Einleitung.

Wenn sich die Seiten eines veränderlichen n-Ecks um n feste Punkte drehen, während $n-1$ ihrer $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte auf festen Geraden fortrücken, so beschreiben die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Schnittpunkte Kegelschnitte. Da 5 Bestimmungsstücke, die voneinander unabhängig sind, für einen Kegelschnitt ausreichen, so genügt als n-Eck auch ein Dreieck. Der Lehrsatz lautet für diesen besonderen Fall: Wenn sich die Seiten eines veränderlichen Dreiecks um drei feste Punkte drehen, während 2 Ecken auf festen Geraden fortrücken, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt. Diese Erzeugungsweise der Kegelschnitte hat Maclaurin aufgefunden [1]. Sie ist ein Beispiel zu der von H. Grassmann entwickelten geometrischen Erzeugungsweise ebener Kurven. — Der Grundbegriff der Grassmann'schen Kurventheorie ist das planimetrische Produkt. Unter dem planimetrischen Produkt zweier Punkte hat man die durch sie begrenzte gerade Linie zu verstehen. Das Produkt (A B) bedeutet also das von A bis B gemessene Stück ihrer Verbindungslinie [2]. Das planimetrische Produkt zweier verschiedener gerader Linien bedeutet ihren Schnittpunkt. Das Produkt (a b) ist der Schnittpunkt der unbegrenzt langen Linien a und b.

Ausser diesen Erklärungen kommen noch folgende Festsetzungen in Betracht:

1. Das Produkt (A B) wird Null, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.
2. (a b) wird Null, wenn die Linien a und b sich decken.
3. (A a) wird Null, wenn der Punkt in der Linie liegt.

Planimetrische Produkte mit 3 Faktoren.

A, B, C sind drei Punkte einer Ebene mit der vorläufigen Einschränkung, dass sie nicht in gerader Linie liegen. (A B C) stellt den Flächenteil vor, der mit dem Parallelogramm A B C D gleiche Grösse hat und worin A B mit C D der Länge und Richtung nach übereinstimmt. Liegen die drei Punkte A, B, C in gerader Linie, so ist $(A B C) = 0$. Die Gleichung eines beweglichen Punktes X, der mit den festen Punkten A und B auf derselben Geraden liegen soll, lautet $(X A B) = 0$.

Wenn a, b, c drei gerade Linien einer Ebene sind, die durch einen Punkt gehen, so ist $(a b c) = 0$. Die Gleichung einer beweglichen Geraden x, die mit den festen Geraden a und b durch einen Punkt gehen soll, lautet $(x a b) = 0$.

---

[1] Nähere Literaturangabe findet man in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III C1 Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme von Friedrich Dingeldey, Darmstadt. S. 34.

[2] Grosse lateinische Buchstaben bedeuten Punkte, kleine Buchstaben gerade Linien. Die planimetrischen Produkte werden, um sie von algebraischen zu unterscheiden, in Klammern gesetzt. (H. Grassmann, „Die lineale Ausdehnungslehre“, Leipzig 1844, § 147, Werk 1.)

(Schlegel, „System der Raumlehre“, Leipzig 1872, 1. Teil. S. 102 u. ff.)

Die Verbindungslinie zweier Punkte A und B schneide eine derselben Ebene angehörige gerade Linie a; (A B a) ist der Schnittpunkt.

a und b seien zwei sich schneidende gerade Linien, A ein Punkt in derselben Ebene, aber ausserhalb der Linien. (a b A) stellt die Verbindungslinie zwischen dem Schnittpunkt und A vor.

Produkte mit mehr als drei Faktoren.

Für die Kurventheorie kommen nur solche Produkte in Betracht, bei denen zuerst zwei gleichartige Faktoren, Punkte oder Gerade, alsdann immer abwechselnd Gerade und Punkte bezw. Punkte und Gerade auftreten, abgesehen vom Schluss, weil nur solche Produkte geometrisch Punkte oder Linien bedeuten. Bestimmt man den Wert eines gemischten Produkts durch Ausführung der fortschreitenden Multiplikation von links nach rechts, so erhält man schliesslich ein Produkt von 3 Punkten oder 3 Geraden. Dieses Produkt ist insbesondere gleich Null, wenn es drei Punkte darstellt, die auf einer Geraden liegen oder drei Gerade, die durch einen Punkt gehen.

Ferner hat man noch folgende Sätze zu beachten:

1. Das Produkt eines Punktes A mit Null ist gleich Null.
2. Das Produkt einer Geraden a mit Null ist gleich Null. Hieraus folgt
3. Ist ein Faktor gleich Null, so ist das ganze Produkt Null. —

Wenn die festen Geraden mit a und b bezeichnet werden, die Punkte, um die sich die Dreiecksseiten drehen, mit A, B, C, mit F und G die Ecken, die auf den festen Geraden fortrücken, mit X die dritte Ecke, dann lautet die Gleichung des Kegelschnitts, der in der von Maclaurin angegebenen Weise erzeugt wird, durch ein planimetrisches Produkt ausgedrückt:

$$(B\,X\,a\,A\,b\,X\,C) = 0 \text{ oder } (C\,X\,b\,A\,a\,X\,B) = 0.$$

Die erste Gleichung sagt aus, dass F, X, C in gerader Linie liegen, die zweite Gleichung, dass G, X, B ebenso zueinander liegen. Siehe Fig. 1.

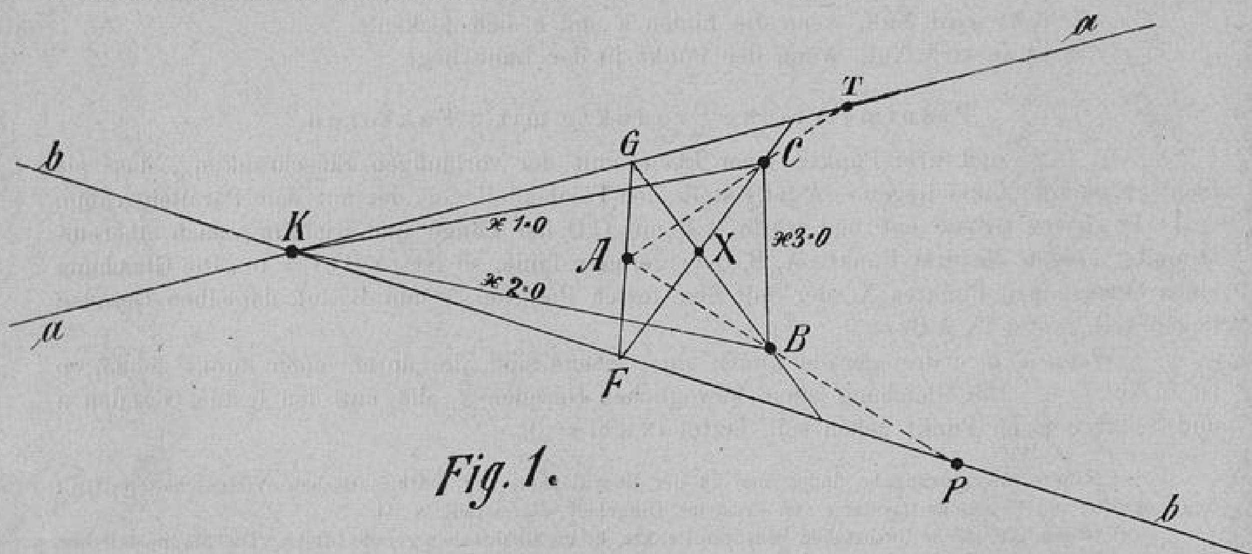


Fig. 1.

Aus der Zusammensetzung des planimetrischen Produkts kann leicht ersehen werden, dass der Kegelschnitt durch folgende fünf Punkte geht:

1. B, denn wenn X in B fällt, so wird B X Null, also auch das ganze Produkt Null, der Gleichung wird genügt, das heisst B ist ein Punkt des Kegelschnitts;

2. C aus demselben Grund;

3. K den Schnittpunkt der Geraden a und b. Es fällt nämlich B K a A b wieder in K zurück, das Produkt nimmt die Form (K K C) an, was aber gleich Null ist. Mithin ist K ein Punkt des Kegelschnitts;

4. P den Schnittpunkt der Geraden A B mit der Geraden b. (B P a A b) fällt in P zurück, das Produkt nimmt die Form (P P C) an, was aber gleich Null ist. P ist auch ein Punkt des Kegelschnitts;

5. T den Schnittpunkt der Geraden A C und a. (C T b A a) ist Punkt T, das Produkt bekommt die Form (T T B), was aber gleich Null ist. T ist auch ein Punkt des Kegelschnitts.

In den folgenden Paragraphen wird untersucht, wie bei gegebener Lage der festen Geraden die drei Punkte A, B, C liegen müssen, damit Kegelschnitte bestimmter Art entstehen.

---

§ 1.

Es erweist sich als zweckmässig, zuerst die Fälle zu behandeln, in denen ein Zerfall des Kegelschnitts eintritt. Die Gleichung desselben ist, wenn man Dreieckskoordinaten zugrunde legt

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2{}^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3{}^2 = 0.$$

Wird die Determinante $A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

gleich Null gesetzt, so erhält man die Bedingungen für den Zerfall.

Entwicklung der Kegelschnittsgleichung $(B X a A b X C) = 0$ in Dreieckskoordinaten.

Das Koordinatendreieck sei B C K. Die Gleichungen der Dreiecksseiten sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, die der Geraden a und b 1. $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$, 2. $b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$, weil sie durch den Schnittpunkt von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ hindurchgehen.

Die Gleichung der Geraden B X ist, wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3 die laufenden Koordinaten sind, x_1, x_2, x_3 die Koordinaten von X; β, o, o die Koordinaten von B; o, γ, o die Koordinaten von C; c_1, c_2, c_3 die Koordinaten von A

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \beta & o & o \end{vmatrix} = 0 \text{ d. h. } x_3 \xi_2 - x_2 \xi_3 = 0.$$

Die Gleichung des Punktes $G \equiv (B\,Xa)$ in Linienkoordinaten ist, wenn μ_1, μ_2, μ_3 die variablen Linienkoordinaten sind

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ o & x_3 & -x_2 \\ a_1 & a_2 & o \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } a_2 x_2 \mu_1 - a_1 x_2 \mu_2 - a_1 x_3 \mu_3 = 0.$$

Die Gleichung der Geraden (B X a A) lautet

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_2 x_2 & -a_1 x_2 & -a_1 x_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder $\xi_1 (-a_1 c_3 x_2 + a_1 c_2 x_3) - \xi_2 (a_2 c_3 x_2 + a_1 c_1 x_3) + \xi_3 (a_1 c_1 x_2 + a_2 c_2 x_2) = 0.$

Der Punkt $F \equiv (B X a A b)$ hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ a_1 (c_2 x_3 - c_3 x_2) & -(a_2 c_3 x_2 + a_1 c_1 x_3) & (a_1 c_1 + a_2 c_2) x_2 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder $-(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_2 x_2 \mu_1 + (a_1 c_1 + a_2 c_2) b_1 x_2 \mu_2 + [a_1 b_2 (c_2 x_3 - c_3 x_2)$
$+ (a_2 c_3 x_2 + a_1 c_1 x_3) b_1] \mu_3 = 0.$

Die Punkte F, X, C liegen auf einer Geraden, deshalb muss

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_2 x_2 & (a_1 c_1 + a_2 c_2) b_1 x_2 & a_1 b_2 (c_2 x_3 - c_3 x_2) + (a_2 c_3 x_2 + a_1 c_1 x_3) b_1 \\ 0 & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Diese Determinante ist gleich

$$a_1 b_2 (c_2 x_3 - c_3 x_2) x_1 + (a_2 c_3 x_2 + a_1 c_1 x_3) b_1 x_1 + (a_1 c_1 + a_2 c_2) b_2 x_2 x_3 = 0$$

oder

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_2 x_2 x_3 + a_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2) x_3 x_1 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) c_3 x_1 x_2 = 0.$$

Das ist die Gleichung des Kegelschnitts in Dreieckskoordinaten. Die Determinante A ist $a_1 b_2 c_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2) (b_1 c_1 + b_2 c_2) (a_2 b_1 - a_1 b_2)$.

A wird Null:

1. wenn $a_1 = 0$, d. h. die Gerade $a \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ reduziert sich auf $x_2 = 0$; Punkt B liegt auf a.

Der Kegelschnitt zerfällt in das Geradenpaar $a \equiv x_2 = 0$ und $b_2 c_2 x_3 + b_1 c_3 x_1 = 0$.

2. wenn $b_2 = 0$, d. h. die Gerade $b \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$ geht in $x_1 = 0$ über. Punkt C liegt auf B;

Der Kegelschnitt zerfällt in das Geradenpaar $b \equiv x_1 = 0$ und $a_1 c_1 x_3 + a_2 c_3 x_2 = 0$.

3. wenn $c_3 = 0$. Punkt A liegt mit B und C auf einer Geraden. Die Kurve zerfällt in $x_3 = 0$ und $(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_2 x_2 + a_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2) x_1 = 0$;

4. wenn $a_1 c_1 + a_2 c_2 = 0$. Punkt A liegt auf a. Die Kurve zerfällt in $x_1 = 0$ und $a_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2) x_3 + c_3 (a_2 b_1 - a_1 b_2) x_2 = 0$;

5. wenn $b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$. Punkt A liegt auf b. Die Kurve zerfällt in $x_2 = 0$ und $(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_2 x_3 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) c_3 x_1 = 0$;

6. wenn $a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0$. Die Geraden a und b fallen zusammen, was sich als unbrauchbar erweist. Aus den Angaben kann man auch ersehen, wie die Kurve zerfällt, wenn gleichzeitig zwei oder gar drei Faktoren der Determinante A Null werden, soweit solche Fälle überhaupt möglich sind.

§ 2.

Einer besonderen Untersuchung bedarf es, wenn B, C, K auf einer Geraden liegen und wenn die Geraden a und b parallel sind, weil dann das frühere Koordinatendreieck unbrauchbar wird. In diesen Fällen empfiehlt es sich, ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde zu legen.

1. Entwicklung der Kurvengleichung in rechtwinkligen Koordinaten.

Man macht den Schnittpunkt K der festen Geraden zum Anfangspunkte und die durch B, C, K hindurchgehende Gerade zur X-Achse. Die Koordinaten von A seien m, n; von B p, o; von C s, o. Setzt man die Koordinaten von G gleich x_1, $x_1 \operatorname{tg} \delta$, von F gleich x_2, $x_2 \operatorname{tg} \varepsilon$, die des Punktes x gleich x, y, dann lauten die Gleichungen der Geraden F G, B G, C F

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \operatorname{tg} \delta & 1 \\ m & n & 1 \\ x_2 & x_2 \operatorname{tg} \varepsilon & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \operatorname{tg} \delta & 1 \\ p & o & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_2 \operatorname{tg} \varepsilon & 1 \\ s & o & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Siehe Fig. 2.

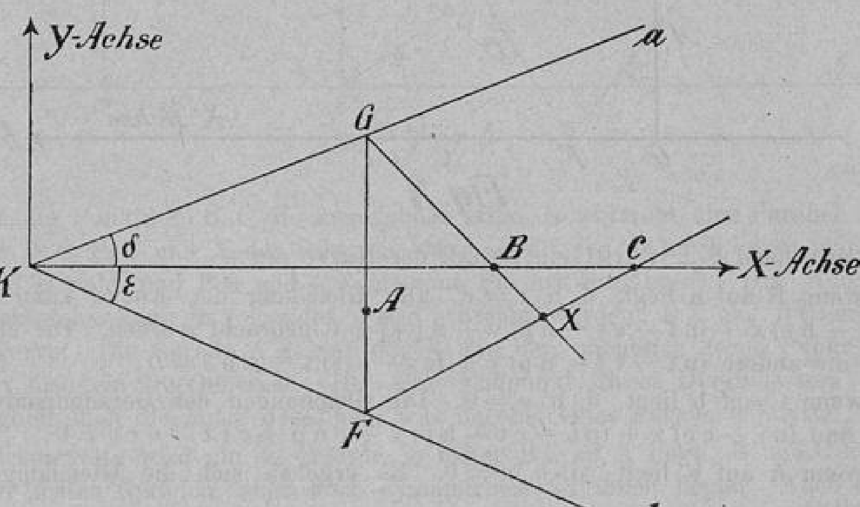


Fig. 2

Nach Elimination von x_1 und x_2 erhält man die Kurvengleichung in der Form:

$$y^2 [n p - n s - m p \operatorname{tg} \delta + p s \operatorname{tg} \delta + m s \operatorname{tg} \varepsilon - p s \operatorname{tg} \varepsilon] + x y [n s \operatorname{tg} \delta - n p \operatorname{tg} \varepsilon$$
$$+ m p \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varepsilon - m s \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varepsilon] + y [n p s \operatorname{tg} \varepsilon - n p s \operatorname{tg} \delta] = 0$$

Die Kurve zerfällt also in ein Geradenpaar, das die x-Achse $y = 0$ enthält.

Anmerkung: Wird das veränderliche Dreieck durch die Geraden F G, C G, B F gebildet, dann findet man ebenfalls ein Geradenpaar, das $y = 0$ enthält.

2. Die festen Geraden a und b seien parallel. Entwicklung der Kurvengleichung.

Wenn A, B, C die Koordinaten o,n p,r t,s haben in bezug auf das Koordinatensystem der Fig. 3, wenn ausserdem c den Abstand der Parallelen bedeutet, dann sind die Gleichungen der Geraden B G und C F

$$\begin{vmatrix} \frac{n - c}{n} x_1 & c & 1 \\ p & r & 1 \\ a & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x_1 & o & 1 \\ t & s & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\frac{n - c}{n} x_1$, c bedeuten die Koordinaten des veränderlichen Punktes G, x_1, o diejenigen des ebenfalls veränderlichen Punktes F. Eliminiert man x_1, so erhält man die Kurvengleichung in der Form:

$$(nt - ct - np)\,y^2 + (cs + nr - cn - ns)\,xy + (cns - crs)\,x$$
$$+ (cnp + crt + nps - nrt)\,y - cnps = 0.$$

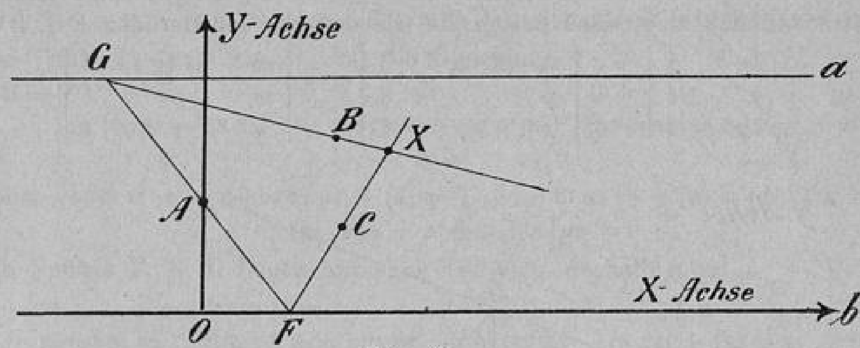


Fig. 3

Entsprechend § 2. 1 tritt ein Zerfall der Kurve ein:

1. wenn B auf a liegt, d. h. $r = c$. Die Gleichung der Kurve kann in die Form $(y - c)[(cs - ns)\,x + (nt - ct - np)\,y + nps] = 0$ gebracht werden. Die eine Gerade ist $y = c \equiv a$, die andere $(nt - ct - np)\,y + (cs - ns)\,x + nps = 0$;

2. wenn C auf b liegt, d. h. $s = 0$. Die Gleichungen des Geradenpaares sind dann $y = o \equiv b$ und $(nr - cn)\,x + (nt - ct - np)\,y + cnp + crt - nrt = 0$;

3. wenn A auf b liegt, d. h. $n = 0$. Es ergeben sich die Gleichungen $y = r$ und $sx - ty = 0$;

4. wenn A auf a liegt, d. h. $n = c$. Für diesen Fall sind die Gleichungen $y = s$ $(n - r)\,x + py - np = 0$;

5. wenn A, B, C auf einer Geraden liegen, d. h. $\begin{vmatrix} o & n & 1 \\ p & r & s \\ t & s & 1 \end{vmatrix} = 0$. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung ergibt sich die Kurvenvergleichung:

$$[x(s - r) + y(p - t) + rt - ps]\,[y(rt - ct - ps) + cps] = 0.$$

Bemerkung: Liegen A, B, C auf einer Parallelen zu a bezw. b, dann zerfällt die Kurve in ein Geradenpaar mit unendlich fernem Schnittpunkt. Man braucht nur $n = r = s$ zu setzen um die Gleichung desselben $(y - n)\,[y(nt - ct - np) + cpn] = o$ zu erhalten.

Der Abstand der Geraden $y - n = o$ und $y\,(nt - ct - np) + cnp = o$ wird um so kleiner, je kleiner die Entfernung BC wird. Wenn $p = t$, d. h. B und C zusammenfallen, kommt die Doppelgerade $(y - n)^2 = 0$ zustande.

6. Wenn B und C auf der Parallelen zu a bezw. b liegen, d. h. $r = s$. Die Kurvengleichung nimmt dann die Form $[(nt - ct - np)\,y + c\,(s - n)\,x + cnp]\,(y - s) = o$ an.

§ 3.

Die Parabel.

Die festen Geraden seien parallel. A liege auf der Mittelparallelen, B und C auf der Senkrechten zwischen den Parallelen, aber symmetrisch zu ihnen. Die drei Punkte bilden also ein gleichschenkliges Dreieck. Die Seite, deren Ecken auf den festen Geraden sich bewegen, drehe sich um A. Siehe Fig. 4.

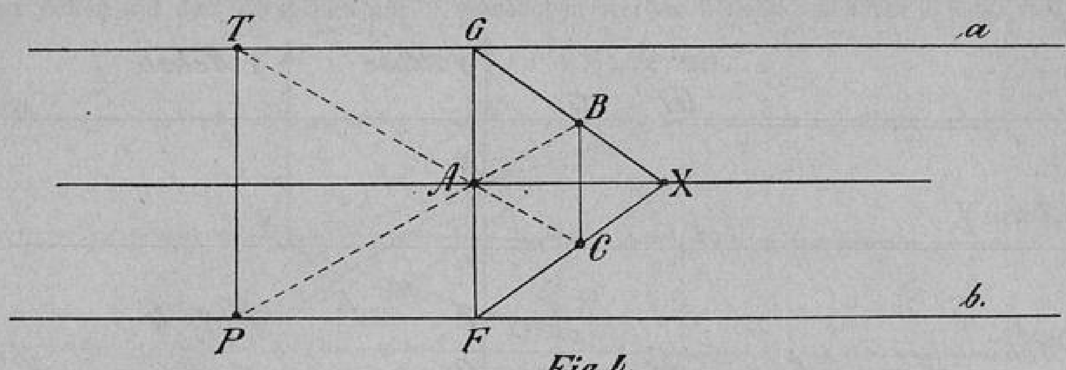


Fig. 4

Haben die Punkte A, B, C die angegebene Lage, so entsteht eine Parabel. Auf dieser Parabel liegen B, C, P, T und X der Scheitel. Man erhält ihn dadurch, dass man F G senkrecht zu a und b zieht und B G und C F bis zum Schnitt verlängert. Der Nachweis, dass eine Parabel entsteht, kann in folgender Weise erbracht werden: P T und B C sind parallele Sehnen der Kurve. Die Gerade A X, auf der X und der unendlich ferne Punkt der Kurve angehören, ist also ein Durchmesser. Der eine Endpunkt dieses Durchmessers ist im Unendlichen, folglich auch die Mitte desselben, was nur bei einer Parabel eintritt.

Die Brennweite wird um so grösser, je näher B C an A liegt. B und C können auch ausserhalb der festen Geraden, aber doch symmetrisch zu ihnen liegen. Auch dann erhält man eine Parabel, aber eine solche, die mit ihrer konkaven Seite nach rechts gerichtet ist. Siehe Fig. 5.

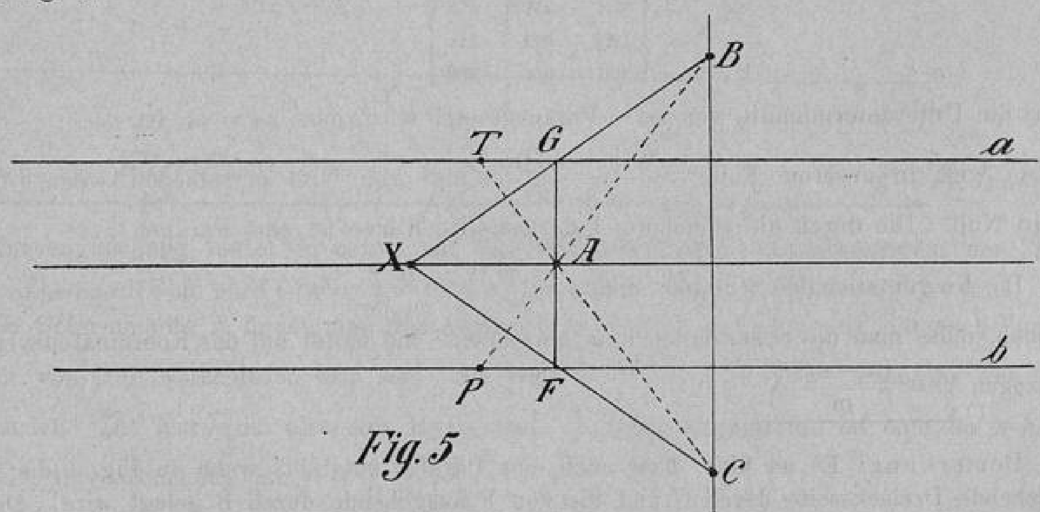


Fig. 5

Die hier mitgeteilten Ergebnisse mögen auch durch Rechnung unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems bestätigt werden. Die folgende Entwicklung bezieht sich auf Fig. 6. Zur Erläuterung derselben diene folgende Bemerkung: K sei ein Kurvenpunkt mit den Koordinaten x, y, B habe die Koordinaten o, r C o, s, A m, n.

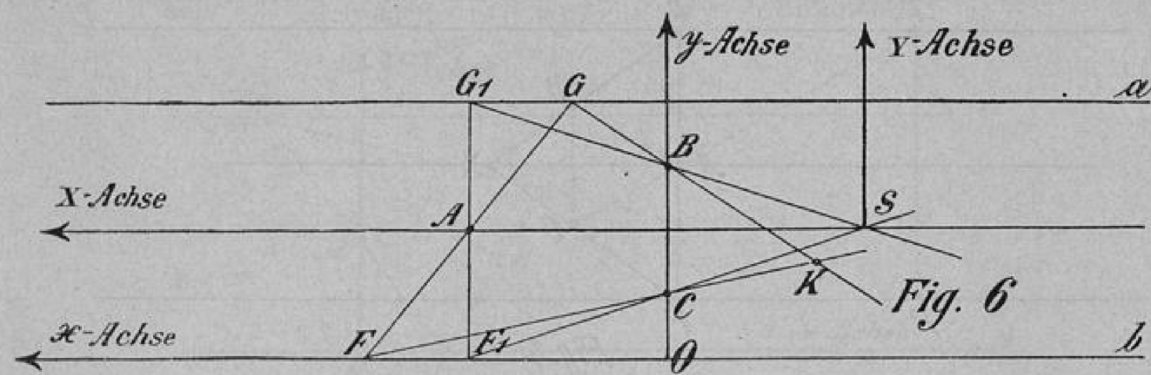


Fig. 6

Aus den Gleichungen der Geraden

$$G\,K \equiv \begin{vmatrix} m - x_1 & 2\,n & 1 \\ o & r & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } F\,K \equiv \begin{vmatrix} m + x_1 & o & 1 \\ o & s & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

worin $F\,F_1 = G\,G_1 = x_1$ erhält man nach Elimination von x_1 die Kurvengleichung I. $m\,y^2 - s\,(n - s)\,x - 2\,m\,n\,y + m\,s\,(2\,n - s) = 0$, wenn man beachtet, dass $s + r = 2\,n$ ist.

Man hat nun die in der Theorie der Kegelschnitte wichtigen Determinanten A und A_{33} zu untersuchen. Hat die allgemeine Gleichung 2. Grades die Form

$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0$, so bedeutet A die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und A_{33} die Unterdeterminante von a_{33}. Vorausgesetzt wird, dass $a_{ik} = a_{ki}$ ist.

A wird in unserem Falle $\frac{-s^2\,(n - s)^2 m}{4}$, also von Null verschieden, wenn $s \lessgtr 0$. A_{33} wird Null. Die durch die Gleichung I dargestellte Kurve ist eine Parabel.

Die Koordinaten des Scheitels sind $x = \frac{m\,(s - n)}{s}$ $y = n$. Um die Brennweite zu bestimmen, muss man die Scheitelgleichung herstellen. Sie lautet auf das Koordinatensystem X Y bezogen $Y^2 = \frac{(n - s)\,s}{m}\,X$.

Bemerkung: Es ist klar, dass auch eine Parabel entsteht, wenn in Fig. 4 die von G ausgehende Dreiecksseite durch C und die von F ausgehende durch B gelegt wird. Diese Parabel, die konkav nach rechts ist, besitzt die Scheitelgleichung $Y^2 = \frac{(n - r)\,r}{m}\,X$. Da m negativ ist, $n - r$ ebenfalls, so wird der Parameter doch positiv. Siehe Fig. 7.

§ 4.

Von Interesse ist auch festzustellen, welche Kurven entstehen, wenn die Dreiecksseite, deren Ecken auf den Geraden a und b verschoben werden können, sich um B oder C dreht.

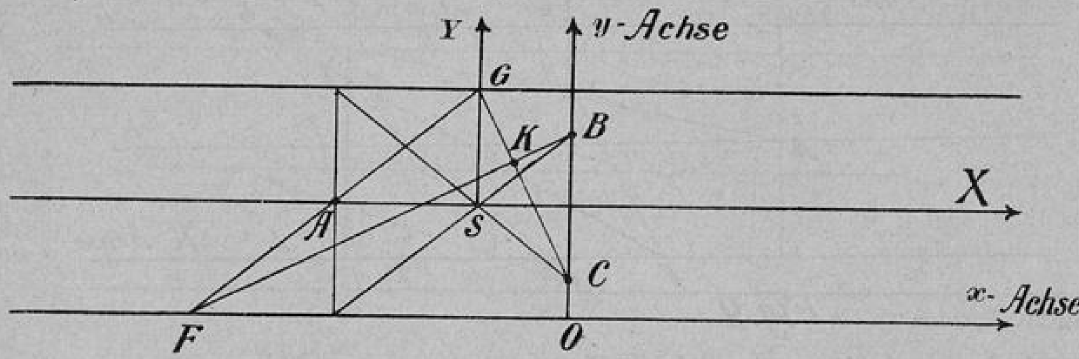


Fig. 7

Man würde demnach noch 4 Kurven erhalten. Das planimetrische Produkt, nach Fig. 8 gebildet, lautet (X B a C b A X) = 0 oder (X A b C a B X) = 0, der Ausdruck dafür, dass X, A, F bezw. X, B, G in gerader Linie liegen. Die Kurve geht durch A, B, den Schnittpunkt der Geraden a und b, hier den unendlich fernen Punkt, durch P und O, wie aus dem planimetrischen Produkt sich ergibt. Die gegenseitige Lage dieser Punkte bedingt eine Hyperbel.

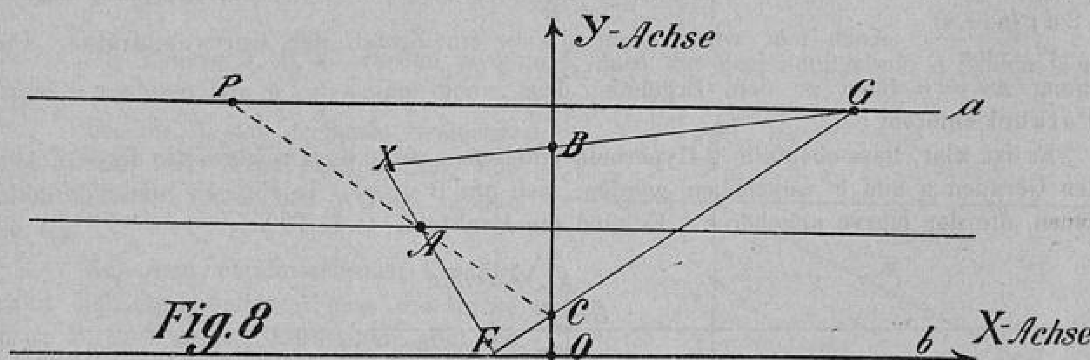


Fig. 8

Die Kurvengleichung lautet in bezug auf das rechtwinklige Koordinatensystem der Fig. 8

$$\text{II.}\quad m\,(s-2\,n)\,y^2 + (2\,n^2 - n\,s - s^2)\,x\,y + 4\,n^2\,(s-n)\,x + m\,(2\,n-s)^2\,y = 0.$$

Für die Determinante A findet man den Ausdruck $m\,n^2\,s^2\,(s-n)^2\,(2\,n-s)$, der nach Voraussetzung von Null verschieden sein soll. A_{33} wird $-\dfrac{(n\,(2\,n-s)-s^2)^2}{4}$ ebenfalls von Null verschieden. Die Kurve ist also eine Hyperbel. Von den Asymptoten ist eine der x-Achse parallel. Ihre Gleichung ist $y = \dfrac{4\,n^2\,(n-s)}{2\,n^2 - n\,s - s^2}$.

Es kann bei besonderer Lage der Punkte B und C allerdings vorkommen, dass A oder A_{33} Null werden. Für A ist das der Fall, wenn $m = o$, d. h. Punkt A in der Mitte von B C liegt; vgl. § 2, 5. A_{33} kann Null werden, wenn $s = -2\,n$; dann liegt eine Parabel vor.

Die Fig. 9 bringt den Fall zur Darstellung, wo die Dreiecksseite, deren Ecken sich verschieben, auch um C sich dreht, jedoch die beiden andern Seiten vertauscht sind.

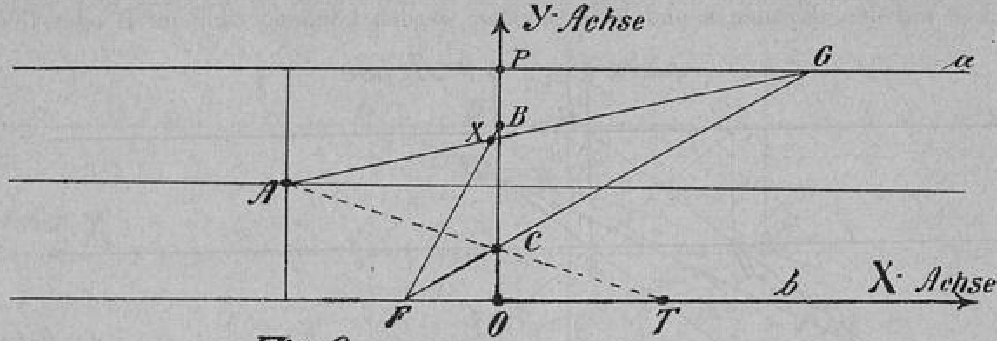


Fig. 9

Nach dem planimetrischen Produkt (A X a C b X B) = 0 oder auch (B X b C a X A) = 0 gehören A, B, P, T und der Schnittpunkt der Geraden a und b, also ein unendlich ferner Punkt, der Kurve an. Diese ist eine Hyperbel. Auf das rechtwinklige Koordinatensystem bezogen, lautet ihre Gleichung:

III. $m s y^2 + (n s - r^2) x y + 2 n r (n - s) x - m s (2 n + r) y + 2 m n r s = 0.$

Die Determinante $A = m n^2 r^2 s (s - n)^2$ $A_{33} = -\frac{(r^2 - n s)^2}{4}$ beide, von besonderen Fällen abgesehen, ungleich Null. Eine Asymptote ist der X-Achse parallel. Ihre Gleichung lautet: $y = \frac{2 n r (n - s)}{r^2 - n s}$. Auch hier wird, wenn $m = 0$, ein Zerfall der Kurve eintreten. Die Bedingung $A_{33} = 0$ führt zu dem Ergebnis, dass wenn man $s = 4 n$ und $r = -2 n$ setzt, eine Parabel entsteht.

Es ist klar, dass ebenfalls 2 Hyperbeln entstehen, wenn die Dreiecksseite, deren Ecken auf den Geraden a und b verschoben werden, sich um B dreht. In Fig. 10 sind 5 Punkte angegeben, die der Kurve angehören. Es sind die Punkte A, C, P, T, X.

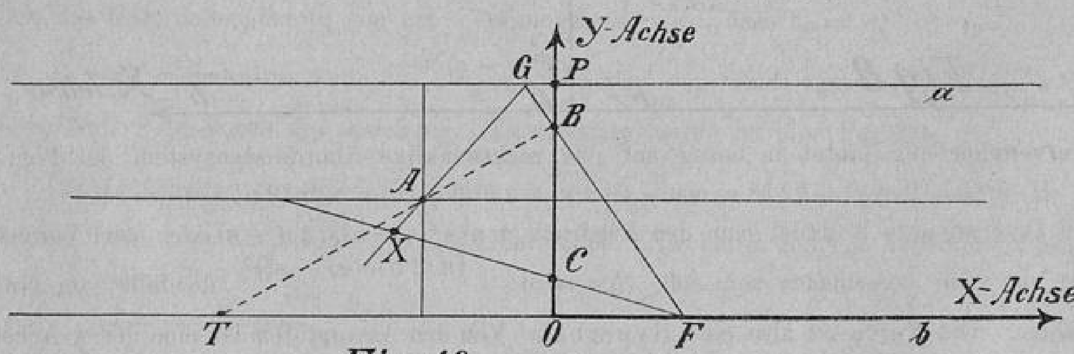


Fig. 10

IV. $m r y^2 + (n r - s^2) x y + 2 n s (n - r) x - m r (2 n + s) y + 2 m n r s = 0$ stellt die Gleichung der Kurve vor. Sie ist der durch Gleichung II dargestellten Hyperbel kongruent, wie durch Vertauschung der Geraden a und b und der Punkte B und C sofort einleuchtet.

Fig. 11 enthält 5 Punkte, die der zweiten Hyperbel angehören, die dadurch zustande kommt, dass die Dreieckseite F G sich um B dreht, dagegen F X um A und G X um C.

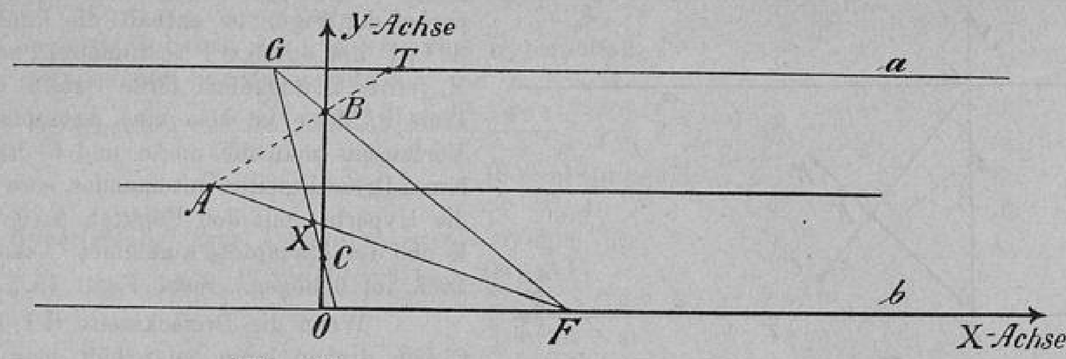


Fig. 11

Die 5 Punkte der Hyperbel sind A, C, O, T X. Ihre Gleichung lautet:

V. $m\,s\,y^2 + (r^2 - n\,s)\,x\,y + 2\,n^2\,(s - r)\,x - m\,s^2\,y = 0$. Die Kurve ist der durch Gleichung III dargestellten Hyperbel kongruent, wie ein Vergleich mit Fig. 9 ergibt.

§ 5.

Die Punkte A, B, C werden so gelegt, dass die Verbindungslinie A B den Geraden a und b parallel ist.

Die um A sich drehende Dreiecksseite kann mit ihren Ecken auf den festen Geraden verschoben werden. Siehe Fig. 12.

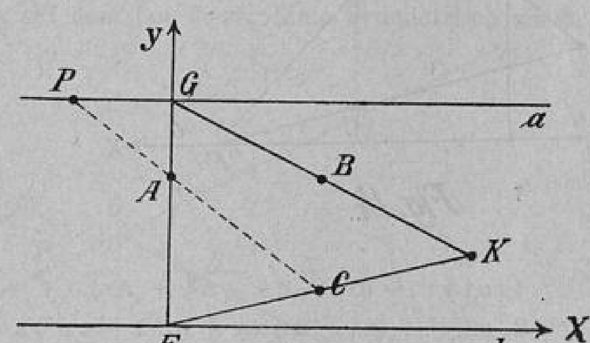


Fig. 12

Aus dem planimetrischen Produkt ergibt sich ohne weiteres, dass die Kurve durch B, C, P geht. Ausserdem geht sie durch den Schnittpunkt der Geraden A B und b, hier den unendlich fernen Punkt, und durch den Schnittpunkt der Geraden a und b, ebenfalls den unendlich fernen Punkt. Da die Kurve demnach durch 2 unendlich ferne Punkte der Geraden b geht, so ist diese eine Asymptote.

K bedeutet einen Kurvenpunkt, der durch die in der Figur angegebenen Lage der Dreiecksseite F G bestimmt ist.

Vertauscht man die um B und C drehbaren Seiten miteinander, so kommt ebenfalls eine Hyperbel zustande. Ihr gehören die Punkte P, C, T und K an, ferner 2 unendlich ferne Punkte der Geraden a, die also eine Asymptote der Kurve vorstellt. Auch wenn C auf b liegt, wird man eine Hyperbel bekommen. Siehe Figur 13.

Da die Punkte A und B zu den Parallelen gleichmässig liegen, so ist klar, dass, wenn die Dreiecksseite, deren Ecken auf denselben verschoben werden, um B gedreht wird, ebenfalls 2 Hyperbeln entstehen. Die Hyperbel der Figur 14 enthält die Punkte A, C, P, den durch G F bestimmten Punkt K, ferner 2 unendlich ferne Punkte der Linie b; diese ist also eine Asymptote. Vertauscht man die um A und C drehbaren Dreiecksseiten miteinander, so wird die Hyperbel mit den Punkten A, C, T, K und der Asymptote a gebildet. C kann auch auf b liegen. Siehe Figur 15.

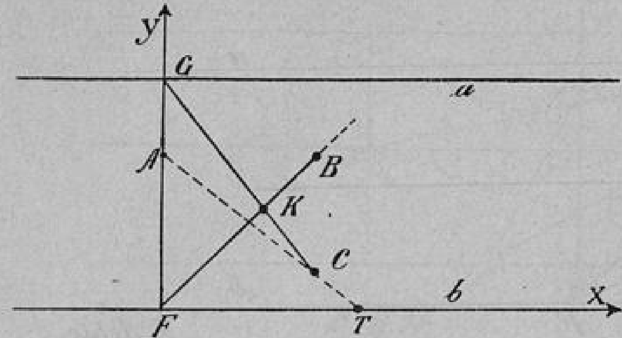


Fig. 13

Wenn die Dreiecksseite G F um C sich drehen kann, so erhält man in beiden Fällen Geradenpaare, vgl. § 2, 6. Die folgenden Gleichungen beziehen sich auf die Figuren 12—15 mit dem eingezeichneten Koordinatensystem. Die Koordinaten von A sind o, n von B gleich t, n von C gleich t, s. Der Abstand der Parallelen wurde gleich c gesetzt.

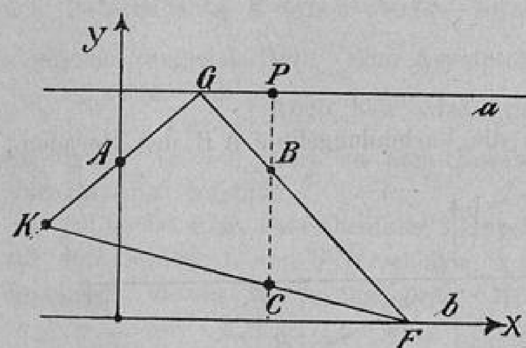


Fig. 14

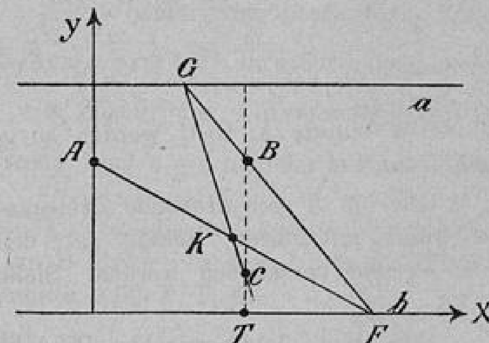


Fig. 15

1. $cty^2 + (cn - cs - n^2 + ns)\,xy + (n^2t - 2cnt - nst)\,y + cnst = 0.$
2. $cty^2 + (n^2 - ns)\,xy + (cns - cn^2)\,x + (nst - cnt - cst - n^2t)\,y + cn^2t = 0.$
3. $nty^2 + (cs - cn + n^2 - ns)\,xy - (cst + n^2t)\,y + cnst = 0$
4. $(nt - ct)\,y^2 + (n^2 - ns)\,xy + (cns - cn^2)\,x + (cst - n^2t)\,y + cn^2t - cnst = 0.$

1. Kurve $A = \frac{(c-n)^2(n-s)^2\,cnst}{4}$ von Null verschieden

$$A_{33} = -\frac{(c-n)^2(n-s)^2}{4} \text{ von Null verschieden}$$

und < 0 also Hyperbelfall.

Wendet man die Regeln für Asymptotenbestimmung algebraischer Kurven an, so erhält man eine Asymptote $y = 0$, d. h. die Gerade b.

2. Kurve $A = \frac{(c-n)(c-s)(n-s)^2 c n^2 t}{4}$

$$A_{33} = -\frac{n^2(n-s)^2}{4}$$

beide ungleich Null und $A_{33} < o$ wiederum Hyperbelfall.

Man findet eine Asymptote $y = c$ d. h. a

3. Kurve $A = -\frac{(c-n)^2(n-s)^2 c n s t}{4}$

$$A_{33} = -\frac{(c-n)^2(n-s)^2}{4}$$

auch Hyperbelfall. Eine Asymptote ist $y = 0$ d. h. b.

4. Kurve $A = \frac{(c-n)(c-s)(n-s)^2 c n^2 t}{4}$

$$A_{33} = -\frac{n^2(n-s)^2}{4}$$

Es liegt also eine Hyperbel vor, die eine Asymptote $y = c$, d. h. a hat. Die Gleichung der zweiten Asymptote ist in allen 4 Fällen nicht einfach, so dass von ihrer Angabe hier abgesehen wird. Man kann sich noch die Frage vorlegen: Unter welcher Bedingung wird eine der Hyperbeln gleichseitig? Die Bedingung, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine gleichseitige Hyperbel vorstelle, lautet $a_{11} + a_{22} = 0$. Da a_{11} immer gleich Null in unserem Falle, so reduziert sich die Bedingung auf $a_{22} = 0$, d. h. der Faktor von y^2 muss Null sein. Dann zerfallen aber die Kurven.

§ 6.

Ellipse und Hyperbel.

Die festen Geraden a und b schneiden sich unter dem Winkel ω. A liegt auf der Halbierungslinie des Winkels, B und C liegen auf dem Lot dieser Linie symmetrisch zu ihr. Die Dreiecksseite G F kann mit ihren Endpunkten auf den Geraden a und b verschoben werden und sich um A drehen. Punkte, die der Kurve angehören, sind B, C, D, P, T. Siehe Fig. 16. Der in dieser Figur angegebenen Lage von G F entspricht der Kurvenpunkt K. Es ist auch klar, dass die Halbierungslinie des Winkels eine Symmetrieachse der Kurve ist, wobei D und K die Scheitel sind. Aus der Lage der Punkte B, C, P und T den Scheiteln gegenüber folgt, dass eine Ellipse vorliegt.

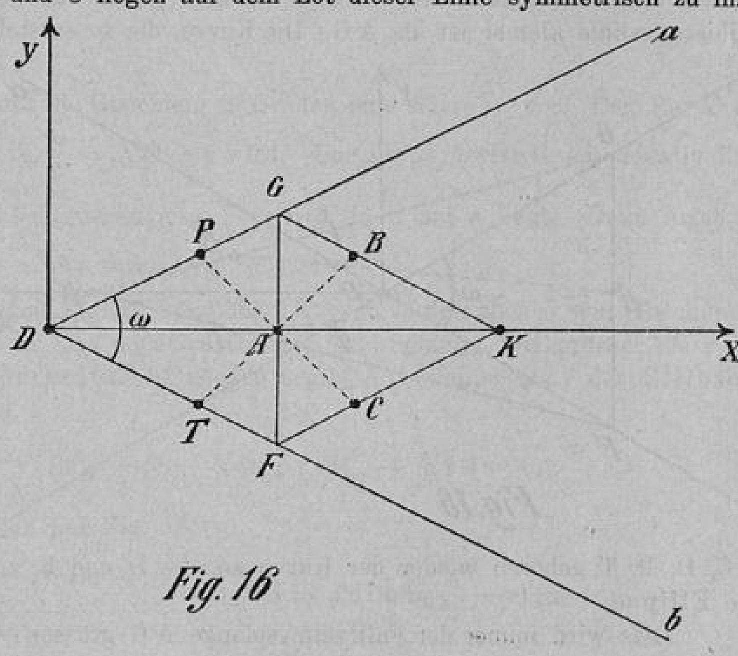


Fig. 16

Je näher B bezw. C an den Geraden a und b sich befinden, desto weiter wird der

Scheitel K von D entfernt sein. Liegt B so, dass A G gleich dem Abstand des Punktes B von der Halbierungslinie ist, dann wird der Scheitel K unendlich weit von D entfernt sein. Die Ellipse ist zu einer Parabel geworden. Wird der Abstand des Punktes B grösser als A G, wobei aber der Punkt noch im Winkelraum ω sein kann, dann wird die Parabel zur Hyperbel. Die Scheitel der Kurve liegen um so näher aneinander, je näher B an a liegt. Wenn B auf a ist, wird aus der Hyperbel das Geradenpaar a und b; vergl. § 1. 1. Für den Fall, dass B ausserhalb des Winkelraums sich befindet, kommen wieder Hyperbeln zustande.

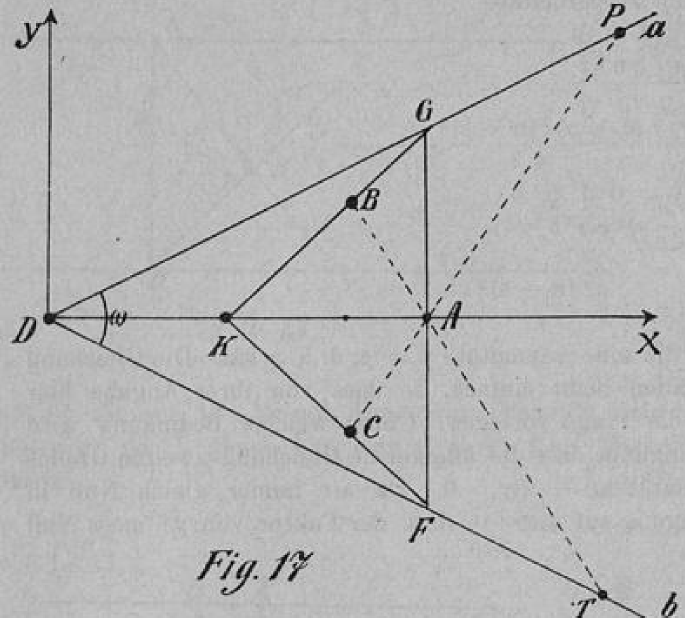


Fig. 17

Die Reihenfolge der Kurvenumwandlungen wird eine andere, wenn Punkt A auf der andern Seite von B C liegt. Siehe Fig. 17.

B, C, D, P, T sind Punkte der Kurve mit den Scheiteln D und K. Man sieht, dass eine Hyperbel in Betracht kommt. Je näher B und C an die Geraden a und b rücken, um so näher kommen sich die Scheitel. Diese decken sich, wenn B und C auf den Geraden liegen. Aus der Hyperbel ist dann das Geradenpaar a und b geworden. B kann auch ausserhalb des Winkels ω liegen, aber doch so, dass sein Abstand von der Halbierungslinie kleiner ist als A G. Die Kurve, die so entsteht, wird wieder eine Hyperbel sein; der Scheitel K befindet sich links von D. Für A G gleich dem Abstand des Punktes B von der Halbierungslinie geht die Hyperbel wieder in eine Parabel über. Diese wird für die Abstände grösser als A G zur Ellipse. Die Reihenfolge der Umwandlungen ist also umgekehrt wie im ersten Fall.

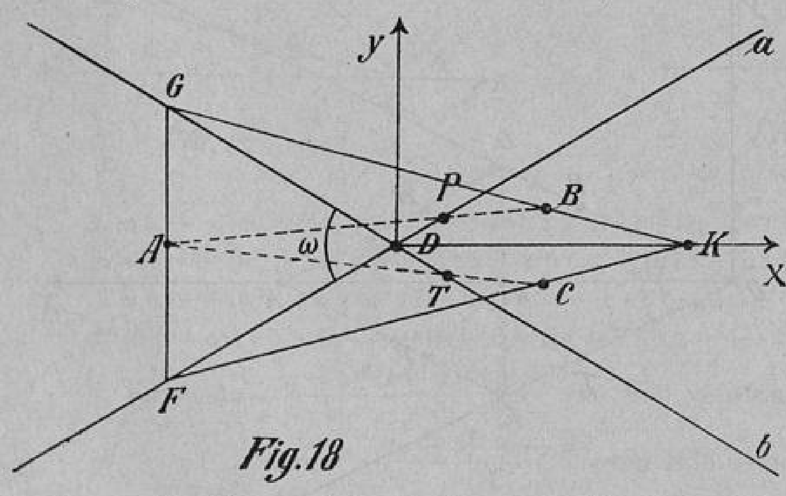


Fig. 18

Endlich hat man noch zu berücksichtigen, dass A innerhalb des Scheitelwinkels ω liegen kann. Siehe Fig. 18. B, C, D, P, T gehören wieder der Kurve an, die D und K zu Scheiteln hat. Die Kurve ist eine Ellipse.

Dies wird immer der Fall sein, solange A G grösser ist als der Abstand des Punktes B von der Winkelhalbierenden. A G gleich diesem Abstand, ergibt eine Parabel; A G kleiner als dieser Abstand, ergibt eine Hyperbel. —

Man kann auch durch Rechnung zu den angegebenen Sätzen gelangen. Die Kurvengleichungen beziehen sich auf das in die Figuren eingezeichnete Koordinatensystem. Die Koordinaten von B heissen p und r, von C p und $-r$, A hat die Koordinaten m und o, der veränderliche Punkt G x_1, $x_1 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$, F ebenfalls veränderlich x_2, $-x_2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$. Die Gleichung der nach Fig. 16 möglichen Kurven lautet:

$$\text{I. } (r^2 - m r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}) x^2 + (m p - p^2) y^2 + (m p r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - m r^2) x = 0.$$

Entwicklung dieser Gleichung.

Man stelle die Gleichungen der Geraden B G, C F, F G auf und eliminiere x_1 und x_2.

$$BG \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} & 1 \\ p & r & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad CF \equiv \begin{vmatrix} x_2 & -x_2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} & 1 \\ p & -r & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$FG \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} & 1 \\ m & o & 1 \\ x_2 & -x_2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$A = -\dfrac{m^2 p r^2 (p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - r)^2 (m - p)}{4}$ $A_{33} = p r (m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - r)(p - m)$. A_{33} wird positiv, solange $m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = A G > r$ ist.

Wenn A_{33} positiv ist, stellt die Gleichung 2. Grades eine Ellipse vor. Der Parabelfall $A_{33} = 0$ tritt eine, wenn $m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = A G = r$ wird. Der Hyperbelfall A_{33} negativ liegt vor, wenn $m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} < r$. A wird Null, wenn $p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = r$, d. h. B auf a liegt. Dann artet die Hyperbel in das Geradenpaar a und b aus, vgl. § 1, 1.

II. Die Gleichung der nach Fig. 17 möglichen Kurven lautet ebenso wie Gleichung I Man hat zu beachten, dass $p - m$ eine negative Grösse ist. Solange A G grösser als r ist, wird A_{33} hier negativ, also Hyperbelfall. Dagegen ergibt A G kleiner als r den Ellipsenfall, weil dann A_{33} positiv wird.

$$\text{III. } x^2 (r^2 - m r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}) - y^2 (m p + p^2) + x (m p r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + m r^2) = 0.$$

Die Gleichung bezieht sich auf Fig. 18.

$$A = \frac{m^2 p r^2 (p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + r)^2 (m + p)}{4} \qquad A_{33} = p r (m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - r)(m + p)$$

$$m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = A\,G > r \qquad A_{33} \text{ positiv Ellipse}$$

$$m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = A\,G = r \qquad A_{33} = 0 \quad \text{Parabel}$$

$$m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = A\,G < r \qquad A_{33} \text{ negativ Hyperbel.}$$

In den vorhergehenden Paragraphen habe ich schon darauf aufmerksam gemacht, dass bei gegebener Lage der Geraden und der drei Punkte 6 Kurven möglich sind. Wenn man

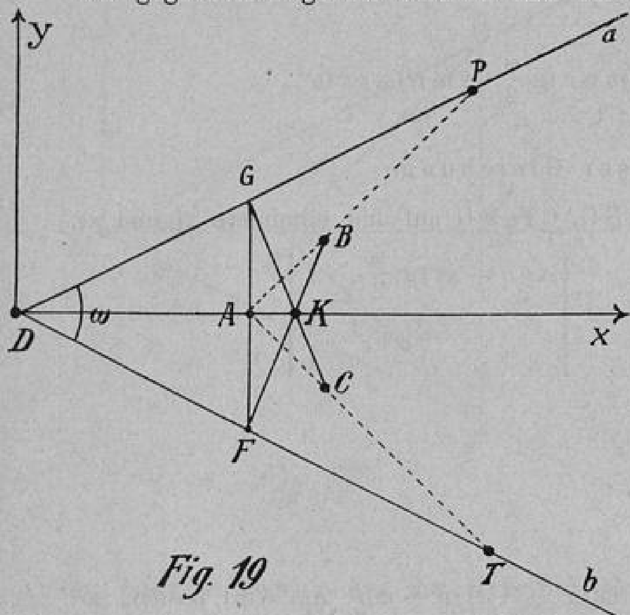


Fig. 19

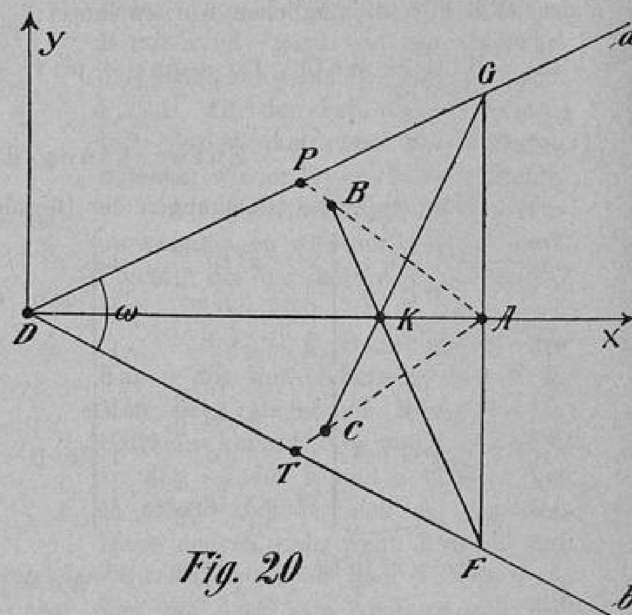


Fig. 20

die um B und C sich drehenden Dreiecksseiten miteinander vertauscht, so gelangt man zu einer zweiten Kurvenreihe; siehe Fig. 19. Auf diesen Kurven liegen die Punkte B, C, D, P, T. Ihre Scheitel sind D und K. Die Kurve, die man nach Fig. 19 erhält, ist eine Hyperbel. Auch wenn B und C auf den Geraden oder ausserhalb derselben liegen, gibt es Hyperbeln.

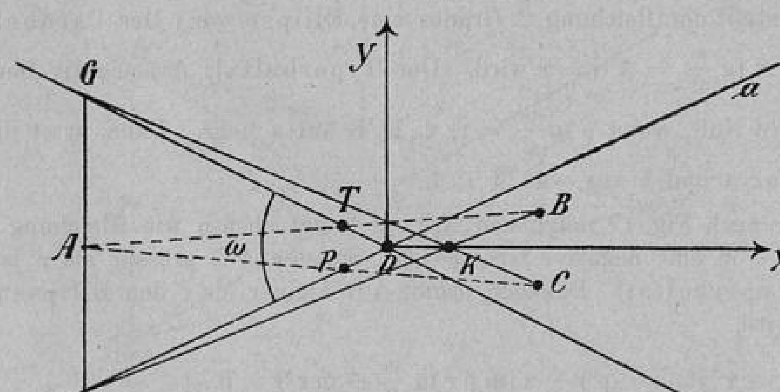


Fig. 21

Nach Fig. 20 sind nur Ellipsen möglich, mögen nun B und C innerhalb des Winkels sein, auf den Geraden, oder ausserhalb derselben.

Fig. 21 veranschaulicht den Fall, dass A innerhalb des Scheitelwinkels liegt. Die entstehenden Kurven sind Hyperbeln; allerdings wird, wenn B und C auf den Geraden liegen. ein Zerfall in das Geradenpaar a und b eintreten.

IV. Die Gleichung dieser Kurven lautet:

$$\left(m\,r\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+r^2\right)x^2+\left(m\,p-p^2\right)y^2-\left(m\,p\,r\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+m\,r^2\right)x=0$$

$$A=-\frac{m^2\,p\,r^2\left(p\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)^2(m-p)}{4}\qquad A_{33}=p\,r\left(m\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)(m-p).$$

Solange $m<p$, d. h. A links von BC liegt, wird $A_{33}<0$ Hyperbelfall, vgl. Fig. 19; $m>p$ $A_{33}>0$ Ellipsenfall; vgl. Fig. 20.

Liegt A innerhalb des Scheitelwinkels, so sind die Determinanten A und A_{33}

$$\frac{m^2\,p\,r^2\left(p\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}-r\right)^2(m+p)}{4}\quad\text{und}\quad -p\,r\left(m\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)(m+p)$$

A_{33} ist immer <0 Hyperbelfall.

A wird Null, wenn B auf a liegt, weil dann $p\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=r$. Die Hyperbel zerfällt in das Geradenpaar a und b.

Eine der Ellipsen wird zum Kreis, wenn $a_{11}=a_{22}$, d. h. in Gleichung I $r^2-m\,r\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=m\,p-p^2$ oder $\frac{r}{p}=\frac{m-p}{r-z}$, wo $z=AG=m\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$, d. h. $\triangle BGH\sim\triangle BDM$, woraus folgt $\sphericalangle\,DBG=90^0$.

Konstruktion des Punktes B vergl. Fig. 22.

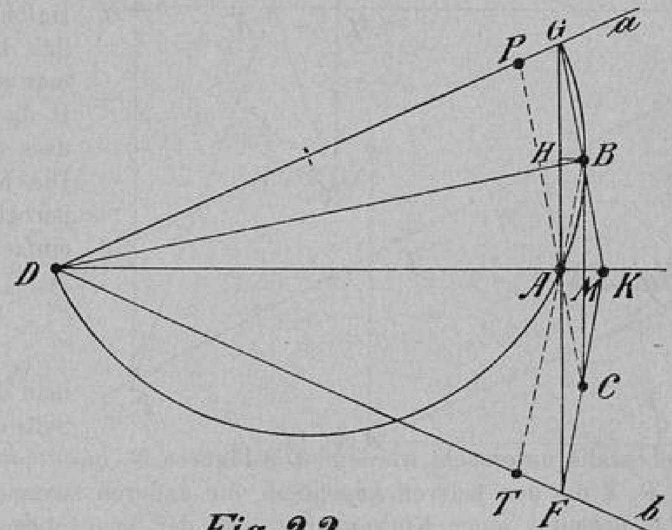


Fig. 22

Man errichte in A die Senkrechte zur Halbierungslinie des Winkels. Diese schneidet die Schenkel in F und G. Ueber DG konstruiere man den Halbkreis, der durch A geht. Auf diesem Halbkreis liegt B. Die Konstruktion der andern Kreispunkte C, K, P, T ist einfach.

In Gleichung IV muss $m\,r\,\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+r^2=m\,p-p^2$ sein. Hieraus folgt $\frac{r}{p}=\frac{m-p}{r+z}$ d. h. $\triangle AHM\sim\triangle BDM$. Dennoch $\sphericalangle\,ASD=90^0$.

Konstruktion des Punktes B vergl. Fig. 23.

Man errichte über A D einen Halbkreis. Auf ihm liegt S. S verbinde man mit A und D. Durch H auf der Verlängerung von A S gelegen ziehe man die Parallele zu A G, so dass $BH = z = AG$ wird. Die Konstruktion der übrigen Kreispunkte C, K, P, T kann aus der Figur leicht ersehen werden.

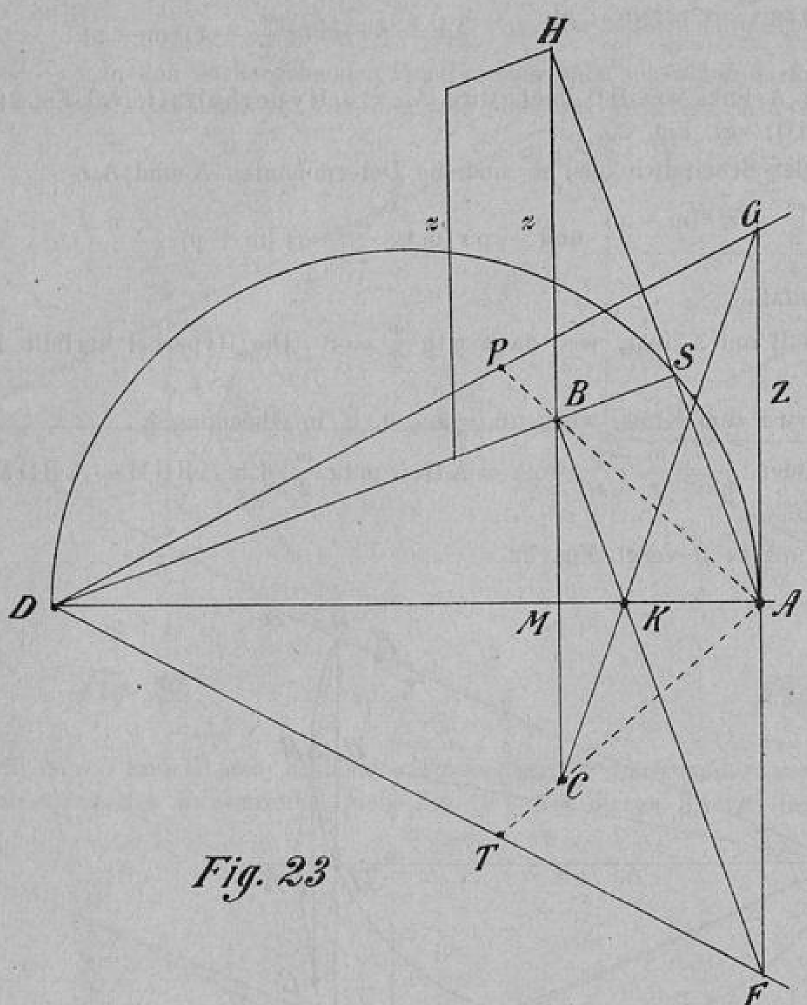


Fig. 23

Eine der Hyperbeln wird gleichseitig, wenn $a_{11} + a_{22} = 0$, also in Gleichung IV

$$m\,r\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} + r^2 = p^2 - m\,p.$$

Hieraus folgt $\frac{r}{p} = \frac{p - m}{r + z}$ also $\triangle\, BDM \sim \angle\, AHM$, d. h. $\sphericalangle\, DEM = 90^0$.

Konstruktion des Punktes A vergl. Fig. 24.

B wird mit C verbunden und über D M ein Halbkreis gezeichnet. Auf ihm liegt E. E verbinde man mit M und ziehe durch H die Parallele zu BC, so dass $GH = BM = r$ wird. Die Konstruktion der Hyperbelpunkte P und T ist einfach.

§ 7.

Die 4 Kurven, die man erhält, indem man die Seite F G sich um B oder C drehen lässt, sind ebenfalls untersucht worden. Die Figuren 25 und 26 enthalten jedesmal die 5 Punkte A, C, D, P, T die den Kurven angehören, die dadurch zustande kommen, dass F G sich um B dreht. K bedeutet einen Kurvenpunkt, der der angegebenen Lage von F G entspricht. Beide Kurven sind Hyperbeln. Sie zerfallen in Geradenpaare, wenn A mit D zusammenfällt. Das erste Geradenpaar enthält a, das zweite Paar b.

Die Gleichung der 1. Kurve lautet:

$$\text{I. } r\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} + r\right)x^2 + \left(p\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} + r\right)(m - p)\,y^2 + \left(3\,m\,r\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2} - m\,p\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2} + p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}\right.$$

$$\left. - r^2\right)x\,y - m\,r\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} + r\right)x + m\,r\left(r - 3\,p\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}\right)y = 0$$

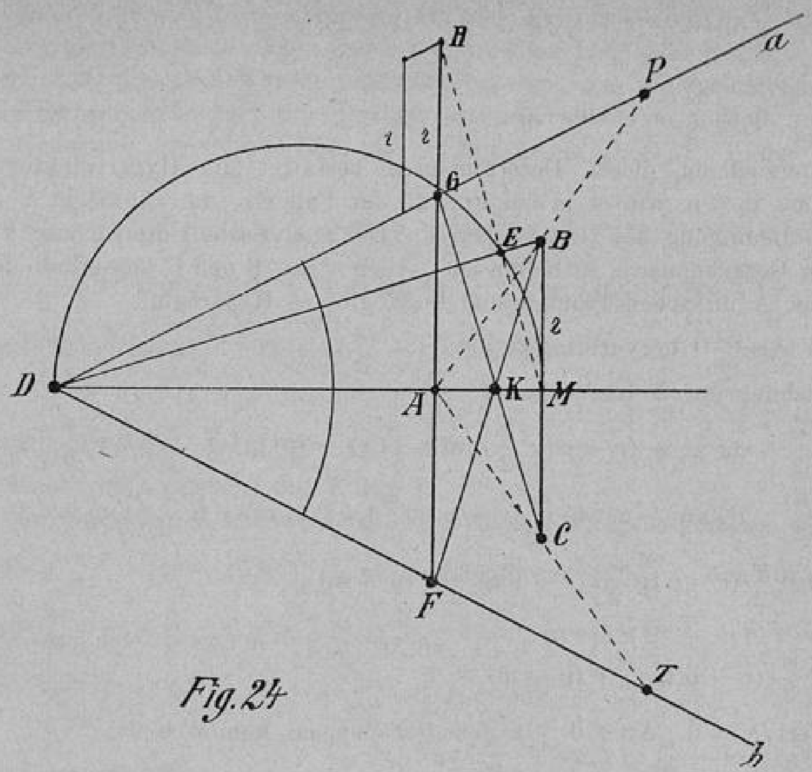


Fig. 24

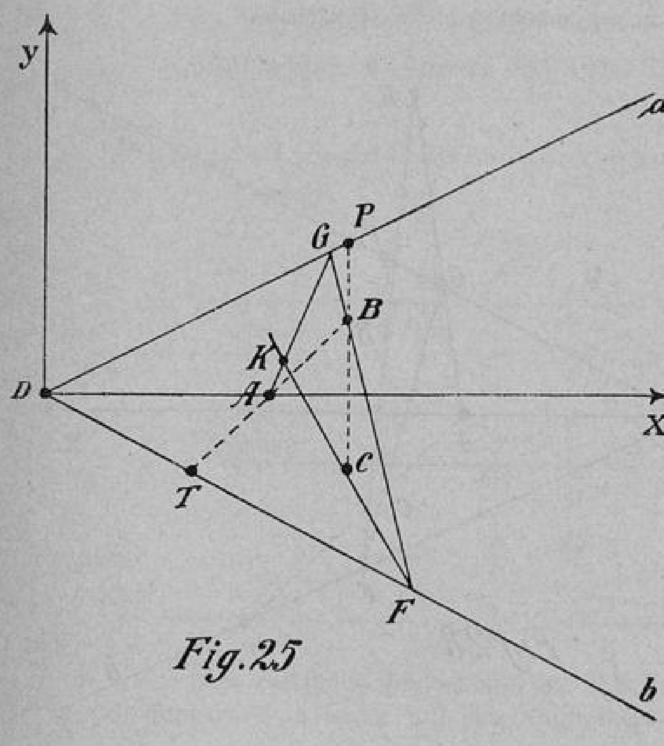


Fig. 25

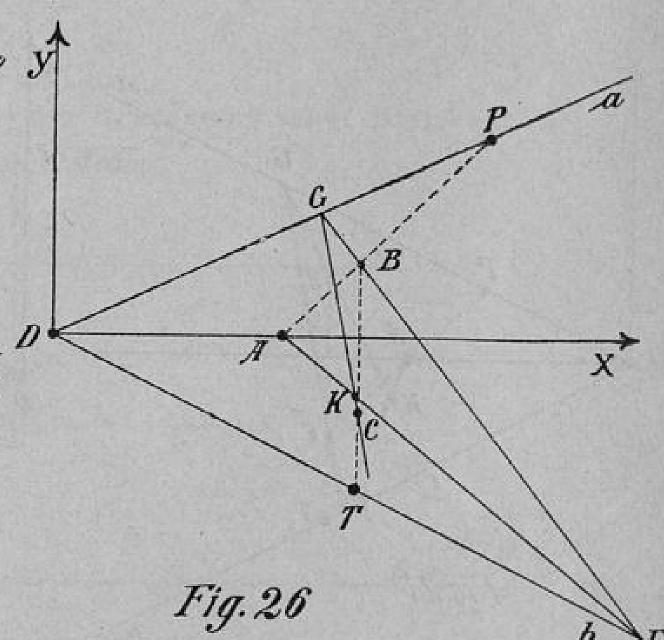


Fig. 26

$$A = m^2 r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \left(p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + r\right) \left(p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - r\right)^2 (p - m)$$

$$A_{33} = r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \left(p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + r\right)^2 (m - p) - \frac{\left(3\, m\, r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - m\, p \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} + p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} - r^2\right)^2}{4}.$$

Die Untersuchung dieser Determinanten bestätigt die Hyperbelnatur der Kurve, vorausgesetzt, dass $m < p$, wie es ja bei Fig. 25 der Fall ist. $m = 0$ macht $A = 0$, $A_{33} < 0$. Das ist aber die Bedingung des Geradenpaares. Die analytische Untersuchung ergibt weiterhin, dass in dem Geradenpaar a enthalten ist. Auch wenn B und C ausserhalb des Winkels ω sich befinden oder A im Scheitelwinkelraum liegt, gibt es Hyperbeln.

$m > p$ kann ein $A_{33} \lesseqgtr 0$ hervorbringen.

Die Gleichung der 2. Kurve lautet:

$$\text{II. } r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \left(p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - r\right) x^2 + \left(r - p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right) (m - p)\, y^2 + \left(p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} - 3\, m\, r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right.$$
$$\left. - m\, p \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} - r^2\right) x\, y + m\, r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \left(r - p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right) x + m\, r \left(3\, p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + r\right) y = 0$$

$$A = m^2 r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \left(r - p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right) \left(r + p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right)^2 (p - m)$$

$$A_{33} = r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \left(r - p \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right)^2 (p - m) - \frac{\left(p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} - 3\, m\, r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - m\, p \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} - r^2\right)^2}{4}$$

$m = 0$ liefert $A = 0$ $A_{33} < 0$. In dem Geradenpaar kommt b vor.

Wenn $m < p$, dann $A_{33} \lesseqgtr 0$. Dagegen $m > p$ macht $A_{33} < 0$ Hyperbelfall.

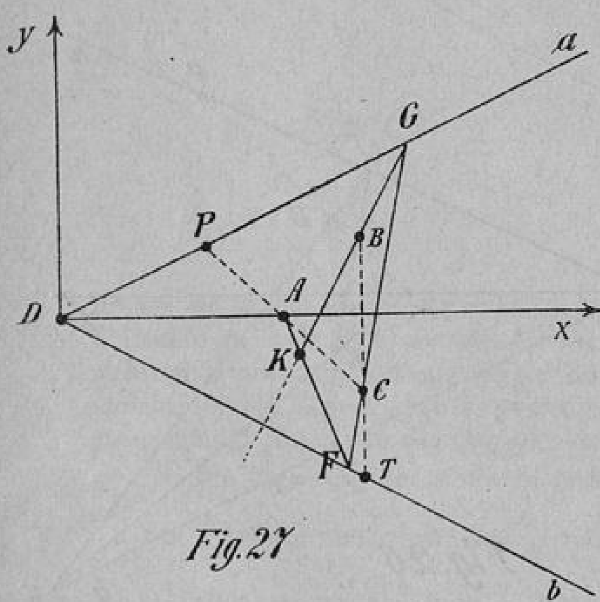


Fig. 27

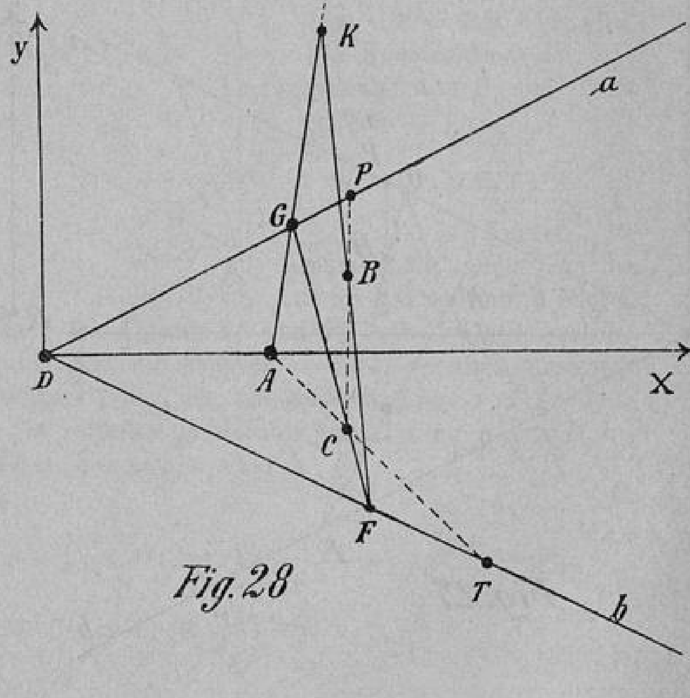


Fig. 28

Die Figuren 27 und 28 beziehen sich auf den Fall, dass die Seite F G sich im C dreht. Es ist selbstverständlich, dass wegen der symmetrischen Lage von B und C zur Halbierungslinie des Winkels ω dieselben Kurven entstehen müssen, wie bei der Drehung der Seite G F um B. Die Lage derselben zum Koordinatensystem ist aber eine andere.

Die Gleichung der Kurve, die die 5 Punkte A, B, D, P, T der Fig. 27 enthält, ist folgende:

$$\text{III.}\; r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)x^2-\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)(p-m)\,y^2-\left(3\,m\,r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-m\,p\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}\right.$$

$$\left.+\,p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}-r^2\right)x\,y-\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)m\,r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\,x-m\,r\left(r-3\,p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\right)y=0$$

$$A=m^2r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-r\right)^2(m-p)$$

$$A_{33}=r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)^2(m-p)-\frac{\left(3\,m\,r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-m\,p\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}+p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}-r^2\right)^2}{4}$$

Die Kurve ist kongruent mit Kurve I.

Die Gleichung der 4. Kurve (vergl. Fig. 28) sieht folgendermassen aus:

$$\text{IV.}\; r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-r\right)x^2-\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-r\right)(m-p)\,y^2-\left(p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}-3\,m\,r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\right.$$

$$\left.-\,m\,p\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}-r^2\right)x\,y-m\,r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-r\right)x-m\,r\left(3\,p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)y=0$$

$$A=m^2r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-r\right)\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}+r\right)^2(p-m)$$

$$A_{33}=r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}\left(p\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-r\right)^2(p-m)-\frac{\left(p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}-3\,m\,r\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}-m\,p\,\mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}-r^2\right)^2}{4}$$

Hier besteht Kongruenz mit Kurve II.

§ 8.

Konstruktion der Brennpunkte aus den Grassmann'schen Elementen.

1. Parabel.

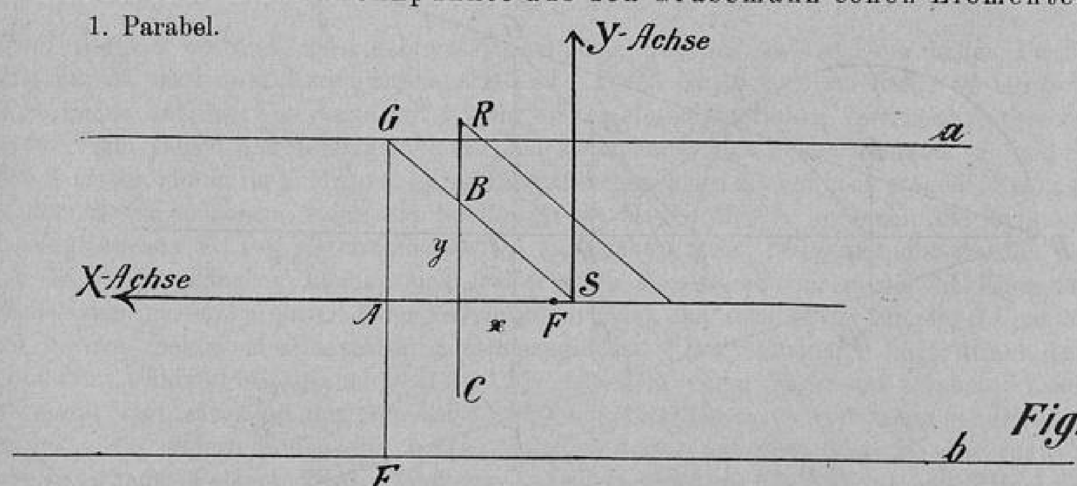


Fig. 29

Man bestimmt den Scheitel S. B R die dritte Proportionale zu x, y den Koordinaten des Punktes B in bezug auf das angegebene Koordinatensystem ist gleich dem Parameter.

Man trage $\frac{BR}{4}$ auf der Mittelparallelen von S aus nach links ab und erhält so den Brennpunkt F.

2. Ellipse.

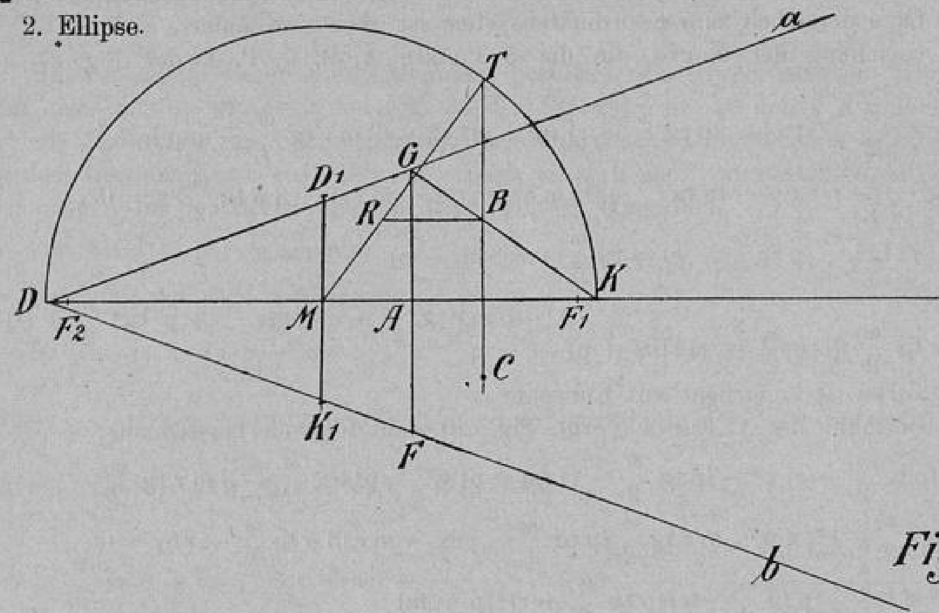


Fig. 30

Man ermittelt den andern Scheitel K. D K ist eine Achse der Ellipse. Ueber D K errichte man den Halbkreis, durch B ziehe man die Senkrechte zu D K und verbinde T mit M. Zieht man noch die Parallele zu D K durch B, so erhält man M R gleich der andern Halbachse der Ellipse. Die Brennpunkte können dann in der bekannten Weise konstruiert werden.

3. Hyperbel.

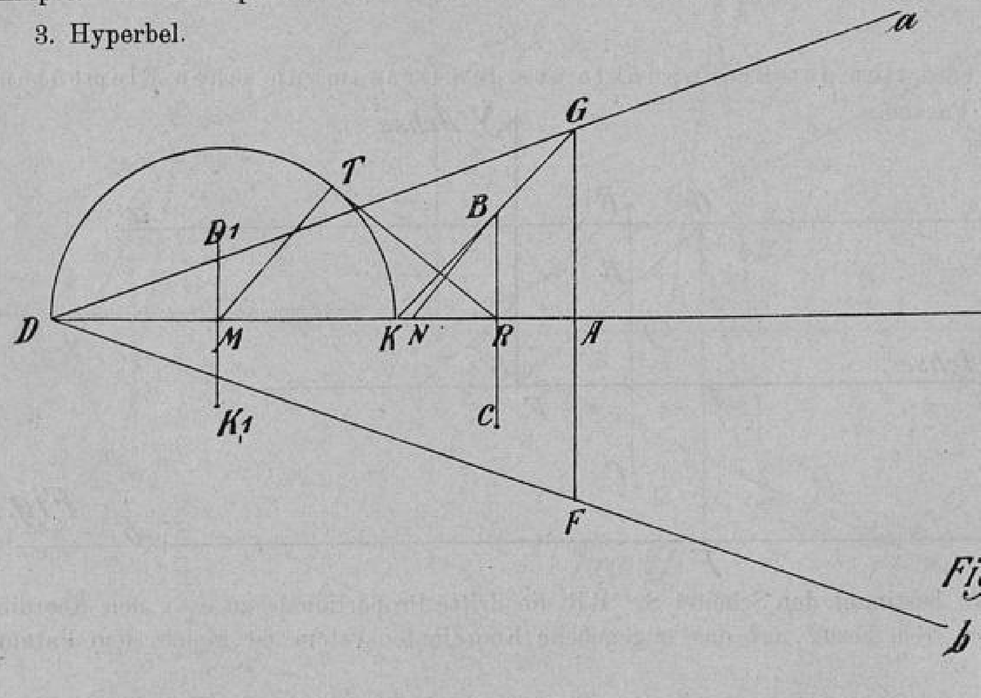


Fig. 31

Man bestimmt auch hier den andern Scheitel K. D K ist also Hauptachse der Hyperbel. Die Konstruktion der Nebenachse ergibt sich aus der Parameterdarstellung der Hyperbel $x = a \sec t \quad y = b \operatorname{tg} t$. Man zieht B R $\perp$ A D und von R die Tangente an den Halbkreis über D K. Den Berührungspunkt T verbinde man mit M. Zieht man noch durch B die Parallele zu M T, so erhält man N R gleich der Nebenachse der Hyperbel. Damit sind auch die Brennpunkte bestimmt.

§ 9.

Auf Grund des von Maclaurin angegebenen Lehrsatzes lässt sich ein Mechanismus herstellen, mit dem Teile von Kegelschnitten gezeichnet werden können. Siehe Fig. 32. Auf

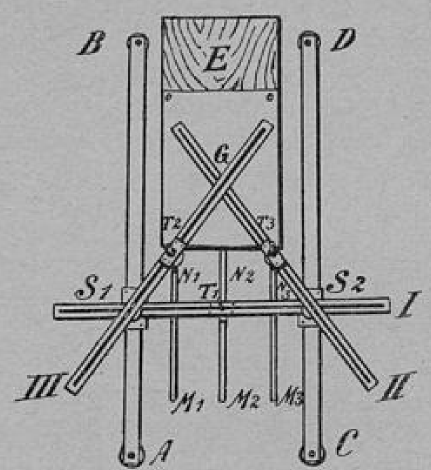


Fig. 32

einem Brett 2 cm dick, 60 cm breit, 70 cm lang, das auf zwei 3,5 cm hohen Fussleisten befestigt ist, sind zwei Messingstäbe A B und C D 0,5 cm dick, 2 cm breit, 54 cm lang, an ihren Enden auf der Unterseite mit 0,5 cm dicken Messingplättchen versehen, festgeschraubt. In der Figur liegen die Messingstäbe parallel zu einander mit 20 cm Abstand. S_1 und S_2 sind zwei Schieber, die in ihrer Mitte 2 kurze Eisenstäbchen jedes 2,5 cm hoch tragen. Symmetrisch zu den Messingschienen liegen die Spalte $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, $M_3 N_3$, in denen die zylindrischen Messingstäbchen T_1, T_2, T_3, Durchmesser 0,5 cm, Höhe 7,5 cm, festgeschraubt werden können. Um die Messingstäbchen können sich drei schmale Messingrahmen, in die die Eisenstäbchen der Schieber passen, drehen. Jeder Messingrahmen ist aus zwei 41 cm langen, 0,6 cm breiten und 0,6 cm dicken Messingstäben zusammengesetzt. Der Rahmen I liegt direkt auf den Schiebern, während die Rahmen II und III mit dem einen Ende auf I ruhen. Damit III horizontal liegt, muss auf den Schieber S_1 noch ein Metallplättchen von passender Dicke gelegt werden. Die andern Enden der beiden Rahmen liegen auf dem Brett E, das zugleich zur Befestigung des Papiers dient. Um eine Kurve zu zeichnen, bringe man den Mechanismus zunächst in eine solche Stellung, dass Rahmen III Messingstab T_3 berührt, was man durch Verschieben von S_1 und S_2 leicht erreichen kann. Durch die Oeffnung G der beiden Rahmen wird ein passendes Bleistift senkrecht zu E gesteckt, mit leichtem Druck festgehalten und dann der eine Schieber bewegt.

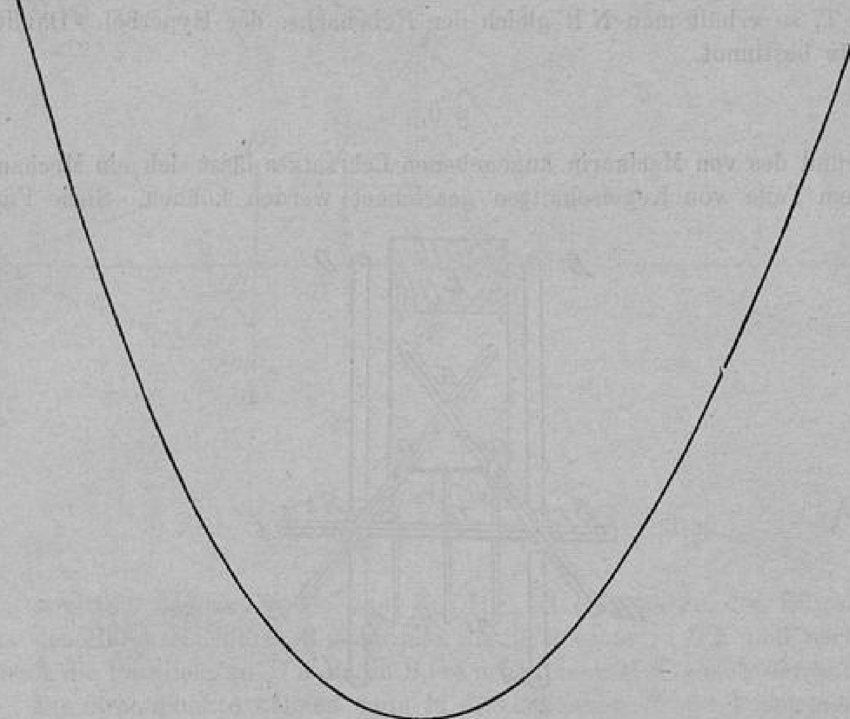


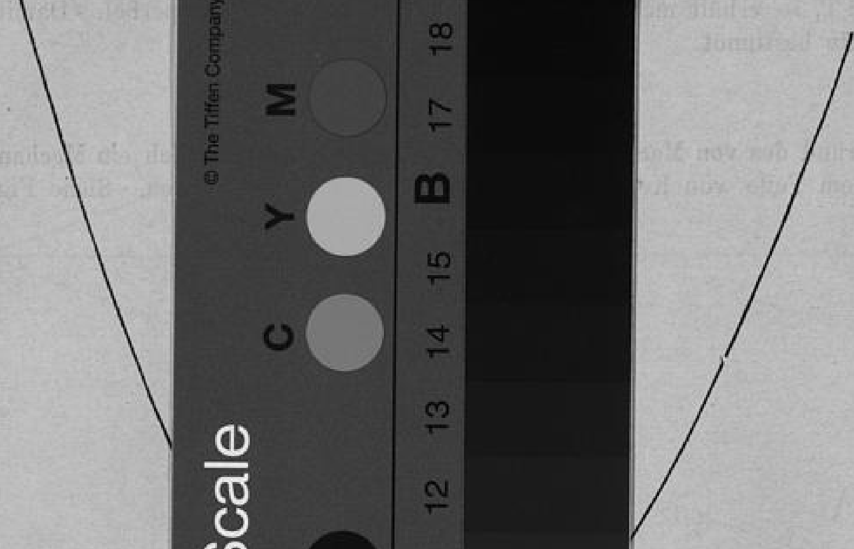
Fig. 33

Der Figur 32 entsprechend wird man auf diese Weise einen Parabelbogen erhalten. (Fig. 33). Aus den §§ 1 u. 6 der Abhandlung ergibt sich ohne weiteres, wie man mittels des Mechanismus gerade Linien, Ellipsen- und Hyperbelbögen zeichnen kann.

Dem Herrn Geheimen Hofrat Professor Dr. Dingeldey spreche ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die Unterstützung, die er mir bereitwilligst hat zu Teil werden lassen, an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus.

Darmstadt, Februar 1908.

wird ein passendes Bleistift senkrecht zu E gesteckt, mit leichtem Druck festgehalten und dann der eine Schieber be[illegible]



Der Figur 32 en[illegible] e einen Parabelbogen erhalten. (Fig. 33). Aus den §§ 1[illegible] ohne weiteres, wie man mittels des Mechanismus gerade [illegible] zeichnen kann.

Dem Herrn Gehei[illegible] y spreche ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie [illegible] ereitwilligst hat zu Teil werden lassen, an dieser Stelle [illegible]

Darmstadt, [illegible]