V.

Theoremata nonnulla de secundi ordinis superficie cum disciplinae mathematicae elementis

composuit

J. E. Czwalina.

Saepenumero praeceptoris, qui res mathematicas docet, interest, theoremata, quae in hujus disciplinae elementis declarantur, comparare cum aliis, quae subtilioribus studiis constituuntur, atque hoc modo demonstrare, et haec et illa esse eadem. Hac ratione non modo intelligentia augetur, sed etiam conjunctio singularum matheseos partium in lucem profertur. Quamobrem mihi quoque opera non periisse videtur, quam in his comparationibus inveniendis consumsi; atque si totius disciplinae perscrutationem neque spatium neque facultas permisit, tamen nonnullas ejus partes, quae ad superficiem secundi ordinis pertinent, lectori propositurus sum.

Ut vero considerationes omnibus perspicuae fiant, nonnullae definitiones praemittendae sunt.

Si linea quaelibet per punctum aliquod ducta superficiem in duobus punctis ita secat, ut intervalla inde a puncto illo usque ad puncta sectionis aequalia sint, id punctum superficiei centrum nominatur.

Cuique lineae per centrum currenti diametri nomen attribuimus, planitiei vero per centrum porrectae nomen planitiei diametralis.

Sed etiam, ubi nullum superficiei centrum est, loquimur de diametro et de planitie diametrali, qua de re hanc addimus definitionem.

Si centra omnium parallelarum superficiei sectionum rectam efficiunt lineam, ea linea est diametrus.

Planities diametralis, si omnino invenitur, nobis erit illa planities, in qua centra omnium chordarum parallelarum jacent.

Generalis superficiei secundi ordinis aequationis forma haec est:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy + 2gx + 2hy + 2iz + k = 0,$$

quae a systemate coordinatarum, quod cujusvis generis esse potest, omnino non pendet. Novem quoque non pendentes coefficientes insunt, ita ut superficies novem punctis semper constitui possit. Ac primum quidem demonstrare volumus, in unoquoque chordarum parallelarum systemate centra harum chordarum in una planitie posita esse. — Hunc ad finem sumamus, lineam, cui totum systema parallelum est, axem esse τῶν z. Si porro certi τοῦ x et y valores proponuntur, duos τοῦ z nostra aequatio valores praebet, iis segmentis respondentes, quae continentur iis lineis, quae et ex puncto aliquo planitiei τῶν x et y axi τοῦ z ductae sunt parallelae et valoribus τοῦ x et y respondent. Tales τοῦ z valores sint z_1 et z_2. Si igitur aequationem supra dictam ex gradibus τοῦ z transformamus, facile ordinatam τοῦ z, quae ad centrum ita ortae chordae pertinet, constituere possumus. Haec ordinata erit

$$= \frac{z_1 + z_2}{2},$$

et si eam signo ζ significamus, est

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Aequatio nostra erit

$$cz^2 + (2dy + 2ex + 2i)\,z + ax^2 + by^2 + 2fxy + 2gx + 2hy + k = 0.$$

Unde

$$z_1 = -\frac{(dy + ex + i)}{c} + \sqrt{\triangle} \quad \text{et}$$

$$z_2 = -\frac{(dy + ex + i)}{c} - \sqrt{\triangle},$$

atque

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2}{2} = -\frac{(dy + ex + i)}{c}.$$

Quae cum planitiei aequatio sit, omnia parallelarum chordarum centra in una planitie posita sunt. Quum praeterea cuique linearum systemati talis planities respondeat, perspicuum est, innumerabiles esse planities diametrales. Ponamus, planitiem τῶν (xy) ipsam esse planitiem diametralem; necesse est, aequatio superficiei talem accipiat formam, ut

$$z_1 + z_2 = 0$$

fiat, quia coordinata centri $z = 0$ erit; ita ut illi positivo valori τοῦ z respondeat aequalis ac negativus. Unde sequitur, ut coefficientes τοῦ z evanescant, i. e. $dy + ex + i = 0$ fiant, et aequatio

$$ax^2 + by^2 + 2fxy + 2gx + 2hy + k + cz^2 = 0 \quad \text{sit.}$$

$z = 0$ positum praebet aequationem ipsius sectionis diametralis. Quae si est curva, quae centrum habeat, non parabola, atque a centro facimus initium coordinatarum et radios conjugatos axes τῶν (xy), aequatio ejus

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$$

erit: aequatio autem cujusvis superficiei, quae talem habet sectionem, ideo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0.$$

Ad hanc igitur formam quamque secundi ordinis superficiem referre possumus, cujus sectio non sit parabola. Si vero est parabola, accipiet, coordinatis recte apteque positis, formam

$$px - y^2 = 0,$$

unde aequatio superficiei, cui tales sectiones respondent,

$$px - y^2 + cz^2 = 0 \quad \text{erit.}$$

Centra omnium sectionum parallelarum, (si tales sectiones, quibus centra insint, inveniuntur) efficiunt lineam rectam.

Id ut demonstremus, ponamus, per omnia parallelarum sectionum centra ductas esse chordas parallelas; centra earum erunt eadem, quae centra sectionum. Quae, ut supra intelleximus, omnia posita sunt in eadem planitie. Quum vero innumerabilia chordarum parallelarum systemata inveniantur, secundum earum systema alii planitiei respondet, in qua etiam eadem haec centra omnia posita sint necesse est. Si vero idem punctorum systema in duabus jacet planitiebus, efficit lineam rectam.

Priusquam vero longius procedamus, pauca de figuris similibus homogeneisque addamus.

Figuras similes esse dicimus eas, quarum omnes lineae inter puncta sibi respondentia eandem praebent relationem, et in quibus simul omnes lineae figurae alterius eosdem efficiunt angulos, qui lineis respondentibus figurae alterius efficiuntur. Si praeterea postulatur, ut figurae homogeneae sint, necesse est, respondentes lineae etiam sint parallelae; si igitur e. g. linea $a' \, b'$ respondet lineae $a \, b$, eidem quoque parallela sit necesse est.

Sit nobis quaelibet figura in spatio data; inveniemus similem atque homogeneam, si singulis punctis, quorum coordinatae x, y, z sunt, puncta respondentia construxerimus, quorum coordinatae mx, my, mz erunt. Sunt e.c. duobus alterius figurae punctis coordinatae a, b, c atque α, β, γ, distantia eorum erit $\sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2}$; coordinatae his respondentes alterius figurae erunt ma, mb, mc; $m\alpha, m\beta, m\gamma$, atque distantia respondens $\sqrt{m^2 (a-\alpha)^2 + m^2 (b-\beta)^2 + m^2 (c-\gamma)^2}$. Si igitur hoc modo omnibus alterius figurae punctis respondentia in altera constructa sunt, postulatae conditioni satisfactum est, ut relatio linearum laterumque firma sit et constans $= m$. Lineae vero respondentes etiam sunt parallelae, situs enim earum talis est, ut cosinus angulorum, quos cūm coordinatarum axibus efficiunt, habeant relationem $a - \alpha : b - \beta : c - \gamma$. Quum autem respondentes relationem $m\,(a-\alpha) : m\,(b-\beta) : m\,(c-\gamma)$ praebeant, apparet, relationes inter se esse aequales. Axes coordinatarum necesse est talibus figuris sint communes, quum in axe τοῦ x in ambabus $y = 0$ et $z = 0$ fiat. Si tunc secundam figuram promovemus in spatio, ita ut omnia maneant parallela, initii autem coordinatarum punctum in aliud punctum procedat, cujus coordinatae a, b, c sint, erunt coordinatae secundaę figurae $a + mx, \; b + my, \; c + mz$, ubi eaedem prioris figurae x, y, z erant. Si igitur proponitur superficies, cujus aequatio est

$$f\,(x, y, z) = 0,$$

quaeque ei similis atque homogenea continetur forma

$$f\,(a + mx, \; b + my, \; c + mz) = 0.$$

Quotiescunque igitur a vel m variatur, variantur quoque et distantia et relationes; si ponimus e. g. $m = 1$, figurae sibi congruentes erunt.

Quibus ex considerationibus, si solam planitiem adhibemus, hoc sequitur theorema:

Si aequationes duarum sectionum conicarum in terminis secundi ordinis congruunt, sectiones conicae similes et homogeneae sunt. —

Primum quidem sumamus, sectiones conicas non esse parabolas; potest altera, ad centrum reducta, hanc formam accipere:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0,$$

altera sit adhuc hujus formae:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g = 0;$$

sed in hac quoque primi ordinis termini evanescent, simulatque ea ad centrum reducetur, tum enim

$$ax^2 + bxy + cy^2 + h = 0$$

erit. Ponamus deinde mx pro x, my pro y, mz pro z; forma erit:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \frac{h}{m^2} = 0.$$

Si vero valorem τοῦ m sic constituimus, ut

$$\frac{h}{m^2} = d$$

fiat, sectio conica prima erit hujus formae:

$$f(x, y) = 0,$$

secunda hujus: $f(\alpha + x, \beta + y) = 0,$

aut, si placet, $f(\alpha + mx, \beta + my) = 0;$

unde sequitur, ut hae sectiones conicae sint similes atque homogeneae. Parabolae sunt omnes inter se similes. Proponamus duas parabolas et collocemus alteram ita, ut iidem utriusque sint axes coordinatarum et eadem capita; eae inter se sola parametro different. Aequatio alterius sit

$$y^2 = px,$$

aequatio alterius erit

$$y^2 = p'x,$$

atque inveniemus, mx posito pro x, et my pro y, secundam aequationem, si m ita constituimus, ut $p' = \frac{p}{m}$ fiat. Jam si has considerationes ad ea, quae supra diximus, adhibemus, atque repetimus, omnes sectiones, quae parallelae factae sunt planitiei τοῦ (xy), sectiones conicas fuisse hujus formae:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0,$$

vel parabolas formae hujus:

$$y^2 = px,$$

atque deinde, omnes sectiones conicas hujus formae similes esse et homogeneas, hoc habemus theorema:

Omnes sectiones parallelae, quae per superficiem secundi ordinis quamlibet ducuntur, sunt figurae similes et homogeneae. —

Si in triangulo plano lineam basi parallelam ducimus, efficitur triangulum simile et homogeneum; si porro in corporibus, quorum conditiones et naturas stereometria docet, sectiones facimus basibus parallelas, item hae sectiones nobis figuras praebent similes et homogeneas; atque cognoscimus, idem theorema in diversis disciplinae mathematicae partibus, etsi conditiones rationesque mutatae sint, semper idem inveniri.

Supra vidimus, omnium sectionum, quae in qualibet superficie sec. ord. ducantur, parallelarum centra efficere lineam rectam, et etiam omnium chordarum parallelarum centra inveniri in una eademque planitie. Eam lineam rectam, quae omnium sectionum parallelarum centris efficitur, nominamus his sectionibus conjugatam, atque eam planitiem, in qua omnium chordarum parallelarum centra inveniuntur, his chordis conjugatam. Hic igitur ad singulas planities pertinent singulae lineae conjugatae, et ad singulas lineas planities conjugatae. Si ex omnibus parallelis sectionibus eam eligimus, quae per totius superficiei centrum simulque centrum diametri ejus porrigitur, habemus diametrum conjugatam et respondentem planitiem diametralem. His definitionibus praemissis duo inveniuntur theoremata:

1) Si per diametrum sectiones ducuntur, omnes lineae, quae in his sectionibus supradictae diametro sunt conjugatae, jacent in una eademque planitie, et quidem in planitie diametrali huic diametro conjugata.

2) Si per diametrum quandam superficiei duae ducuntur sectiones, atque in his diametri conjugatae constituuntur, omnes diametri sectionis, quae utrumque percurrit, propositae diametro sunt conjugatae, vel planities, quae utrumque percurrit, est planities diametralis conjugata.

Fundamentum demonstrationis invenitur et in conjugatarum diametrorum definitione et in his planimetriae theorematis:

1) Omnes lineae, quae in linea quadam ad perpendiculum sunt, jacent in una eademque planitie.

2) Si linea recta in duabus planitiei cujusdam lineis ad perpendiculum est, in tota planitie est ad perpendiculum.

His praemissis diametrus sit a atque conjugata planities diametralis α; demonstrandum est, omnes τῷ a conjugatas diametros efficere planitiem α. Quum diametrus conjugata ea sit, quae centra omnium τῷ a chordarum parallelarum percurrit, haec vero centra simul omnia in planitie α jaceant, necesse est, diametrus quoque τῷ a conjugata jaceat in planitie α. Alterum theorema ideo per se ipsum intelligi potest, quod planities quaeque duabus lineis rectis constituta est. — Omnino contemplamur hoc loco aut unam lineam et unam planitiem aut trium linearum systema. Si in planitie α duas ponimus diametros conjugatas b & c, erit systema a, b, c systema trium conjugatarum diametrorum; atque natura hujus systematis talis est, ut quaeque diametrus conjugata sit planitiei, quae reliquas duas diametros percurrit. Inter theoremata ellipsin spectantia haec duo inveniuntur:

1) Summa quadratorum duarum diametrorum conjugatarum semper est constans.

2) Parallelogramma duobus diametris conjugatis effectum semper manet constans.

In ellipsoide, quod nascitur ellipsi aut circa majorem axem aut circa minorem rotata, erunt theoremata respondentia haec:

1) Summa quadratorum trium diametrorum conjugatarum semper est constans.

2) Parallelepipeda inter tres diametros conjugatas semper sunt constantia.

Ponamus systema trium diametrorum conjugatarum a, b, c atque aliud a', b', c'; necesse erit, demonstremus esse

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Fingamus, planitiem τῶν (bc) vel α et planitiem τῶν $(b'c')$ se invicem secare in diametro m, ita ut m diametrus fiat in planitie (bc), simulque in planitie $(b'c')$. Tum construamus diametrum τῷ m conjugatam et in planitie (bc), et in $(b'c')$, et quidem sit ea in planitie $(bc) = n$, in planitie $(b'c') = n'$, et habebimus, theoremate, quod ellipsin spectat, revocato $b^2 + c^2 = m^2 + n^2$ atque inde

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + m^2 + n^2.$$

Nam tum b et c, tum m et n sunt singula paria diametrorum conjugatarum in una eademque sectione (bc).

Quum vero m et n' diametri conjugatae sint in sectione $(b'\,c')$, erit $b'^2 + c'^2 = m^2 + n'^2$, vel

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a'^2 + m^2 + n'^2$$

Jam construere possumus quattuor diametros $\tau\tilde{\varphi}$ m conjugatas. 1) m invenitur in planitie (bc), est igitur linea $\tau\tilde{\varphi}$ a conjugata. 2) m est in planitie $(b'\,c')$, ergo $\tau\tilde{\varphi}$ a' conjugata. 3) ex constructione $\tau\tilde{\varphi}$ n atque 4) $\tau\tilde{\varphi}$ n'. Hae quattuor diametri jacent, ut supra demonstratum est, in una eademque planitie, atque earum est diametrus a $\tau\tilde{\varphi}$ n conjugata, quia n in planitie (bc) sita est; eodem modo sunt a' et n' diametri sibi invicem conjugatae, quia n' jacet in planitie $(b'c')$, unde sequitur, ut tum a et n, tum a' & n' singula paria sint diametrorum conjugatarum in una eademque sectione. Qua de re est $a^2 + n^2 = a'^2 + n'^2$, ergo

$$a^2 + m^2 + n^2 = a'^2 + m^2 + n'^2. \text{ Ergo}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2. \text{ q. e. d.}$$

Simili modo secundum theorema demonstratur. Sit P signum parallelepipedi, ita ut $P\,a\,b\,c$ parallelepipedum significat, quod lineis a, b, c efficitur. Erit

$$P\,a\,b\,c = P\,a\,m\,n.$$

Nam cum et b, c, et m, n sint singula paria diametrorum conjugatarum in eadem sectione, erit parallelogramma $b\,c = m\,n$. Fingamus, haec parallelogrammata esse bases, necesse est sit $P\,a\,b\,c = P\,a\,m\,n$. Deinde vidimus, a, a', n, n' semper esse in una eademque planitie, atque a, n et a', n' esse singula paria diametrorum conjugatarum. Hinc sequitur, ut parallelogrammata $a\,n$ et $a'n'$ sint aequalia; et eodem modo sequitur, ut $P\,a\,m\,n = P\,a'\,m\,n'$, atque eandem rationem sequentes invenimus $P\,a'\,m\,n' = P\,a'\,b'\,c'$ i. e. $P\,a\,b\,c = P\,a'\,b'\,c'$. Ergo sunt parallelepipeda constantia; q. e. d.

Porro in ellipsis theoria invenitur hoc theorema:

„Si ex ellipsis centro lineam rectam ducimus, quae vel in ellipsis planitie sita esse potest vel extra eam, summa quadratorum parallelogrammatum, quae haec firma linea cum pari quodam diametrorum conjugatarum efficit, semper est constans.“

Ut hoc theorema demonstremus, in memoriam revocamus, theoriam diametrorum ellipsis conjugatarum plane derivatam esse, vel derivari posse ex iis, quae de circulo plano dicta sunt. Si enim describimus circulum, cujus diametrus sit ellipsis axis magnus, et fingimus, hunc circulum rectis angulis projectum esse; lineae quoque omnes projectione facta eandem inter se retinebunt relationem. Si ponimus e. c. in circulo systema chordarum parallelarum, quas projicimus una cum centris eorum, inveniemus, projectiones horum centrorum ipsas futuras esse centra, quae sic projecta rectam efficiant lineam. Si ponimus deinde angulum inclinationis, quam et ellipsis et circuli planities habet, $= \alpha$, erit, si a diametrum circuli vel ellipsis magnum axem significat, a Cos. $\alpha = b$ i. e. = parvo ellipsis axi, unde sequitur Cos. $\alpha = \frac{b}{a}$. Ergo deminuitur quodque circuli parallelogramma projectione facta ex relatione Cosinus α; vel fiunt parallelogrammata ellipsis, si parallelogrammata circuli multiplicamus $\tau\tilde{\varphi}$ $\frac{b}{a}$. Quum vero summa quadratorum horum parallelogrammatum in circulo constans sit, erit etiam in ellipsi constans. His praemissis si fingimus, et a, b, c et a', b', c' esse singula diametrorum conjugatarum systemata, simulque $[a\,b]$ significare parallelogramma lineis a et b effectum, invenimus haec aequationum systemata:

$$[a\,b]^2 + [a\,c]^2 + [b\,c]^2 = [a\,m]^2 + [a\,n]^2 + [m\,n]^2$$
$$[a\,m]^2 + [a\,n]^2 + [m\,n]^2 = [a'\,m]^2 + [a'\,n']^2 + [m\,n']^2$$
$$[a'\,m]^2 + [a'n']^2 + [m\,n']^2 = [a'\,b']^2 + [a'\,c']^2 + [b'\,c']^2$$

Quid singula haec m, n, n' & . . . significent, e prioribus notum est. Aequationes ipsas vero inveniemus, si fingimus, unam diametrum esse firmam, atque hanc conjungi cum una earum, quae ei sunt conjugatae, et sic quidem, ut utraque posita sit in una eademque planitie. In systemate a, b, c fingitur a firma atque ponitur m, n pro b, c, quae quattuor jacent in eadem planitie. Deinde sit diametrus m firma in systemate a, m, n, atque a', n' ponatur pro a, n, quae diametri eodem modo omnes conjugatae sunt τῷ m et in una inveniuntur planitie. Denique sit a' diametrus firma, tum fit ex a', m, n', ut supra vidimus, $a'b'c'$ atque allata aequationum systemata ipsa per se esse perspicua videntur.

Cuique superficiei secundi ordinis inest, ut supra vidimus, haec proprietas, ut omnes sectiones parallelae fiant similes atque homogeneae figurae. Si sunt igitur duabus talibus superficiebus duae planae sectiones communes, semper erunt duae planitierum directiones, quibus illae sic secari possunt, ut sectiones utriusque sint parallelae et homogeneae. Si deinde utramque superficiem planitie secamus, quae alteri illarum planitierum communium sit parallela, existunt duae sectiones, quae communi sunt parallelae et homogeneae, ideoque sibi invicem. Fingamus nunc, alteram sectionem planam esse firmam et immobilem, alteram mobilem, ita vero, ut motione facta maneat sibi ipsi parallela. Jam si per fines utriusque sectionis conos ponimus, motione alterius sectionis invenimus systema conorum, qui omnes sunt tales, ut eorum sectiones, quae planitiei mobili parallelae ducuntur, omnes inter se simulque sectioni superficiei datae sint similes et homogeneae. Ponamus, planitiem secantem superficiei ita appropinquare, ut sectiones fiant minores atque minores; iam altera parte vertex coni et ipse superficiei magis magisque appropinquabit; atque si planities fit planities tangentium, in ellipsoide quidem sectio mobilis transformatur in punctum solum, quod simul vertex coni erit. Attamen huic cono proprietas manet, quae conis omnibus communis est; si enim conus sectione planitiei mobili parallela secatur, hic ergo sectione planitiei tangentium in hoc puncto positae parallela, sectiones et coni et superficiei erunt similes et homogeneae. Unde sequitur:

„Si ex quolibet superficiei puncto quasi ex vertice ad singula sectionis cujusdam planae puncta lineae rectae ducuntur, his lineis efficitur conus tali proprietate instructus, ut omnes et coni et superficiei sectiones, quae parallelae planitiei tangentium in vertice positae ducuntur, similes fiant et homogeneae figurae.“

Ponamus, in data superficie esse numerum quantumlibet sectionum planarum, et ex puncto aliquo superficiei per omnes has sectiones planas esse conos perductos; inveniri potest directio, qua coni persecti omnes et superficies praebent similes et homogeneas vel figuras vel curvas. Necesse est, fingamus, omnes hos conos sectionem infinite parvam habere communem, cujus directio data est planitie tangentium. Deinde ponamus, planitiem secantem porrigi per centrum. Haec planities, ut jam scimus, est planities diametralis conjugata ei lineae, quae ex puncto, cui vertices omnium conorum adpropinquant, ad centrum ducta est. His praemissis singulisque perfectis hoc nobis se offert theorema:

„Si punctum ellipsoides quodlibet factum est punctum oculare, et planities, in quam figuras projicimus, illa fit, quae conjugata est diametro, quae ex puncto oculari exit: vel: sit P punctum quodlibet superficiei, O ejus centrum atque E planities diametralis $\tau\tilde{\varphi}$ PO conjugata; quaecunque superficiei sectiones planae projiciuntur in planitiem E, omnes sunt similes et homogeneae sectiones conicae."

Unde sequitur, ut ex puncto aliquo superficiei omnes sectiones ita projicere possimus in planitiem, in qua sectiones fiant similes et homogeneae sectiones conicae.

In quo theoremate invenimus amplificationem projectionis stereographicae ex Ptolemaei temporibus notae, adhibitae ad quamlibet secundi ordinis superficiem. Haec projectionis species, duas, ut notum est, habet proprietates:

1) Omnes sphaerae circuli fiunt in planitie E rursus circuli. Atque 2) omnes circuli se invicem secant iisdem angulis in planitie, quibus illi in sphaera descripti. Quod ad ellipsoides, rem ita constituere possumus, ut omnes sectiones planae in planitiem circuli projiciantur; ellipsoides enim in quasdam directiones ita secari potest, ut sectiones circuli fiant, et quidem duo circulorum systemata inveniuntur, ita ut etiam duo circulorum parallelorum systemata sint. Sit igitur planities cujusdam circuli simul planities E, atque finis diametri huic planitiei conjugatae punctum oculare; erunt projectiones omnium planarum sectionum similes et homogeneae illi sectioni, in qua superficies planitie E persecatur; quae cum circulus sit, omnes erunt circuli. Hoc modo reperimus viam rationemque, problemata de sectionibus planis superficiei secundi ordinis proposita revocandi ad problemata, quae ad systema circulorum in una eademque planitie sitorum pertinent. In ellipsoide quodam sint e. g. tres sectiones planae datae; postulatur, ut quarta sectio plana construatur, quae tres datas sectiones tangat. Hic nihil aliud quam illae tres datae sectiones nobis projiciendae sunt circuli, atque tum circulus construendus, qui hos circulos tres tangat. Si denique hunc circulum rursus in superficiem projicimus, vel, si sectionem quaerimus, quae cono, ex puncto oculari usque ad circulum in planitie constructum posito, atque superficie efficitur, haec sectio tres datas sectiones tanget. Problema tali modo amplificari potest, ut circulus investigetur, qui tres alios circulos dato quemque angulo secet. Tum, ut circulus construatur, qui quattuor circulos datos angulis aequalibus secet.

Considerationes tales denuo nos docent, simplicia elementorum theoremata arctissime conjuncta esse cum iis, quae theoria superficiei secundi ordinis nobis offert.

In quolibet superficiei puncto planities poni potest talis, ut tangentes omnium per hoc punctum ductarum sectionum in eadem jaceant. Quae planities nominatur planities tangentium. Aequatio planitiei tangentium hanc habebit formam:

$$f\,(x,\ y,\ z) = 0.$$

Sint a, b, c coordinatae cujusdam superficiei puncti; sit deinde

$$\begin{aligned} x &= a + h \\ y &= b + i \\ z &= c + k; \end{aligned}$$

aliam inveniemus functionem expressam serie, quae secundum gradus $\tau o\tilde{v}$ h, i, k procedet, cujus terminus primus $f\,(a,\ b,\ c) = 0$ erit. Ita ut

$$f'\,(a)\ h + f'\,(b)\ i + f'\,(c)\ k + u = 0 \quad \text{sit,}$$

ubi u terminos significat, qui duos vel plures gradus $\tau o\tilde{v}$ h, i, k continent. Si deinde planitiem significare volumus, in qua puncta eadem inveniantur atque quae, valoribus $\tau o\tilde{v}$ h, i, k parvis consideratis, propius ad superficiem accedat, quam quaevis alia, necesse est, aequatio planitiei hujus terminos solos primi gradus contineat; atque haec aequatio a priori solis terminis τῷ u expressis discedet. Tunc valoribus τῶν h, i, k satis parvis positis, nulla alia inter nostram planitiem et superficiem poni poterit. Planities tangentium ideo hanc formam induit:

$$f'(h) + f'(i) + f'(k) = 0,$$

ubi f' &... differentiales partiales in x, y, z vel etiam coefficientes τοῦ h, i, k erunt, si functio explicatur. Si loco h, i, k ponimus valores eorum $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$, erit aequatio:

$$f' a(x-a) + f' b(y-b) + f' c(z-c) = 0.$$

Forma generalis superficiei aequationis erat:

$$0 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy + 2gx + 2hy + 2iz + k$$

Sint deinde p, q, r coordinatae cujusvis superficiei puncti, erit:

$$(ap + er + fq + g)x + (bq + fp + dr + h)y + (cr + dq + ep + i)z = 0.$$

Si multiplicamus τῷ p terminum primum, τῷ q secundum, τῷ r tertium, invenimus considerationibus superioribus adhibitis:

$$gp + hq + ir + k = 0,\text{*)}$$

atque haec maxime generalis est forma aequationis tangentium planitiei.

Aequatio prior est, quod ad p & q attinet, linearis, atque immutabilis manet, si p, q, r permutamus cum x, y, z. Perscrutemur igitur, quasnam conditiones aequatio offerat, si aut x, y, z, aut p, q, r habemus pro coordinatis puncti cujusdam. Si x, y, z sunt tales coordinatae, aequatio exprimit planitiem tangentium, i. e. proponit conditionem, ut punctum, cujus coordinatae x, y, z sunt, in planitie tangentium sit, quae fuerit ad punctum admota, cujus coordinatae p, q, r sunt. Si punctum, cujus coordinatae x, y, z sunt, firmum fingitur atque immobile, τοῖς p, q, r vero omnes valores, qui addi possunt, adduntur, invenimus omnes, quotcunque facere possumus in superficie sectiones. Deinde cognoscimus, punctum, cujus coordinatae x, y, z sint, exstare in planitie tangentium huic superficiei adposita.

Si igitur ex puncto quodam m omnes tangentium planities, quas possumus, superficiei adponimus, omnia contactuum puncta sita sunt in una eademque planitie, cujus aequatio erit:

$$(ap + fq + er + g)x + (bq + fp + dr + h)y + (cr + dq + ep + i)z = 0.$$

---

*) Ponendum enim est:

$$\begin{aligned} x &= p + h \\ y &= q + i \\ z &= r + k, \end{aligned}$$

atque aequatio nostra, hac substitutione facta, erit:

$$\begin{aligned} &ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2drq + 2erp + 2fpq + 2gp + 2hq + 2ir + k \\ &+ (ap + er + fq + g)2h + (bq + dr + fp + h)2i + (cr + dq + ep + i)2k + U = 0. \end{aligned}$$

Quum vero sit

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2drq + 2erp + 2fp + 2gp + 2hq + 2ir + k = 0,$$

erit etiam

$$(ap + er + fq + g)h + (bq + fp + dr + h)i + (cr + dq + ep + i)k = 0,$$

vel x, y, z pro h, i, k positis nostra aequatio oritur. Si vero ponimus pro h, i, k . . p, q, r, invenimus

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2epr + 2fpq + gp + hq + ir = 0,$$

unde sequitur

$$gp + hq + ir + k = 0.$$

V. b.

Haec planities, quae etiam puncti m auxilio definitur atque constituitur, nominatur planities polaris, quae ad punctum m pertineat; et punctum m habet nomen poli. Si igitur punctum, cujus coordinatae sunt x, y, z, polus est, erit aequatio planitiei polaris ea, quam supra diximus. Id ipsum vero, quod in aequatione planitiei polaris x, y, z cum p, q, r permutari possunt, hoc nobis praebet theorema fundamentale:

„Si punctum in qualibet planitie positum est, planities ejus polaris porrigitur per punctum, quod polus illius planitiei est".

Sint p, q, r coordinatae cujusvis planitiei polaris puncti, quae est planities polaris puncti m (cujus coordinatae sunt x, y, z), et invenietur illa aequatio. Si deinde quaerimus planitiem polarem puncti p, q, r, atque nominamus x, y, z coordinatas alicujus hujus planitiei puncti, eandem invenimus aequationem. Ergo, si positum est punctum m e. g. in planitie polari puncti m', positum est m' in planitie polari puncti m.

Si ex puncto m, ut jam vidimus, omnes tangentium planities, quas possumus, superficiei admovemus, omnia contactuum puncta sita invenimus in una eademque planitie, quo facto, si ex puncto m ad singula contactuum puncta ducemus lineas rectas, hae lineae efficient conum, qui conus tangens nominatur. Si porro ex omnibus cujusvis planitiei punctis singulis conos superficiem tangentes quaerimus, omnes planities, in quibus puncta contactuum inveniuntur, se invicem secant in uno eodemque puncto, polo prioris planitiei.

Si per aliquod punctum quotlibet sectiones factae sunt, eaedemque superficiem persecant, atque his sectionibus respondentes coni construuntur tangentes, omnes horum conorum vertices uni eidemque planitiei insunt, et quidem planitiei polari, illi puncto respondenti.

Planities polares omnium punctorum, quae efficiunt lineam rectam, se invicem persecant linea recta.

Linea recta ex polo usque ad centrum ducta percurrit per centrum curvae tangentis; atque illa planities, quae huic lineae est conjugata, semper erit parallela planitiei polari. Unde sequitur, ut directio planitiei polaris, atque planities polaris ipsa constituta sit, etiamsi nulla tangentium planities superficiei adponi possit. Omnino enim planities fingi potest, quamquam sectio ejus per superficiem fieri non potest. Directio ejus eo constituta est, quod conjugata est illi lineae, quae a proposito polo usque ad centrum ducta est.

Considerationes adhuc factae ad lineas quoque referri possunt. Si fingimus duo puncta atque eorum planities polares, nominamus eam lineam, qua planities altera alteram secat, lineam polarem respondentem lineae, quae illa puncta conjungit. Duarum igitur linearum, quae sibi invicem sunt lineae polares, proprietates sunt analogae. Si in altera situm est punctum, planities ejus polaris tenet lineam alteram.

Si linea, quae alteram secat, proposita est, linea polaris secat alteram. Omnino ex unoquoque theoremate, ut priores considerationes docent, quod de lineis rectis vel de planitie constitutum est, aliud deducere possumus non amplius demonstrandum, in quo

locum puncti supplet planities,
„ lineae „ linea,
„ planitiei „ punctum.

Si porro extra propositam superficiem firmam fingimus aliam, unumquodque ejus punctum polus haberi potest, qui planitiei, i. e. planitiei polari respondeat. Quae omnes planities polares, diversis punctis respondentes sibi invicem infinite adpropinquant atque semper in uno eodemque puncto se persecant. Unde fit, ut cuique puncto alterius superficiei semper respondeat punctum alterius. Simul sequitur, ut superficies altera fiat superficies polaris alterius. Ergo:

„Superficies polaris cujusvis superficiei secundi ordinis est semper ipsa superficies secundi ordinis.“ Quod hoc quoque modo enuntiare possumus: „Si cuique superficiei secundi ordinis puncto respondentem quaerimus planitiem polarem, omnes hae planities tanguntur alia secundi ordinis superficie.“ Unde sequitur, ut etiam locum superficiei suppleat superficies. Haec theorematum duplicandorum ratio nominatur, ut notum est, principium reciprocitatis vel principium dualitatis.

Ex praecedentibus considerationibus sequuntur praeterea haec theoremata:

„Si tria proposita sunt puncta et planities polares iis respondentes, atque in tribus his punctis ponimus planitiem, tres planities polares se persecant in uno eodemque puncto, qui est polus illius planitiei trium punctorum.“

Simplicissimam superficiei secundi ordinis aequationis formam hanc habuimus:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Sint p, q, r coordinatae puncti cujusdam in planitie tangentium siti, atque x, y, z coordinatae puncti in superficie jacentis, cui illa tangentium planities adposita est; erit

$$pax + qby + rcz = 1$$

aequatio planitiei tangentium. Qua in aequatione nihil mutatur, si p, q, r permutantur cum x, y, z. Si tum fingimus punctum planitiei tangentium datum, necesse est, si x, y, z coordinatae sunt puncti contactus, atque p, q, r magnitudines constitutae, inveniamus conditionalem aequationem inter x, y, z. Si deinde has aequationes inter se conjungimus, omnia inveniemus puncta, quibus planities tangentium adponi potest, cujus sint coordinatae p, q, r. Curva, quae hoc modo oritur, est curva tangens, atque movetur in planitie, quae planities polaris est puncti p, q, r. Ubi est nullius momenti, quo loco punctum situm sit; qua de caussa haec planities tum quoque exstitit, si sectio per superficiem ducta fit imaginaria. Ponamus, aequationem ipsam esse definitionem planitiei polaris; sit itaque

$$xa^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

aequatio superficiei; nominamus aequationem

$$pax + qby + rcz = 1$$

ipsam planitiem polarem puncti A, cujus coordinatae x, y, z sunt.

Deinde sint x', y', z' coordinatae puncti, quod in planitie polari sit situm; quaeremus, quaenam inde poli conditiones sequantur. Aequatio poli erit:

$$pax' + qby' + rcz' = 1.$$

Si vero x', y', z' coordinatae cujusvis puncti, atque (p, q, r) puncta in planitie polari sita sunt, erit poli aequatio haec:

$$x'ap + y'bq + z'cr = 1,$$

quae, geometrica interpretatione adhibita, docet, puncta (p, q, r) sita esse in planitie, quae planities polaris illius puncti est. Punctum, cujus coordinatae sunt p, q, r, situm sit in planitie, cujus aequatio sit:

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 1.$$

Quaeramus, quaenam planitiei polaris conditio inde sequatur? Si ponimus:

$$\alpha = ax'; \quad \beta = by'; \quad \gamma = cz'; \quad \text{sive}$$

$$x' = \frac{\alpha}{a}; \quad y' = \frac{\beta}{b}; \quad z' = \frac{\gamma}{c}, \quad \text{erit}$$

$$pax' + qby' + rcz' = 1.$$

Aequatio vero planitiei polaris est:

$$pax + qby + rcz = 1.$$

Ergo necesse est, haec planities percurrat punctum, cujus coordinatae x', y', z' sunt. Si vero quaerimus planitiem polarem hujus puncti firmi b, cujus coordinatae x', y', z', atque significamus coordinatas planitiei polaris signis p, q, r; erit

$$x'ap + y'bq + z'cr = 1$$

aequatio planitiei polaris. Ergo cognoscimus, eandem esse, in qua necesse est punctum a situm sit, vel quod idem est: punctum b esse hujus planitiei polum. Ergo theorema hoc modo enuntiari potest: „Si punctum b in planitie polari puncti a situm est, punctum a in planitie polari puncti b invenitur."

Denuo igitur hinc sequitur, ut, si planities quaedam punctum aliquod percurrit, ejus polus in planitie polari huic puncto respondente situs sit. Atque theoremata omnia, quae antea jam attulimus ex iis, quae proxime exposuimus, iterum sequuntur.

Aliud theorema fundamentale, quod hoc loco accuratius perlustrare volumus, hoc erat:

Polaris superficiei secundi ordinis respondens ipsa erit superficies secundi ordinis.

Sive etiam:

„Si punctum aliquod in secundi ordinis superficie movetur, polaris aliam secundi ordinis superficiem tangit." Sive:

„Si planities quaedam ita movetur, ut semper superficiem secundi ordinis tangat, ejus polus in secundi ordinis superficie movetur".

„Si punctum a in secundi ordinis superficie I. situm est, ejus planities polaris superficiem II. tanget in puncto b, quod polus est planitiei tangentium in puncto a positae."

Superficies II., quae planitie polari tangatur, notetur hac aequatione:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy + 2gx + 2hy + 2iz + k = 0$$

Jam si ponimus, id quod ex superioribus constat:

$$\begin{aligned} ap + er + fq + g &= \alpha \\ bq + fp + dr + h &= \beta \\ cr + dq + ep + i &= \gamma \\ gp + hq + ir + k &= \delta; \end{aligned}$$

forma aequationis planitiem polarem exprimentis haec erit:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

Quae aequatio, ut facile intelligitur, sine ulla mutatione manet, si x, y, z permutatur cum p, q, r. Superficies I. habeat coordinatas X, Y, Z, eique sit aequatio:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

Huic fingamus diversas adpositas esse tangentium planities, atque nobis propositum esse problema, ut polos his planitiebus respondentes quaeramus. Sint x, y, z coordinatae puncti in planitie tangentium siti, quae puncto, cujus coordinatae X, Y, Z sunt, adposita est; erit, ut supra vidimus, hujus planitiei aequatio

$$AXx + BYy + CZz = 1.$$

Cujus si polum quaerere volumus, valoribus τῶν p, q, r constitutis, invenimus has aequationes conditionales:

$$AX = -\frac{\alpha}{\delta},$$
$$BY = -\frac{\beta}{\delta},$$
$$CZ = -\frac{\gamma}{\delta},$$

si p, q, r sunt coordinatae poli planitiei tangentium. Quum autem valores τῶν X, Y, Z conditioni subjecti sint, quae exprimitur aequatione:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

simul invenimus aequationem conditionalem ad polum pertinentem hanc:

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} = \delta^2;$$

atque si hic in locum τῶν α, β, γ allatos paullo ante valores substituimus, rursus aequationem superficiei secundi ordinis invenimus. Deinde vice versa demonstrare possumus, polum planitiei tangentium, quam in superficiei II. puncto, cujus coordinatae p, q, r sunt, ponimus, esse punctum, cujus coordinatae X, Y, Z sint. Si nobis igitur est

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

aequatio planitiei in puncto (X, Y, Z) positae, demonstrandum est, superficiem II. in puncto (X, Y, Z) hac planitie tangi.

Propositum sit planitierum systema, ita ut aequatio conditionalis, qua hae planities exprimantur, duos ad arbitrium constituendos numeros contineat; invenienda est superficies, quae omnes has planities tangat. Vel proposita sit superficiei aequatio, quae duos constantes numeros ad arbitrium constituendos contineat; ex ea deducere possumus superficierum systema, atque quaerenda nobis erit superficies, quae singulas omnes tangat. Sit

$$f\,(x, y, z, m, n) = 0$$

aequatio superficiei, in qua m & n constantes significant. Praeterea sint M & N functiones quaedam τοῦ x & y, atque

$$F\,(M\ N) = 0$$

aequatio alius superficiei. Altera superficies alteram hac conditione persecabit, ut sit:

$$M = m \text{ atque } N = n.$$

Facile intelligemus, M et N semper ita constitui posse, ut superficies secunda singulas superficies systematis primi tangat in iis punctis, quae quibusque sunt cum ea communia. Formulam planitiei tangentium ut constituamus, necesse est superficiei aequationem differentialem quaeramus. Si deinde M et N ita constituimus, ut

$$\frac{dF}{dM} = 0,$$
$$\frac{dF}{dN} = 0$$

fiat, inde sequitur, ut haec superficies totum superficierum systema tangat. Aequatio, quae systema significat, est:

$$f\,(x,\,y,\,z,\,m,\,n) = 0,$$

atque sit problema positum tale, ut aequationem planitiei quaeramus, quae, toti superficierum systemati adposita, tangentium planities fiat. Quae planities vel potius superficies pendebit a variabilibus parametris; quae quamquam tres esse videntur, tamen, data aequatione conditionali adhibita, duae solae remanent. Sit enim aequatio superficiei ipsa:

$$f\,(x,\,y,\,z,\,m,\,n,\,p) = 0,$$

tamen aequationis conditionalis ope

$$\varphi\,(m,\,n,\,p) = 0$$

demonstrare possumus, unum ex tribus numeris m, n, p haberi posse pro functione reliquorum. Si significamus deinde differentiales partiales signo f', inveniemus has aequationes:

$$f'm + f'p\,\frac{dp}{dm} = 0,$$

$$f'n + f'p\,\frac{dp}{dn} = 0.$$

Sed etiam:

$$\varphi'm + \varphi'p\,\frac{dp}{dm} = 0,$$

$$\varphi'n + \varphi'p\,\frac{dp}{dn} = 0,$$

unde sequitur:

$$f'm = f'p\,\frac{\varphi'm}{\varphi'p}, \quad \text{et}$$

$$f'n = f'p\,\frac{\varphi'n}{\varphi'p}.$$

Quas proximas aequationes perscribere possumus sub forma symmetricae functionis huiusce:

$$f'm : f'n : f'p = \varphi'm : \varphi'n : \varphi'p.$$

Simulque aequationes eaedem conjunctae cum

$$\varphi\,(m,\,n,\,p) = 0$$

aptae sunt ad valores τοῦ m, n, p constituendos. Si vero ex his tribus et ex aequatione

$$f\,(x,\,y,\,z,\,m,\,n,\,p) = 0$$

quantitates m, n, p removemus, aequationem reperimus superficiei, quae systema totum tangit.

Sub hac forma problema semper nobis occurrit, si superficies variabilis a diversis superficiei cujusdam punctis dependet.

Sed revertamur ad problema nostrum. Aequatio superficiei cujusdam erat:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dzy + 2exz + 2fxy + 2gx + 2hy + 2iz + k = 0,$$

aequatio superficiei, cujus polarem quaerebamus:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

Sint X, Y, Z coordinatae superficiei puncti, cujus planitiem polarem constituere volumus, atque p, q, r sint coordinatae planitiei polaris puncti: erit, si signis α, β, γ, δ valores supradictos addimus haec planitiei polaris aequatio:

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0.$$

X, Y, Z igitur parametri sunt, inter quas aequatio data est, dum p, q, r ea sunt, quibus signa x, y, z dedimus. Deinde nobis sunt differentiales partiales investigandae, eaeque ut proportio symmetrica postulat, perscribendae. Ergo:

$$\alpha : \beta : \gamma = AX : BY : CZ.$$

Unde, valoribus τῶν X, Y, Z substitutis, sequitur aequatio optata. Est:

$$X = \frac{\alpha\lambda}{A},$$

$$Y = \frac{\beta\lambda}{B},$$

$$Z = \frac{\gamma\lambda}{C},$$

ubi λ superioribus aequationibus adhibitis facile inveniri potest. Est enim:

$$\lambda \left\{ \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} \right\} + \delta = 0,$$

ergo:

$$\lambda = \frac{-\delta}{\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C}}$$

Videmus igitur, parametrum esse functionem τοῦ p, q, r, et si hos valores in aequatione superiore ponimus, erit:

$$\lambda^2 \left\{ \frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} \right\} = 1,$$

atque valore τοῦ λ^2 substituto:

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} = \delta^2.$$

Quae aequatio plane eadem est, atque illa, quam habuimus aequationem loci omnium planitierum tangentium, quae ad superficiem duci possunt. Coordinatae enim punctorum tactus, quas reperiemus ope aequationis nostrae, valores sunt τῶν p, q, r, qui singulis τοῦ X, Y, Z valoribus respondent. Invenimus enim:

$$X = \frac{\alpha\lambda}{A},\ Y = \frac{\beta\lambda}{B},\ Z = \frac{\gamma\lambda}{B},$$

ubi loco τοῦ λ valor substituendus est. Est vero:

$$\lambda = \frac{-\delta}{\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C}}$$

ubi:

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{\gamma^2}{C} = \delta^2,$$

unde sequitur

$$\lambda = \frac{-1}{\delta}.$$

Quo valore substituto erit:

$$X = \frac{-\alpha}{A\delta};\ Y = \frac{-\beta}{B\delta};\ Z = \frac{-\gamma}{C\delta}.$$

Quod cum plane congruat cum eo, quod antea invenimus, simul demonstratum est: polarem superficiei secundi ordinis ipsam esse superficiem secundi ordinis.

Hoc modo iis considerationibus definitionibusque praemissis, quae necessariae et aptae videntur esse ad ea, quae sequuntur, intelligenda, progrediamur ad theorema, quod et in superficiei secundi ordinis theoria et in disciplinae mathematicae elementis nobis occurrit. Hoc theorema ad lineae rectae divisionem harmonicam pertinet.

Si ex puncto quolibet in planitie sito ad circulum in eadem planitie descriptum duae lineae tangentes ductae sint, tactuum autem puncta inter se chorda conjuncta, quae chorda etiam linea polaris nominatur, dum punctum, unde tangentes ductae sunt, poli habet nomen; nemo nescit, omnem ex hoc puncto ductam lineam secantem circulo et linea polari harmonice dividi. Idem theorema locum habet in sectionum conicarum theoria; idem denique invenimus in illa mathesis parte, in qua de secundi ordinis superficie agitur. Qua in parte theorema hisce verbis enuntiari potest:

Omnis linea secans per secundi ordinis superficiem ducta superficie ipsa et polaribus (quaecunque sunt, puncta, lineae, planities, superficies) harmonice dividitur.

Sive: Linea secans ex puncto quolibet per secundi ordinis superficiem ducta planitie polari harmonice dividitur.

Cujus theorematis demonstrationem facientes, minime necesse est ponamus, in sectionibus conicis rem jam esse probatam. Fingamus, ex puncto quodam O lineam secantem esse ductam, quae superficiem in punctis A & C atque planitiem polarem persecet in puncto B. Tum ponamus lineae partem:

$$\begin{aligned} OA &= R, \\ OB &= S, \\ OC &= R'. \end{aligned}$$

Deinde sint cosinus angulorum, quos linea secans efficit cum singulis axibus primariis $= \alpha, \beta, \gamma$. Porro sint coordinatae puncti O, reductae ad axes primarios $= p, q, r$. Si denique coordinatas superficiei puncti cujusdam nominamus x, y, z, invenimus, ut jam notum est:

$$x - p : y - q : z - r = \alpha : \beta : \gamma.$$

Tum, ut ex contemplationibus superioribus sequitur:

$$\begin{aligned} x &= p + R\alpha \\ y &= q + R\beta \\ z &= r + R\gamma. \end{aligned}$$

Unde simul sequitur, ut coordinatae trium punctorum A, B, C hae sint: et quidem coordinatae

$$\begin{aligned} &\text{puncti } A: p + R\alpha;\ q + R\beta;\ r + R\gamma \\ &\quad\text{„}\quad C: p + R'\alpha;\ q + R'\beta;\ r + R'\gamma \\ &\quad\text{„}\quad B: p + S\alpha;\ q + S\beta;\ r + S\gamma \end{aligned}$$

ubi valores τῶν R, R', S constituendi sunt.

Ellipsoidis aequatio sit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1;$$

erit, ut jam supra vidimus, planitiei polaris aequatio

$$apx + bqy + crz = 1.$$

Si vero in hac aequatione valores coordinatarum ponimus loco τοῦ x, y, z, invenimus valorem τοῦ S. Est enim

$$ap\,(p + S\alpha) + bq\,(q + S\beta) + cr\,(r + S\gamma) = 1,$$

vel

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 + S\,[ap\alpha + bq\beta + cr\gamma] = 1.$$

Si vero ponimus

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 - 1 = N, \quad \text{erit}$$

$$S = \frac{-N}{ap\alpha + bq\beta + cr\gamma}$$

vel pars lineae secantis

$$OB = \frac{-N}{ap\alpha + bq\beta + cr\gamma}.$$

Si deinde coordinatas puncti A in nostra ellipsoidis aequatione substituimus, habebimus

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2R\,(ap\alpha + bq\beta + cr\gamma) + R^2\,[a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2] = 1$$

vel pro

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 - 1$$

valore substituto

$$0 = N + 2R\,(ap\alpha + bq\beta + cr\gamma) + R^2\,[a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2]$$

vel ex aequatione

$$S = \frac{-N}{ap\alpha + bq\beta + cr\gamma}$$

$$ap\alpha + bq\beta + cr\gamma = \frac{-N}{S} \quad \text{posito}$$

$$R^2\,[a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2] - \frac{2N}{S}.\,R + N = 0$$

vel

$$Q = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 \quad \text{posito}$$

$$R^2 - \frac{2N}{S.Q}\,R + \frac{N}{Q} = 0.$$

Si vero aequationis hujus radices R atque R' nominamus, erit

$$R' = \frac{N}{S.Q} + \sqrt{\frac{N^2}{S^2.\,Q^2} - \frac{N}{Q}}$$

$$R = \frac{N}{S.Q} - \sqrt{\frac{N^2}{S^2.\,Q^2} - \frac{N}{Q}}$$

Unde sequitur, ut illa lineae secantis pars, quae punctis A & C continetur, id est linea $A\ C$ sit aequalis

$$AC = 2\sqrt{\frac{N^2}{S^2 . Q^2} - \frac{N}{Q}}$$

Si significationem a nobis supra adhibitam revocamus, erit

$$AB = S - R$$
$$OC = R'$$
$$OA = R$$
$$BC = R' - S.$$

Si tum demonstrare volumus, nostram lineam secantem harmonice esse divisam, necesse est probemus, totam lineam OC, multiplicatam media ejus parte AB, aequalem esse valori, quem invenimus, si extremas lineae secantis partes AO atque BC alteram altera multiplicamus; necesse igitur est probemus esse

$$OC . AB = AO . BC$$

vel necesse est, sit

$$R' (S - R) = R (R' - S)$$

vel

$$R'S - RR' = RR' - RS$$

vel

$$S (R + R') = 2RR'$$

Aequatio quadratica, quam supra invenimus, est formae

$$x^2 - \frac{2N}{S.Q} x + \frac{N}{Q} = 0$$

Quum vero in aequatione quadratica hujus formae factor primi gradus τοῦ x summam ambarum radicum contineat, factor τοῦ x^0 quantitatem, quam multiplicatio earum praebet, continebit.

Ergo erit

$$R + R' = \frac{2N}{S.Q} \quad \text{atque}$$

$$R\ R' = \frac{N}{Q}$$

Tum

$$S (R + R') = \frac{2 S . N}{S . Q}$$

$$S (R + R') = \frac{2\ N}{Q}$$

$$2\ R\ R' = \frac{2\ N}{Q}.$$

Ergo

$$S (R + R') = 2\ R\ R'.$$

Ergo linea secans hoc quoque loco harmonice est divisa. q. e. d.