über, was der Kürze wegen mit L bezeichnet werden mag. Die Gleichung (7) erhält dadurch die einfachere Gestalt:

$$\sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots\ldots n)}^{h'_1\ldots h'_\lambda = C_\lambda(1\ldots\lambda,\ \lambda+\mu+1\ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k}\ \Delta_{\lambda}^{(\varepsilon_q^p)}\left(\!\!\left(\begin{matrix} h'_1\ldots\ldots h'_\lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) D_{n-\lambda}^{(\varepsilon_q^p)}\left(\!\!\left(\begin{matrix} 1\ldots\ldots \lambda \\ k_1\ldots\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) = D_{n}^{(\varepsilon_q^p)}$$

Erweitert man diese mit dem Factor $\underset{n-(\mu+\lambda)}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} h''_1 \dots h''_{n-(\mu+\lambda)} \\ n+1, \dots 2n-(\mu+\lambda) \end{pmatrix}\right)$ und giebt der Complexion $h''_1 \dots h''_{n-(\mu+\lambda)}$ die Bedeutung, die Indices $1 \dots \lambda$ zu $1 \dots \lambda$, $\lambda+\mu+1 \dots n$ zu ergänzen, während $n+1 \dots 2n-(\mu+\lambda)$ die Rang-Indices beliebiger, neu hinzugetretener unterer Indices $q_{n+1} \dots q_{2n-(\mu+\lambda)}$ in der rangirten Reihenfolge $q_1 \dots q_{2n-(\mu+\lambda)}$ vertreten: so darf dieser Factor nach der am Schlusse der vorigen Nummer gemachten Bemerkung linker Hand unter das auf h' bezügliche Summenzeichen treten, indem dann $h''_1 \dots h''_{n-(\mu+\lambda)}$ dieselbe Bedeutung in Bezug auf $h'_1 \dots h'_\lambda$ annimmt, wie es sie vor dem Summenzeichen in Bezug auf $1 \dots \lambda$ besitzt, d. h. in dem dort jene Indices die Ergänzung von $h'_1 \dots h'_\lambda$ zu $1 \dots \lambda$, $\lambda+\mu+1 \dots n$ vorstellen. Isolirt man in der so erweiterten Gleichung die von den Summationsvariabeln h' abhängigen und die davon nicht abhängigen Terme, so erhält man:

$$\sum_{k_1 \dots k_\lambda = C_\lambda(1 \dots n)} (-1)^{L-\sum_{1..\lambda} k} \underset{n-\lambda}{D\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} 1..\lambda \\ k_1..k_\lambda \end{pmatrix}\right) \sum_{h'_1..h'_\lambda = C_\lambda(1..\lambda,\ \lambda+\mu+1..n);\ h'_1..h'_\lambda h''_1..h''_{n-(\lambda+\mu)} = 1..\lambda,\ \lambda+\mu+1..n} \underset{\lambda}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} h'_1..h'_\lambda \\ k_1..k_\lambda \end{pmatrix}\right) \underset{n-(\lambda+\mu)}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} h''_1..h''_{n-(\lambda+\mu)} \\ n+1,..2n-(\lambda+\mu) \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \Delta\varepsilon_q^p \begin{pmatrix} \lambda+\mu+1 \dots\dots n \\ n+1, \dots 2n-(\lambda+\mu) \end{pmatrix} \underset{n}{D\varepsilon_q^p}$$

Bezeichnet man mit $\sum_{1 \dots \lambda} k'$ die Summe der Rang-Indices, welche $p_{k'_1} \dots p_{k'_\lambda}$ in $p_1 \dots p_\lambda\ p_{\lambda+\mu+1} \dots p_n$ als rangirter Reihenfolge einnehmen; mit $\sum_{1 \dots \lambda} k'$ die Summe der Rang-Indices, welche $q_{k_1} \dots q_{k_\lambda}$ in $q_{k_1} \dots q_{k_\lambda}\ q_{n+\lambda} \dots q_{2n-(\lambda+\mu)}$ als rangirter Reihenfolge einnehmen: so ist leicht ersichtlich, dass der Factor $(-1)^{\sum_{1 \dots \lambda} h' - \sum_{1 \dots \lambda} k'}$ unter das Summenzeichen in letzter Gleichung gebracht werden darf, ohne dieselbe zu ändern, da $\sum_{1 \dots \lambda} k'$ an und für sich gleich $\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$ ist und $\sum_{1 \dots \lambda} h'$ vor das auf h' bezügliche Summenzeichen gebracht, diesen selben Werth annehmen würde. Wird nach Hinzufügung des erwähnten Factors die Summation in Bezug auf h' vermittelst der Formel (6) ausgeführt, also

$$\sum_{h'_1..h'_\lambda = C_\lambda(1..\lambda,\ \lambda+\mu+1..n);\ h'_1..h'_\lambda h''_1..h''_{n-(\lambda+\mu)} = 1..\lambda,\ \lambda+\mu+1..n} (-1)^{\sum_{1...\lambda} k' - \sum_{1...\lambda} k'} \underset{\lambda}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} h'_1..h'_\lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix}\right) \underset{n-(\lambda+\mu)}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} h''_1 \dots h''_{n-(\lambda+\mu)} \\ n+1 \dots 2n-(\lambda+\mu) \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underset{n-\mu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\begin{pmatrix} 1 \dots \lambda,\ \lambda+\mu+1 \dots\dots n \\ k_1 \dots k_\lambda,\ n+1 \dots 2n-(\lambda+\mu) \end{pmatrix}\right)$$

gesetzt und noch $n-(\lambda+\mu)$ durch ν ersetzt, so geht jene Gleichung über in:

$$(8)\quad \sum_{k_1 \dots . k_\lambda = C_\lambda\,(1 \dots . n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k} \; \mathop{\triangle}\limits_{\lambda+\nu}^{\varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \dots . \lambda,\; n-\nu+1 \dots . n \\ k_1 \,..\, k_\lambda,\; n+1 \dots . n+\nu \end{pmatrix}\!\!\right) \mathop{\boxed{\varepsilon_q^p}}\limits_{n-\lambda} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \dots .. \lambda \\ k_1 \dots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) = \mathop{\triangle}\limits_{\nu-\lambda}^{\varepsilon_q^p} \begin{pmatrix} n-\nu+1 \dots . n \\ n+1 \dots \dots . n \end{pmatrix} \mathop{\boxed{\varepsilon_q^p}}\limits_{n}$$

Durch dieselben Umformungen, wie Gleichung (8) aus Gleichung (7), geht aus Gleichung (7 a) die folgende Gleichung hervor:

$$(8a)\quad \sum_{k_1 \dots . k_\lambda = C_\lambda\,(1 \dots . n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \dots \lambda} k} \; \mathop{\triangle}\limits_{\lambda+\nu}^{\varepsilon_q^p} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \,..\, \lambda-\varrho,\; \lambda+1 \,..\, \lambda+\varrho,\; n-\nu+1 \,..\, n \\ k_1 \dots\dots\dots\dots\dots . k_\lambda,\; n+1 \,..\, n+\nu \end{pmatrix}\!\!\right) \mathop{\boxed{\varepsilon_q^p}}\limits_{n-\lambda} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \dots \lambda \\ k_1 \,..\, k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) = 0;$$

sie kann übrigens auch als unmittelbare Folge der Gleichung (8) selbst angesehen werden, indem unter der Voraussetzung $p_{\lambda-\varrho+1} \dots\dots p_\lambda = p_{\lambda+1} \dots\dots p_{\lambda+\varrho}$ die linke Seite der Gleichung (8) in die linke Seite der Gleichung (8a) übergeht, während die rechte Seite jener Gleichung durch die erwähnte Voraussetzung in $\mathop{\boxed{\varepsilon_q^p}}\limits_{n}$ eine Determinante mit ϱ Paaren gleicher oberer Indices zum Factor erhält und daher verschwindet.

Die Gleichungen (8) und (8a) sind, abgesehen von der in diesen Blättern angewandten Bezeichnungsart der Determinanten, so wie von der Darstellungsweise der Vorzeichen, dieselben, welche in Reiss' Beiträgen zur Theorie der Determinanten pag. 9 Gl. (4) und Gl. (5) als specielle Fälle aus dem dort behandelten allgemeinen Erweiterungs-Princip der Determinanten abgeleitet werden. Die ihnen dort zu Grunde liegende allgemeinere Gleichung, welche rechter Hand ein Aggregat von Producten 2er Determinanten aufweist, würde durch eine Ausdehnung der Variabilität von $h'_1 \dots\dots h'_\lambda$ in Gleichung (7) hervorgegangen sein und zwar der Art, dass den genannten Summationsvariabeln auch andere, als zwischen 1 und n liegende Werthe zugänglich gemacht worden wären. Für den Zweck der folgenden Entwickelung bedarf es jener allgemeineren Gleichung nicht; die Gleichung (8) ist es vielmehr allein, die in ihren weiteren Consequenzen verfolgt werden soll. Ihr Inhalt, als besonderer Satz formulirt, lautet:

> „Wird in einer als Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten dargestellten vollständigen Determinante die einer der beiden partiellen Determinanten zugehörige Reihe der als constant auftretenden Indices um eine beliebige Anzahl von Indices aus der gleichartigen Indices-

Reihe der vollständigen Determinante, die Reihe der variabeln Indices dagegen um zwar ebensoviel, aber sonst völlig beliebige Indices vermehrt: so sieht sich dadurch die vollständige Determinante mit derjenigen Determinante multiplicirt, welche zu Indices die bei jener partiellen Determinante hinzugefügten Indices hat."

Die zu den unteren Indices der partiellen Determinante λ^{ten} Grades hinzugetretenen Indices $q_{n+1} \cdots\cdots q_{n+\nu}$ waren völlig willkürlich geblieben. Nimmt man nun an, dass die letzten σ derselben gleich den letzten σ Indices in der Reihe $q_1 \cdots\cdots q_n$ sind, also dass $q_{n+\nu-\sigma+1} \cdots\cdots q_{n+\nu} = q_{n-\sigma+1} \cdots\cdots q_n$ sind, so gehen die Gleichungen (8) und (8a) über in:

$$\sum_{k_1 \ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots\ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \Delta^{\varepsilon^p_q}_{\lambda+\nu} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda, & n-\nu+1 \ldots n & \\ k_1 \ldots k_\lambda, & n-\sigma+1 \ldots n, & n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) D^{\varepsilon^p_q}_{n-\lambda} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) =$$

$$= \Delta^{\varepsilon^p_q}_{\nu} \begin{pmatrix} n-\nu+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix} D^{\varepsilon^p_q}_{n}$$

und

$$\sum_{k_1 \ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots\ldots n)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \Delta^{\varepsilon^p_q}_{\lambda+\nu} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda-\varrho, & \lambda+1 \ldots \lambda+\varrho, & n-\nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, & n-\sigma+1 \ldots n, & n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) D^{\varepsilon^p_q}_{n-\lambda} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) = 0$$

Und beachtet man, dass hierin die partielle Determinante $(\lambda+\nu)^{\text{ten}}$ Grades allemal wegen Gleichheit 2er unterer Indices verschwindet, sobald eine der Summationsvariabeln $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ einen der Werthe $n-\sigma+1 \ldots\ldots n$ annimmt, so ist ersichtlich, dass die Variabilität von $k_1 \ldots\ldots k_\lambda$ auf die Werthe $1 \ldots\ldots n-\sigma$ in diesen beiden Gleichungen beschränkt werden darf; man erhält daher:

$$\sum_{k_1 \ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots\ldots n-\sigma)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots\ldots \lambda} k} \Delta^{\varepsilon^p_q}_{\lambda+\nu} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda, & n-\nu+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, & n-\sigma+1 \ldots n, \; n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) D^{\varepsilon^p_q}_{\nu-\lambda} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) =$$

$$= \Delta^{\varepsilon^p_q}_{\nu} \left(\!\!\begin{pmatrix} n-\nu+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ n-\sigma+1 \ldots\ldots n, \; n+1 \ldots\ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) D^{\varepsilon^p_q}_{n}$$

und
$$\sum_{k_1 \ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots\ldots n-\sigma)} (-1)^{L - \sum\limits_{1 \ldots\ldots \lambda} k} \Delta^{\varepsilon^p_q}_{\lambda+\nu} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots \lambda-\varrho, & \lambda+1 \ldots \lambda+\varrho, & n-\nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_\lambda, & n-\sigma+1 \ldots n, & n+1 \ldots n+\nu-\sigma \end{pmatrix}\!\!\right) D^{\varepsilon^p_q}_{n-\lambda} \left(\!\!\begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots \lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\!\right) = 0.$$

Ersetzt man hierin $n-\sigma$ durch n', also n durch $n'+\sigma$, so wird:

$$(9)\qquad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots\ldots n')} (-1)^{L-\sum\limits_{1\ldots\lambda}k} \underset{1+\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\lambda,\, n'+\sigma-\nu+1\ldots n',\, n'+1\ldots n'+\sigma\\ k_1\ldots k_\lambda,\, n'+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'+\nu\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n'+\sigma-\lambda}{D\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\ldots\lambda\\ k_1\ldots\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right)=$$

$$= \underset{\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\begin{pmatrix}n'+\sigma-\nu+1\ldots n',\, n'+1\ldots\ldots n'+\sigma\\ n'+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'+\nu\end{pmatrix} \underset{n'+\sigma}{D\varepsilon_q^p}$$

$$(9a)\qquad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots\ldots n')} (-1)^{L-\sum\limits_{1\ldots\lambda}h} \underset{1+\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\lambda-\varrho,\, \lambda+1\ldots\lambda+\varrho,\, n'+\sigma-\nu+1\ldots n',\, n'+1\ldots n'+\sigma\\ k_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k_\lambda,\, n'+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n'+\nu\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n'+\sigma-\lambda}{D\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\ldots\lambda\\ k_1\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right)= 0,$$

zwei Gleichungen, die aus den Gleichungen (8) und (8a) als der Art hervorgegangen angesehen werden können, dass die Indices-Reihen sämmtlicher dort vorkommenden Determinanten um dieselben Indices vermehrt worden sind. Die erste von ihnen enthält daher folgende Ausdehnung des oben aus der Gleichung (8) formulirten Satzes:

„Werden in einer als Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten dargestellten vollständigen Determinante der constanten Indices-Reihe der einen partiellen Determinante eine beliebige Anzahl der gleichartigen zu dem System der vollständigen Determinante gehörigen Indices, der variabeln Indices-Reihe derselben partiellen Determinante dagegen ebensoviel beliebige Indices hinzugefügt und dann noch den oberen und unteren Indices beider partiellen Determinanten dieselben, sonst beliebigen Indices hinzugefügt: so sieht sich dadurch die vollständige Determinante nicht nur in ihren Indices-Reihen um die letzt hinzugetretenen Indices vermehrt, sondern auch mit derjenigen Determinante multiplicirt, welche sämmtliche hinzugetretenen Indices zu ihren Indices hat."

(Die Gleichungen (9) und (9a) stimmen überein mit den Gleichungen (7) und (8) in der oben erwähnten Schrift von Reiss; sowie auch aus der letzteren von ihnen und aus der obigen Gleichung (8a) die dortigen Gleichungen (9) und (10) durch die Annahme $\varrho=\lambda$ und $\nu=n-2\lambda$ hervorgehen.)

Von besonderer Wichtigkeit sind die aus den Gleichungen (9) und (9a) durch die Annahme $\sigma=\nu$ hervorgehenden Gleichungen; es wird durch diese Annahme, wenn noch schliesslich n' wieder durch n ersetzt wird:

$$\sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots\ldots n)} (-1)^{L-\sum\limits_{1\ldots\lambda}k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\lambda,\, n+1\ldots n+\nu\\ k_1\ldots k_\lambda,\, n+1\ldots n+\nu\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n+\nu-\lambda}{D\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\lambda\\ k_1\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) = \underset{\nu}{\Delta\varepsilon_q^p}\left(\!\!\left(\begin{matrix}1\ldots\lambda\\ k_1\ldots k_\lambda\end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{n+\nu}{D\varepsilon_q^p}$$

$$(10a)\quad \sum_{k_1\dots\dots k_\lambda = C_\lambda(1\dots\dots n)} (-1)^{L-\sum\limits_{1\dots\dots\lambda} k}\, \Delta_{\lambda+\nu}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix}1\dots\lambda-\varrho,\ \lambda+1\dots\lambda+\varrho,\ n+1\dots n+\nu \\ k_1\dots\dots\dots\dots\dots k_\lambda,\ n+1\dots n+\nu\end{matrix}\right)\right) D_{n+\nu-\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix}1\dots\dots\lambda \\ k_1\dots\dots k_\lambda\end{matrix}\right)\right) = 0.$$

Die erstere lehrt:

„Wenn in einer als Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten dargestellten vollständigen Determinante die Indices-Reihen beider partiellen Determinanten um dieselben beliebigen Indices vermehrt werden, treten diese Indices auch zu den Indices-Reihen der vollständigen Determinante hinzu, und ausserdem wird diese letztere mit derjenigen Determinante multiplicirt, welche zu ihren Indices die hinzugetretenen Indices hat.“

Da in den Gleichungen (10) und (10a) die Variabilität der $k_1 \dots\dots k_\lambda$ ohne Weiteres auf die Werthe $n+1 \dots\dots n+\nu$ ausgedehnt werden darf, weil für jeden solchen Werth eines der k's die partielle Determinante $(\lambda+\nu)^{\text{ten}}$ Grades wegen Gleichheit 2er unteren Indices verschwindet, so ergeben sich, wenn wieder $n+\nu = n'$ gesetzt und dann n' durch n ersetzt wird, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\sum_{(k_1\dots\dots k_\lambda) = C_\lambda(1\dots\dots n)} (-1)^{L-\sum\limits_{1\dots\lambda} k}\, \Delta_{\lambda+\nu}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix}1\dots\dots\lambda,\ n-\nu+1\dots n \\ k_1\dots k_\lambda,\ n-\nu+1\dots n\end{matrix}\right)\right) D_{n-\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix}1\dots\dots\lambda \\ k_1\dots k_\lambda\end{matrix}\right)\right) = \Delta_{\nu}^{\varepsilon_q^p}\left(\begin{matrix}n-\nu+1\dots n \\ n-\nu+1\dots n\end{matrix}\right) D_{n}^{\varepsilon_q^p}$$

und

$$\sum_{k_1\dots\dots k_\lambda = C_\lambda(1\dots\dots n)} (-1)^{L-\sum\limits_{1\dots\lambda} k}\, \Delta_{\lambda+\nu}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix}1\dots\lambda-\varrho,\ \lambda+1\dots\lambda+\varrho,\ n-\nu+1\dots n \\ k_1\dots\dots\dots\dots\dots\dots k_\lambda,\ n-\nu+1\dots n\end{matrix}\right)\right) D_{n-\lambda}^{\varepsilon_q^p}\left(\left(\begin{matrix}1\dots\dots\lambda \\ k_1\dots k_\lambda\end{matrix}\right)\right) = 0;$$

zwei Gleichungen, die übrigens auch unmittelbar aus den Gleichungen (8) und (8a) hervorgehen, sobald man annimmt, dass $q_{n+1} \dots\dots q_{n+\nu} = q_{n-\nu+1} \dots\dots q_n$ ist.

Die erste dieser beiden Gleichungen und die Gleichung (10) verdienen eine besondere Beachtung wegen der Form, in der sie das Product einer vollständigen Determinante in eine ihrer partiellen Determinanten darstellen; es möge daher in ihnen die vollständige Allgemeinheit in Bezug auf die zur Darstellung gewählten Indices wiederhergestellt werden, indem die Rang-Indices $1 \dots\dots \lambda$ durch die beliebigen Rang-Indices $h_1 \dots\dots h_\lambda$, und $n-\nu+1 \dots\dots n$ durch $h_{n-\nu+1} \dots\dots h_n$ resp. $i_{n-\nu+1} \dots\dots i_n$ ersetzt werden, wodurch L wieder durch $\sum\limits_{1\dots\lambda} h$ zu ersetzen nöthig wird und wegen der etwaigen Derangements, welche die Indices-Gruppe $p_{h_{n-\nu+1}} \dots\dots p_{h_n}$ gegen $p_{h_1} \dots\dots p_{h_\lambda}$ resp. $q_{i_{n-\nu+1}} \dots\dots q_{i_n}$ gegen $q_{k_1} \dots\dots q_{k_\lambda}$

besitzen, der verticale Trennungsstrich mit der ihm oben beigelegten Bedeutung zwischen den erwähnten Indices-Gruppen sich einstellt. Die beiden Gleichungen sind in dieser allgemeinen Form:

$$(11)\quad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1\ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots. h_\lambda \\ k_1\ldots. k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} n+1\ldots. n+\nu \\ n+1\ldots. n+\nu \end{matrix}\right)\right) \underset{n+\nu-\lambda}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots. h_\lambda \\ k_1\ldots. k_\lambda \end{matrix}\right)\right) =$$

$$= \underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} n+1\ldots. n+\nu \\ n+1\ldots. n+\nu \end{matrix}\right)\right) \underset{n+\nu}{D_{\varepsilon^p_q}}$$

und

$$(11\,\mathrm{a})\quad \sum_{k_1\ldots\ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1\ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots. h_\lambda \\ k_1\ldots. k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{n-\nu+1}\ldots. h_n \\ i_{n-\nu+1}\ldots. i_n \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\lambda}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots. h_\lambda \\ k_1\ldots. k_\lambda \end{matrix}\right)\right) =$$

$$= \underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{n-\nu+1}\ldots. h_n \\ i_{n-\nu+1}\ldots. i_n \end{matrix}\right)\right) \underset{n}{D_{\varepsilon^p_q}}$$

Der in Gleichung (11) ausgesprochene Satz lässt sich auf das Resultat der Zerlegung einer Determinante in beliebig viele Factoren ausdehnen, sofern man nun mehr statt von Gleichung (4) von Gleichung (5) in Nro. 3 ausgeht. Diese Gleichung war:

$$\underset{n}{D_{\varepsilon^p_q}} =$$

$$\sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda\,(1\ldots n);\; k_{\lambda+1}\ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}\,(1\ldots n;\ \text{excl. } k_1\ldots k_\lambda);\;\ldots;\; k_{\sigma+1}\ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}\,(1\ldots n;\ \text{excl. } k_1\ldots k_\sigma)} \!\!\!\!(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\right) \underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu \end{matrix}\right)\right) \cdots \underset{\tau-\sigma}{\Delta_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right) \underset{n-\tau}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\sigma+1}\ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau \end{matrix}\right)\right)$$

Beachtet man, dass, unter der Voraussetzung $k_1\ldots\ldots k_\sigma$ constant, die Ausführung der Summation in Bezug auf $k_{\sigma+1}\ldots\ldots k_\tau$ aus den beiden letzten Factoren die Determinante $(n-\sigma)^{\text{ten}}$ Grades $\underset{n-\sigma}{D_{\varepsilon^p_q}}\left(\left(\begin{matrix} h_1\ldots h_\lambda \\ k_1\ldots k_\lambda \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\lambda+1}\ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1}\ldots k_\mu \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} h_{\varrho+1}\ldots h_\sigma \\ k_{\varrho+1}\ldots k_\sigma \end{matrix}\right)\right)$ hervorgehen lässt und dass desshalb auf sie als auf eine in ein Aggregat von Producten 2er partiellen Determinanten zerlegte Determinante die in Gleichung (11) enthaltene Regel angewandt werden kann, dass also durch Hinzufügung ν beliebiger Indices an die oberen und unteren Indices-Reihen der beiden partiellen Determinanten die als vollständig geltende Determinante in ihrer oberen und unteren Indices-Reihe um dieselben ν Indices vermehrt und ausserdem mit der zu diesen ν Indices gehörenden Determinante multiplicirt wird, so folgt:

$$\sum_{\substack{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n); \ldots ; k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma = C_{\sigma-\varrho} (1 \ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\varrho);\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma} (1 \ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\sigma)}} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \tau} h - \sum\limits_{1 \ldots \tau} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\binom{h_1 \ldots h_\lambda}{k_1 \ldots k_\lambda}\!\right) \cdots \underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\binom{h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma}{k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma}\!\right) \underset{\tau+\nu-\sigma}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\middle|\begin{matrix} n+1 \ldots n+\nu \\ n+1 \ldots n+\nu \end{matrix}\right)\!\right) \underset{n+\nu-\sigma}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\!\right)$$

$$= \underset{}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\binom{n+1 \ldots n+\nu}{n+1 \ldots n+\nu} . \sum_{\substack{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n); \ldots ; k_{\varrho+1} \ldots k_\varrho = C_{\sigma-\varrho} (1 \ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\varrho)}} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \sigma} h - \sum\limits_{1 \ldots \sigma} k} \underset{\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\binom{h_1 \ldots h_\lambda}{k_1 \ldots k_\lambda}\!\right) \cdots \underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\binom{h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma}{k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma}\!\right) \underset{n+\nu-\sigma}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\right)$$

Werden hierin für den Augenblick alle k als constant angesehen bis auf die zu einer beliebigen der unter dem Summenzeichen befindlichen partiellen Determinanten gehörigen Indices, es sei dies die partielle Determinante $\underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\binom{h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma}{k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma}\!\right)$, so würde die Ausführung der Summation in Bezug auf die variabel gebliebenen $k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma$ aus dem eben erwähnten Factor und aus $\underset{n+\nu-\sigma}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma \end{matrix}\right)\!\right)$ die Determinante $(n+\nu-\varrho)^{\text{ten}}$ Grades $\underset{n+\nu-\varrho}{D_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ h_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \ldots k_\varrho \\ \ldots k_\varrho \end{matrix}\right)\!\right)$ hervorgehen lassen, eine Determinante, welche die Indices $n+1 \ldots n+\nu$ oben und unten besitzt, so dass, wenn man $\underset{\sigma-\varrho}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\binom{h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma}{k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma}\!\right)$ in $\underset{\sigma+\nu-\varrho}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\left(\!\left(\begin{matrix} h_{\varrho+1} \ldots h_\sigma \\ k_{\varrho+1} \ldots k_\sigma \end{matrix}\middle|\begin{matrix} n+1 \ldots n+\nu \\ n+1 \ldots n+\nu \end{matrix}\right)\!\right)$ übergehen liesse, die in Gleichung (11a) ausgesprochene Transformation Platz griffe, d. h. zu jener Determinante $(n+\nu-\varrho)^{\text{ten}}$ Grades der constante Factor $\underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\binom{n+1 \ldots n+\nu}{n+1 \ldots n+\nu}$ hinzutreten müsste. Es ist ersichtlich, dass sich jedesmal, wenn eine der folgenden partiellen Determinanten unter dem Summenzeichen in ihren beiden Indices-Reihen um dieselben ν Indices vermehrt wird, dasselbe wiederholt, d. h. dass der constante Factor $\underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\binom{n+1 \ldots n+\nu}{n+1 \ldots n+\nu}$ hinzutritt und gleichzeitig die mit dem Zeichen $D_{\varepsilon_q^p}$ versehene partielle Determinante von den ihr beigefügten Ausschluss-Indices diejenigen verliert, welche die betreffende erweiterte partielle Determinante besass. Setzt man dies Verfahren so lange fort, bis die letzten Ausschluss-Indices verschwunden sind und daher auch alle Summationen erledigt sind, so hat offenbar das zurückbleibende $\underset{n+\nu}{D_{\varepsilon_q^p}}$ den Factor $\underset{\nu}{\Delta_{\varepsilon_q^p}}\binom{n+1 \ldots n+\nu}{n+1 \ldots n+\nu}$

so viel Mal bei sich, als die Anzahl der partiellen Determinanten $\underset{\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon^p_q\right)\left(\begin{pmatrix} h_1 \,..\, h_\lambda \\ k_1 \,..\, k_\lambda \end{pmatrix}\right)$

$\underset{\mu-\lambda}{\Delta}\left(\varepsilon^p_q\right)\left(\begin{pmatrix} h_{\lambda+1} \cdots\cdot h_\mu \\ k_{\lambda+1} \cdots\cdot k_\mu \end{pmatrix}\right) \cdots\cdot \underset{\tau-\sigma}{\Delta}\left(\varepsilon^p_q\right)\left(\begin{pmatrix} h_{\varrho+1} \cdots\cdot h_\tau \\ k_{\varrho+1} \cdots\cdot k_\tau \end{pmatrix}\right)$ beträgt, und man erhält daher die Gleichung:

$$(12) \qquad \sum_{k_1 \ldots . k_\lambda = C_\lambda (1 \ldots n); \ldots .; k_{\sigma+1} \ldots . k_\tau = C_{\tau-\sigma}(1 \ldots . n:\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\sigma)} (-1)^{\sum\limits_{1 \ldots . \tau} h - \sum\limits_{1 \ldots . \tau} k} \underset{\lambda+\nu}{\Delta}\left(\varepsilon^p_q\right)\left(\left(\begin{matrix} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} n+1 .. n+\nu \\ n+1 .. n+\nu \end{matrix}\right)\right) \cdots \underset{\tau+\nu-\sigma}{\Delta}\left(\varepsilon^p_q\right)\left(\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{matrix}\middle|\begin{matrix} n+1 .. n+\nu \\ n+1 .. n+\nu \end{matrix}\right)\right) \underset{n+\nu-\tau}{\left|\varepsilon^p_q\right|}\left(\left(\begin{matrix} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix}\middle|\begin{matrix} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{matrix}\right)\right) =$$

$$= \left|\underset{\nu}{\Delta}\left(\varepsilon^p_q\right)\begin{pmatrix} n+1 \ldots . n+\nu \\ n+1 . \ldots n+\nu \end{pmatrix}\right|^{r-1} \underset{n+\nu}{\left|\varepsilon^p_q\right|} \,,$$

wobei r die Anzahl sämmtlicher partiellen Determinanten vorstellt, die sich unter dem Summenzeichen linker Hand als Factoren jedes Term's vorfinden.

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz findet sich in der mehrfach erwähnten Schrift von Reiss pag. 14; auch der hier eingeschlagene Beweisgang schiesst sich dem dortigen an, abgesehen von der formellen Darstellung der Beweismittel. Mag auch der Ausdruck des Satzes selbst von dem dort gewählten unterschieden werden dürfen. Berücksichtigt man nämlich, dass die rechte Seite der Gleichung (12) unabhängig von den Grössen $\lambda, \mu \ldots . \sigma, \tau$ ist und nur in dem Exponenten $r-1$ noch erkennen lässt, wieviel partielle Determinanten als Factoren der Glieder des Aggregats, in welches $\underset{n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}$ ursprünglich zerlegt wurde, auftreten; aber weder, welche noch wieviel Indices die einzelnen partiellen Determinanten in jener Zerlegung besassen, so ergiebt sich für den Inhalt der Gleichung (12) der folgende Ausdruck:

> „Werden in einer, als Aggregat von Producten partieller Determinanten dargestellten Determinante den Indices-Reihen sämmtlicher Factoren dieselben sonst beliebigen Indices hinzugefügt, so ist das Resultat dieser Erweiterungen nur von der Factorenanzahl in der ursprünglichen Zerlegung abhängig."

Dass dieser Satz ohne Weiteres wieder die Gleichung (12) giebt, als deren Inhalt er erscheinen soll, folgt unmittelbar aus der weiter oben gewonnenen Erkenntniss, dass die Determinanten 0ten Grades der Einheit gleich sind. Wählt man nämlich als Darstellung der Determinante $\underset{n}{\left|\varepsilon^p_q\right|}$ einmal die in Gleichung (5) der dritten Nummer hingestellte, deren jeder einzelne Term r Factoren enthalten mag, dann aber als zweite Darstellung derselben Determinante die identische Relation $\underset{n}{D(\varepsilon^p_q)} = \left|\underset{0}{\Delta(\varepsilon^p_q)}\right|^{r-1} \underset{n}{D(\varepsilon^p_q)}$: so muss nach obigem Satze das Ergebniss der Erweiterung sämmtlicher Factoren in beiden Darstellungen dasselbe sein, weil die Factorenzahl in beiden Fällen dieselbe ist. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die Gleichstellung dieser beiden in ihren sämmtlichen r Factoren erweiterten Darstellungen eben die Gleichung (12) ist.

Dass hierin der sogenannte Sylvester'sche Satz, sofern er die Erweiterung sämmtlicher Elemente einer einfachen Determinante durch Hinzufügung beliebiger, aber für alle Elemente sich gleichbleibender Indices betrifft, als besonderer Fall einbegriffen ist, lässt die Zerlegung der vollständigen Determinante n^{ten} Grades in Producte aus n Factoren d. h. die zur Definition der Determinante n^{ten} Grades dienende Darstellung erkennen; oder mit anderen Worten: der Inhalt der Gleichung (12) geht in den für einfache Determinanten geltenden Sylvester'schen Satz über, sobald die in Gleichung (5) mit inbegriffene Gleichung (3) der dritten Nummer als Zerlegung der Determinante zu Grunde gelegt wird. Die Gleichung (12) geht dann über in:

$$(12\text{a}) \quad \sum_{k_1 \ldots . k_n = Perm.\,(1 \ldots . n)} (-1)^{H-K} \underset{\nu+1}{\Delta(\varepsilon^p_q)}\begin{pmatrix} h_1, n+1..n+\nu \\ k_2, n+1..n+\nu \end{pmatrix} \underset{\nu+1}{\Delta(\varepsilon^p_q)}\begin{pmatrix} h_2, n+1..n+\nu \\ k_1, n+1..n+\nu \end{pmatrix} \cdots \underset{\nu+1}{\Delta(\varepsilon^p_q)}\begin{pmatrix} h_n, n+1..n+\nu \\ k_n, n+1..n+\nu \end{pmatrix} =$$

$$\left| \underset{\nu}{\Delta(\varepsilon^p_q)} \begin{pmatrix} n+1 \ldots . n+\nu \\ n+1 \ldots . n+\nu \end{pmatrix} \right|^{n-1} \cdot \underset{n+\nu}{D(\varepsilon^p_q)} \; .$$

$H = \delta\,(h_1 \ldots . h_n\,)$; $K = \delta\,(k_1 \ldots . k_n\,)$, was in Worte gekleidet den erwähnten Sylvester'schen Satz aussprechen würde.

Zu einem ähnlichen Satze, wie der aus Gleichung (12) abstrahirte, gelangt man, wenn in Gleichung (5) sämmtliche partiellen Determinanten durch ihre Coefficienten in $\underset{n}{D(\varepsilon^p_q)}$ ersetzt werden. Bezeichnet man das Ergebniss dieser Ersetzungen der Kürze wegen mit E und berücksichtigt, dass der Coefficient von $\underset{\lambda}{\Delta(\varepsilon^p_q)}\left(\!\begin{pmatrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\right)$ in $\underset{n}{D(\varepsilon^p_q)}$ allgemein $(-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \lambda} h - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{n-\lambda}{D(\varepsilon^p_q)}\left(\!\begin{pmatrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\right)$ und umgekehrt der Coefficient von $\underset{n-\lambda}{D(\varepsilon^p_q)}\left(\!\begin{pmatrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\right)$ allgemein

$(-1)^{\sum\limits_{1 \ldots \lambda} h - \sum\limits_{1 \ldots \lambda} k} \underset{\lambda}{\Delta(\varepsilon^p_q)}\left(\!\begin{pmatrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\right)$; dass also zur Bildung von $E \underset{\lambda}{\Delta(\varepsilon^p_q)}\left(\!\begin{pmatrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{pmatrix}\!\right)$

durch $(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{n-\lambda}{\mathfrak{P}_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right)$, $\underset{\mu-\lambda}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ h_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\right)\!\!\right)$ durch

$(-1)^{\sum\limits_{\lambda+1..\mu} h - \sum\limits_{\lambda+1..\mu} k} \underset{n-(\mu-\lambda)}{\mathfrak{P}_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ h_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix}\right)\!\!\right)$ etc. ...... $\underset{\tau-\sigma}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\!\!\right)$ durch

$(-1)^{\sum\limits_{\sigma+1..\tau} h - \sum\limits_{\sigma+1..\tau} k} \underset{n-(\tau-\sigma)}{\mathfrak{P}_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\!\!\right)$ und endlich

$\underset{n-\tau}{\mathfrak{P}_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ h_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\!\!\right)$ durch

$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{\tau}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{matrix}\right)\!\!\right)$ ersetzt werden

muss: so erhält man, indem noch

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k + \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} h - \sum\limits_{\lambda+1\ldots\mu} k \;\ldots\ldots + \sum\limits_{\sigma+1\ldots\tau} h - \sum\limits_{\sigma+1\ldots\tau} k + \sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k}$$

durch seinen Werth $+1$ ersetzt wird, die Gleichung

$$E = \sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda(1\ldots n);} \ldots \sum_{\ldots\; k_{\sigma+1}\ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}(1\ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{n-\lambda}{\mathfrak{P}_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{matrix}\right)\!\!\right) \ldots \underset{n-(\tau-\sigma)}{\mathfrak{P}_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{matrix}\right)\!\!\right) \underset{\tau}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{matrix}\right)\!\!\right)$$

wobei jeder Gruppe von Summationsvariabeln nunmehr alle Werthe von 1 bis n zugänglich gemacht werden durften, weil alle durch die früher nicht zulässigen Werthe hervorgehenden Terme in Folge des Eintretens 2er gleicher unterer Indices in die partielle Determinante τ^{ten} Grades

$\underset{\tau}{\Delta_{\varepsilon_q^p}} \left(\!\!\left(\begin{matrix} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \end{matrix}\right)\!\!\right)$ vernichtet werden; nimmt z. B.

eine der Summationsvariabeln $k_{\sigma+1} \ldots k_\tau$ — einen der ihr früher nicht zugänglichen Werthe $k_1 \ldots k_\sigma$, etwa k_ϱ, an, so findet sich in der erwähnten partiellen Determinante k_ϱ sowohl unter den Indices $k_1 \ldots k_\sigma$, wie auch unter den Indices $k_{\sigma+1} \ldots k_\tau$, also 2 Mal. Durch diese Ausdehnung der Variabilität der k's in dem eben für E aufgestellsten Ausdruck, kann die dort bezeichnete Summation als eine $(r-1)$fache (r bezeichnet die Anzahl der Factoren in der ursprünglichen Zerlegung), für jede der Indices-Gruppen $k_1 \ldots k_\lambda$, $k_{\lambda+1} \ldots k_\mu$, etc. ... $k_{\sigma+1} \ldots k_\tau$ besondere, von den übrigen unabhängige aufgefasst werden. Führt man zuerst die Summation in Bezug auf die Indices-Gruppe $k_1 \ldots k_\lambda$ aus, in dem man nach Formel (11 a) setzt:

$$\sum_{k_1 \ldots k_\lambda = C_\lambda(1 \ldots n)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\lambda} h - \sum\limits_{1\ldots\lambda} k} \underset{\tau}{\Delta}\!\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\left(\begin{array}{c|c|c|c} h_1 \ldots h_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots h_\mu & \ldots & h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_1 \ldots k_\lambda & h_{\lambda+1} \ldots k_\mu & \ldots & k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{array}\right)\right) \underset{n+\lambda}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c} h_1 \ldots h_\lambda \\ k_1 \ldots k_\lambda \end{array}\right)\right) =$$

$$\underset{\tau-\lambda}{\Delta}\!\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\left(\begin{array}{c|c|c} h_{\lambda+1} \ldots h_\mu & \ldots & h_{\sigma+1} \ldots h_\tau \\ k_{\lambda+1} \ldots k_\mu & \ldots & k_{\sigma+1} \ldots k_\tau \end{array}\right)\right) \underset{n}{\left[\varepsilon_q^p\right]}$$

so folgt:

$$E = \underset{n}{\left[\varepsilon_q^p\right]} \sum \ldots \sum_{k_{\lambda+1} \ldots k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1..n);\ \ldots;\ k_{\sigma+1} \ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma}(1..n)} (-1)^{\sum\limits_{\lambda+1\ldots\tau} h - \sum\limits_{\lambda+1\ldots\tau} k} \underset{n-(\mu-\lambda)}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\lambda+1} .. h_\mu \\ k_{\lambda+1} .. k_\mu \end{array}\right)\right) \ldots \underset{n-(\tau-\sigma)}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{array}\right)\right) \underset{\tau-\lambda}{\Delta}\!\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\left(\begin{array}{c|c|c} h_{\lambda+1} .. h_\mu & \ldots & h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\lambda+1} .. k_\mu & \ldots & k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{array}\right)\right)$$

Man erkennt sogleich, dass jede fernere Summation in Bezug auf eine der übrigen unteren Indices-Gruppen vermittelst derselben Formel (11a) diese Indices-Gruppe und die ihr correspondirende obere Indices-Gruppe unter dem Summenzeichen verschwinden lässt und dafür einen Factor $\underset{n}{\left[\varepsilon_q^p\right]}$ hinzubringt. Nach Ausführung aller $(r-1)$ Summationen ist daher die rechte Seite in $\left|\underset{n}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\right|^{r-1}$ übergegangen und man erhält daher die Gleichung:

$$(13) \quad \sum \ldots \sum_{k_1 .. k_\lambda = C_\lambda(1..n);\ k_{\lambda+1} .. k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1..n;\ \text{excl. } k_1 .. k_\lambda);\ \ldots;\ k_{\sigma+\lambda} .. k_\tau = C_{\tau-\sigma}(1..n;\ \text{excl. } k_1 .. k_\sigma)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{n-\lambda}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c} h_1 .. h^\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{array}\right)\right) \underset{n-(\mu-\lambda)}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\lambda+1} .. h_\mu \\ k_{\lambda+1} .. k_\mu \end{array}\right)\right) .. \underset{n-(\tau-\sigma)}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{array}\right)\right) \underset{\tau}{\Delta}\!\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\left(\begin{array}{c|c|c|c} h_1 .. h^\lambda & h_{\lambda+1} .. h_\mu & .. & h_{\sigma+1} .. h^\tau \\ k_1 .. k^\lambda & k_{\lambda+1} .. k_\mu & .. & k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{array}\right)\right)$$

$$= \left|\underset{n}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\right|^{r-1}$$

Wäre man statt von der Zerlegung der vollständigen Determinante $\underset{n}{\left[\varepsilon_q^p\right]}$ von der Zerlegung der partiellen Determinante $\underset{n-\varrho}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{array}\right)\right)$ bei Herleitung der letzten Gleichung ausgegangen und hätte also in

$$\sum \ldots \sum_{k_1..k_\lambda = C_\lambda(1..n;\ \text{excl. } l_1..l_\varrho);\ k_{\lambda+1}..k_\mu = C_{\mu-\lambda}(1..n;\ \text{excl. } k_1..k_\lambda,\ l_1..l_\varrho);\ ..;\ \lambda_{\sigma+1}..\lambda_\tau = C_{\tau-\sigma}(1..n;\ \text{excl. } k_1..k_\sigma,\ l_1..l_\varrho)} (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h \sum\limits_{1\ldots\tau} k} \underset{\lambda}{\Delta}\!\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\left(\begin{array}{c} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{array}\right)\right) \underset{\mu-\lambda}{\Delta}\!\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\left(\begin{array}{c} h_{\lambda+1} .. h_\mu \\ k_{\lambda+1} .. k_\mu \end{array}\right)\right) .. \underset{\tau-\sigma}{\Delta}\!\left[\varepsilon_q^p\right]\left(\left(\begin{array}{c} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{array}\right)\right) \underset{n-(\tau-\varrho)}{\left[\varepsilon_q^p\right]}\left(\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} h_1 .. h_\lambda & h_{\lambda+1} .. h_\mu & .. & h_{\sigma+1} .. h_\tau & i_1 .. i_\varrho \\ k_1 .. k_\lambda & k_{\lambda+1} .. k_\mu & .. & k_{\sigma+1} .. k_\tau & l_1 .. l_\varrho \end{array}\right)\right)$$

sämmtliche Faktoren durch ihre Coefficienten in $\underset{n}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)}$ ersetzt, so wäre statt des letzten Factors in dieser Zerlegung

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k + \sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \underset{\tau+\varrho}{\Delta(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} h_1 .. h_\lambda & h_{\lambda+1} .. h_\mu & \cdots & h_{\sigma+1} .. h_\tau & i_1 .. i_\varrho \\ k_1 .. k_\lambda & k_{k+1} .. k_\mu & \cdots & k_{\sigma+1} .. k_\tau & l_1 .. l_\varrho \end{array}\right)\!\!\right)$$

eingetreten; dieselben Umformungen, welche vermittelst der Formel (11a) zur Gleichung (13) führten, würden auch hier durch die $(r-1)$fache Summation den Factor $\underset{n}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)}$ $(r-1)$mal hervorbringen, aber ausserdem den Factor

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \underset{\varrho}{\Delta(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c} i_1 .. i_\varrho \\ l_1 .. l_\varrho \end{array}\right)\!\!\right)$$

zurücklassen; und man hat daher:

$$14)\quad \sum_{k_1\ldots k_\lambda = C_\lambda (1\ldots n;\ \text{excl. } l_1 \ldots l_\varrho);\ \ldots;\ k_{\sigma+1}\ldots k_\tau = C_{\tau-\sigma} (1\ldots n;\ \text{excl. } k_1 \ldots k_\sigma,\ l_1 \ldots l_\varrho)} \!\!\!\cdots \sum (-1)^{\sum\limits_{1\ldots\tau} h - \sum\limits_{1\ldots\tau} k + \sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \underset{n-\lambda}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c} h_1 .. h_\lambda \\ k_1 .. k_\lambda \end{array}\right)\!\!\right) \cdots \underset{n-(\tau-\sigma)}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c} h_{\sigma+1} .. h_\tau \\ k_{\sigma+1} .. k_\tau \end{array}\right)\!\!\right) \underset{\tau+\varrho}{\Delta(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c|c|c|c} h_1 .. h_\lambda & k \ldots & h_{\sigma+1} .. h_\tau & i_1 .. i_\varrho \\ k_1 .. k_\lambda & \ldots\ldots & k_{\sigma+1} .. k_\tau & l_1 .. l_\varrho \end{array}\right)\!\!\right) =$$

$$(-1)^{\sum\limits_{1\ldots\varrho} i - \sum\limits_{1\ldots\varrho} l} \left| \underset{n}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)} \right|^{r-1} \underset{\varrho}{\Delta(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{array}\right)\!\!\right)$$

Mit Rücksicht darauf, dass in den Gleichungen (13) und (14) die rechte Seite weder die Zahl der Indices, welche zu den einzelnen Factoren der ursprünglichen Zerlegung gehören, noch auch die Art der Gruppirung der Indices in dieser Zerlegung in ihren Ausdruck irgendwie mit aufnimmt, sondern nur die Anzahl der Factoren, aus welchen die Terme der Zerlegung bestehen, für ihren Ausdruck braucht, ergiebt sich der, dem aus Gleichung (12) hervorgegangenen vollkommen analoge Satz:

„Werden in einer, als Aggregat von Producten partieller Determinanten dargestellten (vollständigen oder partiellen) Determinante sämmtliche Factoren durch ihre Coefficienten in $\underset{n}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)}$ ersetzt, so ist das Resultat dieser Ersetzungen nur von der Factorenanzahl der ursprünglichen Zerlegung abhängig."

Wie bei Gleichung (12) ergeben sich aus dieser Fassung des Satzes die ihm zu Grunde liegenden Gleichungen (13) und (14) wieder, wenn man als 2 verschiedene Zerlegungen der Determinante in Producte aus r Factoren erstens die allgemeine, deren Factoren partielle Determinanten λ^{ten}, $(\mu-\lambda)^{\text{ten}}$ etc. . . . $(\tau-\sigma)^{\text{ten}}$ Grades sind, und dann die aus der identischen Relation

$$\underset{n}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)} = \left| \underset{0}{\Delta(\varepsilon_q^p)} \right|^{r-1} \cdot \underset{n}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)} \text{ resp. } \underset{n-\varrho}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{array}\right)\!\!\right) = \left| \underset{0}{\Delta(\varepsilon_q^p)} \right|^{r-1} \cdot \underset{n-\varrho}{\mathcal{D}(\varepsilon_q^p)} \left(\!\!\left(\begin{array}{c} i_1 \ldots i_\varrho \\ l_1 \ldots l_\varrho \end{array}\right)\!\!\right)$$

hervorgehende gelten lässt; durch die Verwandlung der r Factoren je beider Zerlegungen in ihre Coefficienten und durch die Gleichstellung der beiden sich ergebenden Ausdrücke, finden sich die Gleichungen (13) und (14) wieder.

Wie das in Gleichung (12) enthaltene Gesetz, sobald die Zerlegung der Determinante in Producte aus den Elementen selbst zu Grunde gelegt wurde, den Sylvester'schen Satz ergab, so folgen durch dieselbe Specialisirung aus den Gleichungen (13) und (14) die bekannten Sätze über Determinanten adjungirter Systeme: „Die Determinante des adjungirten Systems ist der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Determinante des ursprünglichen System's gleich" und „die partielle Determinante ϱ^{ten} Grades des adjungirten Systems ist dem Producte aus dem Coefficienten, welchen die entsprechende partielle Determinante im ursprünglichen System hat, in die $(\varrho-1)^{\text{te}}$ Potenz der vollständigen Determinante des ursprünglichen System's gleich": zwei Sätze, deren erster von Cauchy aufgestellt worden und deren zweiter, zugleich allgemeinerer unter dem Namen des Jacobi'schen Satzes in der Determinantentheorie eine wichtige Stellung einnimmt. Die linken Seiten der Gleichungen (13) und (14) gehen nämlich bei der eben vorausgesetzten speciellen Zerlegungsart in die (vollständige resp. partielle Determinante) des adjungirten Systems über, während die rechten Seiten die in diesen Sätzen bezeichneten Functionen werden.