# Ueber die Schwingungen homogener elastischer Scheiben.

Die seit längerer Zeit bekannte Theorie der geraden elastischen Stäbe ist zuletzt von J. Lissajous mit der Erfahrung verglichen worden. (Annales de Chemie et de Physique, 3me Série, tome XXX., pag. 385). Die Resultate, welche er für die Lage der Schwingungsknoten eines mit beiden freien Enden schwingenden Stabes erhalten hat, stimmen mit den von mir im 21sten Bande von Poggendorffs Annalen vor 20 Jahren bekannt gemachten überein, Herr Lissajous hat aber noch die übrigen fünf bei schwingenden Stäben in Betracht kommenden Fälle der Untersuchung unterworfen. Die von Lissajous und mir angestellten Messungen sind mit dem Zirkel gemacht oder an einer auf den schwingenden Metallstäben befindlichen Theilung. Die Uebereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung ist zwar sehr befriedigend; indessen ist zu erwarten, daß schärfere Messungen mit mikroskopischen Apparaten auf homogenen Glasstäben mit Sicherheit diejenigen Unterschiede nachweisen werden, welche zunächst aus der Vernachlässigung der Breite und Dicke der Stäbe in Theorie zwischen dieser und der Erfahrung bestehen müssen. Bei den Knotenlinien der schwingenden Glasscheiben kann hierüber wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, kein Zweifel sein. Die Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung tritt so constant hervor, daß man geneigt wird, jene mehr den von der Theorie vernachlässigten Umständen, als den Fehlern der Beobachtung zuzuschreiben. Jedoch handelt es sich hier immer nur um kleine Quantitäten, die bei Messungen mit dem Zirkel gar nicht erkennbar sein würden. In der That stimmen die von dem Entdecker der Theorie der schwingenden elastischen Kreisscheiben, Herrn Professor Kirchhoff, berechneten Durchmesser der Knotenkreise im Allgemeinen bis auf Tausendtheile des als Einheit angenommenen Scheibendurchmessers mit der Beobachtung überein und die Differenzen beziehen sich erst auf die vierte Decimale. Bei der großen Mannigfaltigkeit der von der Form der Scheiben abhängigen Klangfiguren und der Kostbarkeit genauer planparalleler Scheiben war eine Beschränkung der experimentalen Untersuchung nöthig. Und so habe ich zunächst nur die quadratischen und die Kreisscheiben genauer untersucht, Scheiben, deren Rand nach einer Ellipse, Lemniskate, Cardioide u. s. w. gekrümmt war, nur im Allgemeinen betrachtet. Einen kleinen Theil der erhaltenen Resultate werde ich hier mittheilen, die ausführlichen Untersuchungen aber in den Schriften der hiesigen naturforschenden Gesellschaft veröffentlichen.

Man lies't noch immer in manchen Werken, daß Scheiben von gewöhnlichem Fensterglase sich sehr gut zu den genannten Versuchen eignen, dies kann aber nur für Diejenigen gelten, die sich von den Schwingungen elastischer Scheiben eine allgemeine Vorstellung verschaffen wollen; für wissenschaftliche Untersuchungen bedarf es genauer planparalleler, mit der größten Sorgfalt ausgeführter Scheiben, mit einem Mikroskop versehener Apparate zur Messung der Curven entweder durch rechtwinklige oder durch Polarcoordinaten, zuletzt zur Bestimmung der Töne bedarf es solcher Hülfsmittel, wie der Sirene und des vertikalen Monochords. Daß ich solche Hülfsmittel habe benutzen können, dafür fühle ich mich dem Königl. Hohen Ministerium des Unterrichts und der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin dankbar verpflichtet.

Die angewandten Scheiben, vierzehn an der Zahl, hatten folgende Dimensionen:

Quadratische Scheiben von Spiegelglas.

| | Länge der Seite. | Dicke. |
|---|---|---|
| 1. | 69,21 Linien Par. | 1 Linie. |
| 2. | 69,38 » » | 1,1 » |
| 3. | 59,08 » » | 1,5 » |
| 4. | 78,0 » » | 1,1 » |
| 5. | 77,5 » » | 0,6 » |

Kreisscheiben von Spiegelglas.

| | | Durchmesser. | Dicke. |
|---|---|---|---|
| 6. | I. | 72,0 Par. Linien. | 1 Linie. |
| 7. | II. | 84,0 » » | 1,1 » |
| 8. | III. | 84,0 » » | 0,6 » |
| 9. | IV. | 84,0 » » | 0,6 » |
| 10. | V. | 58,7 » » | 0,8 » |
| 11. | VI. | 71,8 » » | 0,7 » |
| 12. | VII. | 84,22 » » | 0,5 » |

Kreisscheiben von Metall;

aus Kupfer.

| | | Durchmesser. | Dicke. |
|---|---|---|---|
| 13. | VIII. | 72,0 Par. Linien. | 1,0 Linie. |

aus Messing.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14. | IX. | 72,0 Par. Linien. | 0,9 Linie. |

Mit Ausnahme der im optischen Institut zu München ausgeführten Scheibe Nr. 3. sind alle übrigen in dem mathematischen Institut Pistor & Martins in Berlin gearbeitet worden. Die Scheiben 1., 2. und 3. sind polirt, also durchsichtig, die andern, auch die Metallscheiben VIII. und IX. matt geschliffen. Die Scheibe VII. hat eine centrale Oeffnung von anderthalb Pariser Linien Durchmesser, in welche ein aus derselben Glastafel geschnittener kleiner Cylinder eingesetzt werden kann.

Die Glasscheiben müssen vor dem Gebrauche mit Alkohol gereinigt werden, um den Niederschlag der Wasserdämpfe zu entfernen. Aber auch hierbei ist noch wieder Vorsicht nöthig. Denn sobald der Alkohol verdunstet ist, kann man leicht die Scheibe elektrisch erregen, wodurch die Bildung regelmäßiger Figuren gehindert wird. Die schärfsten Knotenlinien erhält man, wenn man die matten oder polirten Glasscheiben mit Gold- oder Silberblatt belegt, was am Besten durch eine Lösung von Hausenblase in Alkohol geschieht. Vor dem Gebrauche wird diese Oberfläche mit Wiener Kalk, oder mit fein gepulvertem Muschelkalk gereinigt. Man darf nur so viel Sand auf die Scheiben streuen als eben zur Darstellung der Knotenlinien hinreicht, was nach einiger Uebung schon gelingt. Bei meinen Versuchen habe ich fast immer den magnetischen Eisensand angewendet, der an den Küsten der Ostsee aus dem Ufersande durch die Wellen ausgewaschen wird. Die kleinen Körner dieses Sandes haben durch das Schleifen auf dem Ufer eine sphäroidische Form erhalten. Der Mittelpunkt eines solchen kleinen Sphäroids wurde als ein Punkt der ruhenden Knotenlinie angesehen und der Durchschnittspunkt im Fadenkreuz des Meßapparats auf ihn eingestellt.

Wenn man die Scheiben in Schwingung versetzt, so muß auf die gleichförmige Führung des Violinbogens die größte Sorgfalt verwendet werden, weil davon die Schärfe der Knotenlinien ebenfalls abhängt. Der Ton muß einige Zeit hindurch angehalten werden, darf aber nicht die höchste Intensität erreichen, denn sonst beginnt sogleich eine unruhige Bewegung in den Sandkörnern der ganzen Linie und die erste Lage derselben wird sichtlich verändert. Gießt man eine dünne Wasserschicht über die schwingende Scheibe, so zeigt sich bei der gleichmäßigen Bogenführung auf der flüssigen Oberfläche ein zartes Netz regelmäßiger Wellen, das sogleich in unregelmäßige Erhöhungen und Kräuselungen zerfällt, wenn die Stärke des Tons übermäßig gesteigert wird.

Da es einige Schwierigkeiten macht, die concentrischen Knotenkreise ohne Durchmesser auf Kreisscheiben durch Erschütterung des Randes hervorzubringen, wie schon Chladni in seiner Akustik anmerkt, so hat F. Savart und nach ihm unter andern Dr. Werthheim durchbohrte Scheiben mit centraler Oeffnung angewendet, durch welche ein Büschel Pferdehaare gezogen wird, um so eine centrale Erschütterung hervorzubringen. Da aber der Durchmesser der Oeffnungen 6—8 m. m. beträgt, so hat man es hier eigentlich nicht mit einer Scheibe, sondern mit einem Ringe zu thun und die Vergleichung der Erfahrung mit der eine volle Scheibe voraussetzenden Theorie erscheint zweifelhaft. Ich habe einer Scheibe von 7 Zoll Durchmesser eine centrale Oeffnung von anderthalb Linien Durchmesser geben lassen, die mit einem genau passenden Cylinder von noch nicht 1 Gran Gewicht ausgefüllt werden kann. Es konnte nun der Einfluß bestimmt werden, den die Schwingungen der vollen und der durchbohrten Scheibe auf die Größe der Knotenkreise ausübten, indem man auf beiden abwechselnd dieselben Schwingungsarten hervorbrachte.

Zur centralen Erregung der Scheibe bediene ich mich eines besonders eingerichteten Violinbogens. Der Kopf und der Frosch eines gewöhnlichen Violinbogens wurden durch 4 Zoll lange federnde geradlinige Messingstücke verlängert, die an ihren Enden mit Einschnitten versehen waren, so daß die beiden messingenen Fassungen der Pferdehaare daran befestigt und gespannt werden konnten. Diese Fassungen, beide mit viereckigen Oeffnungen durchbrochen zum Durchschieben der Verlängerungen des Kopfs und des Frosches, sind um ein Geringes kleiner als die centrale Oeffnung der Scheibe. Nachdem eine Fassung der Pferdehaare an der oberen Verlängerung des Bogens eingefügt worden ist, führt man die andere Fassung durch die centrale Oeffnung der Scheibe, zieht die Haare etwas straffer an und bringt das Ende des unteren Verlängerungsstücks durch die viereckige Oeffnung dieser Fassung, die nun mit sammt den Haaren durch den Widerhalt des Einschnitts befestigt und durch die Elasticität des Bogens und seiner Theile gespannt erhalten wird. Mit einem so construirten Bogen können die centralen Erschütterungen eben so leicht und sicher vollführt werden, als die vom Rande ausgehenden.

Die Scheiben schwingen am freiesten, wenn man sie auf die Finger der linken Hand legt, ohne allen zum Einklemmen der Scheiben bestimmten Apparat. Ich habe mich überzeugt, daß beim festen Einspannen sich die Lage der Knotenlinien um die Einspannungsstelle erheblich ändern kann. Die beste Unterstützung der Scheiben würde man durch einen besonderen Apparat mit verstellbaren Spitzen erhalten, die in eine horizontale Ebene gebracht werden könnten; denn man begreift, daß die auf geneigten Ebenen gleitenden Sandkörner bei den Vibrationen der Scheibe an anderen als an den ruhenden Stellen liegen bleiben werden.

Der Meßapparat, den ich bei der Messung der Klangfiguren seit Jahren benutze, ist nach meiner Angabe von dem Mechanikus Herrn Aug. Oertling in Berlin ausgeführt worden. Im Wesentlichen besteht dieser Apparat aus einem festliegenden getheilten prismatischen Messingstabe, worauf sich ein zweiter ebenfalls getheilter prismatischer Stab senkrecht gegen den ersten verschieben läßt. Auf dem zweiten Stabe bewegt sich ein mit rechtwinkligem Fadenkreuz versehenes Mikroskop. Die nähere Einrichtung wird sich aus der folgenden Beschreibung ergeben.

Eine quadratische Platte von grauem Marmor, deren Grundfläche ein Quadrat von 9 Pariser Zoll Seitenlänge bei 1 Zoll Dicke bildet, ruht auf drei Messingcylindern von $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe und 3 Linien Durchmesser. Als die obere Fläche der Marmorplatte, auf welche die Scheiben mit den dargestellten Klangfiguren gelegt werden, eben geschliffen wurde, war sie auf jenen drei Cylindern befestigt, so daß, wenn diese unterstützt sind, die obere Fläche der Marmorplatte eine Ebene bildet.

Nahe einem Rande der oberen Fläche der Platte, von demselben um $\frac{1}{2}$ Zoll entfernt, liegt dem Rande parallel in seiner ganzen Erstreckung mit der Platte fest verbunden der feste prismatische Messingstab von 9 Paris. Zoll Länge, 11 Linien oberer, 9 Linien unterer Breite und 4 Linien Dicke. Dieser feste Maaßstab hat einen in halbe Par. Linien getheilten silbernen Limbus, dessen Nonius auf dem zweiten beweglichen Maaßstabe festsitzt und die unmittelbare Ablesung von Funfzigtheilen, durch Schätzung von Hunderttheilen der Pariser Linie gestattet. Der rechtwinklich zu dem festen Maaßstabe sich bewegende prismatische Maaßstab aus Messing ist, so weit er über die Marmorplatte reicht, von der er etwa um 4 Linien absteht, und so weit er den Spielraum für den an ihm schleifenden Sattel des Mikroskops bildet, $7\frac{1}{4}$ Zoll lang, an der oberen Seite 6 Linien, an der untern 4 Linien breit, bei einer Dicke von $3\frac{1}{2}$ Linien. Das andere Ende des prismatischen Stabes geht in ein rechtwinkliges Parallelepipedum über von $2\frac{1}{2}$ Zoll Länge, 1 Zoll Breite und $3\frac{1}{2}$ Linien Dicke. Dieser Theil des beweglichen prismatischen Stabes führt an seiner unteren Seite zwei prismatische Stücke von Hartgußmetall, die an den beiden schrägen Seitenflächen des festen prismatischen Stabes schleifen, außerdem ein Gegengewicht, welches den über der Marmorplatte befindlichen Theil des beweglichen Maaßstabes äquilibrirt, so daß er bei jeder Stellung des Mikroskops denselben Abstand von der Platte beibehält. Der obere Theil des Parallelepipedums ist nach seiner ganzen Breite (von 1 Zoll) cylindrisch durchbohrt. Durch diese cylindrische Oeffnung geht ein cylindrischer Stahlstab von 10 Zoll Länge und anderthalb Linien Durchmesser, parallel mit dem festen prismatischen Maaßstabe, zwei Endhervorragungen dieses letztern durchsetzend. Eine an dem Parallelepipedum angebrachte Klemmschraube dient dazu, den beweglichen prismatischen Maaßstab an dem Stahlcylinder festzustellen; eine Mikrometerschraube aus Hartgußmetall an einer der Hervorragungen des festen Maaßstabes bewirkt die feine Bewegung des Stahlcylinders, des mit ihm fest verbundenen beweglichen Stabes und des auf dem Limbus des festen Stabes gleitenden Nonius.

Der silberne Limbus des beweglichen Maaßstabes ist wie der des festliegenden in halbe Pariser Linien getheilt, der Nonius, welcher Funfzigtheile der Pariser Linie auf ihm angiebt, ist an dem sattelförmigen Messingstücke befestigt, das mit zwei kleinen Parallelepipeden aus Hartguß die schrägen Seitenflächen des beweglichen prismatischen Maaßstabes berührt. Außer dem Nonius trägt das sattelförmige Stück noch einen offenen federnden Messingcylinder, in welchem sich ein kleines Mikroskop senkrecht gegen die Marmorplatte verschieben läßt und daneben eine prismatische Fassung von Hartguß, worin sich ein stählernes Prisma mit conischer Spitze ebenfalls senkrecht gegen die Marmorplatte verschieben läßt, um nöthigenfalls auf ein mit der Platte zu verbindendes kleines Reißbrett Punkte nach ihren gemessenen oder berechneten rechtwinkligen Coordinaten aufzutragen. Die feinere Bewegung des Sattels auf dem zweiten prismatischen Maaßstabe wird wie die Bewegung des zweiten Maaßstabes auf dem festen durch eine Mikrometerschraube bewirkt. Die rechtwinklige Richtung der beiden Bewegungen zu einander wurde folgendermaßen durch den Apparat selbst untersucht. Ein messingenes Lineal, auf welchem zwei Punkte in einem Abstande von 5 Pariser Zollen, durch zwei rechtwinklige Axenkreuze bezeichnet waren, wurde ungefähr um 45° gegen die Richtung des festen Maaßstabes auf die Marmorplatte gelegt, und die Coordinaten $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$ $\beta'$ der Endpunkte des Abstandes mit dem Meßapparate gemessen. Aus den Seiten $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$ und 60 Linien des entstehenden Dreiecks ließ sich dann der Winkel bestimmen, den die Richtungen der Bewegungen auf den beiden Maaßstäben mit einander bildeten. Von den Messungen, die von Zeit zu Zeit wiederholt wurden, um sich von der Unveränderlichkeit der Stellung beider Maaßstäbe des Apparats zu überzeugen, will ich einige anführen.

Für $\alpha = 63{,}31$ Par. Linien, $\beta = 61{,}01$ Linien.
$\alpha' = 24{,}13$ „ $\beta' = 15{,}59$ „

folgte der bezeichnete Winkel 90° 2′.

Noch vor kurzer Zeit, nachdem Tausende von Messungen mit dem Apparate gemacht worden sind, wurde gefunden:

$\alpha = 7{,}35$ $\beta = 58{,}56$
$\alpha' = 50{,}37,$ $\beta' = 16{,}74$

woraus sich der Winkel, den die beiden Richtungen mit einander machen, zu 90° 0′, 3 ergiebt. Die größte gefundene Abweichung von der rechtwinkligen Stellung hat niemals 3 Minuten überstiegen, was für die Art der Anwendung des Meßapparats ohne Einfluß ist.

Der Apparat kann auch, wie man leicht übersieht, durch Anwendung eines mit der Klangscheibe fest verbundenen kleinen getheilten Kreises mit einem oder mehreren der Randtheilung concentrischen Kreisen zur Bestimmung der Punkte der Knotencurven durch Polarcoordinaten gebraucht werden. Indessen ist diese Benutzung immer etwas zeitraubend und man wird die Messung durch Polarcoordinaten, die für die geschlossenen Curven fast als nothwendig erscheint, lieber durch einen besonderen Meßapparat mit getheiltem feststehendem Kreise, auf dessen Alhidade ein Mikroskop sich verschieben läßt, vorzunehmen geneigt sein.

Zur Bestimmung der Töne der schwingenden Scheiben diente mir außer einem Langeschen horizontalen Monochord mit Winkelhebel und verschiebbaren Gewichten zur Spannung der Saiten, eine Sirene, welche in dem mathematischen Institut von Pistor & Martins in Berlin ausgeführt war. Auf der verticalen stählernen Axe der Sirene können nahe der unteren Spitze zwei Löcherscheiben befestigt werden, jede von 3¼ Zoll Durchmesser. Die dickere hat 16 schräg gebohrte elliptische Löcher, die dünnere 25 kreisförmige. Die untere gehärtete konische Spitze der Axe läuft in einem Zapfenlager der oberen Decke des Windkastens, das durch eine Schraube erhöht und erniedrigt werden kann. Das obere Ende der stählernen Axe dreht sich mit seiner konischen Vertiefung um die konische Spitze einer stählernen Schraube. Die Schraubenmutter derselben befindet sich an der höchsten Stelle des von zwei messingenen Säulen (von 6 Zoll Höhe und 8 Linien Durchmesser) getragenen Bogens, dessen Breite $6\frac{1}{2}$ Zoll, dessen Dicke $\frac{1}{4}$ Zoll beträgt. Der cylindrische Windkasten, der auf 2 diametralen Verlängerungen die beiden erwähnten Säulen trägt, hat in seiner oberen Decke 16 schräg gebohrte und 25 gegen dieselbe normale Löcher. Der Windkasten hat außerdem zwei größere durch einen Deckel verschließbare Oeffnungen, die Eine im Boden die zweite in der cylindrischen Seitenwand.

Das Zählerwerk dieser Sirene besteht aus einem System von 2 Hebeln und 2 Rädern von $17\frac{1}{2}$ Linien im Durchmesser mit je 100 Zähnen. Durch einen sanften Schlag, der auf den hölzernen Griff eines Hebels von oben nach unten geführt wird, läßt man das die einzelnen Umdrehungen der Sirenenscheibe zählende Rad in die dem oberen Theile der stählernen Axe eingeschnittenen Schraube ohne Ende eingreifen; das zweite Rad mit dem ersten durch ein Getriebe von 10 Triebstöcken verbunden, rückt um 1 Zahn weiter, wenn das erste 10 Umdrehungen vollendet hat. Durch einen Schlag von unten nach oben auf denselben Hebel löst man das Zählerwerk aus seiner Verbindung mit der Schraube ohne Ende und stellt es fest gegen einen kleinen Keil am obern Ende der einen Säule, welcher auch als Zeiger für die Anzahl der Umläufe der Löcherscheibe dient.

Da die große Druckkraft für die Hervorbringung der höheren Töne sich nicht gut beschaffen ließ, so mußte die Umdrehung der Löcherscheibe durch eine mechanische Kraft bewirkt werden. Zu diesem Zwecke wurde eine Schnur ohne Ende um den oberen Theil der stählernen Axe und den Umfang eines 11zölligen Rades von Messing gelegt, dessen Welle durch ein mit ihr verbundenes Gewicht in Bewegung gesetzt werden konnte. Die Regulirung erfolgt durch zwei drehbare Windflügel an der Axe der Sirene; das Aufziehen des Gewichts vermittelst einer von dem Umfange des Rades und der darüber gelegten Schnur unabhängigen bekannten Vorrichtung. Die Benutzung einer Magellanschen Pendeluhr zur Zeitmessung gewährte die hiesige naturforschende Gesellschaft, der ich für die vieljährige Unterstützung meiner Bestrebungen auch bei dieser Gelegenheit meinen Dank auszusprechen mich gedrungen fühle. Beim Zählen der Secunden in diesen Versuchen habe ich eine größere Genauigkeit erreichen können, wenn ich eine den Schall leitende Stange unmittelbar an dem Zifferblatte der Uhr befestigte und das andere Ende der Stange in unmittelbare Berührung mit dem Ohre brachte. Ueberhaupt lassen sich in der Folge bei der Tonbestimmung mit der Sirene noch viel schärfere Resultate erwarten, wenn man die rotirende Löcherscheibe und das zeitmessende Pendel durch den elektrischen Funken beleuchtet. Indem man eine Kreistheilung auf der rotirenden Scheibe anbringt, der ein Nonius auf dem Deckel des Windkastens entspricht, dem schwingenden Pendel einen Nonius giebt, der sich auf eine feste Kreistheilung der Pendelbewegung bezieht, und den Nonius der Schwebungen benutzt, den die beiden von dem Tone der Sirene und von dem zu bestimmenden Tone ausgehenden Wellenzüge für das Gehör abgeben, so wird man durch Anwendung dieser 3 Nonien eine bei weitem größere Genauigkeit in der Tonbestimmung erreichen können, zumal da die gleichförmige Bewegung der Sirene auf eine kürzere Zeit beschränkt sein kann, auch die gleichzeitigen Beobachter dabei in keine individuellen Täuschungen der Sinne verfallen können. Freilich muß man dann erst die Zeitmomente beobachten, wenn die Sirene bereits in vollem Gange ist, nicht die Momente wählen, wo das Zählerwerk in die Schraube ohne Ende eingreift, oder ausgelöst wird.

Am zweckmäßigsten wird man nach dem Scheiblerschen Princip die Sirene anwenden, wenn man den zu untersuchenden Ton mit einem zunächst niedrigeren und einem zunächst höheren Tone der Sirene

Schwebungen machen läßt: Bedeutet x die Anzahl der Doppelschwingungen des zu untersuchenden Tones, a die Anzahl der Doppelschwingungen des niedrigeren Tons der Sirene, m die Anzahl der Schwebungen beider Töne, so ist $x - a = m$, und da für einen zweiten höheren Ton der Sirene

$$b - x = n, \text{ so ist } x = \frac{(a + b)}{2} + \frac{(m - n)}{2}$$

Für den Grundton einer großen Stimmgabel von Lange in Berlin erhielt ich in 2 Reihen von Messungen folgende Zahlen der Doppelschwingungen:

| | |
|---|---|
| 260 | 261 |
| 256 | 258 |
| 260 | 252 |
| 258 | 260 |
| 264 | 256 |
| 251 | 253 |
| 253 | 259 |
| 250 | 250 |
| 256,5 | 256,1 |

Aus diesen Messungen ergiebt sich eine mittlere Zahl, die ich bei wiederholten Versuchen bis auf die einzelne Schwingung wiederfinde.

Mit Hülfe des nach diesem Tone der Stimmgabel gestimmten Monochords habe ich die Töne der oben erwähnten Kreisscheiben bestimmt und Werthe erhalten, die in größerer Uebereinstimmung mit der Annahme Poisson's als der Wertheim's über den Elasticitäts-Coeffizienten $\theta$ sind, wofür auch die Messungen der Radien der Knotenkreise sprechen; da es aber gerade bei dieser Entscheidung auf die schärfste Bestimmung der Töne ankommt, so werde ich diese Resultate jetzt noch nicht vorlegen, sondern erst die Vollendung eines Weberschen vertikalen Monochord's abwarten, um durch dieses und die Sirene eine den Messungen der Knotenkreise entsprechende Genauigkeit in der Bestimmung der Töne zu erreichen.

Ich wende mich jetzt zu den Messungen der Knotenlinien auf schwingenden elastischen Scheiben. Die Resultate dieser Messungen werden auf die übersichtlichste Form gebracht, wenn man sie durch empirische Formeln darstellt. Für die Beziehung der Knotencurven auf rechtwinklige Coordinaten ist die Function

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3, \ldots\ldots (1)$$

mit der Annahme gleicher Intervalle der Abscissen zum Grunde gelegt worden, für die Beziehung auf Polarcoordinaten, die besonders bei den geschlossenen Curven benutzt ist, die periodische Function

$$r = p + u_1 \sin(U_1 + t) + u_2 \sin(U_2 + 2t) + u_3 \sin(U_3 + 3t) + \ldots\ldots (2)$$

wo r den radius vector, $t = \frac{2\pi}{n}$, n die Anzahl der beobachteten Werthe von r für t, 2t, u. s. w. bedeuten.

Da die Anzahl der beobachteten Werthe der Coordinaten immer größer war als die Anzahl der zu bestimmenden Constanten, so hatte man für die wahrscheinlichsten Werthe derselben nach der Gaußischen Bezeichnung die Gleichungen:

$$\begin{aligned}[y] &= an + b[x] + c[x^2] + d[x^3] \\ [yx] &= a[x] + b[x^2] + c[x^3] + d[x^4] \;\ldots\ldots (I) \\ [yx^2] &= a[x^2] + b[x^3] + c[x^4] + d[x^5] \\ [yx^3] &= a[x^3] + b[x^4] + c[x^5] + d[x^6]\end{aligned}$$

Für $y = ax + b$

$$\text{ist } a = 6 \left\{\frac{2[xy] - (n+1)\,x\,[y]}{x^2 \quad n(n-1)(n+1)}\right\} \;\ldots (3)$$

$$b = 2 \left\{\frac{x[y](2n+1) - 3[xy]}{x \quad n(n-1)}\right\}$$

Für ein conjugirtes Axensystem bei der Ellipse hätte man:

für $y^2 = A - Bx^2$

$$A = \frac{\dfrac{[y^2]}{n} - \dfrac{[x^2y^2][x^2]}{n[x^4]}}{1 - \dfrac{[x^2][x^2]}{n[x^4]}} \;\ldots\ldots (4)$$

$$B = \frac{\dfrac{[y^2][x^2]}{n[x^4]} - \dfrac{[x^2y^2]}{[x^4]}}{1 - \dfrac{[x^2][x^2]}{n[x^4]}}$$

Am einfachsten und nach Bessels Ausdruck: „Der Theorie auf halbem Wege entgegengehend" (Astronomische Nachrichten No. 136) ist die Benutzung der periodischen Function. (2). Wenn $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, .... $\alpha_{(n-1)}$ die n Werthe von r für t, 2t, 3t u. s. w. sind, so ist

$$np = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_{(n-1)}$$

$$\frac{n}{2}u_1 \sin U_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \cos 2t + \ldots \alpha_{(n-1)} \cos(n-1)\,t$$

$$(II) \ldots\ldots \frac{n}{2}u_1 \cos U_1 = \alpha_1 \sin t + \alpha_2 \sin 2t + \ldots \alpha_{(n-1)} \sin(n-1)\,t$$

$$\frac{n}{2}u_2 \sin U_2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cos 2t + \alpha_2 \cos 4t + \ldots \alpha_{(n-1)} \cos(n-1)\,2t$$

$$\frac{n}{2}u_2 \cos U_2 = \alpha_1 \sin 2t + \alpha_2 \sin 4t + \ldots \alpha_{(n-1)} \sin(n-1)\,2t$$

u. s. w.

Indem man das Integral von $\frac{1}{2}\,r^2dt$ zwischen den Grenzen o und $2\pi$ nimmt, so erhält man für die Fläche F der Curve

$$F = \pi \left\{p^2 + \tfrac{1}{2}\,(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots)\right\} = \pi\, P$$

was mit der Bestimmung der Summe der Quadrate der Fehler sehr einfach zusammenhängt, da diese

$$= [\alpha^2] - n \left\{p^2 + \tfrac{1}{2}\,(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots)\right\}$$

Da auf den Kreisscheiben die Knotenkreise wohl auch in ellipsenähnliche Curven degeneriren, so ist es von Nutzen, den Radius $\sqrt{P}$ eines Kreises angeben zu können, der gleichen Inhalt mit der beobachteten Curve hat.

Wie die Functionen (1) und (2) bei den Knotenkurven der quadratischen Scheiben angewendet sind, wird aus 2 Beispielen erhellen.

Wenn man außer den 2 Ecken einer Seite der quadratischen Scheibe noch einen Punkt unterstützt, der um 0,1411 der Seite von der Mitte derselben entfernt ist, die Streichstelle aber mit der Mitte einer Seite zusammen fällt, so erhält man eine Curve mit 4 Zweigen, für welche ich die Ordinaten für die Abscissen von 0,02 bis 0,42 im dritten Bande des Repertoriums der Physik S. 118 angegeben habe. Durch Anwendung der Gleichungen (1) erhält man

$$y = -0{,}003299 + 1{,}05904\,x - 0{,}290269\,x^2 + 0{,}42082\,x^3$$

wo x und y in Theilen der Seite des Quadrats vom Mittelpunkte der Scheibe zu nehmen sind.

Die beobachteten und die nach der Formel berechneten Werthe sind folgende:

| x beobacht. | y beobacht. | y berechn. |
|---|---|---|
| 0,02 | 0,0177 | 0,0178 |
| 0,04 | 0,0388 | 0,0387 |
| 0,06 | 0,0590 | 0,0593 |
| 0,08 | 0,0794 | 0,0798 |
| 0,10 | 0,0999 | 0,1001 |
| 0,12 | 0,1204 | 0,1203 |
| 0,14 | 0,1406 | 0,1405 |
| 0,16 | 0,1608 | 0,1604 |
| 0,18 | 0,1809 | 0,1804 |
| 0,20 | 0,2007 | 0,2004 |
| 0,22 | 0,2204 | 0,2202 |
| 0,24 | 0,2400 | 0,2400 |
| 0,26 | 0,2596 | 0,2598 |
| 0,28 | 0,2794 | 0,2797 |
| 0,30 | 0,2992 | 0,2997 |
| 0,32 | 0,3194 | 0,3197 |
| 0,34 | 0,3396 | 0,3397 |
| 0,36 | 0,3599 | 0,3600 |
| 0,38 | 0,3803 | 0,3803 |
| 0,40 | 0,4009 | 0,4008 |
| 0,42 | 0,4218 | 0,4215 |
| 0,44 | 0,4424 | 0,4424 |
| 0,46 | 0,4638 | 0,4635 |

wobei ich bemerke, daß die beiden letzten für 0,44 und 0,46 beobachteten Werthe von y gar nicht zur Berechnung der Constanten in der Formel benutzt worden sind.

2

Formeln der erwähnten Art haben unter andern den Zweck, die constanten Durchschnittspunkte zu bestimmen, in welchen sich die demselben Tone zugehörigen Knotencurven derselben Art auf homogenen elastischen Quadratscheiben durchschneiden. (Repert. der Physik, Band 3. S. 121.)

Für den Durchschnitt der oben betrachteten Curve mit der Diagonale ist:

$$0 = -0{,}003299 + 0{,}05904x - 0{,}2903x^2 + 0{,}4208x^3$$

deren 3 Wurzeln nahe mit 0,1, mit 0,24 und 0,36 übereinstimmen.

Für die Anwendung der Formeln (2) und (II) bei quadratischen Scheiben bietet sich sogleich die Seite 114 im 3t. B. d. Rep. der Physik betrachtete geschlossene Curve dar. Sie wird erhalten, wenn man 2 Mittelpunkte zweier Gegenseiten unterstützt und noch außerdem einen Punkt der Diagonale, der etwa um den 3ten Theil derselben von der Ecke entfernt ist, während man eine Ecke mit dem Violinbogen streicht.

Für diese Curve waren für ein im Mittelpunkte der Scheibe sich schneidendes den Seiten der Scheibe paralleles Axensystem folgende Werthe der Coordinaten ermittelt:

| x | y |
|---|---|
| 0,00 | 0,4200 |
| 0,05 | 0,4143 |
| 0,10 | 0,3980 |
| 0,15 | 0,3718 |
| 0,20 | 0,3368 |
| 0,25 | 0,2944 |
| 0,2726 | 0,2726 |

Hieraus wurden durch Interpolation die Werthe von $r = \sqrt{x^2+y^2}$ für die Winkel 15° und 30° erhalten, welche r mit einer der Axen bildet. Für die Anwendung der Formeln (2) und (II) waren auf diese Weise folgende Werthe in Polarcoordinaten ermittelt:

| t | r beobacht. | r berechn. |
|---|---|---|
| 0° | 0,4200 | 0,4200 |
| 15° | 0,4094 | 0,4094 |
| 30° | 0,3923 | 0,3923 |
| 45° | 0,3855 | 0,38555 |

Da die Curve, wie die Beobachtung ergab, auch noch in Bezug auf das Axensystem der Diagonalen symmetrisch war, so mußte der Ausdruck für r folgende Form haben:

$$r = p + u_4 \cos 4t + u_8 \cos 8t + u_{12} \cos 12t \ldots$$

Die Constanten p, $u_4$ u. s. w. bestimmen sich für $t = 15°$ in folgender Weise:

$$\begin{aligned} 6p &= \alpha_0 + \alpha_3 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 3u_4 &= \alpha_0 - \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 \\ 3u_8 &= \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ 3u_{12} &= \alpha_0 - 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{aligned}$$

und man erhält nach der numerischen Berechnung

$$r = 0{,}40148 + 0{,}0172 \cos 4t + 0{,}00127 \cos 8t + 0{,}0001 \cos 12t + \ldots$$

Nach diesem Ausdrucke für r sind die oben mit den beobachteten Werthen zusammengestellten r berechnet worden.

Das vom cosinus des 12fachen Winkels abhängige Glied bei der Berechnung von r noch zu berücksichtigen, schien bedenklich, um nicht die Beobachtungsfehler mit in die Formel zu ziehen.

Berechnet man aus den ursprünglich gegebenen rechtwinkligen Coordinaten x und y die entsprechenden Polarcoordinaten t und r, die also als beobachtet angesehen werden können, so erhält man die in den beiden ersten Columnen enthaltenen Zahlenwerthe; die 3te Columne enthält für jedes beobachtete t den entsprechenden aus der obigen Formel berechneten Werth für r.

| | | Beobachtet. | Berechnet. |
|---|---|---|---|
| t | | r | r |
| 0° | 0′,0 | 0,4200 | 0,4200 |
| 6 | 52, 9 | 0,4173 | 0,4175 |
| 14 | 6, 2 | 0,4104 | 0,4105 |
| 21 | 58, 3 | 0,4009 | 0,4009 |
| 30 | 42, 2 | 0,3917 | 0,3917 |
| 40 | 20, 2 | 0,3862 | 0,3862 |
| 45 | 0, 0 | 0,3855 | 0,38555 |

Da der oben gefundene Ausdruck für r alle beobachteten Werthe, selbst diejenigen, welche gar nicht zur Berechnung der Constanten benutzt sind, fast genau darstellt, so darf man wohl vermuthen, die einstige Theorie werde einen dem empirisch bestimmten nahe gleichen Ausdruck für die in Rede stehende Curve finden. Vielleicht bricht sogar der Ausdruck für r mit dem 3ten Gliede ab wegen der Kleinheit des Coefficienten im 4ten Gliede und führt auf eine algebraische Curve.

Es läßt sich erwarten, daß die Resultate der Beobachtung bei den homogenen quadratischen Scheiben dieselbe Uebereinstimmung mit der Theorie zeigen werden, wie dies bereits bei den schwingenden Kreisscheiben stattfindet, deren vollständige Theorie Herr Kirchhoff gegeben hat. Nach dieser bestehen alle Knotenlinien einer schwingenden homogenen elastischen Kreisscheibe aus concentrischen Kreisen und Durchmessern, die mit einander gleiche Winkel bilden. Die aus dieser Theorie gefolgerten Radien der Knotenkreise stimmen mit meinen Messungen bis auf 3 Decimalen des zur Einheit genommenen Radius der Scheibe überein, in einzelnen Fällen noch weiter und es konnten die numerischen Werthe der Messung sogar als starke Näherungswerthe bei der Berechnung der Wurzeln der transcendenten Gleichungen benutzt werden, auf welche die Theorie geführt hatte. Die constante immer positive Differenz in der 4ten Decimale zwischen den theoretisch und empirisch gefundenen Radien bleibt einer weiteren Untersuchung vorbehalten, die noch andere Punkte aufzuklären hat. Denn wenn auch die beobachteten Kreise auf planparallelen Kreisscheiben von Spiegelglas bei den einfacheren den tieferen Tönen zugehörigen Schwingungen als vollkommene Kreise gelten können, da die einzelnen Durchmesser derselben nur um einzelne Hunderttheile der Pariser Linie von einander abweichen, — eine Abweichung, die ihren Grund in manchen die Lage der Sandsphäroide bestimmenden Umständen haben kann; so zeigt sich doch bei den Schwingungen, wo mehrere Kreise gleichzeitig vorhanden sind, namentlich bei dem innersten Kreise eine elliptische Krümmung, als wäre die Scheibe für die höheren Schwingungen nicht mehr als homogen zu betrachten. Es wäre nicht unmöglich, daß diese Ellipsen, die nach der Theorie Kreise sein sollen, sich nach längerem Gebrauch der Scheiben allmählich immer mehr der Kreisform näherten, wie bei der anfänglichen Starrheit mancher Scheiben die höheren Schwingungen gar nicht hervorgebracht werden können, die später, wenn die Scheiben durch längeren Gebrauch eingespielt sind, ohne Schwierigkeit gelingen.

In Bezug auf die homogene Beschaffenheit besteht ein großer Unterschied zwischen den Scheiben von regelmäßiger Form aus Glas oder Metall, wenn beide in Schwingungen versetzt werden. Die Theorie der schwingenden homogenen Kreisscheiben bestimmt nichts über die Lage der Durchmesser überhaupt, nur daß sie mit einander gleiche Winkel bilden sollen; die Lage eines ersten Durchmessers bleibt also willkührlich. Dies wird auch auf homogenen planparallelen Scheiben von Spiegelglas durch die Erfahrung bestätigt. Werden irgend 2 diametrale Punkte der Peripherie der Scheibe von unten unterstützt, nicht durch Einspannen der Scheibe bestimmt, so ist sogleich, sobald die Scheibe zu tönen anfängt, die Lage des ersten Durchmessers gegeben, mit dem die anderen Durchmesser gleiche Winkel bilden. Läßt man den Sand in der letzten Anordnung liegen, wählt 2 neue diametrale Unterstützungspunkte und außerdem natürlich immer noch einen dritten Unterstützungspunkt, der in einen andern Durchmesser oder in einen Knotenkreis je nach der Schwingungsart fällt, so geht der Sand sichtbar, wenn die Scheibe in neue Schwingungen versetzt wird, bei unverändertem Tone in die Lage des neuen Durchmessers über, den er durch seine neue Anordnung dem Auge darstellt.

Dieser willkührlichen Lage des ersten Durchmessers auf Kreisscheiben, die durch die Unterstützung eine bestimmte wird, entspricht auf quadratischen Scheiben die Drehung der Curven von derselben Art, welche bei unveränderter Tonhöhe, aber mit Aenderung der Intensität des Tons durch den Mittelpunkt der Scheibe gehen und durch 2 Punkte derselben von symmetrischer Lage gegen die die Mittelpunkte zweier parallelen Ränder der Scheibe verbindende Linie.

Anders verhält es sich mit den nicht homogenen Metallscheiben. Hier findet weder die Drehung der Curven auf quadratischen, noch die Drehung der Durchmesser auf Kreisscheiben Statt, sondern die Lage der Elasticitätsaxen bestimmt die Lage der Knotenlinien, die unverändert bleibt, wenn auch die Unterstützungspunkte sich ändern. Die Knotenkreise der metallenen Kreisscheiben trennen sich von ihren Durchmessern und bilden mit diesen Curven.

Die Vergleichung der theoretisch bestimmten Radien der Knotenkreise mit den gemessenen ist in den Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften v. J 1850 veröffentlicht und von Herrn Kirchhoff in seiner Abhandlung über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe (Poggendorffs Annalen, 1850, Nro. 10) mitgetheilt worden. Seitdem habe ich die früheren Messungen wiederholt und die Resultate derselben bestätigen können, aber besonders durch Benutzung einer neuen durchbohrten Kreisscheibe, deren oben schon gedacht wurde, den Einfluß der Massenänderung auf die Schwingungen der Scheibe und die Schwingung der 3 concentrischen Kreise einer genaueren Untersuchung unterworfen.

Obgleich die mit Goldblatt belegten Scheiben bei der Darstellung der Knotenlinien so große Vortheile gewähren, so entstand doch die Frage, welchen Einfluß die veränderte Oberfläche der Scheibe auf die Bildung der Knotenlinien etwa haben könne. Die kleinste Glasscheibe ergab ohne Goldblatt den Radius des einzelnen Kreises ohne Durchmesser im Mittel aus je 10 Messungen zu:

19,897 Par. L.
886 Kehrseite.
890
892, Kehrs.

mit Goldblatt belegt 19,902
898, Kehrs.
898
899 Kehrs.

Dieselbe Scheibe ergab für die Schwingung mit Einem Kreise und Einem Durchmesser für den Radius des Kreises:

ohne Belegung 22''',868
864 Kehrs.

mit Goldblatt b. 22,868
867, Kehrs.
866.

Eben so wenig zeigten die anderen Scheiben einen Einfluß der Oberfläche auf die Aenderung der Knotenkreise. Selbst eine größere Vermehrung der Masse der schwingenden Scheibe äußert noch keine meßbare Veränderung auf die Größe der Knotenkreise. Ich ließ die durchbohrte Scheibe ohne den Cylinder schwingen und erhielt im Mittel aus 60 Messungen den Radius des Kreises ohne Durchmesser 28,557 P. Lin. Dasselbe Resultat gab die Scheibe, als ich sie durch Einsetzen des kleinen Cylinders von anderthalb Linien Durchmesser und ½ Lin. Dicke zu einer vollen Scheibe ergänzte. Für die Schwingung mit 2 concentrischen Kreisen ohne Durchmesser erhielt ich auf dieser Scheibe die Radien $r_,$ und $r_2$:

$$r_, = 16''',479; \; r_2 = 35,'''435;$$

Ueber die Schwingung mit 3 concentrischen Kreisen ohne Durchmesser hatte ich früher nur die Resultate einer unvollkommenen Messung mittheilen können. Diese waren durch die Scheibe IV erhalten. Nach vielen vergeblichen Versuchen, die Knotenlinien in gewohnter Schärfe darzustellen, erhielt ich durch die bei dieser Scheibe allein mögliche Randerschütterung nur 3 Kreise von einer gewissen Breite, wobei sich keine genaue Messung anstellen ließ. Die erhaltenen Resultate für die Radien $r$, $r_2$ $r_3$ waren gleichwohl in erträglicher Uebereinstimmung mit der Theorie, wie aus der folgenden Zusammenstellung der theoretisch bestimmten Radien mit den gemessenen hervorgeht:

| | beobachtet | berechnet |
|---|---|---|
| $r_,$ | = 0,2575 | 0,25679 |
| $r_2$ | = 0,5921 | 0,59147 |
| $r_3$ | = 0,8954 | 0,89381 |

aber es fiel mir auf, daß hier die beobachteten Radien kleiner waren als die theoretisch gefolgerten, während bei allen übrigen fast durchweg das Gegentheil stattfand. Die Untersuchung der erwähnten Schwingung auf der durchbohrten Scheibe, die sich durch centrale Erschütterung eben so leicht und sicher wie alle übrigen hervorbringen läßt, hat auch den 3 diese Schwingung begleitenden Kreisen dasselbe Verhältniß zur Theorie wie den anderen gemessenen Kreisen angewiesen; auch diese 3 Kreise sind sämmtlich kleiner als die durch die Theorie bestimmten, doch bezieht sich, wie schon früher bemerkt wurde, diese Abweichung erst auf die 4te Decimale.

Die Mittelwerthe aus einer größeren Reihe von Messungen waren für $r_2$ und $r_3$ folgende:

$$r_2 = 24''',89, \; r_3 = 37''',63.$$

Der innere Kreis mit dem Radius r, erforderte eine genauere Untersuchung, die ich hier folgen lasse.

Da die Abweichung der beobachteten inneren Knotenlinie, welche nach der Theorie ein vollkommener Kreis sein soll, von dem Kreise augenfällig war, so wurden zur Bestimmung der Curve 19 einander parallele Sehnen derselben gemessen, die zu gleichweit von einander abstehenden Abscissen gehörten. Dasselbe geschah mit anderen Punkten derselben Curve in Bezug auf ein gegen das erste rechtwinkliges Axensystem. Es wurden wieder 19 Sehnen gemessen, die zu äquidistanten Abscissen gehörten. Aber diesmal bezogen sich die Abscissen auf den beweglichen prismatischen Maaßstab, während sie bei dem ersten Axensystem auf den festen Maaßstab des Apparats bezogen wurden. Dabei blieb die Lage der Scheibe mit ihren Knotenlinien auf der Marmorplatte ungeändert.

Unter der Annahme, daß die Curve eine Ellipse war, mußte die Linie, welche die Mittelpunkte aller gemessenen Sehnen verband, eine gerade sein. Wegen der möglichen Beobachtungsfehler wurden in ihrer Gleichung $y = ax + b$, die Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt und so in Bezug auf das erste Axensystem die folgende Gleichung erhalten:

$$y = 0{,}003911\ (x-32) + 37{,}'''5989$$

In Bezug auf das 2te Axensystem wurde für die Gerade durch die Mittelpunkte der zum festen prismatischen Maaßstabe parallelen Sehnen die folgende Gleichung bestimmt:

$$y' = -\ 0{,}007853\ (46-x') = 40{,}'''2385.$$

Wurden y' und x' auf das erste Axensystem bezogen, so erhielt man

$$y = 0{,}003911\ x + 37''',4737$$
$$x = 0{,}007853\ y + 41,\ 8773$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Geraden

$$x = 41''',\ 172$$
$$y = 37,\ \ 635.$$

Der Mittelpunkt der ganzen Scheibe wurde durch Sehnen der kleinen centralen kreisförmigen Oeffnung bestimmt, und als Coordinaten X u. Y dieses Mittelpunkts in Bezug auf das erste System erhalten:

$$X = 41''',16$$
$$Y = 37,\ \ 64$$

Sonach kann der Mittelpunkt der elliptischen Knotenlinie als nahe zusammenfallend mit dem Mittelpunkte der Scheibe angesehen werden.

Hiernach ergaben sich nach (4) für die Halbaxen a und b des ersten Axensystems und für die Halbaxen a' und b' im 2ten konjugirten Axensystem aus den beobachteten Werthen der halben Sehnen die folgenden Bestimmungen:

$$a = 10''',\ 894 \qquad a' = 10''',\ 876$$
$$b = 10,\ \ 706, \qquad b' = 10,\ \ 692$$

Die folgende Zusammenstellung zeigt, wie die beobachteten Werthe durch die gefundene Ellipse dargestellt werden.

### Erstes Axensystem.

| Beobachtet. x | Beobachtet. y | Berechnet. y |
|---|---|---|
| 9,17 | 5,73 | 5,78 |
| 8,17 | 7,07 | 7,08 |
| 7,17 | 8,10 | 8,06 |
| 6,17 | 8,84 | 8,82 |
| 5,17 | 9,44 | 9,42 |
| 4,17 | 9,89 | 9,89 |
| 3,17 | 10,25 | 10,24 |
| 2,17 | 10,48 | 10,49 |
| 1,17 | 10,65 | 10,64 |
| 0,17 | 10,72 | 10,71 |
| — 0,83 | 10,64 | 10,68 |
| — 1,83 | 10,57 | 10,55 |
| — 2,83 | 10,35 | 10,34 |
| — 3,83 | 10,04 | 10,02 |
| — 4,83 | 9,60 | 9,60 |
| — 5,83 | 9,05 | 9,04 |
| — 6,83 | 8,34 | 8,34 |
| — 7,83 | 7,45 | 7,44 |
| — 8,83 | 6,27 | 6,27 |

In gleicher Weise werden auch die Ordinaten im 2ten conjugirten System durch die Gleichung $a^2y^2 = b^2 (a^2 - x^2)$, dargestellt, wobei zu bemerken ist, daß bei der obigen Rechnung keine Mittelwerthe aus mehreren Messungen, sondern nur aus einmaliger Messung hervorgegangene Beobachtungen zum Grunde liegen.

Setzt man voraus, die Ellipse wäre an Fläche einem Kreise gleich geblieben, so ist der Radius r, dieses Kreises $= \sqrt{ab}$, was bei der geringen Differenz der Axen mit dem arithmetischen Mittel $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ nahe übereinstimmt. Aus a, b, a' und b' folgt hiernach der Mittelwerth

$$r_, = 10''', 792$$

Nachdem die Scheibe wieder gereinigt und mit Sand bestreut war, wurde sie auf's Neue in Schwingung versetzt, aber diesmal die innerste Knotencurve auf Polarcoordinaten bezogen. Zu dem Ende wurde ein Glimmerblatt mit einer Kreistheilung von 15 zu 15 Graden an der unteren Seite etwas befeuchtet behutsam auf die Scheibe gebracht, so daß die Centra des getheilten Kreises und der Klangscheibe nahe zusammenfielen. Durch Drehung der Scheibe konnten nun die Theilungsstriche des auf derselben fest anliegenden Glimmerkreises in die Richtung der Bewegung des Mikroskops am Messapparate gebracht und so immer vier zu einander rechtwinklige Radien-Vectoren gemessen werden, indem man diese auf den Mittelpunkt des kleinen Glimmerkreises als Pol bezog. Aus 24 gemessenen Werthen des radius vector wurde für die innerste Knotencurve folgender Ausdruck für r abgeleitet:

$$r = 10''',799 + 0{,}02484 \sin(148^0\,10' + t) + 0{,}1402 \sin(56^0\,15' + 2t) + 0{,}0184 \sin(264^0\,42' + 3t) + \ldots$$

mit folgender Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe:

| | Beobachtet. | Berechnet. | | Beobachtet. | Berechnet. |
|---|---|---|---|---|---|
| t | r | r | t | r | r |
| 0° | 10,90 | 10,91 | 180° | 10,92 | 10,92 |
| 15 | 95 | 93 | 195 | 95 | 95 |
| 30 | 94 | 92 | 210 | 93 | 93 |
| 45 | 86 | 88 | 225 | 90 | 87 |
| 60 | 80 | 81 | 240 | 81 | 80 |
| 75 | 73 | 73 | 255 | 76 | 74 |
| 90 | 68 | 66 | 270 | 70 | 70 |
| 105 | 62 | 63 | 285 | 69 | 70 |
| 120 | 62 | 63 | 300 | 72 | 72 |
| 135 | 67 | 68 | 315 | 78 | 76 |
| 150 | 78 | 77 | 330 | 82 | 83 |
| 165 | 81 | 85 | 345 | 84 | 87 |

Wenn man nur 12 gemessene r, die zu den Winkeln 0°, 30°, 60° & gehören, anwendet, so erhält man auf 3 Decimalen denselben Werth für die Fläche der Knotencurve, die durch einen mit dem Radius $\sqrt{(10''',799)^2 + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots}$ beschriebenen Kreis gemessen wird, wo $u_1 = 0{,}02484$, $u_2 = 0{,}1402$, $u_3 = 0{,}0184$.

Durch 3 andere Reihen von Messungen wurde erhalten:

$r_1 = 10''',788$
80
79
was mit den beiden obigen 792
und 799
$r' = 10''',794$ ergiebt.

Zuletzt stellen wir noch die gemessenen Radien der Knotenkreise ohne Durchmesser in Theilen des Radius dieser Scheibe ausgedrückt mit den von Herrn Kirchhoff theoretisch bestimmten zusammen:

| | Beobachtung. | Theorie. |
|---|---|---|
| Ein Kreis. | 0,67815 | 0,68062 |
| Zwei Kreise. | 0,39133 | 0,39151 |
| | 0,84149 | 0,84200 |
| Drei Kreise. | 0,25631 | 0,25679 |
| | 0,59107 | 0,59147 |
| | 0,89360 | 0,89381 |

Welche Grundlage für diesen Theil der Akustik gewonnen werden soll, wird man aus dem Vorigen beurtheilen können.

**F. Strehlke.**