Ueber das Integral $\int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon$

von

C. T. Anger.

Dieses bestimmte Integral, welches in der Theorie der planetarischen Störungen und in einigen Theilen der mathematischen Physik eine wichtige Rolle spielt, ist für den besondern Fall, dass der Index h eine ganze Zahl bedeutet, längst ein Gegenstand der Untersuchung geworden, besonders hat Bessel in seinen in den Abhandlungen der Königlichen Academie zu Berlin im Jahre 1824 abgedruckten: „Untersuchungen des Theiles der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht" dasselbe behandelt, auch eine elegante Reihen-Entwickelung für diese Function, welche er mit $2\pi\, \mathrm{I}_k^h$ bezeichnet, gegeben, die früher nicht bekannt gewesen zu sein scheint.

Vor einigen Jahren gelangte ich, mit ähnlichen bestimmten Integralen beschäftiget, zu einer Entwickelung dieser Function in eine Reihe nach den aufsteigenden Potenzen des Modulus k, welche für jeden Index h gültig ist. Die ungemeine Einfachheit des erlangten Resultates, und der Umstand, dass es mir nicht möglich war zu ermitteln, ob dasselbe bereits bekannt sei, veranlassten mich in einem Schreiben an Cauchy darüber anzufragen. Der grosse Mathematiker hatte, einige Monate nach dem Empfange meines Briefes, die Güte mir mitzutheilen, dass meine Reihen-Entwickelung ihm neu gewesen und er dieselbe in einer Sitzung der Pariser Academie, am 17. Juli 1854, in meinem Namen, dieser gelehrten Körperschaft mitgetheilt habe, zugleich mit allgemeinen den Gegenstand betreffenden Untersuchungen. Auf diese Weise kam es, dass die neue Formel zuerst in den „comptes rendus" gedruckt wurde. Im Jahre 1855 erschien darauf in den Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig mein Aufsatz: „Untersuchungen über die Function I_k^h, mit Anwendungen auf das Kepler'sche Problem", in welcher Schrift ich für die neue Formel den Beweis so mittheilte, wie ich ihn gefunden. Für den Fall, dass h eine ganze Zahl bedeutet bin ich, wie man im Folgenden finden wird, von Reihen ausgegangen, welche nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreiten, so dass sich die Differenzialgleichung der Function ergab, ohne die Entwickelung derselben in eine Reihe dabei als bekannt vorauszusetzen. Aus der so erhaltenen Differenzialgleichung konnte man nun umgekehrt leicht die specielle Bessel'sche Reihe erhalten.

In den folgenden Paragraphen habe ich, im Anschlusse an den obengenannten Aufsatz, ausser dem bereits früher gegebenen Beweise für die neue Formel noch zwei andere mitgetheilt, auch eine allgemeine Relation aufgestellt, von welcher die bekannte $k\left(\mathrm{I}_k^{h-1} + \mathrm{I}_k^{h+1}\right) = 2h \,.\, \mathrm{I}_k^h$, wo h, eine ganze Zahl bedeutet, ein besonderer Fall ist. Die Zurückführung einiger bestimmten Integrale endlich, auf die Function I_k^h mittelst Einführung eines imaginären Modulus k glaubte ich ihrer Einfachheit wegen nicht unterdrücken zu dürfen, zumal da sich unter Anderm für die Summe der Quadrate aller Glieder der Exponentialgrösse ein bestimmtes Integral auf diesem Wege herausstellte.

§. 1.

Es ist, wenn h eine gerade Zahl:

$$\mathrm{I}_k^h = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos h\varepsilon \,.\, \cos(k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon$$

und wenn h ungerade:

$$\mathrm{I}_k^h = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin h\varepsilon \,.\, \sin(k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon$$

und die Erklärung der mit I_k^h bezeichneten Functionen ergiebt mit Benutzung des allgemeinen Theorems, nach welchem sich jede Function in eine Reihe nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen entwickeln lässt:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos(k \,.\, \sin\varepsilon) = \mathrm{I}_k^0 + 2\mathrm{I}_k^2 \,.\, \cos 2\varepsilon + 2\mathrm{I}_k^4 \,.\, \cos 4\varepsilon + 2\mathrm{I}_k^6 \,.\, \cos 6\varepsilon + \ldots. \\ \sin(k \,.\, \sin\varepsilon) = \qquad 2\mathrm{I}_k^1 \,.\, \sin\varepsilon + 2\mathrm{I}_k^3 \,.\, \sin 3\varepsilon + 2\mathrm{I}_k^5 \,.\, \sin 5\varepsilon + \ldots. \end{cases}$$

denn wenn man in der ersten dieser Reihen mit $d\varepsilon$ multiplicirt, und dann von 0 bis 2π integrirt, so fallen ausser dem ersten Gliede alle übrigen weg, und man erhält identisch:

$$\int_0^{2\pi} \cos(k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon = 2\pi \,.\, \mathrm{I}_k^0$$

Wenn man ferner in derselben Reihe auf beiden Seiten nach einander durch die Cosinusse der geraden Vielfachen von ε multiplicirt, und dann immer zwischen 0 und 2π integrirt, so ergiebt sich identisch:

$$\int_0^{2\pi} \cos(k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, \cos 2i\varepsilon \,.\, d\varepsilon = 2\mathrm{I}_k^{2i} \,.\, \int_0^{2\pi} \cos 2i\varepsilon \,.\, \cos 2i\varepsilon \,.\, d\varepsilon = 2\pi \,.\, \mathrm{I}_k^{2i}$$

Ebenso überzeugt man sich von der Richtigkeit der zweiten Reihe, indem man auf beiden Seiten durch die Sinusse der ungeraden Vielfachen von ε multiplicirt und darauf integrirt.

Setzt man in die Gleichungen (1) $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ statt ε, so ergeben sich daraus die folgenden:

$$(2) \quad \begin{cases} \cos(k.\cos\varepsilon) = I_k^0 - 2\,I_k^2 \,.\, \cos 2\varepsilon + 2\,I_k^4 \,.\, \cos 4\varepsilon - 2\,I_k^6 \,.\, \cos 6\varepsilon + \ldots\ldots \\ \sin(k.\cos\varepsilon) = \qquad 2\,I_k^1 \,.\, \cos\varepsilon - 2\,I_k^3 \,.\, \cos 3\varepsilon + 2\,I_k^5 \,.\, \cos 5\varepsilon - \ldots\ldots \end{cases}$$

welche von **Jacobi** im 15. Bande des **Crelle'schen Journals für die reine und angewandte Mathematik**, Seite 12, aufgestellt sind.

§. 2.

Wenn man die Gleichungen (2) nach ε differenziirt, findet man:

$$k.\sin(k.\cos\varepsilon).\sin\varepsilon = 2.2.I_k^2.\sin 2\varepsilon - 2.4.I_k^4.\sin 4\varepsilon + 2.6.I_k^6.\sin 6\varepsilon - \ldots$$

$$k.\cos(k.\cos\varepsilon).\sin\varepsilon = 2.1.I_k^1.\sin\varepsilon - 2.3.I_k^3.\sin 3\varepsilon + 2.5.I_k^5.\sin 5\varepsilon - \ldots$$

Es ist aber auch, wenn man jede der beiden Gleichungen (2) mit $k.\sin\varepsilon$ multiplicirt und nach den Sinussen der Vielfachen ordnet,

$$k.\sin(k.\cos\varepsilon).\sin\varepsilon = k\,(I_k^1 + I_k^3).\sin 2\varepsilon - k\,(I_k^3 + I_k^5).\sin 4\varepsilon + k\,(I_k^5 + I_k^7).\sin 6\varepsilon -$$

$$k.\cos(k.\cos\varepsilon).\sin\varepsilon = k\,(I_k^0 + I_k^2).\sin\varepsilon - k\,(I_k^2 + I_k^4).\sin 3\varepsilon + k\,(I_k^4 + I_k^6).\sin 5\varepsilon -$$

also:

$$\begin{aligned} k\,(I_k^0 + I_k^2) &= 2.1.I_k^1 \\ k\,(I_k^1 + I_k^3) &= 2.2.I_k^2 \\ k\,(I_k^2 + I_k^4) &= 2.3.I_k^3 \\ k\,(I_k^3 + I_k^5) &= 2.4.I_k^4 \\ k\,(I_k^4 + I_k^6) &= 2.5.I_k^5 \end{aligned}$$

u. s. w.

d. h. allgemein

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad k\,(I_k^{h-1} + I_k^{h+1}) = 2h\,.\,I_k^h.$$

Aus der Gleichung (3) ersieht man, dass, wenn von den Functionen I_k^0, I_k^1, I_k^2, I_k^3, ... zwei bekannt sind, man die übrigen aus diesen durch lineare Gleichungen finden kann, auch führt die wiederholte Anwendung dieser Gleichung leicht zu folgender allgemeinen Relation:

$$\mathrm{I}_k^{2h} + \frac{2h}{1} \cdot \mathrm{I}_k^{2h-2} + \frac{2h \,.\, 2h-1}{1 \,.\, 2} \cdot \mathrm{I}_k^{2h-4} + \frac{2h \,.\, 2h-1 \,.\, 2h-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot \mathrm{I}_k^{2h-6} + \ldots$$

$$(4) \ldots\ldots\ldots + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2h \,.\, 2h-1 \,.\, 2h-2 \ldots\ldots (h+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots\ldots h} \cdot \mathrm{I}_k^0 = 2^{2h-1} \cdot \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2h-1)}{k^h} \cdot \mathrm{I}_k^h$$

wo h irgend eine ganze Zahl bedeutet.

§. 3.

Durch Differenziation der Gleichungen (2) nach k erhält man:

$$(5)\ \sin(k.\cos\varepsilon).\cos\varepsilon = -\frac{d\mathrm{I}_k^0}{dk} + 2 \,.\, \frac{d\mathrm{I}_k^2}{dk}.\cos 2\varepsilon - 2 \,.\, \frac{d\mathrm{I}_k^4}{dk}.\cos 4\varepsilon + 2 \,.\, \frac{d\mathrm{I}_k^6}{dk}.\cos 6\varepsilon - ..$$

$$(6)\ \cos(k.\cos\varepsilon).\cos\varepsilon = 2\frac{d\mathrm{I}_k^1}{dk}.\cos\varepsilon - 2.\frac{d\mathrm{I}_k^3}{dk}.\cos 3\varepsilon + 2 \,.\, \frac{d\mathrm{I}_k^5}{dk}.\cos 5\varepsilon - 2 \,.\, \frac{d\mathrm{I}_k^7}{dk}.\cos 7\varepsilon + ..$$

es ist aber auch, durch Multiplication der Gleichungen (2) mit $\cos\varepsilon$, wenn man nach den Cosinussen der Vielfachen von ε ordnet:

$$\sin(k.\cos\varepsilon).\cos\varepsilon = \mathrm{I}_k^1 + (\mathrm{I}_k^1 - \mathrm{I}_k^3).\cos 2\varepsilon - (\mathrm{I}_k^3 - \mathrm{I}_k^5).\cos 4\varepsilon + (\mathrm{I}_k^5 - \mathrm{I}_k^7).\cos 6\varepsilon - \ldots$$

$$\cos(k.\cos\varepsilon).\cos\varepsilon = (\mathrm{I}_k^0 - \mathrm{I}_k^2).\cos\varepsilon - (\mathrm{I}_k^2 - \mathrm{I}_k^4).\cos 3\varepsilon + (\mathrm{I}_k^4 - \mathrm{I}_k^6).\cos 5\varepsilon - \ldots$$

also:

$$\mathrm{I}_k^1 = -\frac{d\mathrm{I}_k^0}{dk}$$

$$\mathrm{I}_k^1 - \mathrm{I}_k^3 = 2\frac{d\mathrm{I}_k^2}{dk}$$

$$\mathrm{I}_k^3 - \mathrm{I}_k^5 = 2\frac{d\mathrm{I}_k^4}{dk}$$

$$\mathrm{I}_k^5 - \mathrm{I}_k^7 = 2\frac{d\mathrm{I}_k^6}{dk}$$

u. s. w.

$$\mathrm{I}_k^0 - \mathrm{I}_k^2 = 2\frac{d\mathrm{I}_k^1}{dk}$$

$$\mathrm{I}_k^2 - \mathrm{I}_k^4 = 2\frac{d\mathrm{I}_k^3}{dk}$$

$$\mathrm{I}_k^4 - \mathrm{I}_k^6 = 2\frac{d\mathrm{I}_k^5}{dk}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich in Verbindung mit (3)

$$I^2_k = I^0_k - 2.\frac{dI^1_k}{dk} = \frac{2}{k}.\,I^1_k - I^2_k - 2.\frac{dI^1_k}{dk}$$

$$I^3_k = I^1_k - 2.\frac{dI^2_k}{dk} = \frac{2.2}{k}.\,I^2_k - I^3_k - 2.\frac{dI^2_k}{dk}$$

$$I^4_k = I^2_k - 2.\frac{dI^3_k}{dk} = \frac{2.3}{k}.\,I^3_k - I^4_k - 2\frac{dI^3_k}{dk}$$

u. s. w.

woraus:

$$I^2_k = \frac{1}{k}.I^1_k - \frac{dI^1_k}{dk}$$

$$I^3_k = \frac{2}{k}.I^1_k - \frac{dI^2_k}{dk}$$

$$I^4_k = \frac{3}{k}.I^1_k - \frac{dI^3_k}{dk}$$

u. s. w.

und allgemein:

$$I^{h+1}_k = \frac{h}{k}.I^h_k - \frac{dI^h_k}{dk}$$

hervorgeht.

Aus dieser Gleichung erhält man durch Differenziation:

$$\frac{d^2I^h_k}{dk^2} = -\frac{(2h+k^2)}{2k^2}.\,I^h_k + \frac{h}{k}.\frac{dI^h_k}{dk} + \tfrac{1}{2}\,I^{h+2}_k, \text{ also, da}$$

$$\tfrac{1}{2}\,I^{h+2}_k = -\tfrac{1}{2}\,I^h_k + \frac{(h+1)}{k}.I^{h+1}_k \text{ und}$$

$$\frac{(h+1)}{k}.\,I^{h+1}_k = \frac{h}{k}.\frac{(h+1)}{k}.\,I^k_h - \frac{(h+1)}{k}.\frac{dI^h_k}{dk},$$

$$\frac{d^2I^h_k}{dk^2} + \frac{1}{k}.\frac{dI^h_k}{dk} + I^h_k\left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

von welcher Differenzialgleichung der zweiten Ordnung die Function I^h_k ein partikuläres Integral ist.

§. 4.

Zurückführung einiger bestimmten Integrale auf die Function I^h_k.

$$1 . \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{n.\cos\varepsilon} . \cos(m.\sin\varepsilon) . d\varepsilon.$$

Es ist:

$$e^{n.\cos\varepsilon} . \cos(m.\sin\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\cos[m.\sin\varepsilon + in.\cos\varepsilon] + \tfrac{1}{2}i.\sin[m.\sin\varepsilon - in.\cos\varepsilon]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos[m.\sin\varepsilon - in.\cos\varepsilon] - \tfrac{1}{2}i.\sin[m.\sin\varepsilon + in.\cos\varepsilon]$$

oder, wenn man

$$m = a.\cos\alpha$$
$$in = a.\sin\alpha$$

setzt,

$$e^{n.\cos\varepsilon} . \cos(m.\sin\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\cos\ [a.\sin(\varepsilon+\alpha)] + \tfrac{1}{2}\cos\ [a.\sin(\varepsilon-\alpha)]$$
$$+ \tfrac{1}{2}i.\sin[a.\sin(\varepsilon-\alpha)] - \tfrac{1}{2}i.\sin[a.\sin(\varepsilon+\alpha)].$$

Da aber allgemein

$$\int_0^{2\pi}\cos(a.\sin u).du = 2\pi.I^0_a, \text{ und}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(a.\sin u).du = 0, \text{ so ergiebt sich}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{n.\cos\varepsilon} . \cos(m.\sin\varepsilon).d\varepsilon = I^0_a = I^0_{\sqrt{m^2-n^2}}.$$

Allgemein ist, wenn $m = a.\cos\alpha$, und $n = a.\sin\alpha$ gesetzt wird,

$$\int_0^{2\pi}\cos[m.\sin\varepsilon + n.\cos\varepsilon].d\varepsilon = \int_0^{2\pi}\cos[a.\sin(\varepsilon+\alpha)].d\varepsilon = 2\pi.I^0_a = 2\pi.I^0_{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos[m.\sin\varepsilon - n.\cos\varepsilon].d\varepsilon = \int_0^{2\pi}\cos[a.\sin(\varepsilon-\alpha)].d\varepsilon = 2\pi.I^0_a = 2\pi.I^0_{\sqrt{m+{}^2n^2}}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos[m.\sin\varepsilon + n.\cos\varepsilon].d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos[m.\sin\varepsilon - n.\cos\varepsilon].d\varepsilon = 2I^0_{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Setzt man hier ni statt n, so ergiebt sich, da dann $a = \sqrt{m^2-n^2}$, die obige Formel auch gewissermassen als Corollar aus dieser letzten.

$$2 \,.\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(h\varepsilon - m \,.\, \sin\varepsilon - n \,.\, \cos\varepsilon\right) . \, d\varepsilon \,.$$

Setzt man wieder

$$m = a \,.\, \cos\alpha$$

$$n = a \,.\, \sin\alpha, \text{ so ergiebt sich}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\left[h\varepsilon - a \,.\, \sin\left(\varepsilon + \alpha\right)\right] . \, d\varepsilon = \cos h\alpha \int_0^{2\pi} \cos\left(hu - a \,.\, \sin u\right) . \, du + \sin h\alpha \int_0^{2\pi} \sin(hu - a \,.\, \sin u) \,.\, du$$

wo $u = \varepsilon + \alpha$.

Da aber

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(hu - a \,.\, \sin u\right) . \, du = 0$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(hu - a \,.\, \sin u\right) . \, du = \mathrm{l}_a^h$$

so ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(h\varepsilon - m \,.\, \sin\varepsilon - n \,.\, \cos\varepsilon\right) . \, d\varepsilon = \mathrm{l}^h_{\sqrt{m^2+n}} \,.\, \cos h\alpha \,.$$

$$3 \,.\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(h\varepsilon - m \,.\, \sin\varepsilon - n \,.\, \cos\varepsilon\right) . \, d\varepsilon.$$

Es ist, wenn $m = a \,.\, \cos\alpha$, $n = a \,.\, \sin\alpha$, und $u = \varepsilon + \alpha$,

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(h\varepsilon - m \,.\, \sin\varepsilon - n \,.\, \cos\varepsilon\right) . \, d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \sin\left[h\varepsilon - a \,.\, \sin\left(\varepsilon + \alpha\right)\right] . \, d\varepsilon$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\left[hu - a \,.\, \sin u - h\alpha\right] . \, du$$

$$= \cos h\alpha \int_0^{2\pi} \sin\left(hu - a \,.\, \sin u\right) . \, du$$

$$- \sin h\alpha \int_0^{2\pi} \cos\left(hu - a \,.\, \sin u\right) . \, du$$

$$= -2\pi \,.\, \mathrm{l}_a^h \,.\, \sin h\alpha, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(h\varepsilon - m \,.\, \sin\varepsilon - n \,.\, \cos\varepsilon\right) . \, d\varepsilon = -\mathrm{l}^h_{\sqrt{m^2+n^2}} \,.\, \sin h\alpha.$$

$$4\;.\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{n\,.\,\cos\varepsilon}\,.\,\cos(m\,.\cos\varepsilon)\,.\,d\varepsilon.$$

Es ist

$$\begin{aligned} e^{n\,.\,\cos\varepsilon}\,.\,\cos(m\,.\cos\varepsilon) &= \tfrac{1}{2}\left\{e^{(n+im)\,.\,\cos\varepsilon}+e^{(n-im)\,.\,\cos\varepsilon}\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\cos\,[(m+in)\cos\varepsilon]+\cos\,[(m-in)\cos\varepsilon]\right\} \\ &\quad+\tfrac{1}{2}\left\{\sin\,[(m+in)\cos\varepsilon]+\sin\,[(m-in)\cos\varepsilon]\right\}. \end{aligned}$$

Hier kommen bei der Integration von 0 bis 2π, da

$$\int_0^{2\pi}\sin(k.\cos\varepsilon).\,d\varepsilon=0,$$

die in i multiplicirten Glieder nicht in Betracht, man hat demnach

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{n\,.\,\cos\varepsilon}\,.\cos(m\,.\cos\varepsilon)\,.\,d\varepsilon &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\,[(m+in)\cos\varepsilon]\,.\,d\varepsilon+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\,[(m-in)\cos\varepsilon]\,.\,d\varepsilon \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{\mathrm{I}^{0}_{m+ni}+\mathrm{I}^{0}_{m-ni}\right\} \\ &= 1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\cos 2\alpha+\frac{1}{(1\,.\,2)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^4\cos 4\alpha-\frac{1}{(1\,.\,2\,.\,3)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^6\cos 6\,\alpha+\ldots \end{aligned}$$

wo $m=a\,.\cos\alpha$, und $n=a\,.\sin\alpha$ gesetzt ist.

$$5\;.\;\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varepsilon^{2h}\,.\cos(k\,.\sin\varepsilon)\,.\,d\varepsilon.$$

Da

$$\begin{aligned} 2^{2h-1}.\cos^{2h}\varepsilon = \cos 2h\varepsilon+\frac{2h}{1}\cos(2h-2)\,.\,\varepsilon+\frac{2h\,.\,2h-1}{1\,.\,2}\cos(2h-4)\,.\,\varepsilon+\ldots \\ +\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{2h.\,2h-1\ldots.\,(h+1)}{1.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,h}, \end{aligned}$$

so ist, wenn man auf beiden Seiten mit $\cos\,(k\,.\sin\varepsilon)$ multiplicirt und darauf integrirt, mit Berücksichtigung des Umstandes, dass

$$\int_0^{2\pi}\cos(2h\varepsilon-k\,.\sin\varepsilon)\,.\,d\varepsilon=\int_0^{2\pi}\cos(2h\varepsilon+k\,.\sin\varepsilon)\,.\,d\varepsilon,$$

$$2^{2h-1}\int_0^{2\pi}\cos^{2h}\varepsilon\,.\cos(k\,.\sin\varepsilon)\,.\,d\varepsilon = 2\pi\left\{\begin{aligned}\mathrm{I}^{2h}_{k}+\frac{2h}{1}\,.\,\mathrm{I}^{2h-2}_{k}+\frac{2h\,.\,2h-1}{1\,.\,2}\mathrm{I}^{2h-4}_{k}+\ldots \\ +\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{2h.\,2h-1\ldots.\,(h+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,h}\,.\,\mathrm{I}^{0}_{k}.\end{aligned}\right.$$

Es ist aber die hier auf der rechten Seite stehende Grösse:

$$2\pi \,.\, 2^{2h-1}\, \frac{1.3.5\ldots.(2h-1)}{k^h}\, \mathrm{I}_k^h,$$

demnach

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2h}\varepsilon \,.\, \cos(k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon = \frac{1.3.5\ldots.(2h-1)}{k^h}\, \mathrm{I}_k^h,$$

welches Resultat Bessel auf anderm Wege erhält, auch später von Jacobi aus allgemeinen Betrachtungen gefunden ist.

Setzt man in den Ausdruck für das Integral $1 \,.\, m = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{n \,.\, \cos\varepsilon} \,.\, d\varepsilon = \mathrm{I}_{ni}^0$$

wo $i = \sqrt{-1}$. Es ist aber

$$\mathrm{I}_{ni}^{0} = 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{(1.2)^2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 + \frac{1}{(1.2.3)^2}\left(\frac{n}{2}\right)^6 + \ldots,$$ demnach

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{n \,.\, \cos\varepsilon} d\varepsilon = 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{(1.2)^2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 + \frac{1}{(1.2.3)^2}\left(\frac{n}{2}\right)^6 + \ldots$$

Die Summe der Quadrate aller Glieder der Exponential-Reihe für e^x, wird also durch das bestimmte Integral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\varepsilon} \,.\, d\varepsilon$$

ausgedrückt.

Setzt man in den für das Integral 1. gefundenen Ausdruck $n = m$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{m\cos\varepsilon} \cos(m \,.\, \sin\varepsilon)\, d\varepsilon = \mathrm{I}_0^0 = 1.$$

Der Ausdruck für das Integral 2. giebt, wenn $m = 0$, also $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - n \,.\, \cos\varepsilon)\, d\varepsilon = \cos \,.\, \frac{h\pi}{2} \,.\, \mathrm{I}_n^h,$$ also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n \,.\, \cos\varepsilon)\, d\varepsilon = \mathrm{I}_n^0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = -\,\mathrm{I}_n^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(3\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(4\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = +\,\mathrm{I}_n^4$$

u. s. w.

d. h. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(h\varepsilon - k\cos\varepsilon)\,d\varepsilon$, wenn h ungerade $= 0$ und wenn h gerade $\mp\,\mathrm{I}_k^h$, wo das obere Zeichen gilt, wenn h eine Zahl von der Form $2m$ und das untere, wenn h von der Form $4m$.

Setzt man in den Ausdruck für das Integral 3. $m = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(h\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = -\sin\frac{h\pi}{2}\,.\,\mathrm{I}_n^h,\ \text{also}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = -\,\mathrm{I}_n^1$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(3\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = +\,\mathrm{I}_n^3$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(4\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(5\varepsilon - n\,.\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = -\,\mathrm{I}_n^5$$

u. s. w.

und allgemein

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon - k.\cos\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

wenn h gerade: gleich Null, und für ein ungerades h gleich $\mp I_k^h$, wo das obere Zeichen gilt, wenn h von der Form $2m-1$, und das untere, wenn h von der Form $4m-1$.

§. 5.

In den vorhergehenden Betrachtungen wurde unter h immer eine ganze Zahl verstanden, ein Fall, der für die bisher gemachten Anwendungen dieser Functionen auszureichen scheint. Wir wollen aber jetzt diese Voraussetzung aufheben und statt h setzen $h\sqrt{-1}$, wo h irgend eine beliebige Zahl, gleichviel ob eine ganze oder gebrochene bedeutet. Es ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\sqrt{-1}.\varepsilon - k.\sin\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \cos h\sqrt{-1}.\varepsilon.\cos(k.\sin\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_0^{2\pi} \sin h\sqrt{-1}.\varepsilon.\sin(k.\sin\varepsilon)\, d\varepsilon$$

oder, wenn man für $\cos h.\sqrt{-1}.\varepsilon$ und $\sin h.\sqrt{-1}.\varepsilon$ die Ausdrücke durch die Exponentialgrössen setzt

$$\int_0^{2\pi^*} \cos(h.\sqrt{-1}.\varepsilon - k.\sin\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{(e^{h\varepsilon}+e^{-h\varepsilon})}{2}.\cos(k.\sin\varepsilon)\, d\varepsilon + \sqrt{-1}.\int_0^{2\pi} \frac{(e^{h\varepsilon}-e^{-h\varepsilon})}{2}.\sin(k\sin\varepsilon) d\varepsilon$$

Da nun bekanntlich

$$\int e^{h\varepsilon}.\sin^n\varepsilon.d\varepsilon = \frac{e^{h\varepsilon}.\sin^{n-1}\varepsilon\,(h.\sin\varepsilon - n.\cos\varepsilon)}{h^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{h^2+n^2}.\int e^{h\varepsilon}.\sin^{n-2}\varepsilon.d\varepsilon$$

$$\int e^{h\varepsilon}.\cos^n\varepsilon.d\varepsilon = \frac{e^{h\varepsilon}.\cos^{n-1}\varepsilon\,(h.\cos\varepsilon + n.\sin\varepsilon)}{h^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{h^2+n^2}.\int e^{h\varepsilon}.\cos^{n-2}\varepsilon.d\varepsilon$$

so erhält man zunächst

$$\int e^{h\varepsilon}.d\varepsilon = \frac{1}{h}e^{h\varepsilon},$$

dies geht für $\varepsilon = 0$ in $\frac{1}{h}$, für $\varepsilon = 2\pi$ in $\frac{1}{h}e^{2h\pi}$ über. Ferner ist

$$\int e^{-h\varepsilon}.d\varepsilon = -\frac{1}{h}e^{-h\varepsilon},$$

welches für $\varepsilon = 0$ in $-\frac{1}{h}$, für $\varepsilon = 2\pi$ in $-\frac{1}{h}e^{-2h\pi}$ übergeht. Es ist demnach

$$\int_0^{2\pi} \frac{(e^{h\varepsilon}+e^{-h\varepsilon})}{2} d\varepsilon = \frac{1}{2h}(e^{2h\pi} - e^{-2h\pi}).$$

Darauf folgen die Glieder

$$-\tfrac{1}{2}\int e^{h\varepsilon}.k^2.\frac{\sin^2\varepsilon}{1.2}d\varepsilon \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}\int e^{-h\varepsilon}.k^2.\frac{\sin^2\varepsilon}{1.2}.d\varepsilon.$$

Diese nehmen für $\varepsilon = 0$ resp. die Werthe

$$-\tfrac{1}{2}.\frac{k^2}{h(h^2+4)} \quad \text{und} \quad +\tfrac{1}{2}.\frac{k^2}{h(h^2+4)} \text{ an,}$$

heben sich also auf, und für $\varepsilon = 2\pi$ kommt

$$-\tfrac{1}{2}.\frac{e^{2h\pi}}{h(h^2+4)}.k^2 \quad \text{und} \quad +\tfrac{1}{2}.\frac{e^{-2h\pi}}{h(h^2+4)}.k^2, \text{ woraus}$$

$$-\int_0^{2\pi}\frac{(e^{h\varepsilon}+e^{-h\varepsilon})}{2}.k^2.\frac{\sin^2\varepsilon}{1.2} = -\frac{1}{2h}.(e^{2h\pi}-e^{-2h\pi}).\frac{k^2}{(h^2+2^2)} \text{ hervorgeht.}$$

Die nun folgenden Glieder sind

$$+\tfrac{1}{2}.\int e^{h\varepsilon}.k^4.\frac{\sin^4\varepsilon}{1.2.3.4}d\varepsilon \quad \text{und} \quad +\tfrac{1}{2}.\int e^{-h\varepsilon}.k^4.\frac{\sin^4\varepsilon}{1.2.3.4}d\varepsilon,$$

welche für $\varepsilon = 0$ sich wieder vernichten, und für $\varepsilon = 2\pi$ resp. in

$$+\frac{e^{2h\pi}.k^4}{2h.(h^2+2^2)(h^2+4^2)} \quad \text{und} \quad -\frac{e^{-2h\pi}.k^4}{2h.(h^2+2^2)(h^2+4^2)} \text{ übergehen, so dass}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{(e^{h\varepsilon}+e^{-h\varepsilon})}{2}.k^4.\frac{\sin^4\varepsilon}{1.2.3.4}d\varepsilon = +\frac{(e^{2h\pi}-e^{-2h\pi})}{2h(h^2+2^2)(h^2+4^2)}.k^4 \text{ wird.}$$

Fährt man in gleicher Weise fort, so ergiebt sich

$$\int_0^{2\pi}\frac{(e^{h\varepsilon}+e^{-h\varepsilon})}{2}\cos(k.\sin\varepsilon).d\varepsilon = \frac{(e^{2k\pi}-e^{-2h\pi})}{2h}.\left\{1-\frac{k^2}{h^2+2^2}+\frac{k^4}{(h^2+2^2)(h^2+4^2)}-\frac{k^6}{(h^2+2^2)(h^2+4^2)(h^2+6^2)}+.\right\}$$

Was den imaginären Theil des obigen Integrals betrifft, so ist resp. für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 2\pi$

$$\int e^{h\varepsilon}.k.\sin\varepsilon.d\varepsilon = -\frac{k}{h^2+1} \quad \text{und} \quad = -\frac{e^{2h\pi}k}{h^2+1},$$

$$-\int e^{-h\varepsilon}.k.\sin\varepsilon.d\varepsilon = +\frac{k}{h^2+1} \quad \text{und} \quad = +\frac{e^{-2h\pi}k}{h^2+1},$$

jene heben sich auf, und diese geben addirt $-(e^{2h\pi}-e^{-2h\pi}).\frac{k}{h^2+1}$.

Ferner resp. für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 2\pi$

$$\int e^{h\varepsilon}.k^3.\frac{\sin^3\varepsilon}{1.2.3}d\varepsilon = -\frac{k^3}{(h^2+1)(h^2+3^2)} \quad \text{und} \quad = -\frac{k^3.e^{2h\pi}}{(h^2+1)(h^2+3^2)}$$

$$-\int e^{-h\varepsilon}.k^3.\frac{\sin^3\varepsilon}{1.2.3}d\varepsilon = +\frac{k^3}{(h^2+1)(h^2+3^2)} \quad \text{und} \quad = +\frac{k^3.e^{-2h\pi}}{(h^2+1)(h^2+3^2)}$$

wo wieder jene sich aufheben, diese aber addirt:

$$-(e^{2h\pi}-e^{-2h\pi})\cdot\frac{k^3}{(h^2+1)(h^2+3^2)}$$

geben. Fährt man auch hier in gleicher Weise fort, so ergiebt sich

$$\int_0^{2\pi}\frac{(e^{h\varepsilon}-e^{-h\varepsilon})}{2}\sin(k.\sin\varepsilon).d\varepsilon=-\frac{(e^{2h\pi}-e^{-2h\pi})}{2}\cdot\left\{\frac{k}{h^2+1}-\frac{k^3}{(h^2+1)(h^2+3^2)}+\frac{k^5}{(h^2+1)(h^2+3^2)(h^2+5^2)}-\ldots\right\}$$

also ist

$$\int_0^{2\pi}\cos(h\sqrt{-1}.\,\varepsilon-k.\sin\varepsilon).d\varepsilon=\frac{(e^{2h\pi}-e^{-2h\pi})}{2h}\cdot\left\{1-\frac{k^2}{h^2+2^2}+\frac{k^4}{(h^2+2^2)(h^2+4^2)}-\frac{k^6}{(h^2+2^2)(h^2+4^2)(h^2+6^2)}+\ldots\right\}$$

$$(12)\ \ldots\qquad -\sqrt{-1}.\,\frac{(e^{2h\pi}-e^{-2h\pi})}{2}\cdot\left\{\frac{k}{h^2+1}-\frac{k^3}{(h^2+1)(h^2+3^2)}+\frac{k^5}{(h^2+1)(h^2+3^2)(h^2+5^2)}-\ldots\right\}$$

Geht man wieder von den imaginären Grössen zurück, indem man in diese Gleichung $-h\sqrt{-1}$ für h setzt, so ergiebt sich

$$\frac{h}{\sin 2h\pi}\int_0^{2\pi}\cos(h\varepsilon-k.\sin\varepsilon).d\varepsilon=1+\frac{k^2}{h^2-2^2}+\frac{k^4}{(h^2-2^2)(h^2-4^2)}+\frac{k^6}{(h^2-2^2)(h^2-4^2)(h^2-6^2)}+\ldots$$

$$(13)\ \ldots\qquad +h\left\{\frac{k}{h^2-1}+\frac{k^3}{(h^2-1)(h^2-3^2)}+\frac{k^5}{(h^2-1)(h^2-3^2)(h^2-5^2)}+\ldots\right\}$$

Diese neue Entwickelung für die IFunktion, welche, wie man aus der Ableitung ersieht, für alle Werthe von h, sie mögen ganze oder gebrochene Zahlen sein, gültig ist, enthält die obige von Bessel gegebene Reihenentwickelung als speciellen Fall, wenn man, was hier sehr leicht ist, die Werthe der die Form $\frac{0}{0}$ annehmenden Glieder bestimmt. Für ein ungerades h giebt der Nenner der neuen Entwickelung die Constante

$$2h(h^2-1)(h^2-3^2)(h^2-5^2)\ldots\ldots[h^2-(h-2)^2]=2h(h+1)(h+3)(h+5)\ldots\ldots(2h-2)\times$$
$$(h-1)(h-3)(h-5)\ldots\ldots 2$$
$$=2^h.1.2.3\ldots\ldots h=2^h.\Pi_h$$

und für ein gerades h:

$$2h^2(h^2-2^2)(h^2-4^2)(h^2-6^2)\ldots\ldots[h^2-(h-2)^2]=2h^2(h+2)(h+4)(h+6)\ldots\ldots(2h-2)\times$$
$$(h-2)(h-4)(h-6)\ldots\ldots 2$$
$$=2^h.1.2.3\ldots\ldots h=2^h.\Pi_h,$$

also, wenn h eine ganze Zahl ist, gleichviel ob ungerade oder gerade,

$$\mathrm{I}_k^h=\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^h}{\Pi_h}\cdot\left\{1-\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{h+1}+\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^4}{1.2.(h+1).(h+2)}-\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^6}{1.2.3.(h+1).(h+2).(h+3)}+\ldots\right\}.$$

Wenn man unter h irgend eine, gleichviel ob ganze oder gebrochene Zahl versteht, so giebt die neue Entwickelung folgende Differenzialgleichung der zweiten Ordnung, welcher 1_k^h entspricht:

$$0 = \frac{d^2 1_k^h}{dk^2} + \frac{1}{k} \cdot \frac{d 1_k^h}{dk} + 1_k^h \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) + \frac{(h+k)}{k^2} \cdot \frac{\sin 2h\pi}{2\pi},$$

dieselbe geht für ein ganzes h in die von **Bessel** über, indem für diesen Fall das letzte Glied verschwindet.

§. 6.

Cauchy geht, um die von mir gegebene allgemeine Reihen-Entwickelung des bestimmten Integrals zu beweisen, von folgenden Betrachtungen aus.

Man hat

(1) . . . $$\Delta^n \frac{1}{x} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots n}{x(x+\Delta x)\,(x+2\Delta x) \ldots \ldots (x+n\Delta x)} (-\Delta x)^n,$$

und erhält daraus: 1, wenn man $\Delta x = 1$ setzt,

(2) . . . $$\Delta^n \frac{1}{x} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots n}{x(x+1)(x+2) \ldots \ldots (x+n)};$$

2, wenn man $\Delta x = 2$ setzt,

(3) . . . $$\Delta^n \frac{1}{x-n} = (-2)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots n}{(x-n)\,(x-n+2) \ldots \ldots (x+n-2)\,(x+n)}.$$

Andrerseits kann man auf verschiedene Arten die Funktion $\frac{1}{x}$ in Integrale umformen, deren endliche Differenzen sich in gleicher Weise bestimmen. Man hat z. B.

(4) . . . $$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx} . dt,$$

und man schliesst daraus, indem $\Delta x = 1$ gesetzt wird,

$$\Delta^n \frac{1}{x} = \int_0^\infty (e^{-t} - 1)^n . e^{-tx} . dt;$$

woraus folgt

(5) . . . $$\frac{1}{x(x+1)(x+2) \ldots \ldots (x+n)} = \int_0^\infty \frac{(1-e^{-t})^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n} . e^{-tx} . dt.$$

Man hat auch

(6) . . . $$\frac{1}{x} = \frac{i}{e^{2\pi xi} - 1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\alpha xi} . d\alpha,$$

woraus man, wenn $\Delta x = 2$ gesetzt wird, erhält

$$\Delta^n \frac{1}{x-n} = \frac{i}{e^{2\pi xi} - 1} \cdot \int_0^{2\pi} (2i \sin\alpha)^n . e^{\alpha xi} . d\alpha,$$

mithin

$$(7) \ldots \quad \frac{1}{(x-n)(x-n+2)\ldots\ldots(x+n-2)(x+n)} = \frac{i}{e^{2\pi x i}-1} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(-i\,.\,\sin\alpha)^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n} \,.\, e^{\alpha x i}\,.\,d\alpha.$$

Denkt man sich nun eine Funktion nach dem Maclaurin'schen Satze in eine Reihe nach den aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen unter den bekannten Bedingungen entwickelt, so darf man auch setzen

$$(8) \ldots \quad f(kz) = a_0 + a_1 \,.\, \frac{kz}{1} + a_2 \,.\, \frac{k^2 z^2}{1\,.\,z} + \ldots\ldots$$

wo die Coefficienten die bekannte Bedeutung haben.

Demnach ergiebt sich aus der Formel (5)

$$(9) \ldots \quad \int_0^{\infty} e^{-tx}\,.\,f[k(1-e^{-t})]\,.\,dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1 k}{x(x+1)} + \frac{a_2 k^2}{x(x+1)(x+2)} + \ldots\ldots$$

und aus der Formel (7)

$$(10) \ldots \quad \int_0^{2\pi} e^{\alpha x i}\,.\,f(-ik\,.\,\sin\alpha)\,.\,d\alpha = X \,.\, \frac{e^{2\pi x i}-1}{i},$$

wo X den Werth hat

$$(11) \ldots \quad X = a_0 \,.\, \frac{1}{x} + a_1 \,.\, \frac{k}{(x-1)(x+1)} + a_2 \,.\, \frac{k^2}{(x-2)x(x+2)} + \ldots\ldots$$

Wenn man, der Kürze wegen, setzt

$$(12) \ldots \quad e^{\alpha x i}\,.\,f(-ik\,.\,\sin\alpha) = A + Bi,$$

so giebt die Formel (10)

$$(13) \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} A\,d\alpha = \mathrm{X}\,.\,\sin 2\pi x, \\ &\int_0^{2\pi} B\,d\alpha = \mathrm{X}(1-\cos 2\pi x). \end{aligned} \right.$$

Demnach

$$(14) \ldots \quad \frac{\int_0^{2\pi} B\,d\alpha}{\int_0^{2\pi} A\,d\alpha} = \operatorname{tang} \pi x.$$

Wenn man

$$f(z) = e^{zi}$$

setzt, so giebt die Formel (10)

$$\int_0^{2\pi} e^{(\alpha x - k.\sin\alpha)i} . d\alpha = X . \frac{e^{2\pi x i} - 1}{i}$$

und demnach

$$(15) \ldots \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos(\alpha x - k.\sin\alpha).d\alpha = X.\sin 2\pi x, \\ &\int_0^{2\pi} \sin(\alpha x - k.\sin\alpha).d\alpha = X(1 - \cos 2\pi x), \end{aligned} \right.$$

wo

$$X = \frac{1}{x} + \frac{k}{(x-1)(x+1)} + \frac{k^2}{(x-2)x(x+2)} + \ldots\ldots$$

Die erste der Formeln (15) stimmt mit der allgemeinen Entwickelung für I_k^h überein. Wenn man das zweite Integral durch das erste dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{\int_0^{2\pi} \sin(\alpha x - k.\sin\alpha).d\alpha}{\int_0^{2\pi} \cos(\alpha x - k.\sin\alpha).d\alpha} = \operatorname{tang} \pi x,$$

welche Formel auch aus (14) folgt. Das Verhältniss dieser beiden Integrale ist daher ganz unabhängig von der Grösse k, welche ich in meiner Abhandlung den Modulus genannt habe.

Die ferneren Untersuchungen, welche der verewigte grosse Mathematiker Frankreichs an seinen Beweis meiner Formel geknüpft hat, hängen nicht mit diesen unmittelbar zusammen, weshalb ich sie hier übergehe und auf: „comptes rendus“ 1854. Juli 17 und Juli 24, zu verweisen mir erlaube.

§. 7.

Nach Cauchy's Beweis ist mir noch ein zweiter bekannt geworden, welcher die Einführung der imaginären Grössen nicht fordert und aus doppelter theilweiser Integration hervorgeht; derselbe ist in den folgenden Betrachtungen enthalten.

Es ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k.\sin\varepsilon).d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon).\cos(k.\sin\varepsilon).d\varepsilon + \int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon).\sin(k.\sin\varepsilon).d\varepsilon$$

$$= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i.k^{2i}}{1.2\ldots.2i} . \int_0^{2\pi} \cos h\varepsilon.\sin^{2i}\varepsilon\, d\varepsilon + \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i.k^{2i+1}}{1.2\ldots..2i+1} . \int_0^{2\pi} \sin h\varepsilon.\sin^{2i+1}\varepsilon.d\varepsilon.$$

Die Coefficienten der Reihe hängen also ab von dem Integrale

$$\varphi(\varepsilon, m) = \int \sin(h\varepsilon + \alpha) \,.\, \sin^m \varepsilon \,.\, d\varepsilon,$$

wenn man $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ setzt.

Wenn man, ohne über die Constante α zu bestimmen,

$$y = \sin(h\varepsilon + \alpha)$$

setzt, so dass

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = y^1 = h \,.\, \cos(h\varepsilon + \alpha), \quad \frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} = y^{11} = -h^2 \,.\, \sin(h\varepsilon + \alpha) = -h^2 y$$

wird, so ergiebt eine doppelte theilweise Integration

$$-h^2 \varphi(\varepsilon, m) = \int y^{11} \,.\, \sin^m \varepsilon \,.\, d\varepsilon$$

$$= y^1 \,.\, \sin^m \varepsilon - my \,.\, \sin^{m-1} \varepsilon \,.\, \cos\varepsilon + m \,.\, \int y \left\{ \overline{m-1} \,.\, \sin^{m-2} \varepsilon \,.\, \cos^2 \varepsilon - \sin^m \varepsilon \right\} d\varepsilon$$

$$= y^1 \,.\, \sin^m \varepsilon - my \,.\, \sin^{m-1} \varepsilon \,.\, \cos\varepsilon + m \left\{ \overline{m-1} \,.\, \varphi(\varepsilon, m-2) - m\varphi(\varepsilon, m) \right\}$$

oder

$$(h^2 - m^2)\, \varphi(\varepsilon, m) = -y^1 \,.\, \sin^m \varepsilon + my \,.\, \sin^{m-1} \varepsilon \,.\, \cos\varepsilon - m(m-1)\, \varphi(\varepsilon, m-2).$$

Integrirt man nun von 0 bis 2π und setzt

$$f(m) = \int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon + \alpha) \,.\, \sin^m \varepsilon . d\varepsilon,$$

so hat man

$$f(m) = -\frac{m \,.\, \overline{m-1}}{h^2 - m^2} \,.\, f(m-2),$$

vorausgesetzt, dass $m - 2$ nicht negativ ist, und hieraus durch Wiederholung

$$f(m) = (-1)^i \,.\, \frac{m \,.\, \overline{m-1} \,.\, \overline{m-2} \,.\,.\,.\,.\,.\, \overline{m-2i+1}}{(h^2 - m^2)[h^2 - (m-2)^2] \,.\,.\,.\,.\,.\, [h^2 - (m-2i+2)^2]} \,.\, f(m-2i),$$

vorausgesetzt, dass $m - 2i$ nicht negativ ist.

Hieraus ergiebt sich

für $m = 2i$

$$f(2i) = (-1)^i \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\, 2i}{h^2 - 2^2 \,.\, h^2 - 4^2 \,.\,.\,.\,.\,.\, h^2 - (2i)^2} \,.\, f(0),$$

für $m = 2i + 1$

$$f(2i+1) = (-1)^i \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\, 2i+1}{h^2 - 3^2 \,.\, h^2 - 5^2 \,.\,.\,.\,.\, h^2 - (2i+1)^2} \,.\, f(1).$$

Es ist aber

$$f(0) = \int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon + \alpha) \,.\, d\varepsilon = \frac{1}{h} \left\{ \cos\alpha - \cos(2h\pi + \alpha) \right\}$$

$$f(1) = \int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon + \alpha) \,.\, \sin\varepsilon \,.\, d\varepsilon = \frac{1}{h^2 - 1} \left\{ \sin(2h\pi + \alpha) - \sin\alpha \right\}$$

also:

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon + \alpha) \,.\, \sin^{2i}\varepsilon \,.\, d\varepsilon = (-1)^i \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\ldots 2i}{h \,.\, h^2 - 2^2 \,.\, h^2 - 4^2 \,.\, \ldots\ldots h^2 - (2i)^2} \left\{ \cos\alpha - \cos(2h\pi + \alpha) \right\}$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon + \alpha) \,.\, \sin^{2i+1}\varepsilon \,.\, d\varepsilon = (-1)^i \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\ldots 2i+1}{h^2 - 1^2 \,.\, h^2 - 3^2 \,.\, \ldots\ldots h^2 - (2i+1)^2} \left\{ \sin(2h\pi + \alpha) - \sin\alpha \right\}.$$

Setzt man nun in der ersten Formel $\alpha = \frac{\pi}{2}$, und in der zweiten $\alpha = 0$, und substituirt die so erhaltenen Werthe der Integrale, so ergiebt sich

$$\frac{1}{\sin 2h\pi} \int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{k^{2i}}{h \,.\, h^2 - 2^2 \,.\, h^2 - 4^2 \ldots\ldots h^2 - (2i)^2} + \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{k^{2i+1}}{h^2 - 1^2 \,.\, h^2 - 3^2 \ldots\ldots h^2 - (2i+1)^2}$$

welches mit der von mir gefundenen Formel übereinstimmt.

Die oben angegebene Relation zwischen den beiden bestimmten Integralen

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon - k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon$$

geht aus der letzten Herleitung ebenfalls sogleich hervor. Setzt man nämlich in (1) $\alpha = 0$ und in (2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon) \,.\, \sin^{2i}\varepsilon \,.\, d\varepsilon = (-1)^i \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\ldots i}{h \,.\, h^2 - 2^2 \,.\, h^2 - 4^2 \,.\, \ldots\ldots h^2 - (2i)^2} \left\{ 1 - \cos 2h\pi \right\}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon) \,.\, \sin^{2i+1}\varepsilon \,.\, d\varepsilon = (-1)^i \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\ldots 2i+1}{h^2 - 1^2 \,.\, h^2 - 3^2 \,.\, \ldots\ldots h^2 - (2i+1)^2} \left\{ \cos 2h\pi - 1 \right\},$$

demnach

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon - k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon = \operatorname{tang} h\pi \,.\, \int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon.$$

Man ersieht aus diesen allgemeinen Relationen, dass, wenn h eine ganze Zahl bedeutet,

$$\int_0^{2\pi} \sin(h\varepsilon - k \,.\, \sin\varepsilon) \,.\, d\varepsilon = 0,$$

welches auch direct leicht zu zeigen ist.

§. 8.

Aus der allgemeinen Reihenentwickelung ergiebt sich, wenn man nach einander $h+1$ und $h-1$ statt h setzt

$$\frac{1}{\sin 2(h+1)\,.\,\pi} \int_0^{2\pi} \cos[(h+1)\,.\,\varepsilon - k\,.\,\sin\varepsilon]\,.\,d\varepsilon = \frac{1}{h+1} + \frac{k^2}{(h^2-1)(h+3)} + \frac{k^4}{(h^2-1)(h^2-3^2)(h+5)} + \dots\dots$$

$$+ \frac{k}{(h+2)h} + \frac{k^3}{(h^2-2^2)\,h\,(h+4)} + \dots\dots$$

$$\frac{1}{\sin 2(h-1)\,.\,\pi} \int_0^{2\pi} \cos[(h-1)\,.\,\varepsilon - k\,.\,\sin\varepsilon]\,.\,d\varepsilon = \frac{1}{h-1} + \frac{k^2}{(h^2-1)(h-3)} + \frac{k^4}{(h^2-1)(h^2-3^2)(h-5)} + \dots\dots$$

$$+ \frac{k}{(h-2)h} + \frac{k^3}{(h^2-2^2)\,h\,(h-4)} + \dots\dots$$

und durch Addition:

$$\frac{1}{\sin 2(h+1)\,.\,\pi} \int_0^{2\pi} \cos[(h+1)\,.\,\varepsilon - k\,.\,\sin\varepsilon]\,.\,d\varepsilon + \frac{1}{\sin 2(h-1)\,.\,\pi} \int_0^{2\pi} \cos[(h-1)\,.\,\varepsilon - k\,.\,\sin\varepsilon]\,.\,d\varepsilon$$

$$= \frac{2h}{h^2-1} + \frac{2hk^2}{(h^2-1)(h^2-3^2)} + \frac{2hk^4}{(h^2-1)(h^2-3^2)(h^2-5^2)} + \dots\dots$$

$$+ \frac{2hk}{h(h^2-2^2)} + \frac{2hk^3}{h(h^2-2^2)(h^2-4^2)} + \dots\dots$$

$$= \frac{2h}{k}\,.\,\frac{1}{\sin 2h\pi} \int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k\,.\,\sin\varepsilon)\,.\,d\varepsilon - \frac{2}{k}.$$

Es ist also allgemein, wenn h irgend eine Zahl bedeutet,

$$k(\mathrm{I}^{h-1}_k + \mathrm{I}^{h+1}_k) = 2h\mathrm{I}^h_k - \frac{\sin 2h\pi}{\pi}.$$

In dieser Gleichung ist die bekannte oben angegebene, für eine ganze Zahl h gültige:

$$k(\mathrm{I}^{h-1}_k + \mathrm{I}^{h+1}_k) = 2h\mathrm{I}^h_k$$

als besonderer Fall enthalten; das letzte Glied wird nämlich, wenn h eine ganze Zahl ist, gleich Null.

§. 9.

Obgleich die Herleitung dieser Relation aus der Reihe sehr einfach ist, so lässt sich dieselbe doch auch unmittelbar durch theilweise Integration erhalten.

Es ist nämlich

$$\int \cos(h\varepsilon - k\,.\sin\varepsilon)\,.\,d\varepsilon = \frac{1}{h}\cos(k\,.\sin\varepsilon)\,.\sin h\varepsilon + \frac{k}{h}\int \sin h\varepsilon\,.\sin(k\,.\sin\varepsilon)\,.\cos\varepsilon\,.\,d\varepsilon$$

$$-\frac{1}{h}\sin(k\,.\sin\varepsilon)\,.\cos h\varepsilon + \frac{k}{h}\int \cos h\varepsilon\,.\cos(k\,.\sin\varepsilon)\,.\cos\varepsilon\,.\,d\varepsilon$$

also

$$\int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k\,.\sin\varepsilon)\,.\,d\varepsilon = \frac{k}{h}\int_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k\,.\sin\varepsilon)\,.\cos\varepsilon\,.\,d\varepsilon + \frac{1}{h}\sin 2h\pi$$

$$= \frac{k}{2h}\int_0^{2\pi} \cos[(h-1).\varepsilon - k.\sin\varepsilon].d\varepsilon + \frac{k}{2h}\int_0^{2\pi} \cos[(h+1).\varepsilon - k.\sin\varepsilon].d\varepsilon + \frac{1}{h}\sin 2h\pi$$

übereinstimmend mit dem obigen.

§. 10.

Wenn man die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung in §. 5 unabhängig von der Reihen-Entwickelung als bewiesen ansieht, so muss auch die Function I_k^h, wo h irgend eine, gleichviel ob ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, sich umgekehrt als particuläres Integral ergeben. Die Untersuchungen, welche hier eintreten, beziehen sich demnach auf eine Differenzialgleichung von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R,$$

wo P, Q und R Functionen von x sind. Für den Fall $R = 0$ erhält man alles was sich auf den Fall bezieht, in welchem h eine ganze Zahl ist, wie ich in meinem oben angeführten Aufsatze entwickelt habe.

Für die Behandlung der allgemeinen Differenzialgleichung bietet sich zunächst die Variation der willkührlichen Constanten dar, indem man von der Voraussetzung $R = 0$ ausgeht und dann in bekannter Weise fortfährt. Auf diesem Wege gelangt man auch zu einer Verallgemeinerung der semiconvergenten Reihen für I_k^h, welche nach den absteigenden Potenzen des Modulus k fortschreiten.