Die Seiten-Fläche des schiefen Kegels.

In zwei früheren Programmen wurden die Eigenschaften des normalen Cylinders, Kegels und abgestumpften Kegels untersucht, weshalb jetzt der Vollständigkeit wegen die Bestimmung der Seiten-Fläche des schiefen Kegels folgen soll. Euler hat die Differential-Gleichungen für diese Seiten-Fläche und den Winkel gegeben, den man erhält, wenn man diese Fläche auf eine Ebene aufrollt. Bezeichnet r den Radius der Grund-Fläche, h die Höhe des schiefen Kegels, und b die Entfernung des Fuß-Punktes der Höhe vom Mittelpunkt der Basis; ω ferner den Bogen in der Grund-Fläche von der größten Seiten-Linie bis zu irgend einer anderen, und S den Theil der Seiten-Fläche zwischen diesen Linien und dem genannten Bogen, so daß für $\omega = 180°$, S die halbe Seiten-Fläche darstellt: so bestimmt Euler das Differential der Seiten-Fläche

$$d\,S = \tfrac{1}{2} r\,.\,d\,\omega\,.\,\sqrt{\left\{ h^2 + (r + b\,.\,\mathrm{Cos}\,.\,\omega)^2 \right\}}$$

und des genannten Winkels

$$d\,\psi = \frac{r\,.\,d\,\omega\,.\,\sqrt{\left\{ h^2 + (r + b\,.\,\mathrm{Cos}\,\omega)^2 \right\}}}{h^2 + b^2 + r^2 + 2\,r\,b\,.\,\mathrm{Cos}\,\omega}$$

und bemerkt, daß die Integration dieser Gleichungen schwierig ist, weil sie weder auf Logarithmen noch Kreis-Funktionen führt. Die Integration der ersten Differential-Gleichung gibt Euler für gewisse Bedingungen unter den Größen h, b und r, besonders wenn h bedeutend größer ist als b und r. Da man aber nach den Entdeckungen von Legendre, Abel und Jacobi jede Differential-Gleichung als integrirbar ansehen kann, wenn sie auf algebraische Quantitäten und auf die drei Formen der elliptischen Transcedenten zurück geführt ist, wie man früher jedes Integral als bekannt annahm, wenn es durch Logarithmen oder Kreis-Funktionen ausgedrückt war: so sind die Substitutionen anzugeben, durch welche die Integrale der beiden Differential-Gleichungen auf die drei Formen reducirt werden.

Diese drei Formen der elliptischen Transcendenten sind nun:

$$F = \int \frac{\partial\,\varphi}{\triangle(\varphi)}\,;\; E = S\,d\,\varphi\,.\,\triangle(\varphi) \text{ und}$$

$$\Pi\,(n\,\varphi) = \int \frac{d\,\varphi}{1 \pm n\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\triangle(\varphi)}$$

wenn $\triangle(\varphi) = \sqrt{(1 - c^2\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}$; worin der Modul c und die Amplitude φ als reell angenommen werden, und c stets kleiner als die Einheit.

Das Integral der ersten Gleichung ist:

$$S = \tfrac{1}{2}\, r \,.\, d\,\omega \,.\, \sqrt{\left\{ h^2 + (r + b \,.\, \mathrm{Cos}\,\omega)^2 \right\}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, r \,.\, d\,\omega \,.\, \sqrt{\left(h^2 + r^2 + 2\, r\, b \,.\, \mathrm{Cos}\,\omega + b^2\, \mathrm{Cos}^2\,\omega \right)}.$$

Setzt man nun $x = \mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\,\omega$, so ist

$$d\,x = \frac{\frac{1}{2}\,d\,\omega}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\omega},\ \tfrac{1}{2}\,d\,\omega = d\,x \,.\, \mathrm{Cos}^2\,\tfrac{1}{2}\,\omega$$

$1 + x^2 = 1 + \mathrm{Tang}^2\,\frac{1}{2}\,\omega = \dfrac{1}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\omega}$; mithin $\frac{1}{2}\,d\,\omega = \dfrac{d\,x}{1 + x^2}$. Da nun aber

$$\mathrm{Tang}\,\omega = \frac{2\,x}{1 - x^2};\ 1 + \mathrm{Tang}^2\,\omega = 1 + \frac{4\,x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2}$$

so ist $\mathrm{Cos}\,\omega = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; und die umgeformte Gleichung:

$$S = r \,.\, \int -\frac{d\,x}{1 + x^2} \,.\, \sqrt{\left\{ h^2 + r^2 + \frac{2\,r\,b\,(1 - x^2)}{1 + x^2} + \frac{b^2\,(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^2} \right\}}$$

$$S = r \,.\, \int \frac{d\,x}{(1 + x^2)^2} \,.\, \sqrt{\left\{ (h^2 + r^2)(1 + x^2)^2 + 2\,r\,b\,(1 - x^2)(1 + x^2) + b^2\,(1 - x^2)^2 \right\}}$$

Der Abkürzung wegen nimmt man

$$\mathbf{X} = (h^2 + r^2)\,(1 + x^2)^2 + 2\,r\,b\,(1 - x^2)\,(1 + x^2) + b^2\,(1 - x^2)^2$$

$$= h^2 + (r + b)^2 + 2\,(h^2 + r^2 - b^2)\,x^2 + \left\{ h^2 + (r - b)^2 \right\} .\, x^4;$$

ferner $h^2 + (r - b)^2 = A$; $2\,(h^2 + r^2 - b^2) = B$, und $h^2 + (r + b)^2\ c$; und dann ist

$$\mathbf{X} = A\,x^4 + B\,.\,x^2 + C \text{ und}$$

$$S = r \,.\, \int \frac{d\,x}{(1 + x^2)^2} \,.\, \sqrt{\left(A \,.\, x^4 + B\,x^2 + C \right)} = r \,.\, \int \frac{d\,x}{(1 + x^2)^2} \,.\, \sqrt{\mathbf{X}}$$

Wenn man mit $\sqrt{\mathbf{X}}$ multiplicirt und dividirt, so erhält die letzte Gleichung die Form

$$S = r \,.\, \int \frac{d\,x \,.\, \mathbf{X}}{(1 + x^2)^2 \,.\, \sqrt{\mathbf{X}}}.$$

Um den constanten Factor r vorläufig unbeachtet zu lassen, nehmen wir

$$U = \int \frac{d\,x \,.\, \mathbf{X}}{(1 + x^2)^2 \,.\, \sqrt{\mathbf{X}}}.\ \text{Da nun}$$

$A \,.\, x^4 = A\,(x^4 + 2\,x^2 + 1) - 2\,A\,x^2 - A$; mithin

$\mathbf{X} = A\,(1 + x^2)^2 - (2\,A - B)\,x^2 + C - A$; ferner

$- (2\,A - B)\,x^2 = - (2\,A - B)\,(1 + x^2) + A - B + C$; so ist

$$\mathbf{X} = A\,(1 + x^2)^2 - (2\,A - B)\,(1 + x^2) + A - B + C, \text{ und}$$

$$\mathbf{U} = A \int \frac{d\,x}{(1 + x^2)^2 . \sqrt{\mathbf{X}}} \cdot \left\{ A\,(1 + x^2)^2 - (2\,A - B)\,(1 + x^2) + A - B + C \right\}$$

$$= A \int \frac{d\,x}{\sqrt{\mathbf{X}}} - (2\,A - B) \int \frac{d\,x}{(1 + x^2) . \sqrt{\mathbf{X}}} + (A - B + C) \int \frac{d\,x}{(1 + x^2)^2 . \sqrt{\mathbf{X}}}.$$

Nach den vorhin eingeführten Bezeichnungen $A = h^2 + (r - b)^2$; $B = 2\,(h^2 + r^2 - b^2$ und $c = h^2 + (r + b)^2$, ist $(2\,A - B) = 4\,b^2 - 4\,r\,b = 4\,b\,(b - r)$; $A - B + C = 4\,b^2$; folglich

$$\mathbf{U} = A . \int \frac{d\,x}{\sqrt{\mathbf{X}}} + 4\,b\,(r - b) . \int \frac{d\,x}{(1 + x^2) . \sqrt{\mathbf{X}}} + 4\,b^2 \int \frac{d\,x}{(1 + x^2)^2 . \sqrt{\mathbf{X}}}.$$

Um die algebraischen Größen aus dieser Gleichung zu sondern, differentiiren wir den Ausdruck

$$z = \frac{x . \sqrt{\mathbf{X}}}{2\,(1 + x^2)} = \frac{u}{v}$$

worin $u = x . \sqrt{(A . x^4 + B . x^2 + C)}$ $\quad v = 2\,(1 + x^2)$.

Es ist nun $d\,z = \frac{v . d\,u - u . d\,v}{v^2}$;

$$d\,u = d\,x . \sqrt{\mathbf{X}} + \frac{x . d\,\mathbf{X}}{2 . \sqrt{\mathbf{X}}} = \frac{2\,d\,x . \mathbf{X} + x\,d\,\mathbf{X}}{2 . \sqrt{\mathbf{X}}}, \text{ ferner}$$

$$x . d\,\mathbf{X} = (4\,A\,x^4 + 2\,B . x^2)\,d\,x$$

$$2\,\mathbf{X}\,d\,x = (2\,A\,x^4 + 2\,B\,x^2 + 2\,C)\,d\,x, \text{ mithin}$$

$$d\,u = \frac{(3\,A . x^4 + 2\,B\,x^2 + C)\,d\,x}{\sqrt{\mathbf{X}}}$$

$$v . d\,u = \frac{2\,(1 + x^2)\,(3\,A\,x^4 + 2\,B\,x^2 + C)\,d\,x}{\sqrt{\mathbf{X}}}$$

$$= \frac{\left\{ 6\,A . x^6 + (6\,A + 4\,B)\,x^4 + (4\,B + 2\,C)\,x^2 + 2\,C \right\}\,d\,x.}{\sqrt{\mathbf{X}}}$$

Eben so erhält man

$$d\,v = 4\,x . d\,x, \quad u . d\,v = 4\,x^2 . d\,x . \sqrt{\mathbf{X}} = \frac{4\,x^2 . \mathbf{X}\,d\,x}{\sqrt{\mathbf{X}}} \quad \text{oder}$$

$$u . d\,v = \frac{(4\,A . x^6 + 4\,B\,x^4 + 4\,C . x^2)\,d\,x}{\sqrt{\mathbf{X}}}, \text{ also}$$

$$v\,.\,du - u\,.\,dv = \frac{\{2\,A\,.\,x^6 + 6\,A\,x^4 + (2\,B - C)\,x^2 + C\}\;dx}{\sqrt{X}}\text{, und}$$

$$dz = \frac{\{A\,.\,x^6 + 3\,A\,x^4 + (2\,B - C)\,x^2 + C\}\;dx}{2\,(1 + {}^2)^2\,.\,\sqrt{X}}.$$

Um die ganzen Potenzen von x auszuscheiden, nimmt man:

$$A\,x^6 + 3\,A\,x^4 = A\,x^2\,(1 + 2\,x^2 + x^4) + A\,x^4 - A\,x^2$$
$$= A\,x^2\,(1 + 2\,x^2 + x^4) + A\,(1 + 2\,x^2 + x^4) - 3\,A\,x^2 - A;\ \text{so wird}$$
$$A\,x^6 + 3\,A\,x^4 + (2\,B - C)\,x^2 + C = A\,x^2\,(1 + x^2)^2 + A\,(1 + x^2)^2$$
$$+ (2\,B - 3\,A - C)\,x^2 - (A - C)$$
$$= A\,x^2\,(1 + x^2)^2 + A\,(1 + {}^2)^2 + (2\,B - 3\,A - c)\,(1 + x^2) + 2\,(A - B + C).$$

Diesen Ausdruck setzt man in die Gleichung für d z, und integrirt; so erhält man:

$$z = \frac{x\,.\,\sqrt{X}}{2\,(1 + x^2)} = \tfrac{1}{2}\,A \int \frac{x^2\,.\,dx}{\sqrt{X}} + \tfrac{1}{2}\,A \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,(2\,B - 3\,A - C)\,.\int \frac{dx}{(1 + x^2).\,\sqrt{X}} + (A - B + C)\,.\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2.\,\sqrt{X}}.$$

Gehen wir wieder auf die Elemente des Kegels zurück; so erhalten wir

$$(2\,B - 3\,A - C) = -\,8\,b^2 + 4\,r\,.\,b,\ \text{und}\ A - B + C = 4\,b^2\ \text{und}$$

$$\frac{x\,.\,\sqrt{X}}{2\,(1 + x^2)} = \tfrac{1}{2}\,A\,.\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \tfrac{1}{2}\,A\,.\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} - 4\,b^2.\int \frac{dx}{(1 + x^2).\,\sqrt{X}}$$

$$+ 2\,r\,b \int \frac{dx}{(1 + x^2\,.\,\sqrt{X}} + 4\,b^2.\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2\,.\,\sqrt{X}}$$

Addirt man zu der Gleichung

$$U = A\,.\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - 4\,b^2 \int \frac{dx}{(1 + x^2).\,\sqrt{X}} + 4\,r\,b\,.\int \frac{dx}{(1 + x^2).\,\sqrt{X}} + 4\,b^2 \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2.\,\sqrt{X}}$$

den identischen Ausdruck

$$\frac{x\,.\,\sqrt{X}}{2\,(1 + x^2)} - \tfrac{1}{2}\,A\,.\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \tfrac{1}{2}\,A\,.\int \frac{x^2\,.\,dx}{\sqrt{X}} + 4\,b^2.\int \frac{dx}{(1 + x^2)\,.\,\sqrt{X}}$$

$$-2rb.\int\frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{X}}-4b^2.\int\frac{dx}{(1+x^2)^2.\sqrt{X}}=0;$$ so wird

$$U=A\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-4b^2.\int\frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{X}}+4rb.\int\frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{X}}$$

$$+4b^2.\int\frac{dx}{(1+x^2)^2.\sqrt{X}}+\frac{x.\sqrt{X}}{2(1+x^2)}-\tfrac{1}{2}A\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\tfrac{1}{2}A.\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{X}}$$

$$+4b^2.\int\frac{dx}{(1+x^2.\sqrt{X}}-2rb.\int\frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{X}}-4b^2.\int\frac{dx}{(1+x^2)^2.\sqrt{X}},$$ oder

$$S=\frac{x.\sqrt{X}}{2(1+x^2)}+\tfrac{1}{2}A.\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\tfrac{1}{2}A.\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{X}}+4rb.\int\frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{X}}$$

Es ist daher die halbe Seiten-Fläche des Kegels

$$S=\frac{r.x.\sqrt{X}}{2(1+x^2)}+\tfrac{1}{2}Ar.\int\frac{dx}{\sqrt{X}}-\tfrac{1}{2}Ar.\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{X}}+2r^2b.\int\frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{X}}$$

Die Wahl der Substitutionen, durch welche die Integrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}};\quad\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}}\quad\text{und}\quad\int\frac{dx}{(1+x^2).\sqrt{X}}$$

auf die Formen der elliptischen Transcendenten geführt werden, hängt davon ab, ob die quadratischen Factoren, worin die Gleichung des vierten Grades

$$X=A.x^4+Bx^2+C=0$$

zerlegt wird, beide reell, oder beide imaginär sind; oder ob einer reell, und der andere imaginär ist. Im vorliegenden Falle wird die Zerlegung sehr einfach, weil die ungeraden Potenzen von x in der Gleichung fehlen. Nehmen wir $Ax^4+B.x^2+C=(Q.x^2+M)(Q.x^2+N)$

$=Q^2.x^4+Q(M+N)x^2+M.N=0$, so ist

$Q^2=A;\ Q(M+N)=B,\ M.N=C$, folglich

$Q=\sqrt{A},\ M+N=\frac{B}{Q},\ (M+N)^2=\frac{B^2}{Q^2}$

$(M-N)^2=\frac{B^2-4AC}{A},\ M-N=\pm\sqrt{\left\{\frac{B^2-4AC}{A}\right\}}$

und $M = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \left\{ B \pm \sqrt{(B^2 - 4\,A\,C)} \right\}$; $N = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left\{ B \mp \sqrt{(B^2 - 4\,A\,C)} \right\}$.

Nun ist $A = h^2 + (r - b)^2$; $B = 2\,(h^2 + r^2 - b^2)$; $C = h^2 + (r + b)^2$,

$B^2 = 4\,b^4 + 8\,h^2\,r^2 + 4\,r^4 - 8\,h^2\,b^2 - 8\,r^2\,b^2 + 4\,b^4$

$4\,A\,C = 4\,h^4 + 8\,h^2\,r^2 + 4\,r^4 + 8\,h^2\,b^2 - 8\,r^2\,b^2 + 4\,b^4$, folglich $B^2 - 4\,A\,C = -16\,.\,b^2$.

Es sind daher beide Factoren imaginär. Die beiden Integrale

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{X}} \text{ und } \frac{x^2\,d\,x}{\sqrt{X}}$$

können einzeln reducirt werden; dann kann man aber

$$\int \frac{d\,x}{(1 + x^2)\,.\,\sqrt{X}}$$

nicht durch dieselbe Substitution auf die Form der elliptischen Transcendenten bringen, und müßte für dieses Integral eine andere Amplitüde einführen. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, vereinigt man die Reduction der ersten beiden Integrale, da

$$S = \frac{r\,.\,x\,.\,\sqrt{X}}{2\,(1 + x^2)} + \tfrac{1}{2}\,A\,r\,.\int \frac{(1 - x^2)\,d\,x}{\sqrt{X}} + 2\,r^2\,b\,.\int \frac{d\,x}{(1 + x^2)\,.\,\sqrt{X}}$$

und reducirt

$$V = \int \frac{(1 - x^2)\,d\,x}{\sqrt{X}}.$$

Man substituirt daher, weil $4\,A\,C > B^2$; $X = C + B\,.\,x^2 + A\,.\,x^4 = m^2 + 2\,m\,.\,n\,.\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + n^2\,.\,x^4$,

und erhält $m = \sqrt{C}$, $2\,m\,.\,n\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta = B$, $n = \sqrt{A}$; $\mathrm{Cos}\,\vartheta = \frac{B}{2\sqrt{(A\,.\,C)}}$. Es ist daher

$$V = \int \frac{(1 - x^2)\,d\,x}{\sqrt{(m^2 + 2\,m\,.\,n\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + n^2\,.\,x^4)}}.$$

Es ist $x = \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,\omega$, daher wird x unendlich, wenn man $\omega = \pi$, und man dividirt Zähler und Nenner durch $n\,.\,x^2$, so wird

$$V = \int \frac{\left(\frac{1}{n\,x^2} - \frac{1}{n}\right) d\,x}{\sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2\,x^4} + \frac{2\,m\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta}{n\,.\,x^2} + 1\right)}} = -\int \frac{d\,x}{n}$$

für den unendlichen Werth von x.

Um daher die Theile fortzuschaffen, die unendlich werden können, nimmt man

$$V = \int \left\{ \frac{(1 - x^2)\,d\,x}{\sqrt{(m^2 + 2\,m\,.\,n\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + n^2\,.\,x^4}} + \frac{d\,x}{n} \right\}$$ und setzt:

$$n\,x^2 + m\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + \sqrt{(m^2 + 2\,m\,.\,n\,.\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + n^2\,x^4)} = 2\,m\,y^2,$$ oder

$$\sqrt{(m^2 + 2\,m\,.\,n\,.\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + n^2\,x^4)} = 2\,m\,.\,y^2 - n\,.\,x^2 - m\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta$$

Daraus folgt:

$$m^2 + 2\,m\,.\,n\,.\,x^2\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + n^2\,x^4$$

$$= 4\,m^2\,.\,y^4 - 4\,m\,.\,n\,.\,y^2\,.\,x^2 + n^2\,.\,x^4 - 4\,m^2\,.\,y^2\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + 2\,m\,.\,n\,x^2\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + m^2\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\vartheta;$$ oder

$$4\,m\,.\,n\,.\,y^2\,x^2 = 4\,m^2\,.\,y^4 - 4\,m^2\,.\,y^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + m^2\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\vartheta - m^2$$

$$= 4\,m^2\,.\,y^4 - 4\,m^2\,.\,y^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta - m^2\,\mathrm{Sin}^2\,\vartheta;$$ woraus

$$x^2 = \frac{m}{n}\left(y^2 - \mathrm{Cos}\,\vartheta - \frac{\mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{4\,y^2}\right).$$

Wird diese Gleichung differentiirt, so gibt sie

$$2\,x\,d\,x = \frac{m}{n}\left(2\,y + \frac{\mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{2\,y^3}\right)d\,y.$$

$$= \frac{m}{n}\,.\left(\frac{4\,y^4 + \mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{2\,y^3}\right)d\,y$$ und

$$d\,x = \frac{\sqrt{m}\,.\,(4\,y^4 + \mathrm{Sin}^2\,\vartheta)\,.\,d\,y}{\sqrt{n}\,.\,4\,y^2\,.\sqrt{(y^4 - y^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}^2\,\vartheta)}}.$$

Setzt man in $\sqrt{X}$ den vorhin bestimmten Werth von $x^2 = \frac{m}{n}\left(y^2 - \mathrm{Cos}\,\vartheta - \frac{\mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{4\,y^2}\right)$; so wird

$$\sqrt{X} = 2\,m\,.\,y^2 - n\,.\,x^2 - m\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta$$

$$= 2\,m\,.\,y^2 - m\left(y^2 - \mathrm{Cos}\,\vartheta - \frac{\mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{4\,y^2}\right) - m\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta,$$ oder

$$\sqrt{X} = \frac{m\,(4\,y^4 + \mathrm{Sin}^2\,\vartheta)}{4\,y^2};$$ daher ist

$$\frac{d\,x}{\sqrt{X}} = \frac{d\,y}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,.\sqrt{(y^4 - y^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}^2\,\vartheta)}}.$$

Es ist $V = \int\left\{\frac{(1 - x^2)}{\sqrt{X}} + \frac{1}{n}\right\}d\,x = \int\frac{\left(1 - x^2 + \frac{1}{n}\sqrt{X}\right)d\,x}{\sqrt{X}}$

daher ist $\frac{d\,x}{\sqrt{X}}$ noch zu multipliciren mit

$$1 - x^2 + \frac{1}{n}\sqrt{X} = 1 - \frac{m}{n}\left(y^2 - \mathrm{Cos}\,\vartheta - \frac{\mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{4\,y^2}\right)$$

$$+ \frac{m\,(4\,y^4 + \mathrm{Sin}^2\,\vartheta)}{n\,.\,4\,.\,y^2}$$

$$= 1 - \frac{m}{n}\,y^2 + \frac{m}{n}\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + \frac{m\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{4\,n\,.\,y^2} + \frac{m}{n}\,y^2 + \frac{m\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\vartheta}{4\,n\,y^2}$$

$$= 1 + \frac{m}{n} \operatorname{Cos} \vartheta + \frac{m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \vartheta}{2\, n\, y^2}; \text{ und dann wird}$$

$$V = \int \frac{\left(1 + \frac{m}{n} \operatorname{Cos} \vartheta + \frac{m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \vartheta}{2\, n \,.\, y^2}\right) d\,y}{\sqrt{(m \,.\, n)} \,.\, \sqrt{(\,y^4 - y^2 \operatorname{Cos} \vartheta - \frac{1}{4} \operatorname{Sin}^2 \vartheta)}}.$$

Aus den Gleichungen: $\operatorname{Cos} \vartheta = \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta - \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta$ und $\tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}^2 \vartheta = \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta \,.\, \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta$ folgt

$$\sqrt{\left(y^4 - y^2 \,.\, \operatorname{Cos} \vartheta - \tfrac{1}{4} \operatorname{Sin}^2 \vartheta\right)}$$

$$= \sqrt{\left(y^4 - y^2 \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta + y^2 \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta - \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta \,.\, \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta\right)}$$

$$= \sqrt{\left\{\left(y^2 - \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta\right) \left(y^2 + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta\right)\right\}} \quad \text{und}$$

$$V = \int \frac{\left(1 + \frac{m}{n} \operatorname{Cos} \vartheta + \frac{m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \vartheta}{2\, n\, y^2}\right) d\,y}{\sqrt{(m \,.\, n)} \,.\, \sqrt{\left\{\left(y^2 - \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta\right) \left(y^2 + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta\right)\right\}}}.$$

Da beide Factoren des Nenners reell bleiben sollen, so ist der kleinste Werth, den man für y annehmen kann $= \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \vartheta$; bestimmt man daher

$$y = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta}{\operatorname{Cos} \varphi}, \text{ so ist } d\,y = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi \,.\, d\,\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}; \text{ ferner}$$

$$y^2 - \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta = \frac{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \vartheta \,(1 - \operatorname{Cos}^2 \varphi)}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \vartheta \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}$$

$$y^2 + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta = \frac{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \vartheta + \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta \operatorname{Cos}^2 \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \vartheta + \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta - \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} = \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi}.$$

Wird $\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} \vartheta = c$ gesetzt, so ist

$$\sqrt{\left\{\left(y^2 - \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta\right) \left(y^2 + \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta\right)\right\}} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta \operatorname{Sin} \varphi \,.\, \sqrt{(1 - c^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)}}{\operatorname{Cos}^2 \varphi},$$

$$\frac{d\,y}{\sqrt{\left\{\left(y^2 - \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \vartheta\right) \left(y^2 + \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta\right)\right\}}} = \frac{d\,\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)}};$$

und wenn $\operatorname{Sin} \vartheta$ und $\operatorname{Cos} \vartheta$ durch Sinus und Cosinus des halben Bogens ausgedrückt werden, so erhält man:

$$1 + \frac{m}{n} \operatorname{Cos} \vartheta + \frac{m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \vartheta}{2\, n \,.\, y} =$$

$$\frac{1}{n}\left(n + m \,.\, \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta - m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta + \frac{2\, m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta \,.\, \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \vartheta}{y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n + m \,.\, \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta - m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta + 2\, m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta \,.\, \operatorname{Cos}^2 \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n + m \,.\, \operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta - m \,.\, \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta + 2\, m \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta - 2\, m \operatorname{Sin}^2 \tfrac{1}{2} \vartheta \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n + m - 2\, m \,.\, \mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\, \vartheta \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n - m + 2\, m\, (1 - \mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\, \vartheta \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(n - m + 2\, m\, (1 - c^2 \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi\right).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung V, so erhält sie die Form:

$$V = \int \frac{\{n - m + 2\, m\, (1 - c^2 \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi).\}\, d\, \varphi}{n \,.\, \sqrt{(m \,.\, n)} \,.\, \sqrt{(1 - c^2 \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi)}}$$

$$= \frac{n - m}{n \,.\, \sqrt{(m \,.\, n)}} \,.\, \int \frac{d\, \varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi)}} + \frac{2\, m}{n \,.\, \sqrt{(m \,.\, n)}} \,.\, \int d\, \varphi\, \sqrt{(1 - c^2 \,.\, \mathrm{Sin}^2\, \varphi)}$$

$$= \frac{n - m}{n \,.\, \sqrt{(m \,.\, n)}}\, F\, (\varphi) + \frac{2\, m}{n \,.\, \sqrt{(m \,.\, n)}} \,.\, E\, (\varphi).$$

Der zweite Theil der halben Oberfläche hatte die Form

$$2\, r^2\, b \,.\, \frac{d\, x}{1 + x^2) \,.\, \sqrt{X}} = 2\, r^2 \,.\, b \,.\, U.$$

Die Substitution gibt

$$\frac{d\, x}{\sqrt{X}} = \frac{d\, y}{\sqrt{(m \,.\, n)} \,.\, \sqrt{\{(y^2 - \mathrm{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\, \vartheta)\, (y^2 + \mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\, \vartheta)\}}} \text{ und}$$

$$1 + x^2 = 1 + \frac{m}{n}\left(y^2 - \mathrm{Cos}\, \vartheta - \frac{\mathrm{Sin}^2\, \vartheta}{4\, y^2}\right)$$

$$= \frac{n \,.\, y^2 + m \,.\, y^4 - m \,.\, y^2 \,.\, \mathrm{Cos}\, \vartheta - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{Sin}^2\, \vartheta}{n \,.\, y^2}$$

$$= \frac{m\, \left\{ y^4 + \left(\frac{n}{m} - \mathrm{Cos}\, \vartheta.\right) y^2 - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{Sin}^2\, \vartheta \right\}}{n \,.\, y^2}.$$

Diese Umformung ergibt daher

$$\frac{d\, x}{1 + x^2) \,.\, \sqrt{X}} = U =$$

$$\frac{n \,.\, y^2 \,.\, d\, y}{m \,.\, \sqrt{(m \,.\, n)} \,.\, \left\{ y^4 + (\frac{n}{m} - \mathrm{Cos}\, \vartheta) \,.\, y^2 - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{Sin}^2\, \vartheta \right\} \sqrt{\{(y^2 - \mathrm{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\, \vartheta)\, (y^2 + \mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\, \vartheta)\}}}.$$

Um den ersten Factor des Nenners in 2 quadratische Factoren zu zerlegen, nimmt man

$$y^4 + (\frac{n}{m} - \mathrm{Cos}\, \vartheta) \,.\, y^2 - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{Sin}^2\, \vartheta = (y^2 + \alpha)\, (y^2 - \beta)$$

$$= y^4 + (\alpha - \beta)\, y^2 - \alpha \,.\, \beta, \text{ so daß}$$

$$\alpha - \beta = \frac{n}{m}\, \mathrm{Cos}\, \vartheta, \quad \alpha \,.\, \beta = \tfrac{1}{4}\, \mathrm{Sin}^2\, \vartheta,$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta\right)^2,\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta\right)^2 + \text{Sin}^2\,\vartheta \text{ oder}$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \frac{n^2}{m^2} - 2\,\frac{n}{m}\,\text{Cos}\,\vartheta + 1, \text{ daher ist}$$

$$\alpha + \beta = \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{2\,n}{m}\,.\,\text{Cos}\,\vartheta + 1\right)};\ \alpha - \beta = \frac{n}{m}\,\text{Cos}\,\vartheta, \text{ und}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\left\{\pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{2\,n}{m}\,\text{Cos}\,\vartheta + 1\right)} + \left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta\right)\right\}$$

$$\beta = \tfrac{1}{2}\left\{\pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{2\,n}{m}\,\text{Cos}\,\vartheta + 1\right)} - \left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta\right)\right\}.$$

Diese Ausdrücke können auf eine einfachere Form reducirt werden, wenn man

$$(\alpha + \beta)^2 = \left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta\right)^2 + \text{Sin}^2\,\vartheta = \left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta\right)\left(1 + \frac{\text{Sin}^2\,\vartheta}{\left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta\right)^2}\right)$$

und $\dfrac{\text{Sin}\,\vartheta}{\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta} = \text{Tang}\,E$ setzt. Dann wird

$$\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta = \frac{\text{Sin}\,\vartheta}{\text{Tang}\,E}; \text{ ferner}$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \frac{\text{Sin}^2\,\vartheta}{\text{Tang}^2\,E}\,(1 + \text{Tang}^2\,E) = \frac{\text{Sin}^2\,\vartheta}{\text{Tang}^2\,E\,.\,\text{Cos}^2\,E} = \frac{\text{Sin}^2\,\vartheta}{\text{Sin}^2\,E}.$$ Daraus folgt

$$(\alpha + \beta) = \frac{\text{Sin}\,\vartheta}{\text{Sin}\,E},\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{Sin}\,\vartheta}{\text{Tang}\,E} \text{ und}$$

$$\alpha = \frac{\text{Sin}\,\vartheta}{\text{Sin}\,E}\,.\left(\frac{1 + \text{Cos}\,E}{2}\right);\ \beta = \frac{\text{Sin}\,\vartheta}{\text{Sin}\,E}\,.\left(\frac{1 - \text{Cos}\,E}{2}\right) \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{\text{Sin}\,\vartheta\,.\,\text{Cos}^2\,\tfrac{1}{2}E}{2\,.\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}E\,.\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}E} = \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,\vartheta\,.\,\text{Cot}\,.\,\tfrac{1}{2}E$$

$$\beta = \frac{\text{Sin}\,\vartheta\,.\,\text{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}E}{2\,.\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}E\,.\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}E} = \tfrac{1}{2}\,\text{Sin}\,\vartheta\,.\,\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}E.$$

Den Bruch $\dfrac{y^2}{y^4 + \left(\frac{n}{m} - \text{Cos}\,\vartheta - \frac{1}{4}\,\text{Sin}^2\,\vartheta\right)} = \dfrac{y^2}{(y^2 + \alpha)\,(y^2 - \beta)}$

kann man in 2 Partial-Brüche zerlegen, indem

$$\frac{y^2}{(y^2 + \alpha)\,(y^2 - \beta)} = \frac{\alpha'}{y^2 + \alpha} + \frac{\beta'}{y^2 - \beta}$$

und $y^2 = (\alpha' + \beta')\,y^2 + \alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta$ wird; folglich $\alpha' + \beta' = 1$ und $\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta = 0$,

daher ist: $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$; $\beta' = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ oder

$$\alpha' = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Cot}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,.\,\mathrm{Sin}\,\mathrm{E}}{\mathrm{Sin}\,\vartheta} = \mathrm{Cos}^2\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E} \quad \text{und}$$

$$\beta' = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\mathrm{Sin}\,\mathrm{E}}{\mathrm{Sin}\,\vartheta} = \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}.$$

Behält man der Kürze wegen die Bezeichnung α und β bei, so wird

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}\,.\,\sqrt{(\mathrm{m}\,.\,\mathrm{n})}}\,.\int\left[\left\{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\mathrm{y}^2+\alpha)} + \frac{\beta}{(\alpha+\beta)(\mathrm{y}^2-\beta)}\right\}\,.\,\frac{\mathrm{d\,y}}{\sqrt{\left\{(\mathrm{y}^2-\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta)(\mathrm{y}^2+\mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta)\right\}}}\right].$$

Die Substitution $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,\vartheta}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$ gibt:

$$\frac{\mathrm{d\,y}}{\sqrt{\left\{(\mathrm{y}^2-\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta)\,(\mathrm{y}^2+\mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta)\right\}}} = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{(1-\mathrm{c}^2\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}} = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\triangle(\varphi)}$$

$$\mathrm{y}^2+\alpha = \frac{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta + \alpha\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi},\quad \mathrm{y}^2-\beta = \frac{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta - \beta\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}$$

$$\frac{1}{\mathrm{y}^2+\alpha} = \frac{1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta+\alpha-\alpha\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi} = \frac{1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi}{(\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta+\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta+\alpha}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\right)}.$$

Der einfacheren Bezeichnung wegen nimmt man

$$\frac{\alpha}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta+\alpha} = \mathrm{M},\ \text{und erhält}$$

$$\mathrm{Cos}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta+\alpha = \frac{\alpha}{\mathrm{M}};\quad \frac{1}{\mathrm{y}^2+\alpha} = \frac{\mathrm{M}\,(1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{\alpha\,(1-\mathrm{M}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}.$$

Ebenso wird $\dfrac{1}{\mathrm{y}^2-\beta} = \dfrac{1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta-\beta+\beta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi}$

$$= \frac{1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi}{(\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta-\beta)\left(1+\frac{\beta}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta-\beta}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\right)} = \frac{\mathrm{N}\,(1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{\beta\,(1+\mathrm{N}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}$$

wenn $\dfrac{\beta}{\mathrm{Cos}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta-\beta} = \mathrm{N}$ angenommen wird.

Das Integral U erhält daher die Form:

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{n}\,.\,\mathrm{M}\,.\,\mathrm{Sin}\,\mathrm{E}}{\mathrm{m}\,.\,\sqrt{(\mathrm{m}\,.\,\mathrm{n})}\,.\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}\,.\int\frac{(1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{(1-\mathrm{M}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}\,.\,\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\triangle(\varphi)}$$

$$+\frac{\mathrm{n}\,.\,\mathrm{N}\,.\,\mathrm{Sin}\,\mathrm{E}}{\mathrm{m}\,.\,\sqrt{(\mathrm{m}\,.\,\mathrm{n})}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}\,.\int\frac{(1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{(1+\mathrm{N}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}\,.\,\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\triangle(\varphi)}.$$

Die Brüche unter den Integral-Zeichen werden in Partial-Brüche zerlegt, indem man

$$\frac{(1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{(1-\mathrm{M}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}\,.\,\frac{1}{\triangle(\varphi)} = \frac{\mathrm{P}}{\triangle(\varphi)} + \frac{\mathrm{Q}}{(1-\mathrm{M}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\triangle(\varphi)}$$

annimmt, und daraus P und Q bestimmt, da $1 - \mathrm{Sin}^2\,\varphi = P - M\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + Q$, woraus

$$P + Q = 1;\quad P\,.\,M = 1,\ \text{oder}\ P = \frac{1}{M},\ Q = 1 - \frac{1}{M} = \frac{M-1}{M}.$$

Eben so wird

$$\frac{(1 - \mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{(1 + N\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}\,.\,\frac{1}{\Delta\,(\varphi)} = \frac{P'}{\Delta\,(\varphi)} + \frac{Q'}{(1 + N\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}$$

$$1 - \mathrm{Sin}^2\,\varphi = P' + P'\,.\,N\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + Q';\ \text{folglich}$$

$$P' + Q' = 1;\ P'\,.\,N = -1,\ \text{und}\ P' = -\frac{1}{N},\ Q' = \frac{N+1}{N}.$$

Durch diese Umformung erhalten wir:

$$U = \frac{n\,.\,\mathrm{Sin}\,E}{m\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}\,.\,\Big\{\frac{M}{M}\,.\int\frac{d\,\varphi}{\Delta\,(\varphi)} + \frac{M\,(M-1)}{M}\,.\int\frac{d\,\varphi}{(1 - M\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}$$

$$- \frac{N}{N}\,.\int\frac{d\,\varphi}{\Delta\,(\varphi)} + \frac{N\,(N+1)}{N}\,.\int\frac{d\,\varphi}{(1 + N\,.\,\mathrm{Sin}^2\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}\,.\Big\}$$

$$= \frac{n\,(M-1)\,.\,\mathrm{Sin}\,E}{m\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}\,.\int\frac{d\,\varphi}{(1 - M\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}$$

$$+ \frac{n\,(N+1)\,\mathrm{Sin}\,E}{m\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}\,.\int\frac{d\,\varphi}{(1 + N\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}\,.$$

Es ist daher:

$$2\,r^2\,b\,.\int\frac{d\,x}{(1 + x^2)\,.\,\sqrt{X}} = 2\,r^2\,b\,.\,U$$

$$= \frac{2\,r^2\,b\,.\,n\,(M-1)\,.\,\mathrm{Sin}\,E}{m\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}\,.\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}\,.\int\frac{d\,\varphi}{(1 - M\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}$$

$$+ \frac{2\,r^2\,b\,.\,n\,(N+1)\,\mathrm{Sin}\,E}{m\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}\,.\,\mathrm{Sin}\,\vartheta}\,.\int\frac{d\,\varphi}{(1 + N\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}\,.$$

Das erste Integral der halben Fläche ist:

$$V - \int\frac{(1 - x^2)\,d\,x}{\sqrt{X}} = \frac{(n-m)}{n\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}}\,.\int\frac{d\,\varphi}{\Delta\,(\varphi)} + \frac{2\,m}{n\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}}\,.\int d\,\varphi\,.\,\Delta\,(\varphi)$$

und der vollständige Ausdruck

$$S = \int\frac{r\,.\,x\,.\,\sqrt{X}}{2\,(1 + x^2)} + \tfrac{1}{2}\,A\,r\,.\int\frac{(1 - x^2)\,d\,x}{\sqrt{X}} + 2\,r^2\,b\,.\int\frac{d\,x}{(1 + x^2)\,.\,\sqrt{X}},$$

nimmt daher die Form an:

$$S = \frac{r \cdot x \cdot \sqrt{X}}{2(1 + x^2)} + \frac{A \cdot r \cdot (n - m)}{2 \cdot n \cdot \sqrt{(m \cdot n)}} \cdot \int \frac{d\,\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{A \cdot r \cdot m}{n \cdot \sqrt{(m \cdot n)}} \int d\,\varphi \cdot \Delta(\varphi)$$

$$+ \frac{2\,r \cdot b^2 \cdot n\,(M - 1) \cdot \operatorname{Sin} E}{m \cdot \sqrt{(m \cdot n)} \cdot \operatorname{Sin} \vartheta} \cdot \int \frac{d\,\varphi}{(1 - M \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \Delta(\varphi)}$$

$$+ \frac{2\,r \cdot b^2 \cdot n\,(N + 1) \cdot \operatorname{Sin} E}{m \cdot \sqrt{(m \cdot n)}\, \operatorname{Sin} \vartheta} \cdot \int \frac{d\,\varphi}{(1 + N \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \Delta(\varphi)};$$

wodurch das Integral für die halbe Seitenfläche des schiefen Kegels auf die 3 Formen der elliptischen Transcendenten zurückgeführt ist.

Hiebei ist noch zu bemerken, daß das Integral

$$\int \frac{d\,\varphi}{(1 - M \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \Delta\,\varphi},$$

wenn der Parameter $M > c^2$ ist, auf ein anderes reducirt werden kann, dessen Parameter $\frac{c^2}{M}$ kleiner als c^2 ist. Man nimmt zu diesem Zwecke

$$z = \frac{\operatorname{Tang} \cdot \varphi}{\Delta(\varphi)} \text{ und berechnet } \frac{d\,x}{(1 + k \cdot z^2)}.$$

Das Differential von z ist

$$d\,z = \frac{d \cdot (\operatorname{Tang} \varphi)}{\Delta(\varphi)} - \frac{\operatorname{Tang} \varphi \cdot d\,(\Delta(\varphi))}{\Delta^2(\varphi)}.$$

Da aber $\Delta(\varphi) = \sqrt{(1 - c^2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi)}$, so ist

$$d\,(\Delta(\varphi)) = -\frac{c^2 \cdot \operatorname{Sin} \varphi \cdot \operatorname{Cos} \varphi \cdot d\,\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi)}}, \text{ und daher}$$

$$d\,z = \frac{d\,\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi \cdot \Delta(\varphi)} + \frac{c^2 \cdot \operatorname{Sin} \varphi \cdot \operatorname{Cos} \varphi \cdot \operatorname{Tang} \varphi \cdot d\,\varphi}{\Delta^2(\varphi) \cdot \Delta(\varphi)}$$

$$= \frac{(1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi + c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi \cdot \operatorname{Cos}^2 \varphi)\, d\,\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi\, (1 - c^2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \Delta(\varphi)} = \frac{(1 - c^2 \cdot \operatorname{Sin}^4 \varphi)\, d\,\varphi}{\operatorname{Cos}^2 \varphi\, (1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \Delta(\varphi)}.$$

Dann ist

$$1 + k \cdot z^2 = 1 + \frac{k \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi}{(1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \operatorname{Cos}^2 \varphi}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi \cdot \operatorname{Cos}^2 \varphi + k \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi}{(1 + c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \operatorname{Cos}^2 \varphi},$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi)\,(1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi) + k \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi}{(1 - c^2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi) \cdot \operatorname{Cos}^2 \varphi}, \text{ weil}$$

$$\operatorname{Cos}^2 \varphi - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi \cdot \operatorname{Cos}^2 \varphi = 1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi + c^2 \cdot \operatorname{Sin}^4 \varphi$$

$$= 1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\,(1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi) = (1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi)\,(1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi).$$

Es ist daher

$$\frac{d\,z}{(1 + k \cdot z^2)} = \frac{d\,\varphi}{\Delta(\varphi)} \cdot \frac{1 - c^2\, \operatorname{Sin}^4 \varphi}{(1 - c^2\, \operatorname{Sin}^2 \varphi)\,(1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi) + k \cdot \operatorname{Sin}^2 \varphi}.$$

Der zweite Factor des Nenners kann in 2 Factoren zerlegt werden, nämlich

$$(1 - c^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi)(1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi) + k \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi = (1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi)\left(1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\right).$$

Werden die Klammern aufgelöst, so ist

$$1 - \operatorname{Sin}^2 \varphi - c^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi + c^2 \operatorname{Sin}^4 \varphi + k \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

$$= 1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi + c^2 \operatorname{Sin}^4 \varphi.$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$c^2 + 1 - k = M + \frac{c^2}{M} \quad \text{oder} \quad k = c^2 + 1 - M - \frac{c^2}{M}.$$

$$\text{oder } k = (1 - M)\left(1 - \frac{c^2}{M}\right); \text{ daher ist}$$

$$\frac{d\,z}{1 + k \,.\, z^2} = \frac{d\,\varphi}{\triangle(\varphi)} \,.\, \frac{1 - c^2 \,.\, \operatorname{Sin}^4 \varphi}{(1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi)\left(1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\right)}.$$

Der zweite Factor wird in die Partial-Brüche zerlegt

$$\frac{1 - c^2 \,.\, \operatorname{Sin}^4 \varphi}{(1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi)\left(1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\right)} = \frac{P}{1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi} + \frac{Q}{1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi} + R$$

so daß: $1 - c^2 \operatorname{Sin}^4 \varphi$

$$= P\left(1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\right) + Q\,(1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi) + R\,(1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi)\left(1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\right)$$

$$= P + Q + R - \left\{P \,.\, \frac{c^2}{M} + (Q + R)\,M + R \,.\, \frac{c^2}{M}\right) \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi + R \,.\, c^2 \,.\, \operatorname{Sin}^4 \varphi.$$

Diese Gleichung gibt:

$$P + Q + R = 1;\ (P + R) \,.\, \frac{c^2}{M} + (Q + R)\,M = o, \text{ und } R = -1, \text{ also}$$

$$P + Q = 2;\ P\left(M - \frac{c^2}{M}\right) = M - \frac{c^2}{M}; \text{ oder}$$

$$P = 1,\ Q = 1,\ R = -1; \text{ und wir erhalten:}$$

$$\frac{d\,z}{(1 + k \,.\, z^2)} = \frac{d\,\varphi}{\triangle(\varphi)} \,.\, \left\{\frac{1}{1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi} + \frac{1}{1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi} - 1\right\}.$$

Wird diese Gleichung integrirt, so ist

$$\int \frac{d\,z}{1 + k \,.\, z^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \,.\, \operatorname{Arc} \,.\, (\operatorname{Tang} = \sqrt{k} \,.\, z)$$

$$= \int \frac{d\,\varphi}{(1 - M \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi)\,\triangle(\varphi)} + \int \frac{d\,\varphi}{\left(1 - \frac{c^2}{M} \,.\, \operatorname{Sin}^2 \varphi\right) \,.\, \triangle(\varphi)} - \int \frac{d\,\varphi}{\triangle(\varphi)}.$$

folglich das umzuformende Integral:

$$\int\frac{d\,\varphi}{(1 - M\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\,.\,\Delta\,(\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,.\,A\,r\,c\left(\mathrm{Tang} = \frac{\sqrt{k}\,.\,\mathrm{Tang}\,\varphi}{\Delta\,(\varphi)}\right)$$

$$-\int\frac{d\,\varphi}{\left(1 - \frac{c^2}{M}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\right)\,.\,\Delta\,(\varphi)} + \int\frac{d\,\varphi}{\Delta\,(\varphi)}.$$

Diesen Werth kann man, wenn es erforderlich ist, in die Gleichung für S setzen. Um das Integral für den Winkel der aufgerollten Seitenfläche zu reduciren, nämlich

$$\psi = r\,.\int\frac{d\,\omega\,.\,\sqrt{\{h^2 + (r + b\,.\,\mathrm{Cos}\,\omega)^2\}}}{h^2 + b^2 + r^2 + 2\,r\,b\,.\,\mathrm{Cos}\,\omega}$$

nimmt man ebenfalls $\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}\,\omega = x$, so ist

$$d\,\omega\,.\,\sqrt{(h^2 + r^2 + b^2 + 2\,r\,b\,.\,\mathrm{Cos}\,\omega + b^2\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\omega)}$$

$$= \frac{2\,d\,x\,.\,\sqrt{(A\,x^4 + B\,.\,x^2 + C)}}{(1 + x^2)^2},\ \text{wenn}$$

$$A = h^2 + (r - b)^2;\ B = 2\,(h^2 + r^2 - b^2)\ \text{und}\ C = h^2 + (r + b)^2.$$

Eben so ist

$$h^2 + h^2 + r^2 + 2\,r\,b\,.\,\mathrm{Cos}\,\omega = h^2 + b^2 + r^2 + \frac{2\,r\,b\,(1 - x^2)}{1 + x^2}$$

$$= \frac{h^2 + r^2 + b^2 + 2\,r\,b + (h^2 + r^2 + b^2 - 2\,r\,b)\,x^2}{1 + x^2} = \frac{C + A\,.\,x^2}{1 + x^2}.$$

Daher ist

$$\psi = 2\,r\,.\int\frac{\sqrt{(A\,.\,x^4 + B\,.\,x^2 + C)}\,d\,x}{(1 + x^2)\,(C + A\,.\,x^2)}.$$

Werden Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{(A\,.\,x^4 + B\,.\,x^2 + C)} = \sqrt{X}$$

multiplicirt, so ist

$$\psi = 2\,r\,.\int\frac{(A\,.\,x^4 + B\,.\,x^2 + C)\,d\,x}{(1 + x^2)\,(C + A\,.\,x^2)\,.\,\sqrt{X}}.$$

Der Factor $(1 + x^2)\,(C + A\,.\,x^2)$ ist gleich

$C + (A + C)\,x^2 + A\,.\,x^4 = A\,.\,x^4 + (B + 4\,b^2)\,x^2 + C$, weil

$C + A = 2\,(h^2 + r^2 + b^2) = B + 4\,b^2$; folglich

$A\,.\,x^4 + B\,x^2 + C = A\,.\,x^4 + (B + 4\,b^2)\,x^2 + C - 4\,b^2\,.\,x^2$, weshalb

$$\psi = 2\,r\int\frac{d\,x}{\sqrt{X}} - 8\,r\,b^2\,.\int\frac{x^2\,.\,d\,x}{(1 + x^2)\,(C + A\,.\,x^2)\,.\,\sqrt{X}}.$$

Nun ist der Bruch

$$\frac{x^2}{(1+x^2)(C+A\,.\,x^2)} = \frac{\alpha}{1+x^2} + \frac{\beta}{C+A\,.\,x^2},$$

woraus $x^2 = \alpha\,.\,C + \beta + (\alpha\,.\,A + \beta)\,x^2$, so daß

$$\alpha\,.\,C + \beta = o,\quad \alpha\,A + \beta = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{A-C},\ \beta = -\frac{C}{A-C}.$$

Da aber $A - C = -\,4\,r\,b$, so ist

$\alpha = -\frac{1}{4\,r\,b}$, $\beta = \frac{C}{4\,r\,b}$ $-\,8\,r\,b^2\,\alpha = 2\,b$, und $-\,8\,r\,b^2\,.\,\beta = -\,2\,b\,.\,C$; folglich:

$$\psi = 2\,r\,.\int\frac{d\,x}{\sqrt{X}} + 2\,b\int\frac{d\,x}{(1+x^2)\,.\,\sqrt{X}} - \frac{2\,b\,.\,C}{A}\,.\int\frac{d\,x}{(p+x^2)\,.\,\sqrt{X}}$$

wenn $\frac{C}{A} = p$ gesetzt wird.

Nennt man aber wieder

$$X = m^2 + 2\,m\,.\,n\,x^2\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + n^2\,x^4 = n^2\left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{2\,m}{n}\,x^2\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + x^4\right)$$

und bezeichnet $\frac{m}{n}$ mit h, so ist

$$X = n^2\,(x^4 + 2\,h\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + h^2).$$

Um ψ auf die Formen der elliptischen Transcendenten zu reduciren, kann man sich der Eulerschen Substitution bedienen:

$$4\,h\,x^2\,.\,y^4 - 4\,x^2\,.\,y^2 - 4\,h\,y^2 + 2\,(1 - \mathrm{Cos}\,\vartheta) = o, \quad \text{oder}$$

$$(h\,y^4 - y^2)\,x^2 - h\,.\,y^2 + \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta = o, \quad \text{da} \quad (1 - \mathrm{Cos}\,\vartheta) = 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta$$

Diese Gleichung gibt:

$$(h\,.\,y^2 - 1)\,y^2\,.\,x^2 = h\,.\,y^2 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta, \quad \text{oder}$$

$$x^2 = \frac{h\,.\,y^2 - \mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta}{y^2\,(h\,.\,y^2 - 1)} = \frac{1}{y^2}\,.\left\{\frac{1 - \dfrac{\mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta}{h\,.\,y^2}}{1 - \dfrac{1}{h\,.\,y^2}}\right\}.$$

Nennt man ferner $\frac{1}{\sqrt{h}\,.\,y} = \mathrm{Sin}\,\varphi$, so ist

$$\frac{1}{y^2} = h\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi;\quad \left(1 - \frac{1}{h\,.\,y^2}\right) = \mathrm{Cos}^2\,\varphi$$

$$x^2 = \frac{h\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}\,(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi); \quad \text{oder}$$

$$x = \sqrt{h}\,.\,\mathrm{Tang}\,.\,\varphi\,\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}; \quad \text{mithin}$$

$$d\,x = \frac{\sqrt{h}\,.\,d\,\varphi\,.\,\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}$$

$$-\,\frac{\sqrt{h}\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\mathrm{Tang}\,\varphi\,.\,d\,\varphi}{\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}}; \quad \text{oder}$$

$$d\,x = \frac{\sqrt{h}\,.\,d\,\varphi\,(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi)}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi\,.\,\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}}$$

$$= \frac{\sqrt{h}\,.\,d\,\varphi\,(1 - 2\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi)}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi\,.\,\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}}.$$

Dann ist:

$$x^4 = \frac{h^2\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi}{\mathrm{Cos}^4\,\varphi}\,.\,(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)^2)$$

$$2\,h\,.\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta = \frac{2\,h^2\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}\,(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi);\ \text{folglich}$$

$$\frac{X}{n^2} = x^4 + 2\,h\,x^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta + h^2$$

$$= \frac{h^2\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi}{\mathrm{Cos}^4\,\varphi}\,(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)^2$$

$$+ \frac{2\,h^2\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,\vartheta}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}\,(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi) + h^2.$$

Da $\mathrm{Cos}\,\vartheta = 1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta$ ist, so erhält man, wenn die Gleichung mit $\mathrm{Cos}^4\,\varphi$ multiplicirt, und durch h^2 dividirt wird:

$$\begin{aligned}\frac{X\,.\,\mathrm{Cos}^4\,\varphi}{n^2\,.\,h^2} &= \mathrm{Sin}^4\,\varphi - 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^6\,\varphi + \mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^8\,\varphi\\ &+ 2\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi - 4\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi\\ &- 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi + 4\,\mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi\\ &+ \mathrm{Cos}^4\,\varphi.\end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist nun:

$\mathrm{Sin}^4\,\varphi + 2\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi + \mathrm{Cos}^4\,\varphi = (\mathrm{Sin}^2\,\varphi + \mathrm{Cos}^2\,\varphi)^2 = 1$; $\mathrm{Cos}^2\,\varphi = 1 - \mathrm{Sin}^2\,\varphi$, folglich

$$\begin{aligned}\frac{X\,.\,\mathrm{Cos}^4\,\varphi}{n^2\,.\,h^2} &= 1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^6\,\varphi + \mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^8\,\varphi\\ &- 4\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + 4\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi\\ &- 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi + 2\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^6\,\varphi\\ &+ 4\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi - 4\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^6\,\varphi\\ &= 1 - 4\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + 4\,\mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi\\ &+ 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi - 4\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^6\,\varphi\\ &+ \mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^8\,\varphi\\ &= (1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi)^2.\end{aligned}$$

Es ist also:

$$X = \frac{n^2\,.\,h^2}{\mathrm{Cos}^4\,\varphi}\,(1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4)^2,\ \text{und}$$

$$\sqrt{X} = \frac{n\,.\,h}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}\,(1 - 2\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi + \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi);\ \text{folglich}$$

$$\frac{d\,x}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{h}\,.\,d\,\varphi}{n\,.\,h\,.\,\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\,\vartheta\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}}.$$

Setzt man wieder $\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} \vartheta = c^2$ und $h = \frac{m}{n}$, so ist

$$\frac{d\,x}{\sqrt{X}} = \frac{d\,\varphi}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,.\,\sqrt{(1 - c^2\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{(m\,.\,n)}}\,.\,\frac{d\,\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Eben so wird:

$$1 + x^2 = 1 + h\,.\,\operatorname{Tang}^2\varphi\,(1 - c^2\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi)$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^2\varphi + h\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\operatorname{Sin}^4\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi}$$

$$= \frac{1 - (1 - h)\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\operatorname{Sin}^4\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi};\ \text{und}$$

$$\frac{d\,x}{(1 + x^2)\,.\,\sqrt{X}} = \frac{d\,\varphi\,.\,\operatorname{Cos}^2\varphi}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,.\,\left\{1 - (1 - h)\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\operatorname{Sin}^4\varphi\right\}\,.\,\Delta(\varphi)}.$$

Um den Factor im Nenner zu zerlegen, hat man:

$$1 - (1 - h)\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\operatorname{Sin}^4\varphi$$

$$= (1 - M\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi)\,(1 + N\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi)$$

$$= 1 - (M - N)\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi - M\,.\,N\,.\,\operatorname{Sin}^4\varphi;\ \text{so daß}$$

$$M - N = 1 - h,\ M\,.\,N = h\,.\,c^2.$$

Diese Gleichungen geben: $(M + N)^2 = (1 - h)^2 + 4\,h\,c^2 = (1 - h)^2\left(1 + \frac{4\,.\,h\,.\,c^2}{(1 - h)^2}\right).$

Setzt man $\frac{2\,c\,.\,\sqrt{h}}{1 - h} = \operatorname{Tang} E$, so ist $(1 - h) = \frac{2\,c\,.\,\sqrt{h}}{\operatorname{Tang} E}$

$$M + N = \frac{2\,c\,.\,\sqrt{h}}{\operatorname{Sin} E};\ M - N = \frac{2\,c\,.\,\sqrt{h}\,.\,\operatorname{Cos} E}{\operatorname{Sin} E};\ \text{folglich}$$

$$M = \frac{c\,.\,\sqrt{h}\,(1 + \operatorname{Cos} E)}{\operatorname{Sin} E} = \frac{2\,c\,.\,\sqrt{h}\,.\,\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}E}{2\,.\,\operatorname{Sin}\frac{1}{2}E\,.\,\operatorname{Cos}\frac{1}{2}E} = c\,.\,\sqrt{h}\,.\,\operatorname{Cot}\frac{1}{2}E$$

$$N = \frac{c\,.\,\sqrt{h}\,.\,(1 - \operatorname{Cos} E)}{\operatorname{Sin} E} = \frac{2\,c\,.\,\sqrt{h}\,.\,\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}E}{2\,.\,\operatorname{Sin}\frac{1}{2}E\,.\,\operatorname{Cos}\frac{1}{2}E} = c\,.\,\sqrt{h}\,.\,\operatorname{Tang}\frac{1}{2}E.$$

Zur weiteren Umformung der Integrale dienen die Formeln

$$\frac{\operatorname{Cos}^2\varphi}{1 - (1 - h)\operatorname{Sin}^2\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\operatorname{Sin}^4\varphi} = \frac{1 - \operatorname{Sin}^2\varphi}{(1 - M\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi)\,(1 + N\operatorname{Sin}^2\varphi)}$$

$$= \frac{\alpha}{1 - M\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi} + \frac{\beta}{1 + N\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi};\ \text{woraus}$$

$$1 - \operatorname{Sin}^2\varphi = \alpha + \beta - (\beta\,.\,M - \alpha\,N)\operatorname{Sin}^2\varphi;\ \text{so daß}$$

$$\alpha + \beta = 1,\ \beta\,.\,M - \alpha\,.\,N = 1;\ \text{oder}$$

$$\alpha = \frac{M - 1}{M + N};\ \beta = \frac{N + 1}{M + N}.\ \text{Es ist daher:}$$

$$\int\frac{d\,x}{(1 + x^2)\,.\,\sqrt{X}} = \int\frac{d\,\varphi\,(1 - \operatorname{Sin}^2\varphi)}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,.\,(1 - M\,.\,\operatorname{Sin}^2\varphi)\,(1 + N\,.\,\operatorname{Cos}^2\varphi)}$$

$$= \frac{M - 1}{\sqrt{(m\,.\,n)\,(M + N)}} \cdot \int \frac{d\,\varphi}{(1 - M\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}$$

$$+ \frac{N + 1}{\sqrt{(m\,.\,n)\,(M + N)}} \cdot \int \frac{d\,\varphi}{(1 + N\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta\,(\varphi)}.$$

Für das folgende Integral

$$\int \frac{d\,x}{(p + x^2)\,.\,\sqrt{X}}$$ ist:

$$p + x^2 = p + h\,.\,\mathrm{Tang}^2\,\varphi\,(1 - c^2\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)$$

$$= \frac{p\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\varphi + h\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}$$

$$= \frac{p - (p - h)\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}.$$

Es ist aber $\frac{m^2}{n^2} = \frac{C}{A} = p$ und auch $\frac{m}{n} = h$, daher ist $p = h^2$, und

$$p + x^2 = \frac{h^2 - (h^2 - h)\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi - h\,.\,c^2\,.\,\mathrm{Sin}^4)}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}$$

$$= \frac{h^2\,\Big\{\,1 - \left(1 - \frac{1}{h}\right).\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi - \frac{c^2}{h}\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi}$$

$$= \frac{h^2\,(1 - M'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,(1 + N'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{\mathrm{Cos}^2\,\varphi};$$ oder

$$1 - (1 - \frac{1}{h}\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi - \frac{c^2}{h}\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi$$

$$= 1 - (M' - N')\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi - M'\,.\,N'\,.\,\mathrm{Sin}^4\,\varphi.$$ Daraus folgt

$$M' - N' = 1 - \frac{1}{h};\quad M'\,.\,N' = \frac{c^2}{h};$$ mithin

$$(M' + N')^2 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 + \frac{4\,c^2}{h} = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2\left(1 + \frac{4\,h\,.\,c^2}{(h-1)^2}\right).$$

Bestimmt man ebenfalls $\mathrm{Tang}\;E' = \frac{2\,c\,.\,\sqrt{h}}{h - 1}$; so daß $\frac{h-1}{h} = \frac{2\,c}{\sqrt{h}\,.\,\mathrm{Tang}\,.\,E'}$, so wird

$$M' + N' = \frac{2\,c}{\sqrt{h}\,.\,\mathrm{Tang}\;E'\,.\,\mathrm{Cos}\;E'} = \frac{2\,c}{\sqrt{h}\,.\,\mathrm{Sin}\;E'}$$

$$M' - N' = \frac{2\,c\,.\,\mathrm{Cos}\;E'}{\sqrt{h}\,.\,\mathrm{Sin}\;E'};$$ folglich

$$M' = \frac{c\,(1 + \mathrm{Cos}\;E')}{\sqrt{h}\,.\,\mathrm{Sin}\;E'} = \frac{c}{\sqrt{h}}\,.\,\mathrm{Cot}\,.\;E'$$

$$N' = \frac{c\,(1 - \mathrm{Cos}\;E')}{\sqrt{h}\,.\,\mathrm{Sin}\;E'} = \frac{c}{\sqrt{h}}\,.\,\mathrm{Tang}\,.\;E'.$$

Es ist daher

$$\int \frac{dx}{(h^2+x^2)\,.\,\sqrt{X}} = \frac{1}{h^2\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}}\,.\int \frac{d\varphi\,(1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi)}{(1-M'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,(1+N'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta(\varphi)}$$

und wenn man den Factor außer $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$ in Partial-Brüche zerlegt, so wird

$$\frac{1-\mathrm{Sin}^2\,\varphi}{(1-M'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,(1+N'\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)} = \frac{\alpha'}{1-M'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi} + \frac{\beta'}{1+N'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi},$$

woraus $\alpha' = \frac{M'-1}{M'+N'}$; $\beta' = \frac{N'+1}{M'+N'}$; daher ist:

$$\int \frac{dx}{(h^2+x^2)\,.\,\sqrt{X}} = \frac{(M'-1)}{h^2\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}\,(M'+N')}\,.\int \frac{d\varphi}{(1-M'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta(\varphi)}$$

$$+ \frac{(N'+1)}{h^2\,.\,\sqrt{(m\,.\,n)}\,(M'+N')}\,.\int \frac{d\varphi}{(1+N'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta(\varphi)}.$$

Der Ausdruck für das vollständige Integral des Winkels ist demnach

$$\psi = 2\,r\,.\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + 2\,b\,.\int \frac{dx}{(1+x^2)\,.\,\sqrt{X}} - \frac{2\,b\,.\,C}{A}\,.\int \frac{dx}{(h^2+x^2)\,.\,\sqrt{X}}$$ oder

$$\psi = \frac{2\,r}{\sqrt{(m\,.\,n)}}\,.\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{2\,b\,.\,(M-1)}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,(M+N)}\,.\int \frac{d\varphi}{(1-M\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

$$+ \frac{2\,b\,(N+1)}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,.\,(M+N)}\,.\int \frac{d\varphi}{(1+N\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta(\varphi)}$$

$$- \frac{2\,b\,(M'-1)}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,(M'+N')}\,.\int \frac{d\varphi}{(1-M'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta(\varphi)}$$

$$- \frac{2\,b\,(N'+1)}{\sqrt{(m\,.\,n)}\,(M'+N')}\,.\int \frac{d\varphi}{(1+N'\,.\,\mathrm{Sin}^2\,\varphi)\,.\,\Delta(\varphi)};$$

weil $\frac{C}{A\,.\,h^2} = 1$.

Die beiden Integrale sind hiemit, wie beabsichtigt wurde, auf die 3 Formen der elliptischen Transcendenten zurück geführt; ihre weitere Behandlung muß einer künftigen Veranlassung vorbehalten bleiben.