Die Berechnung des abgekürzten Kegels.

Die Lehrbücher über Stereometrie enthalten für die Berechnung des abgekürzten Kegels in der Regel nur die Formeln, nach denen aus den Radien der beiden parallelen Flächen, der Höhe oder Seitenlinie — der kubische Inhalt und die Seitenfläche gefunden werden. Den Gegenstand vollständig beim Unterricht zu behandeln, oder zu zeigen, wie aus 3 dieser Stücke die übrigen berechnet werden: erlaubt dem Lehrer die beschränkte Stundenzahl für einen Cursus der Stereometrie nicht, indem ähnlichen Gegenständen dieselbe Erweiterung zu Theil werden müßte. Der genannte aber ist für Schüler von besonderem Interesse, weil er die trigonometrischen Functionen in mannigfache Anwendung bringt, und auch zur Auflösung höherer Gleichungen führt, wozu die Geometrie gewöhnlich keine Veranlassung giebt.

Daher dürfte diese Berechnung sich wohl für ein Schulprogramm eignen, dessen Zweck es hauptsächlich ist, die Schüler anzuregen, einzelne Lehrgegenstände weiter zu verfolgen, und selbstständig Arbeiten zu unternehmen.

Nennt man den Radius der größeren Grundfläche des abgekürzten Kegels — r — den der kleineren — ϱ — die Höhe — h — die Seitenlinie — a — und — φ — den Winkel, den letztere mit der Axe bildet; den Inhalt ferner — K — den Mantel — F — und nimmt 3. von diesen Stücken als gegeben an: so erhält man 34 Aufgaben, indem — h. a. φ — nur für 2 Bestimmungsstücke gelten, weil $\frac{h}{a} = \cos\varphi$.

Die Aufgaben sind nach den Gleichungen geordnet, zu denen sie führen, und die Resultate zur logarithmischen Berechnung eingerichtet. Es sei nun gegeben:

1) — $r . \varrho . h$ — so setze man $\cos u = \frac{\varrho}{r}\sqrt{\frac{\varrho}{r}}$ und man erhält:

$$K = \frac{h . \pi . r^3 . \mathrm{Sin}\, u^2}{3(r - \varrho)} = \frac{h . \pi . \varrho^2 . \mathrm{Tang}\, u^2}{3(r-\varrho)}\; M = \frac{h . \pi\,(r+\varrho)}{\mathrm{Cos}\,\varphi};\quad \mathrm{Tang}\,\varphi = \frac{(r-\varrho)}{h}\; a = \frac{(r-\varrho)}{\mathrm{Sin}\,\varphi}.$$

2) — $r . \varrho . a.$ — $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{(r-\varrho)}{a}$, $h = \frac{(r-\varrho)}{\mathrm{Tang}\,\varphi}$ $\mathrm{Cos}\, u = \frac{\varrho}{r}\sqrt{\frac{\varrho}{r}}$, $K = \frac{r^3 . \pi . \mathrm{Sin}\, u^2}{3 . \mathrm{Tang}\,\varphi} = \frac{\varrho^3 . \pi . \mathrm{Tang}\, u^2}{3 . \mathrm{Tang}\,\varphi}$

$M = a . \pi . (r + \varrho)$.

3) — r . ϱ . K. — $\text{Cos}\,u = \frac{\varrho}{r} . \sqrt{\frac{\varrho}{r}}$, $h = \frac{3.K.(r-\varrho).\text{Cotg}.u^2}{\varrho^3 . \pi}$ $\text{Tang}.\varphi = \frac{\varrho^3.\pi.\text{Tang}.u^2}{3.K.}$

$M = \frac{(r+\varrho)\ (r-\varrho)\ \pi}{\text{Sin}\ \varphi}$.

Die Aufgaben 4) r . ϱ . M — und 5) r . ϱ . φ — sind in den Formeln von 1) und 2) enthalten, und wenn man bei — r . ϱ . φ — $\text{Cos}z = \frac{\varrho}{r}$ setzt, so wird $M = \frac{r^2.\pi.\text{Sin}\ z^2}{\text{Sin}\ \varphi} = \frac{\varrho^2.\pi.\text{Tang}.z^2}{\text{Sin}\ \varphi}$.

6) Wenn — r . h . a — gegeben sind, so erhält man $\text{Tang}.z = \sqrt{\frac{h}{r}.\text{Tang}\ \varphi}$ $\varrho = \frac{r.\text{Cos}\,2z.}{\text{Cos}\ z^2}$, $\text{Tang}\ u = \frac{\text{Sin}\ z^2}{\text{Cos}\ z} . \sqrt{\frac{1}{3.\text{Cos}\ z}}$, und $K = \frac{r^2.h.\pi.\text{Cos}\,2z}{\text{Cos}\ z^2 . \text{Cos}\ u^2}$, und nenn $\text{Tang}\ y = \sqrt{\frac{h}{2r}.\text{Tang}\varphi}$, so ist $M = \frac{2.a.r.\pi.\text{Cos}\,2y}{\text{Cos}\ y^2}$. Ist $r > h.\text{Tang}\ \varphi$, so kann man $\frac{h}{r}.\text{Tang}\ \varphi = \text{Cos}\ z$, annehmen, woraus $\varrho = 2\,r.\text{Sin}\,\frac{1}{2}\,z$, $\frac{\text{Cos}\ z^2}{6.\text{Sin}\ \frac{1}{2}\ z^2} = \text{Tang}\,u^2$, $\frac{h}{2\,r}.\text{Tang}\,\varphi = \text{Cos}\ y$,

$K = \frac{2.h.r^2.\pi.\ \text{Sin}\ \frac{1}{2}\ z^2}{\text{Cos}\ u^2}$, $M = 4.r.a.\pi.\text{Sin}\ \frac{1}{2}\ y^2$.

7) Bei — ϱ . h . a — wird $\text{Tang}\ z = \frac{h.\text{Tang}\,\varphi}{2\ \varrho}$ $\text{Tang}\ u = \sqrt{\text{Tang}.z}$

$\text{Tang}\ y = \sqrt{\frac{h}{\varrho}.\text{Tang}\ \varphi}$ $\text{Tang}\ v = \text{Sin}\ y . \text{Tang}\ y . \text{Tang}\ 30^0$

$M = \frac{2.a.\varrho.\pi}{\text{Cos}\ u^2}$, $K = \frac{\varrho^2.h.\pi.}{\text{Cos}\ y^2.\text{Cos}\ v^2}$.

8) — r . h . φ — $2\ r = n.\ \text{Sin}\ N$, $h = n.\text{Cos}\,N$, $\text{Tang}.\ z = \sqrt{\frac{h}{r}\ \text{Tang}\ \varphi}$;

$\text{Tang}\ u = \frac{\text{Sin}\ z^2}{\text{Cos}\ z} . \sqrt{\frac{1}{3.\text{Cos}\ 2\ z}}$ $M = \frac{h.\pi.n.\text{Sin}\ (N-\varphi)}{\text{Cos}\ \varphi^2}$, $K = \frac{r^2.h.\pi.\text{Cos}\,2z}{\text{Cos}\ z^2 . \text{Cos}\ u^2}$

9) — ϱ . h . φ — $\text{Tang}\ u = \sqrt{\frac{h}{2\ \varrho}.\text{Tang}\,\varphi}$; $\text{Tang}.y = \sqrt{\frac{h}{\varrho}.\text{Tang}.\varphi}$;

$\text{Tang}\,v = \text{Sin}\ y.\text{Tang}\ y.\text{Tang}\ 30^0$; $\text{Tang}\,z = \text{Tang}\ u^2$ — $M = \frac{2.h.\varrho.\pi}{\text{Cos}\ \varphi.\text{Cos}\ u^2}$

$= \frac{2.h.\varrho.\pi.\text{Sin}\ (45+z)}{\text{Cos}\ \varphi.\text{Cos}\ z.\text{Cos}\ 45^0}$; $K = \frac{\varrho^2.h.\pi.}{\text{Cos}\ y^2.\text{Cos}\ v^2}$.

10) $- \; r \, . \, a \, . \, M. - \; \mathrm{Cos}\; z = \frac{r \, . \, a \, . \, \pi}{M} \quad \varrho = \frac{2\,M}{a \, . \, \pi} \, . \, \mathrm{Sin}\; \tfrac{1}{2}\, z^2, \; \mathrm{Tang}\; u = \mathrm{Sin}\; \tfrac{1}{2}\, z \, . \sqrt{\frac{2}{\mathrm{Cos}\; z}},$

$\mathrm{Sin}\; \varphi = \frac{r \, . \, \mathrm{Cos}\; 2\,u}{\mathrm{Cos}\; u^2} \quad \mathrm{Tang} \, . \, y = \sqrt{\frac{a}{r} \, . \, \mathrm{Sin}\; \varphi} \quad \mathrm{Tang}\; v = \mathrm{Sin}\; y \, . \, \mathrm{Tang}\; y \sqrt{\frac{1}{3 \, . \, \mathrm{Cos}\; 2\; y}}$

$$K = \frac{r^2 \, . \, a \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Cos}\; \varphi \, . \, \mathrm{Cos}\; 2\; y}{\mathrm{Cos}\; y^2 \, . \, \mathrm{Cos}\; v^2}.$$

11) $- \; \varrho \, . \, a \, . \, M - \mathrm{Sin}\; z = \sqrt{\frac{\varrho \, . \, a \, . \, \pi}{M}}, \; r = \frac{M}{a \, . \, \pi} \, . \; \mathrm{Cos}\; z^2, \mathrm{Sin}\; \varphi = \frac{M \, . \, \mathrm{Cos}\; 2\,z}{a^2 \, . \, \pi} . \; \mathrm{Tang}\; u = \mathrm{Sin}\; z \, . \, \mathrm{Tang}\; z,$

$$K = \frac{M^2 \, . \, \mathrm{Cos}\; z^2 \, . \, \mathrm{Cos}\; \varphi}{3 \, . \, a \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Cos}\; u}.$$

12) $- \; r \, . \, a \, . \, \varphi - \mathrm{Tang}\; z = \sqrt{\frac{a \, . \, \mathrm{Sin}\; \varphi}{2\; r}} \quad \mathrm{Tang}\; y = \sqrt{\frac{a \, . \, \mathrm{Sin}\; \varphi}{r}} \quad \mathrm{Tang}\; u = \mathrm{Sin}\; y \, . \, \mathrm{Tang} \, . \, y \sqrt{\frac{1}{3 \, . \, \mathrm{Cos}\, 2\,y}}$

$$M = \frac{2 \, . \, r \, . \, a \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Cos}\; 2\; z}{\mathrm{Cos}\; z^2}, \quad K = \frac{a \, . \, r^2 \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Cos}\; \varphi \, . \, \mathrm{Cos}\; 2\; y}{\mathrm{Cos}\; y^2 \, . \, \mathrm{Cos}\; u^2}.$$

13) $- \; \varrho \, . \, a \, . \, \varphi - \mathrm{Tang}\; z = \sqrt{\frac{a \, . \, \mathrm{Sin}\; \varphi}{\varrho}} \quad \mathrm{Tang}\; u = \mathrm{Sin}\; z \, . \, \mathrm{Tang} \, . \, z \, . \, \mathrm{Tang} \, . \, 30^0$

$$\mathrm{Tang}\; y = \sqrt{\frac{a \, . \, \mathrm{Sin}\; \varphi}{2\; \varrho}} : K = \frac{a \, . \, \varrho^2 \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Cos}\; \varphi}{\mathrm{Cos}\; z^2 \, . \, \mathrm{Cos}\; u^2} \quad M = \frac{2 \, . \, a \, . \, \varrho \, . \, \pi}{\mathrm{Cos}\; y^2}.$$

14) $- \; r \, . \, K \, . \, \varphi - \mathrm{Cos}\; z = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3 \, . \, K \, . \, \mathrm{Tang}\; \varphi}{r \, . \, \pi}}; \; \mathrm{Cos}\; u = \sqrt[3]{\mathrm{Sin}\; z^2} \quad \varrho = r \, . \sqrt[3]{\mathrm{Sin}\; z^2},$

$$a = \frac{2\,r \, . \, \mathrm{Sin}\; \frac{1}{2}\, u^2}{\mathrm{Sin} \, . \, \varphi} \quad h = \frac{2\,r \, . \, \mathrm{Sin}\; \frac{1}{2}\, u^2}{\mathrm{Tang} \, . \, \varphi} \quad M = \frac{r^2 \, . \, \pi \; \mathrm{Sin}\; u^2}{\mathrm{Sin}\; \varphi}.$$

15 $- \; \varrho \, . \, K \, . \, \varphi . - \mathrm{Tang} \, . \, z = \frac{1}{\varrho} \sqrt{\frac{3 \, . \, K \, . \, \mathrm{Tang}\; \varphi}{\pi \, . \, \varrho}} \quad r = \frac{\varrho}{\sqrt[3]{\mathrm{Cos}\; z^2}}, \; \mathrm{Cos}\; u = \sqrt[3]{\mathrm{Cos}\; z^2},$

$$a = \frac{2\,\varrho \, . \, \mathrm{Sin}\; \frac{1}{2}\, u^2}{\mathrm{Sin}\; \varphi \, . \, \mathrm{Cos}\; u} \quad h = \frac{2\,\varrho \, . \, \mathrm{Sin}\; \frac{1}{2}\, u^2}{\mathrm{Tang}\; \varphi \, . \, \mathrm{Cos}\; u}, \quad M = \frac{\varrho^2 \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Tang} \, . \, u^2}{\mathrm{Sin}\; \varphi}.$$

16) $- \; r \, . \, M \, . \, \varphi - \mathrm{Cos}\; z = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{M \, . \, \mathrm{Sin}\; \varphi}{\pi}} \quad \varrho = r \, . \, \mathrm{Sin}\; z, \; \mathrm{Cos}\; u = \sqrt{\mathrm{Sin}\; z^3};$

$$K = \frac{r^3 \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Sin}\; u^2}{3 \, . \, \mathrm{Tang} \, . \, \varphi}.$$

17) $- \; \varrho \, . \, M \, . \, \varphi - \mathrm{Tang} \, . \, z = \frac{1}{\varrho} \sqrt{\frac{M \, . \, \mathrm{Sin}\; \varphi}{\pi}} \quad r = \frac{\varrho}{\mathrm{Cos}\; z} \quad \mathrm{Tang}\; u = \frac{\mathrm{Cos}\; \frac{1}{2}\; z \, . \, \sqrt{2}}{\mathrm{Cos}\; z},$

$$K = \frac{2 \, . \, \varrho^3 \, . \, \pi \, . \, \mathrm{Sin}\; \frac{1}{2}\; z^2}{3 \, . \, \mathrm{Tang}\; \varphi \, . \, \mathrm{Cos}\; z \, . \, \mathrm{Cos}\; u^2}.$$

18) — h . a . M — $(r+\varrho) = \frac{M}{a \,.\, \pi}$; $(r-\varrho) = a \,.\, \text{Sin}\,\varphi$; $\text{Tang}\,z = \frac{a^2 \,.\, \pi \,.\, \text{Sin}\,\varphi \,.\, \text{Tang}\,.\,30^0}{M}$,

$$K = \frac{M^2\,h}{4 \,.\, a^2 \,.\, \pi \,.\, \text{Cos}\,z^2}$$

19) — h . K . φ — $\text{Cos}\,z = \frac{h \,.\, \text{Tang}\,\varphi}{2} \,.\, \sqrt{\frac{h \,.\, \pi}{3\,K}}$ $(r+\varrho) = h \,.\, \text{Tang}\,\varphi \,.\, \text{Tang}\,z \,.\, \text{Tang}\,.\,30^0$,

$(r-\varrho) = h \,.\, \text{Tang}\,\varphi$, $M = \frac{h^2 \,.\, \pi \,.\, \text{Tang}\,.\,\varphi \,.\, \text{Tang}\,.\,30^0}{\text{Cos}\,\varphi}$,

20) — h . M . φ — $(r+\varrho) = \frac{M \,.\, \text{Cos}\,\varphi}{h \,.\, \pi}$; $(r-\varrho) = h \,.\, \text{Tang}\,\varphi$

$\text{Tang}\,z = \frac{h^2 \,.\, \pi \,.\, \text{Tang}\,\varphi \,.\, \text{Tang}\,30^0}{M \,.\, \text{Cos}\,\varphi}$; $K = \frac{M^2 \,.\, \text{Cos}\,\varphi}{4 \,.\, h \,.\, \pi \,.\, \text{Cos}\,z^2}$.

21) — K . a . φ — $\text{Cos}\,z = \frac{a \,.\, \text{Sin}\,\varphi}{2} \,.\, \sqrt{\frac{a \,.\, \pi \,.\, \text{Cos}\,\varphi}{3\,K}}$ $(r+\varrho) = 2 \,.\, \text{Sin}\,z \,.\, \sqrt{\frac{K}{a \,.\, \pi\ \text{Cos}\,\varphi}}$

$M = 2 \,.\, a \,.\, \pi \,.\, \text{Sin}\,z \,.\, \sqrt{\frac{K}{a \,.\, \pi \,.\, \text{Cos}\,\varphi}}$.

22) — a . M. φ — $\text{Tang}\,z = \frac{a^2 \,.\, \pi \,.\, \text{Sin}\,\varphi \,.\, \text{Tang}\,30^0}{M}$ $K = \frac{M^2 \,.\, \text{Cos}\,\varphi}{4 \,.\, a \,.\, \pi \,.\, \text{Cos}\,z^2}$.

23) Wenn — r . h . K — gegeben sind, wird ϱ aus einer quadratischen Gleichung bestimmt, und nimmt man $\text{Sin}\,z = r\sqrt{\frac{h \,.\, \pi}{3\,K}}$, $\text{Tang}\,u = 2.\,\text{Cotg}\,z$, so ist: $\varrho_, = \frac{1}{2}\,r \,.\, \text{Tang}\,u \,.\, \text{Tang}\,\frac{1}{2}\,u$, $\varrho_{,,} = -\frac{1}{2}\,r \,.\, \text{Tang}\,u \,.\, \text{Cotg}\,\frac{1}{2}\,u$. Für den Hülfswinkel $\text{Sin}\,y = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{h \,.\, \pi}{K}}$ ergeben sich: $\varrho_, = \frac{r \,.\, \text{Sin}\,(60^0 - y)}{\text{Sin}\,y}$. $\varrho_{,,} = -\frac{r \,.\, \text{Sin}\,(60^0 + y)}{\text{Sin}\,y}$. $\text{Tang}\,\varphi = \frac{2\,r \,.\, \text{Cos}\,30^0 \,.\, \text{Sin}\,(y-30^0)}{h \,.\, \text{Sin}\,y}$.

$$M = \frac{r \,.\, h \,.\, \pi \,.\, \text{Cos}\,(y-30^0)}{\text{Cos}\,\varphi \,.\, \text{Sin}\,y}.$$

24) — ϱ . h . K — $\text{Sin}\,z = \varrho\sqrt{\frac{h \,.\, \pi}{3\,K}}$ $\text{Tang}\,u = \frac{2 \,.\, \text{Cos}\,z}{\varrho} \,.\, \sqrt{\frac{3 \,.\, K}{h \,.\, \pi}}$

$r_, = \frac{1}{2}\,\varrho \,.\, \text{Tang}\,u \,.\, \text{Tang}\,\frac{1}{2}\,u$, $r_{,,} = -\frac{1}{2}\,\varrho \,.\, \text{Tang}\,u \,.\, \text{Ctg}\,\frac{1}{2}\,u$ $\text{Sin}\,y = \frac{1}{2}\,\varrho\sqrt{\frac{h \,.\, \pi}{K}}$;

$r_, = \frac{\varrho \,.\, \text{Sin}\,(60^0 - y)}{\text{Sin}\,y}$, $r_{,,} = -\frac{\varrho \,.\, \text{Sin}\,(60^0 + y)}{\text{Sin}\,y}$.

Die übrigen Stücke werden jetzt nach den vorigen Formeln bestimmt.

25) — Bei h . a . K — setzt man $\mathrm{Cos}\, z = a \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi \,.\, \sqrt{\frac{h \,.\, \pi \,.}{3\, K}}$, $\mathrm{Tang}\, u = 2 \,.\, \mathrm{Tang}\, z \,.\, \mathrm{Tang}\, 30^\circ$

$$\mathrm{Sin}\, y = \frac{a \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi}{2} .\, \sqrt{\frac{h \,.\, \pi}{3 \,.\, K}},$$ und man erhält:

$$\varrho_{,} = \frac{a}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi \,.\, \mathrm{Tang}\, u \,.\, \mathrm{Tang}\, \tfrac{1}{2}\, u$$

$$\varrho_{,,} = -\frac{a}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi \,.\, \mathrm{Tang}\, u \,.\, \mathrm{Cotg}\, \tfrac{1}{2}\, u$$

$$r_{,} = \frac{a}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi \,.\, \mathrm{Tang}\, u \,.\, \mathrm{Cotg}\, \tfrac{1}{2}\, u$$

$$r_{,,} = -\frac{a}{2} \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi \,.\, \mathrm{Tang}\, u \,.\, \mathrm{Tang}\, \tfrac{1}{2}\, u$$

$$M = a \,.\, \sqrt{\frac{4 \,.\, K \,.\, \pi}{h}} \,.\, \mathrm{Cos}\, y.$$

26) — h . K . M führen auf eine Gleichung des 4ten Grades, die als quadratische behandelt werden kann.

Denn setzt man $(r + \varrho) = x$, $(r - \varrho) = y$; $\mathrm{Cos}\, z = \tfrac{1}{2}\, h \,.\, \sqrt{\frac{h \,.\, \pi}{3\, K}}$

$\mathrm{Cos}\, u = \frac{2}{M} \,.\, \sqrt{K \,.\, h \,.\, \pi}$; so erhält man:

$$y^4 - h^2 \,.\, \mathrm{Tang}\, z^2 \,.\, y^2 + \frac{12 \,.\, K \,.\, h}{\pi} \,.\, \mathrm{Tang} \,.\, u^2,$$ und

wenn $\mathrm{Sin}\, \alpha = \frac{4 \,.\, \mathrm{Tang} \,.\, u}{h^2 \,.\, \mathrm{Tang}\, z^2} \,.\, \sqrt{\frac{3 \,.\, K \,.\, h}{\pi}}$:

$$y_{,}^2 = 2 \,.\, \sqrt{\frac{3\, K \,.\, h}{\pi}} \,.\, \mathrm{Cotg}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha \,.\, \mathrm{Tang}\, u$$

$$y_{,,}^2 = 2 \,.\, \sqrt{\frac{3\, K \,.\, h}{\pi}} \,.\, \mathrm{Tang}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha \,.\, \mathrm{Tang}\, u$$

$$\mathrm{Tang}\, \varphi = \frac{y}{h} \quad x = (r + \varrho) = \frac{M \,.\, \mathrm{Sin}\, \varphi}{y \,.\, \pi}.$$

27) — a . K . M — giebt eine Gleichung vom 6ten Grade, die auf eine kubische reducirt wird, wenn $(r - \varrho)^2 = x$ angenommen wird. Hier ist:

$$(r + \varrho) = \frac{M}{a \,.\, \pi}, \quad \mathrm{Tang}\, \alpha = \frac{a^2 \,.\, \pi}{6\, M} \sqrt{6}, \quad \mathrm{Tang}\, \beta = \frac{a^2 \,.\, \pi}{3\, M} \sqrt{6}$$

$\mathrm{Tang} \,.\, \gamma = \frac{M^2}{4 \,.\, a \,.\, K \,.\, \pi}$, und daraus:

$$x^3 + \frac{6 \,.\, M^2 \,.\, \mathrm{Cos}\, 2\, \alpha}{a^2 \,.\, \pi^2 \,.\, \mathrm{Cos}\, \alpha^2} \,.\, x^2 + \frac{9 \,.\, M^2 \,.\, \mathrm{Cos}\, 2\, \beta}{a^4 \,.\, \pi^4 \,.\, \mathrm{Cos}\, \beta^2} \,.\, x + \frac{144 \,.\, K^2 \,.\, \mathrm{Cos}\, 2\, \gamma}{\pi^2 \,.\, \mathrm{Cos}\, \gamma^2} = 0.$$

28 — 29) Bei r . h . M und — ϱ . h . M — nimmt man $\mathrm{Tang}\ \alpha = \frac{r \cdot \pi}{M} \sqrt{r^2 + h^2}$ und $\mathrm{Tang}\ \alpha, = \frac{\varrho \cdot \pi}{M} \sqrt{\varrho^2 + h^2}$, und man erhält die Gleichungen:

$$\varrho^4 - (2\, r^2 - h^2)\, \varrho^2 + 2\, r \cdot h^2 \cdot \varrho - \frac{M^2 \cdot \mathrm{Cos}\ 2\,\alpha}{\pi^2 \cdot \mathrm{Cos}\ \alpha^2} = 0, \quad \text{und}$$

$$r^4 - (2\, \varrho^2 - h^2)\, r^2 + 2\, \varrho \cdot h^2\, r - \frac{M^2 \cdot \mathrm{Cos}\ 2\,\alpha,}{\pi^2 \cdot \mathrm{Cos}\ \alpha,^2} = 0\,.$$

30) $- K \cdot M \cdot \varphi - (r - \varrho) = x\,(r + \varrho) = y :\ x^4 - \frac{12 \cdot K \cdot \mathrm{Tang}\ \varphi}{\pi}\, x + \frac{3 \cdot M^2 \cdot \mathrm{Sin}\ \varphi^2}{\pi^2} = 0.$

Die Aufgaben No. 28, 29, 30 führen auf Gleichungen des 4ten Grades, deren Lösung nach Euler und Cauchy 1840 im Programm von Herren Director Strehlke vollständig gegeben ist, so daß die Berechnung eines Zahlenbeispiels daraus entnommen werden kann. Das Programm enthält ebenfalls die Berechnung der kubischen Gleichung für No. 27.

Die Gleichung aus No. 29:

$$r^4 - (2\, \varrho^2 - h^2)\, r^2 + 2\, \varrho \cdot h^2\, r - \frac{M^2 \cdot \mathrm{Cos}\ 2\,\alpha}{\pi^2\ \mathrm{Cos}\ \alpha^2} = 0$$

führt zu: $Z^3 + P\,z + Q = 0$, und wenn deren Wurzel $Z,$, $Z_2 = A + B\sqrt{-1}$, $Z_3 = A - B\sqrt{-1}$

so ist $r, = \frac{1}{2}\,(\sqrt{z,} + L \cdot \sqrt{-1})$ $\quad r_2 = \frac{1}{2}\,(\sqrt{z,} - L \cdot \sqrt{-1})$

$r_3 = \frac{1}{2}\,(-\sqrt{z,} + K)$ $\quad r_4 = \frac{1}{2}\,(-\sqrt{z,} - K)$

wo $K = \sqrt{2\,B \cdot \mathrm{Tang}\ \tfrac{1}{2}\,\varphi}$ $\quad L = \sqrt{2\,B \cdot \mathrm{Cotg}\ \tfrac{1}{2}\,\varphi}$; $\quad \mathrm{Tang}\ \varphi = \frac{B}{A}$

Dazu hat man zu berechnen:

$$\mathrm{Tang}\ \alpha = \frac{\varrho \cdot \pi}{M} \sqrt{r^2 + h^2}\ ; \quad \mathrm{Tang}\ \beta = \frac{\mathrm{Cos}\ 2\,\alpha}{\mathrm{Cos}\ \alpha^2}$$

$$\mathrm{Tang}\ \gamma = \frac{(2\,\varrho^2 - h^2)\,\pi^2}{12\ M^2}, \quad \mathrm{Tang}\ \delta = \frac{3\,\varrho \cdot h^2}{(2\,\varrho^2 - h^2)} \cdot \sqrt{\frac{6}{(2\,\varrho^2 - h^2)}}$$

$$\mathrm{Tang}\ \varepsilon = \frac{\mathrm{Cos}\ 2\,\delta}{\mathrm{Cos}\ \delta^2}\,, \quad \mathrm{Tang}\ \eta = \frac{3 \cdot \mathrm{Tang}\ \beta}{\mathrm{Tang}\ \gamma}$$

$$P = \frac{4 \cdot M^2 \cdot \mathrm{Sin}\ (\beta - \gamma)}{\pi^2 \cdot \mathrm{Cos}\ \beta \cdot \mathrm{Cos}\ \gamma} \quad Q = \frac{4 \cdot \varrho^2 \cdot h^4\ \mathrm{Sin}\ (\varepsilon + \eta)}{\mathrm{Tang}\ \delta^2 \cdot \mathrm{Cos} \cdot \varepsilon\ \mathrm{Cos}\ \eta}\,.$$

Es sei $\varrho = 48$, $h = 23$, $M = 8570, 188$, so ist $\mathrm{Log}\ P = 6, 2759091 \cdot n$, $\mathrm{Lg}\ Q = 10, 0933112$.

Die Gleichung des 3ten Grades ist von der Form $Z^3 - Pz + Q = 0$, und da $\frac{Q^2}{4} > \frac{P^3}{27}$,

so ist $\mathrm{Sin}\ y = \frac{2\,P}{3\,Q} \sqrt{\frac{P}{3}}$ $\quad \mathrm{Tang}\ u = \sqrt[3]{\mathrm{Tang}\ \tfrac{1}{2}\, y}$; $\quad Z, = -2\sqrt{\frac{P}{3}} \cdot \mathrm{Cosec}\ 2\ u$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{P}{3}} \cdot \mathrm{Cosec} \cdot 2\ u + \sqrt{P} \cdot \mathrm{Cotg}\ 2\ u \cdot \sqrt{-1}$$

$$Z_3 = \sqrt{\frac{P}{3}} \,.\, \mathrm{Cosec}\,.\,2\,u - \sqrt{P}\,.\,\mathrm{Cotg}\;2\,u\,.\,\sqrt{-1}$$

$$y = 4^0\;37'\;6''\quad u = 18^0\;55'\;40'',\; Z_, = +\;2585{,}15$$
$$Z_2 = +\;1292{,}575 + 1767{,}669\,.\,\sqrt{-1}$$
$$Z_3 = +\;1292{,}575 - 1767{,}669\,.\,\sqrt{-1};\ \text{ferner}$$
$$z_1 = +\;134{,}18333\ldots\quad z_2 = +\;4011{,}90833\ldots + 1767{,}669\sqrt{-1}$$
$$z_3 = +\;4011{,}90833 - 1767{,}669\,.\,\sqrt{-1},\quad \varphi = 23^0\;46'\;42'',8$$
$$K = 27,\;28226\ldots\quad L = 129{,}58376\,.\,\sqrt{z_,}\,. = 11{,}583753\,.,$$
$$r_, = +\;5{,}791876 + 13{,}64113\,.\,\sqrt{-1}$$
$$r_2 = +\;5{,}791876 - 13{,}64113\,.\,\sqrt{-1}$$
$$r_3 = +\;59\quad r_4 = -\;70{,}58375.$$

Eine andere Auflösung biquadratischer Gleichungen ist von Herrn Encke in der Abhandlung: Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen gegeben (Crelle's Journal für Math. Bd. 22. pag. 217.)

Die Gleichung: $x_4 + \alpha\,.\,x^3 + \beta\,.\,x^2 + \gamma\,.\,x + \delta = 0$ wird in die Factoren $(x^2 + t\,x + v)\;(x^2 + t^1\,x + v^1) = 0$ zerlegt, woraus die 4. Werthe von x leicht gefunden werden, wenn t, v, t^1, v^1 bekannt sind.

Es ist aber $v = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4\delta})$ $v_, = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 4\delta})$ $t = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\alpha\,.\,y - 2\,\gamma}{\sqrt{y^2 - 4\,\delta}}\right)$ $t^1 = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\alpha.y - 2\gamma}{\sqrt{y^2 - 4\delta}}\right)$ wenn y die reelle Wurzel folgender Gleichung ist: $y^3 - \beta\,.\,y^2 + (\alpha\,.\,\gamma - 4\,\delta)\;y - (\gamma^2 - 4\,\beta\,\delta + \alpha^2\,.\,\delta) = 0.$

Schafft man $\beta\,.\,y^2$ fort, indem man statt $y = Z + \frac{\beta}{3}$ substituirt, so erhält man:

$$Z^3 + \left(\alpha\,\gamma - 4\,\delta - \frac{\beta^2}{3}\right)\,Z - \frac{2}{27}\,\beta^3 + \frac{\delta}{3}\,(\gamma\,\beta - 3\,\alpha^2) - \gamma^2 + \frac{1}{3}\,\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma = 0$$

dieselbe kubische Gleichung, welche Eulers Methode giebt. Das vorige Zahlenbeispiel giebt daher $Z = -\;2585{,}15$ $y = -\;3944{,}8167$, und da δ negativ, so setzt man $\mathrm{Tang}\;u = \frac{2\sqrt{\delta}}{y}$, so ist:

$$v = -\sqrt{\delta}\,.\,\mathrm{Cotg}\;\tfrac{1}{2}\,u\quad v_1 = \sqrt{\delta}\,.\,\mathrm{Tang}\;\tfrac{1}{2}\,u$$
$$t = \frac{\gamma\,.\,\mathrm{Cos}\,u}{y}\quad t_1 = -\frac{\gamma\,.\,\mathrm{Cos}\,u}{y},\quad u = 25^0\;52'\;2''$$
$$\mathrm{Log}\;v = 3{,}6195580\,.\,n\quad \mathrm{Log}\;t = 1{,}0638497$$
$$\mathrm{Log}\;v_, = 2{,}3416826\quad \mathrm{Log}\;t_, = 1{,}0638497\,.\,n$$
$$\mathrm{Tang}\,\varphi = \frac{2\sqrt{v}}{t}\quad - \quad x_, = -\sqrt{v}\,.\,\mathrm{Gotg}\;\tfrac{1}{2}\,\varphi$$
$$x_2 = \sqrt{v}\,.\,\mathrm{Tang}\;\tfrac{1}{2}\,\varphi;\quad \mathrm{Cos}\;\varphi_,\,. = \frac{t_,}{2\sqrt{v_,}}$$
$$x_3 = \sqrt{v_,}\,.\,\mathrm{Cos}\;\varphi_, + \sqrt{v_,}\,.\,\mathrm{Sin}\;\varphi_,\,.\,\sqrt{-1}$$
$$x_4 = \sqrt{v_,}\,.\,\mathrm{Gos}\;\varphi_, - \sqrt{v_,}\,.\,\mathrm{Sin}\;\varphi_,\,.\,\sqrt{-1};$$
$$\varphi = 84^0\;52'\;17''\quad \varphi_, = 66^0\;59'\;40''$$

$$r_1 = -70{,}5838 \quad r_2 = +59{,}0001$$
$$r_3 = +5{,}79185 + 13{,}64112 \,.\, \sqrt{-1}$$
$$r_4 = +5{,}79185 - 13{,}64112 \,.\, \sqrt{-1}.$$

Noch eine andere Auflösungsart der Gleichungen des 4ten Grades von Ampère ist in Grunert's Archiv für Mathematik (Bd. I. pag. 16) aufgestellt.

Wenn aus der vollständigen Gleichung $x^4 + \alpha \,.\, x^3 + \beta \,.\, x^2 + \gamma \,.\, x + \delta = 0$ das 2te Glied fortgeschafft ist, und man $y^4 + a \,.\, y^2 + b \,.\, y + c = 0$ erhalten hat, (so daß $x = y - \frac{\alpha}{4}$), werden die 4 Wurzeln dieser 2ten Gleichung p. q. r. s genannt, und man erhält:

$$(p+q)^6 + 2\,a\,(p+q)^4 + (a^2 - 4\,c)\,(p+q)^2 - b^2 = 0, \text{ oder}$$
$$u^3 + 2\,a \,.\, u^2 + (a - 4\,c)\,u - b^2 = 0, \text{ wenn } u^2 = (p+q).$$

Werden a. b. c. wieder durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt, so ergiebt sich, wenn u^2 durch Substitution von $Z - \frac{2\,a}{3}$ statt u fortgeschafft ist:

$$Z^3 + \left(\alpha\gamma - \frac{2}{3}\,\beta^2 - 4\,\delta\right) Z + \frac{\delta}{3}\,(8\,\beta - 3\,\alpha^2) - \frac{2}{27}\,\beta^3 - \gamma^2 + \frac{\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma}{3} = 0$$

dieselbe kubische Gleichung, wie bei den beiden anderen Auflösungsarten.

Hat man die reelle Wurzel Z dieser kubischen Gleichung berechnet, und nimmt man $\mu = Z + \frac{1}{4}\,\alpha^2 - \frac{2}{3}\,\beta$, dann sind die Wurzeln der Gleichung $x^4 + \alpha \,.\, x^3 + \beta \,.\, x^2 + \gamma . x + \delta = 0$ folgende:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\} - \frac{\alpha}{4} \quad x_2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(a + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\} - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} - \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\} - \frac{\alpha}{4} \quad x_4 = -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\mu} + \sqrt{-\mu - 2\left(a - \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right)}\right\} - \frac{\alpha}{4}.$$

Sind a und b negativ, $\sqrt{\mu}$ reell $\operatorname{Tang} u = \sqrt{\frac{b}{a \,.\, \sqrt{\mu}}}$, und es ist:

$\frac{2\,a}{\operatorname{Cos} u^2} > \mu$ und $\frac{2\,a \,.\, \operatorname{Cos} 2\,u}{\operatorname{Cos} u^2} > \mu$ so sind die 4. Wurzeln reell; wenn $\frac{2\,a}{\operatorname{Cos} u^2} < \mu$ und $\frac{2\,a \,.\, \operatorname{Cos} 2\,u}{\operatorname{Cos} u^2} < \mu$, dann sind alle Wurzen imaginär, und wenn drittens $\frac{2\,a}{\operatorname{Cos} u^2} > \mu$ $\frac{2\,a \,.\, \operatorname{Cos} 2\,u}{\operatorname{Cos} u^2} < \mu$ oder umgekehrt, dann sind 2 Wurzeln reell und 2 imaginär.

Um die Wurzeln bequemer berechnen zu können, substituirt man für den ersten Fall:

$$\operatorname{Cos} v = \operatorname{Cos} u \sqrt{\frac{\mu}{2\,a}} \quad \operatorname{Cos} v_1 = \operatorname{Cos} u \,.\, \sqrt{\frac{\mu}{2\,a \,.\, \operatorname{Cos} 2\,u}} \text{ und es werden:}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{\mu} \,.\, \operatorname{Sin}(45^0 + v)}{2 \,.\, \operatorname{Cos} 45^0 \,.\, \operatorname{Cos} v} - \frac{\alpha}{4} \quad x_2 = \frac{\sqrt{\mu} \,.\, \operatorname{Sin}(45^0 - v)}{2 \,.\, \operatorname{Cos} 45^0 \,.\, \operatorname{Cos} v} - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{\mu} \,.\, \operatorname{Sin}(45^0 - v')}{2 \,.\, \operatorname{Cos} 45^0 \,.\, \operatorname{Cos} v'} - \frac{\alpha}{4}; \quad x_4 = -\frac{\sqrt{\mu} \,.\, \operatorname{Sin}(45^0 + v')}{2 \,.\, \operatorname{Cos} 45^0 \,.\, \operatorname{Cos} v'} - \frac{\alpha}{4}.$$

Für den 2ten Fall erhält man:

$$\mathrm{Tang}\ u = \sqrt{\frac{b}{a\ .\ \sqrt{\mu}}},\quad \mathrm{Cos}\ Z = \sqrt{\frac{2\ a}{\mu\ .\ \mathrm{Cos}\ u^2}}\quad \mathrm{Cos}\ Z' = \sqrt{\frac{2\ a\ .\ \mathrm{Cos}\ 2\ u}{\mu\ .\ \mathrm{Cos}\ u^2}}\ \text{und}$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\,[\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Sin}\ Z\,\sqrt{-1}] - \frac{\alpha}{4},\quad x_2 = \tfrac{1}{2}\,[\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Sin}\ Z\,\sqrt{-1}] - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}\,[\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Sin}\ Z'\,\sqrt{-1}] - \frac{\alpha}{4},\quad x_4 = -\tfrac{1}{2}\,[\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu}\ \mathrm{Sin}\ Z'\,\sqrt{-1}] - \frac{\alpha}{4}$$

Im 3ten Falle berechnet man 2 Wurzeln nach dem 1sten, und 2 nach dem 2ten.

Wenn a positiv, b negativ, $\mathrm{Tang}\ u = \sqrt{\dfrac{a\ .\ \sqrt{\mu}}{b}}$ und $\dfrac{2\ b\ .\ \mathrm{Cos}\ 2\ u}{\sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Cos}\ u^2} > \mu$

so daß, $\mathrm{Cos}\ v = \mathrm{Cos}\ u\ .\ \sqrt{\dfrac{\mu^{\frac{3}{2}}}{2\,b\ .\ \mathrm{Cos}\ 2\,u}},\quad \mathrm{Tang}\ v' = \sqrt{\dfrac{2\ a}{\mu\ .\ \mathrm{Sin}\ u^2}}$

so erhält man:

$$x_1 = \frac{\sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Sin}\ (45^0 + v)}{2.\ \mathrm{Cos}\ 45^0.\ \mathrm{Cos}\ v} - \frac{\alpha}{4},\quad x_2 = \frac{\sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Sin}\ (45^0 - v)}{2\ .\ \mathrm{Cos}\ 45^0\ .\ \mathrm{Cos}\ v} - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{\mathrm{Cos}\ v'}.\sqrt{-1}\right) - \frac{\alpha}{4},\quad x_4 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} + \frac{\sqrt{\mu}}{\mathrm{Cos}\ v'}\sqrt{-1}\right) - \frac{\alpha}{4}$$

und wenn $\dfrac{2\ b\ .\ \mathrm{Cos}\ 2\ u}{\sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Cos}\ u^2} < \mu$, so daß

$$\mathrm{Cos}\ Z = \sqrt{\frac{2\ b\ .\ \mathrm{Cos}\ 2\ u}{\mu^{\frac{3}{2}}\ .\ \mathrm{Cos}\ u^2}}\ \text{und}\ \mathrm{Tang}\ v' = \sqrt{\frac{2\ a}{\mu\ .\ \mathrm{Sin}\ u^2}};$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu}\ .\ \mathrm{Sin}\,Z\ .\ \sqrt{-1}\right) - \frac{\alpha}{4},\quad x_2 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}.\,\mathrm{Sin}\,Z\,.\sqrt{-1}\right) - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{\mathrm{Cos}\ v'}\ .\ \sqrt{-1}\right) - \frac{\alpha}{4},\quad x_4 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} + \frac{\sqrt{\mu}}{\mathrm{Cos}\ v'}\ .\ \sqrt{-1}\right) - \frac{\alpha}{4}$$

Hier ist angenommen, daß μ aus der reellen Wurzel der kubischen Gleichung $Z^3 + P\,Z + Q$ abgeleitet ist; hat aber diese Gleichung 2 imaginäre Wurzeln, so kann man auch aus diesen, aber durch mühsamere Rechnung, die 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung ableiten.

Ist $\mu = \alpha + \beta\ .\ \sqrt{-1}$; so setze man

$$\mathrm{Tang}\ \varphi = \frac{\beta}{\alpha},\quad \varrho = \frac{\beta}{\mathrm{Sin}\ \varphi},\quad \mathrm{Tang}\ M = \frac{\varrho^{\frac{3}{2}}\ .\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}\,\varphi}{b}$$

$$m = \frac{\varrho\ .\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\ M},\quad \mathrm{Tang}\ u = \frac{m\ .\ \mathrm{Sin}\ (M - \varphi)}{2\ a\ .\ \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}\,\varphi},\quad r = \frac{2\ m\ .\ \mathrm{Sin}\ (M - \varphi)}{\mathrm{Sin}\ u}$$

$$n = \frac{2\ \varrho\ .\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\ M} = 2\ m;\quad \mathrm{Tang}\ u' = \frac{m\ .\ \mathrm{Sin}\ (M + \varphi)}{2\ a\ .\ \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}\,\varphi},$$

$$r' = \frac{2\ m\ .\ \mathrm{Sin}\ (M + \varphi)}{\mathrm{Sin}\ u'};\quad \mathrm{Tang}\ \varphi' = \frac{n\ .\ \mathrm{Sin}\ (M + \frac{1}{2}\,\varphi)\ .\ \mathrm{Sin}\ \varphi}{r\ .\ \mathrm{Sin}\ (u - \frac{1}{2}\,\varphi)}$$

$$\varrho' = \frac{n\ .\ \mathrm{Sin}\ (M + \frac{1}{2}\,\varphi)}{\mathrm{Sin}\ \varphi'};\quad \varrho'' = \frac{n\ .\ \mathrm{Sin}\ M - \frac{1}{2}\,\varphi)}{\mathrm{Sin}\ \varphi''}\ \text{und}$$

$$\text{Tang}\ \varphi'' = \frac{n\,.\,\text{Sin}\,(M - \tfrac{1}{2}\varphi)\ \text{Sin}\ \varphi}{r'\,.\,\text{Sin}\,(u' - \tfrac{1}{2}\varphi)},$$ und es wird

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi') + (\varrho^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho'^{\frac{1}{2}}\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,}) + (\varrho^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\varphi_{,,}) + (\varrho^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_4 = -\tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,,}) + (\varrho^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}.$$

Hat μ die Form $-\alpha + \beta\,.\sqrt{-1}$, so wird

$$\text{Tang}\ \varphi = \frac{\beta}{\alpha},\quad \varrho = \frac{\beta}{\text{Sin}\ \varphi},\quad \text{Tang}\,M = \frac{\varrho^{\frac{3}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi}{b}$$

$$m = \frac{\varrho\,.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\varphi}{\text{Sin}\ M},\quad \text{Tang}\ u = \frac{2\ a.\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\varphi}{m\,.\,\text{Sin}\ (M+\varphi)},\quad r = \frac{4\ a\,.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi}{\text{Sin}\ u},$$

$$\text{Tang}\,N = \frac{b}{\varrho^{\frac{3}{2}}\ \text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi}\qquad n = \frac{2\ b\,.\,\varrho^{-\frac{1}{2}}}{\text{Sin}\ N}$$

$$\text{Tang}\ u_{,} = \frac{2\ a\,.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi}{m\,.\,\text{Sin}\ (M - \varphi)};\quad r_{,} = \frac{4\ a\,.\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\ \varphi}{\text{Sin}\ u_{,}},$$

$$\text{Tang}\ \varphi_{,} = \frac{n\,.\,\text{Sin}\ (\tfrac{1}{2}\ \varphi + N)}{r\,.\,\text{Sin}\ (u + \tfrac{1}{2}\ \varphi)};\quad \varrho_{,} = \frac{n\,.\,\text{Sin}\ (\tfrac{1}{2}\ \varphi + N)}{\text{Sin}\ \varphi_{,}},$$

$$\text{Tang}\,\varphi_{,,} = \frac{n\,.\,\text{Sin}\ (\tfrac{1}{2}\ \varphi - N)\ \text{Sin}\ \varphi}{r_{,}\ \text{Sin}\ (u_{,} + \tfrac{1}{2}\ \varphi)};\quad \varrho_{,,} = \frac{n\,.\,\text{Sin}\ (\tfrac{1}{2}\ \varphi - N)}{\text{Sin}\ \varphi_{,,}}:$$

$$x_{,} = \tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,}) + (\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,}) + (\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,,}) + (\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}$$

$$x_4 = -\tfrac{1}{2}\Big((\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi + \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,,}) + (\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi - \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,,})\sqrt{-1}\Big) - \frac{\alpha}{4}$$

In beiden Fällen sind a und b negativ genommen, und man könnte ähnliche Ausdrücke ableiten, wenn man $\mu = +\alpha - \beta\,.\sqrt{-1}$ oder $\mu = -\alpha - \beta\,.\sqrt{-1}$ annehmen wollte. Wird in

diesen Formeln: $\varrho^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi = \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,} = \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi''$

oder $\varrho^{\frac{1}{2}}.\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi = \varrho_{,}^{\frac{1}{2}}\ \text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi_{,} = \varrho_{,,}^{\frac{1}{2}}.\,\text{Sin}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi''$

so sind 2 Wurzeln der gegebenen Gleichung reell und 2 imaginär.

Wenn die biquadratische Gleichung 4 reelle Wurzeln hat, so sind die 3 Wurzeln der kubischen Gleichung ebenfalls reell.

In dem vorigen Zahlenbeispiel $r^4 - 4079 \,.\, r^2 + 50784 \,.\, r - 914621{,}64 = 0$ ist $\alpha = 0$, μ wie vorhin $= 134{,}18333$..

$$a = -4079 \quad b = 50784, \quad \text{Tang } u = \sqrt{\frac{b}{a \,.\, \sqrt{\mu}}}$$

$$\text{Tang } v = \sqrt{\frac{2\,a \,.\, \text{Cos } 2\,u}{\mu \,.\, \text{Cos } u^2}}, \quad \text{Cos } v' = \text{Cos } u \sqrt{\frac{\mu}{2\,a}}$$

$$r_, = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} + \frac{\sqrt{\mu}}{\text{Cos } v} \,.\, \sqrt{-1}\right) \quad r_2 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{\text{Cos } v}\sqrt{-1}\right)$$

$$r_3 = -\frac{\sqrt{\mu} \,.\, \text{Sin } (45^0 - v_,)}{2 \,.\, \text{Cos } 45^0 \,.\, \text{Cos } v_,}, \quad r_4 = -\frac{\sqrt{\mu} \,.\, \text{Sin } (45^0 + v)}{2 \,.\, \text{Cos } 45^0 \,.\, \text{Cos } v}$$

$$u = 46^0\ 1'\ 58{,}''\ 4 \quad v = 64^0\ 52'\ 31{,}''\ 2 \quad v' = 84^0\ 53'\ 30{,}''\ 5$$

$$r_1 = 5{,}79187 + 13{,}64113 \,.\, \sqrt{-1} \qquad r_2 = 5{,}79187 - 13{,}64113 \,.\, \sqrt{-1}$$

$$r_3 = 59{,}0002 \qquad r_4 = -70{,}584.$$

Bei jeder dieser 3 Methoden muß man die kubische Gleichung $Z^3 + PZ + Q = 0$, ableiten und auflösen. Sind ihre Wurzeln reell, so hat man nach Eulers Methode nur $\sqrt{z_,}$ — $\sqrt{z_2}$ und $\sqrt{z_3}$ zu berechnen, oder wenn 2 dieser Wurzeln imaginär sind: $z^2{}_3 = A \pm B\sqrt{-1}$

$$\text{Tang } \varphi = \frac{B}{A} \quad K = \sqrt{2\,B \,.\, \text{Tang } \tfrac{1}{2}\,\varphi} \quad L = \sqrt{2\,B \,.\, \text{Cotg } \tfrac{1}{2}\,\varphi}.$$

Nach Enckes: $\text{Tang } u = \dfrac{2\sqrt{.\,\delta}}{y}$ $\quad v = -\sqrt{\delta} \,.\, \text{Cotg } \tfrac{1}{2}\, u \quad v_, = +\sqrt{\delta} \,.\, \text{Tang } \tfrac{1}{2}\, u$

$t = \dfrac{\gamma \,.\, \text{Cos } u}{y}$, $\quad \text{Tang } \varphi = \dfrac{2\sqrt{v}}{t}$, $\quad \text{Cos } \varphi_, = \dfrac{t}{2\sqrt{v_,}}$ nebst $\varrho \,.\, \text{Cos } \varphi$ u ϱ Sin φ.

Nach Ampère's Methode: $\text{Tang } u = \sqrt{\dfrac{b}{2\,a \,.\, \sqrt{\mu}}}$, $\quad \text{Tang } v = \sqrt{\dfrac{2\,a \,.\, \text{Cos } 2\,u}{\mu \,.\, \text{Cos } u^2}}$

$\text{Cos } v_, = \text{Cos } u \sqrt{\dfrac{\mu}{2\,a}}$, Sin $(45^0 \pm \varphi)$: es erfordert also Eulers Methode weniger Berechnung als die beiden anderen.

Von den Aufgaben über den abgekürzten Kegel sind noch übrig

31) 32) — r . a . K — ϱ . a . K, welche die Gleichungen geben:

$$\varrho^6 - a^2\ \varrho^4 - 2\,r\,(a^2 + r^2) \,.\, \varrho^3 - 3\,a^2 \,.\, r^2 \,.\, \varrho^2 - 2\,a \,.\, r^3 \,.\, \varrho$$
$$+ r^4\,(r^2 - a^2) + \frac{9\,K^2}{\pi^2} = 0 \quad \text{und}$$

$$r^6 - a^2 \,.\, r^4 - 2\,\varrho\,(a^2 + \varrho^2) \,.\, r^3 - 3\,a^2 \,.\, \varrho^2 \,.\, r^2 - 2\,a^2 \,.\, \varrho^3\, r$$
$$+ \varrho^4\,(r^2 - a^2) + \frac{9\,K^2}{\pi^2} = 0.$$

33) 34) $r \,.\, K \,.\, M - \varrho \,.\, K \,.\, M$ — mit $\varrho^8 + 2\,r \,.\, \varrho^7 + r^2 \,.\, \varrho^6 - 2\,r^3 \,.\, \varrho^5 - \left(4\,r^4 + \frac{M^2}{\pi^2}\right) \,.\, \varrho^4$

$$- \left(2\,r^5 + \frac{2\,r \,.\, M^2}{\pi^2}\right) \varrho^3 + \left(r^6 - \frac{3\,r^2\,M^2}{\pi^2} + \frac{9\,K^2}{\pi^2}\right) \varrho^2 + \left(2\,r^7 - \frac{2\,r^3\,M^2}{\pi^2} + \frac{18 \,.\, r \,.\, K^2}{\pi^2}\right) \varrho$$

$$+ \left(r^8 - \frac{M^2 \,.\, r^4}{\pi^2} + \frac{9\,K^2\,r^2}{\pi^2}\right) = 0,$$ und

$$r^8 + 2\,\varrho \,.\, r^7 + \varrho^2 \,.\, r^6 - 2\,\varrho^3 \,.\, r^5 - \left(4 \,.\, \varrho^4 + \frac{M^2}{\pi^2}\right) r^4 - \left(2\,\varrho^5 + \frac{2\,\varrho\,M^2}{\pi^2}\right) \,.\, \varrho^3$$

$$+ \left(\varrho^6 - \frac{3\,M^2 \,.\, \varrho^2}{\pi^2} + \frac{9\,K^2}{\pi^2}\right) r^2 + \left(2\,\varrho^7 - \frac{2\,M^2 \,.\, \varrho^3}{\pi^2} + \frac{18 \,.\, \varrho \,.\, K^2}{\pi^2}\right) r$$

$$+ \left(\varrho^8 - \frac{M^2 \,.\, \varrho^4}{\pi^2} + \frac{9 \,.\, K^2 \,.\, \varrho^2}{\pi^2}\right) = 0.$$

Von diesen Gleichungen sollen noch 2 Beispiele nach neueren Methoden berechnet werden.

In einer 1837 erschienenen Abhandlung von Gräffe, werden numerische Gleichungen durch successives Quadriren ihrer Wurzeln aufgelöset. Hat man die Gleichung

1) $a_n \,.\, x^n + a_{n-1} \,.\, x^{n-1} + a_{n-2} \,.\, x^{n-2} \ldots \ldots a_2 \,.\, x^2 + a_1\, x + a_0 = 0$ und setzt $x = \sqrt{x_1}$, so erhält man, wenn n gerade:

$$a_n \,.\, x_1^{\frac{n}{2}} + a_{n-2} \,.\, x_1^{\frac{n-2}{2}} \ldots + a_2 \,.\, x_1 + a_0$$

$$= - \left[a_{n-1} \,.\, x_1^{\frac{n-2}{2}} + a_{n-3} \,.\, x_1^{\frac{n-4}{2}} \ldots \ldots a_1\right] \sqrt{x_1}.$$ Ist n ungerade, so erhält auch die andere Seite der Gleichung $\sqrt{x_1}$ als Factor. Nun quadrirt man jede Seite, und bringt die Glieder geordnet auf eine Seite, so wird:

2) $$a_n^2 \,.\, x_1^n + \left[- a_{n-1}^2 + 2\,a_n \,.\, a_{n-2}\right] \,.\, x_1^{n-1} + \left[+ a_{n-2}^2 - 2\,a_{n-1} \,.\, a_{n-3} + 2\,a_n \,.\, a_{n-4}\right] \,.\, x_1^{n-2}$$

$$+ \ldots (-1)^p \left[a_{n-p}^2 - 2\,a_{n-p+1} \,.\, a_{n-p-1} + 2\,a_{n-p+2} \,.\, a_{n-p-2} \ldots (-1)^q \,.\, 2\,a_{n-p+q} \,.\, a_{n-p-q} \ldots\right] x_1^{n-p}$$

$$\ldots\ldots (-1)^{n-2} \left[a_2^2 - 2\,a_3 \,.\, a_1 + 2\,a_4 \,.\, a_0\right] x_1^2 + (-1)^{n-1} \left[a_1^2 - 2\,a_2\,a_0\right] x_1 + (-1)^n a_0^2 = 0$$

Geht man von der Gleichung aus:

3) $$x^n + A_1\, x^{n-1} + A_2 \,.\, x^{n-2} \ldots + A_{n-2} \,.\, x^2 + A_{n-1} \,.\, x + A_n = 0$$

so erhält man durch die genannte Operation eine Gleichung von der Form

$$x_1^n + B_1 \,.\, x_1^{n-1} + B_2 \,.\, x_1^{n-2} + \ldots + B_{n-2} \,.\, x_1^2 + B_{n-1} \,.\, x_1 + B_n = 0$$

und nach m solcher Operationen:

$$x_m^{n} + P_1 . x_m^{n-1} + P_2 . x_m^{n-2} \ldots . + P_{n-2} . x_m^{2} + P_{n-1} . x_m + P_n = 0.$$

Die Coefficienten der gegebenen Gleichung (3.) sind Combinationen ihrer Wurzeln $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \ldots \alpha_n$, und zwar

$$A_1 = - C^1 (1 \ldots n) = - \alpha_1 - C^1 (2 \ldots n)$$
$$A_2 = + C^2 (1 \ldots . n) = \alpha_1 . C^1 (2 \ldots n) + C^2 (2 \ldots n)$$
$$A_3 = - C^3 (1 \ldots . n) = - \alpha_1 . C^2 (2 \ldots n) - C^3 (2 \ldots n).$$

Wenn α_1 reell und die größte aller Wurzeln ist, so erlangen bei fortgesetzter Quadrirung die ersten jener Gruppen, worin die Coefficienten zerlegt sind, ein Uebergewicht über die 2ten, so daß diese auf eine bestimmte Anzahl Ziffern keinen Einfluß mehr äußern, und wenn man ähnliche Trennungen mit $\alpha_2 \; \alpha_3 \ldots$ immer der Größe nach vornimmt, so erhält man, wenn alle Wurzeln reell sind, nach der gehörigen Zahl von Quadrirungen:

$$4) \quad x^{n} - \alpha_1^{r} . x^{n-1} + \alpha_1^{r} . \alpha_2^{r} . x^{n-2} - \alpha_1^{r} . \alpha_2^{r} . \alpha_3^{r} . x^{n-3} \ldots . \; (-1)^{n} . \alpha_1^{r} . \alpha_2^{r} . \alpha_3^{r} \ldots \alpha_n^{r} = 0.$$

Hier ist r von der Form 2 m, und wenn die Coefficienten quadratisch wachsen, so ist dies das Zeichen, daß die Gleichung die Form (4) angenommen hat. Dann zieht man aus jedem Coefficienten die rte Wurzel, und dividirt jeden folgenden durch den vorhergehenden, wodurch man die numerischen Werthe der Wurzeln nach ihrer Größe geordnet erhält; ihre Zeichen werden durch Substitution der nächsten Grenzwerthe bestimmt. Sind α_1 und α_2 von gleicher Größe, so wird die Gleichung:
$x^{n} - (\alpha_1^{r} + \alpha_2^{r}) \, x^{n-1} + \alpha_1^{r} . \alpha_2^{r} . x^{n-2} \ldots = 0.$ Wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ so ist $\alpha_1^{r} + \alpha_2^{r} = 2 \; \alpha_1^{r}$ und $\alpha_1^{r} . \alpha_2^{r} = \alpha_1^{2r}$; wenn daher die Hälfte des Coefficienten quadratisch wächst, so werden 2 gleiche Wurzeln dadurch angezeigt; 2 imaginäre dagegen, wenn er nicht quadratisch wächst, oder von einer Operation zur anderen sein Zeichen wechselt. In diesem Falle ist $\alpha_1 = \varrho \, (\mathrm{Cos} \; \varphi + \mathrm{Sin} \; \varphi \sqrt{-1}) \quad \alpha_2 = \varrho \, (\mathrm{Cos} \; \varphi - \varrho . \mathrm{Sin} \; \varphi \sqrt{-1})$; $\alpha_1^{r} . \alpha_2^{r} = \varrho^{2r}, \; \alpha_1^{r} + \alpha_2^{r} = 2 \, \varrho^{3} . \mathrm{Cos} \; r \; \varphi.$

In der Aufgabe No. 33 sei gegeben $r = 37$, $K = 59288{,}14$ $M = 5289{,}107$, so erhält man, wenn statt der Zahlen gleich die Logarithmen genommen werden, die Gleichung:

$$x^8 + 1{,}8692317 . x^7 + 3{,}1364034 . x^6 - 5{,}0056352 . x^5$$
$$- 7{,}0141453 . x^4 - 8.5421223 . x^3 - 9.7686298 . x^2$$
$$+ 11{,}1458699 . x + 12{,}4130418 = 0$$

wo x für ϱ gesetzt ist. Quadrirt werden die Wurzeln nach der Gleichung:

$$x^8 + (- a_7^2 + 2 a_6) . x^7 + (a_6^2 - 2 a_7 . a_5 + 2 a_4) \, x^6 + (- a_5^2 + a_6 . a_4 - 2 a_7 . a_5 + 2 a_2) . x^5$$
$$+ (a_4^2 - 2 a_5 . a_3 + 2 a_6 . a_2 - 2 a_7 . a_1 + 2 a_0) \, x^4$$
$$+ (- a_3^2 + 2 a_4 . a_2 - 2 a_5 . a_1 + 2 a_6 . a_0) . x^3$$
$$+ (a_2^2 - 2 a_3 . a_1 + 2 a_4 . a_0) \, x^2 + (- a_1^2 + 2 a_2 \, a_0) \, x + a_0^2 = 0$$

und wenn man bis zur 8192. und 16384sten Potenz fortschreitet, so erhält man:

$$x^8 - 14240{,}4656720 . x^7 + 28382{,}2281664 . x^6$$

$$- 41761{,}7915092 \,.\, x^5 + 55140{,}8458062 \,.\, x^4$$
$$- 68515{,}3262615 \,.\, x^3 + 81889{,}5938304 \,.\, x^2$$
$$- 92172{,}7853184 \,.\, x + 101687{,}6384256 = 0$$
$$x^8 - 28480{,}9313440 \,.\, x^7 + 56764{,}4563328 \,.\, x^6$$
$$- 83523{,}1634661 \,.\, x^5 + 110281{,}6915891 \,.\, x^4$$
$$+ 137030{,}0047464 \,.\, x^3 + 163779{,}1876608 \,.\, x^2$$
$$- 184345{,}5706368 \,.\, x + 203375{,}2768512 = 0.$$

Von den Coefficienten wachsen der 3te und 5te nicht quadratisch, daher sind die Wurzeln α_3 . α_4 α_5 und α_6 imaginär, die übrigen aber reell. Die imaginären Wurzeln mögen die Form haben:

$$\varrho \operatorname{Cos} \varphi \pm \varrho \operatorname{Sin} \varphi \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \varrho_1 \operatorname{Cos} \varphi_1 \pm \varrho_1 \operatorname{Sin} \varphi_1 \sqrt{-1}.$$

Da nun $\operatorname{Log} \left(x_1^{16384} \right) = 28480{,}9313440$

$\operatorname{Log} \left((x_1 \,.\, x_2)^{16380} \right) = 56764{,}4563328$; so ist $x_1 = \pm 54{,}7442$, $x_2 = \pm 53{,}246293$

$\operatorname{Log} \left((x_1 \,.\, x_2 \,.\, \varrho^2)^{16384} \right) = 110281{,}6915891$

$\operatorname{Log} \left((x_1 \,.\, x_2 \,.\, \varrho^2 \,.\, \varrho_1^2)^{16384} \right) = 163779{,}1876608$, giebt $\varrho = 42{,}97505$ $\varrho_1 = 42{,}91549$.

Die beiden letzten Coefficienten wachsen quadratisch, daher ist

$\operatorname{Log} \left(x_7^{16384} \right) = 184345{,}5706386 - 163779{,}1876608$ woraus $x_7 = \pm 18$, und aus

$\operatorname{Log} \left(x_8^{16384} \right) = 203375{,}2768512 - 184345{,}5706368$ folgt: $x_8 = \pm 14{,}503776$. Die Substitution giebt x_2 und x_7 positiv, x_1 und x_8 negativ. Bezeichnet S die Summe der reellen Wurzeln, S_1 die ihrer umgekehrten Werthe, so werden die beiden Paare der imaginären Wurzeln aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$2 \varrho \,.\, \operatorname{Cos} \varphi + 2 \varrho_1 \,.\, \operatorname{Cos} \varphi_1 + S = - A_1 \quad \frac{2 \,.\, \operatorname{Cos} \varphi}{\varrho} + \frac{2 \,.\, \operatorname{Cos} \varphi_1}{\varrho_1} + S_1 = - \frac{A_{n-1}}{A_n}.$$ Da nun

$$A_1 = 74 \quad \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{A_7}{A_8} = 8{,}7328281$$

$S = 1{,}998317$ $S_1 = - 0{,}012878137$, so wird

$\varphi = 133^0 \; 14' \; 8{,}'' \, 4$ $\varphi_1 = 101^0 \; 30' \; 25{,}'' \, 7$

$x_3 = - 29{,}437947 + 31{,}309136 \,.\, \sqrt{-1}$

$x_4 = - 29{,}437947 - 31{,}309136 \,.\, \sqrt{-1}$

$x_5 = - 8{,}561211 + 42{,}052878 \,.\, \sqrt{-1}$

$x_6 = - 8{,}561211 - 42{,}052878 \,.\, \sqrt{-1}$

$x_1 = - 54{,}7442$ $x_2 = + 53{,}24629$

$x_7 = + 18$ $x_8 = - 14{,}503776.$

Im vorigen Jahre machte Vogel eine neue Methode bekannt, numerische Gleichungen aufzulösen. Er verwandelt jede Gleichung von der Form $p\,x = f_0 \,.\, x + f_1 \,.\, x + f_2\, x \ldots + f_4 \,.\, x = 0$

nach der Maclaurinschen Reihe in eine Normalgleichung, die nach Potenzen einer anderen unbekannten Größe fortschreitet: $p(h+z) = c_0 + c_1 . z + c_2 . z^2 + c_3 . z^3 + \ldots = 0$; wo h einen Näherungswerth einer Wurzel bezeichnet, der ermittelt werden muß. Der Coefficient c_0 ist $= p\,x$, $c_1 = \frac{d\,(p\,x)}{d\,x}$ $c_2 = \frac{1}{2}\,\frac{d^2\,(p\,x)}{d\,x^2}$ $c_3 = \frac{1}{3\,!}\,\frac{d^3\,(p\,x)}{d\,x^3}$, wenn in diesen Ausdrücken $x = h$ gesetzt wird.

Diese Normal-Gleichung verwandelt er in einen Kettenbruch, so daß $p(h+z) = c_0 + \frac{n_r}{m_r}$ als Näherungs-Gleichung entsteht, wenn $\frac{n_r}{m_r}$ den rten Näherungsbruch bezeichnet.

Die Näherungs-Gleichung führt zu 3 anderen:
$0 = c_0 + c_1 . z$; $0 = c_0 . c_1 - (c_0 . c_2 - c_1^2) . z$; $0 = - c_0 . c_2 + (c_0 . c_3 - c_1 . c_2)\,z + (c_1 . c_3 - c_2^2) . z^2$. — Nennt man die aus diesen Gleichungen bestimmten Werthe von z: $-z_1 - z_2 - z_3$, so ist $z_1 = -\frac{c_0}{c_1}$ $z_2 = -\frac{c_0}{c_2 . z_1 + c_1}$, $z_3 = c \pm \sqrt{c^2 - d}$; wenn $\frac{c_2}{c_1} = a$, $\frac{c_3}{c_2} = b$ $\frac{\frac{1}{2}(1 + b . z_1)}{b - a} = c$ und $\frac{z_1}{b - a} = d$. Die beiden ersten Werthe z_1 und z_2 bestimmen die reellen, und z_3 die imaginären Wurzeln. Nennt man das Mittel $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = h^1$, und wiederholt dieselbe Rechnung mit $x = h + h^1 + r = \alpha + r$, so geben $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ einen mehr genäherten Werth; und so fährt man fort, bis $p(\alpha_n) = 0$ wird, oder auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen keinen Einfluß mehr äußert. Haben die beiden Näherungs-Werthe entgegengesetzte Zeichen, so wird die Rechnung mit ihrem Mittel wiederholt; sind aber auch die beiden folgenden Näherungen entgegengesetzt, oder weichen mehr von einander ab, als die vorigen, so ist der gesuchte Werth imaginär. Dann berechnet man $z_3 = c \pm \sqrt{c^2 - d} = \varrho . \mathrm{Cos}\,\varphi \pm \varrho\,\mathrm{Sin}\,\varphi . \sqrt{-1}$, und führt mit $x = \varrho . \mathrm{Cos}\,\varphi \pm \varrho . \mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{-1} + z = \alpha + z$ die vorigen Operationen aus, bis auch die imaginären Wurzeln mit hinreichender Schärfe bestimmt sind.

Nimmt man in der 34sten Aufgabe $\varrho = 8$ $M = 1178{,}097$ $K = 6144{,}955$ und schreibt x statt r, so wird: $p\,x = x_8 + 16.\ x^7 + 64.\ x^6 - 1024.\ x^5 - 157009.\ x^4 - 2315536.\ x^3 + 7695577.\ x^2 + 411129232.\ x + 1644516928 = 0$.

Da diese Gleichung schon nach Potenzen von x fortschreitet, so kann man unmittelbar $x_,$ und $x_{,,}$ berechnen, mit $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -12$ oder $x = -12 + z$ die Rechnung wiederholen, und sie fortsetzen, bis man $x_1 = -4{,}8986989128$ gefunden.

Nimmt man für x die Werthe $+10$, $+15$, $+20$, so wird $p\,x = +2861340948$; -972513767; $+16198804368$: es liegt daher eine Wurzel zwischen $+10$ und $+15$, und eine andere zwischen $+15$ $+20$. Die Substitution $x = 15$ führt zu der Wurzel $x_2 = +13{,}5282208413$; und $x = 20 + z$ giebt $x_3 = +16{,}9999966585$.

Die Werthe -10 und -20 geben $p\,x = -845371694$ und $+2395811088$; folglich hat man eine Wurzel zwischen -10 und -20 zu suchen, und werden die Operationen mit $x = -20 + z$ begonnen, so findet man $x_4 = -18{,}8267154932$.

Um Näherungswerthe für die anderen Wurzeln zu erhalten, bilde man das Product:

$$(x + 4{,}8987)\,(x + 18{,}8267)\,(x - 13{,}5282)\,(x - 17) = 0$$

und dividire dadurch die gegebene Gleichung, so wird der Quotient
$0 = x^4 + 22{,}80282\,.\,x^3 + 621{,}21162\,.\,x^2 + 9729{,}84927\,.\,x + 77534{,}10316 = 0$ die beiden Näherungen geben $x_1 = -\,7{,}9687 \quad x_2 = -\,16{,}2219$.

Die Rechnung mit $x = -\,12 + z$ giebt $z_1 = +\,14{,}088$ $z_2 = -\,4,\,4$; daher ist die gesuchte Wurzel imaginär, und man berechnet $x_3 = c \pm \sqrt{c^2 - d} = -\,13{,}0346 \pm 11{,}12315\,.\,\sqrt{-1}$.

Mit diesem imaginären Werth wird eben so wie mit den reellen operirt, indem man
$x = -\,(13{,}0346 \mp 11{,}12315\,\sqrt{-1}) + z$ setzt, was zu den Wurzeln

$$x_5 = -\,11{,}178716 + 7{,}394025\,\sqrt{-1}$$
$$x_6 = -\,11{,}178716 - 7{,}394025\,\sqrt{-1}$$ führt.

Wenn man mit dem quadratischen Factor dieser Wurzeln, die Gleichung des 4ten Grades dividirt, und mit den Wurzeln des Quotienten $x^2 + 0{,}445469\,.\,x + 431{,}61564 = 0$ die Operationen mit der gegebenen Gleichung vornimmt, so findet man

$$x_7 = -\,0{,}2227345 + 20{,}761829\,.\,\sqrt{-1}$$
$$x_8 = -\,0{,}2227345 - 20{,}761829\,.\,\sqrt{-1}.$$

Die Gräffe'sche Methode hat vor der letzteren den Vorzug, daß sie das Aufsuchen der Näherungswerthe nicht erfordert, sondern nach hinreichender Quadrirung zeigt, welche Wurzeln reell, und welche imaginär sind. Wenn nun auch diese Quadrirungen mehrmals wiederholt werden müssen, so sind sie doch mit Hülfe der Logarithmen leicht auszuführen. Wollte man aber die Wurzeln über die Grenzen der Logarithmen-Tafeln hinaus berechnen, so könnte man mit den gefundenen Werthen nach Vogels Methode weiter rechnen, und jede beliebige Anzahl von Decimalstellen bestimmen. Dies würde jedoch nur bei reellen Wurzeln anwendbar sein, denn bei imaginären Wurzeln die Grenzen der Tafeln zu überschreiten, würde zu viel Rechnung erfordern.

Tröger.