Wissenschaftliche Bemerkungen.

1. Huyghens*) findet durch Beobachtung für den Isländischen Doppelspath den Winkel, welchen der außerordentliche Strahl mit der Krystallfläche im Hauptschnitt macht, wenn er ungebrochen hindurchgeht, zu 73° 20′. Indem Huyghens die Halbaxe a des Rotations-Ellipsoids = 0,6746 und die Halbaxe b = 0,600 voraussetzt, so zeigt er, daß die Beobachtung dem von ihm entdeckten Gesetze der doppelten Brechung gemäß ist; man kann aber unter Voraussetzung der genauern Messungen von Malus, die a = 0,6741717 und b = 0,6044871 und den Winkel, welchen die Axe b mit der Krystallfläche bildet, = 45° 23′ 25″ ergeben, den genannten Winkel unmittelbar bestimmen. Ist in dem Parallelogramm des Hauptschnitts b′ in der Krystallfläche, λ der Winkel, welchen b′ mit a macht, λ' der Winkel, welchen a mit a′ einschließt, so hat man $\tang \lambda \,.\, \tang \lambda' = \frac{b^2}{a^2} \cotg \lambda$, und $\lambda + \lambda'$ = dem Winkel, den die beiden Axen 2a′ und 2b′ mit einander einschließen. Zur Bestimmung der Halbaxen a′ und b′ dienen die beiden Gleichungen $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ und $2a'b' \,.\, \sin(\lambda + \lambda') = 2ab$. Die ausgeführte Rechnung ergiebt $\lambda + \lambda' = 83° 47' 21'' 23$, $a' = 0,6435748$ und $b' = 0,6369642$.

Zur Bestimmung der Lage des außerordentlich gebrochenen Strahls hat man die Gleichung:

$$\cotg \varphi = \frac{b'^2 \,.\, \cos\theta}{a' \,.\, \sqrt{(1 - b'^2 \cos\theta^2)} \, \sin(\lambda + \lambda')} + \cotg(\lambda + \lambda'),$$

in welcher θ den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Krystallfläche bildet, bezeichnet, während φ dasselbe ist für den austretenden außerordentlichen Strahl.

Soll der Strahl ungebrochen hindurchgehen, so muß $\varphi = \theta$ sein. Führt man in der erhaltenen Gleichung $\cotg \theta$ als Unbekannte ein, so gelangt man zu einer Gleichung vom vierten Grade, deren vollständige Auflösung im vorigen Programme mitgetheilt ist. Indessen läßt sich leicht durch Näherung bestimmen, daß der Winkel, unter welchem der Strahl im Hauptschnitte gegen die Krystallfläche eintreten muß, um ungebrochen durch den Krystall zu gehen, nahe die Größe von 74° 3′ erreicht.

2. Unter den Formeln, welche die Elasticität des Wasserdampfes darstellen, ist bekanntlich die Egen'sche diejenige, welche sich den besten Beobachtungen am genauesten anschließt.**) Sie bestimmt die Temperatur des Wasserdampfes als eine Function der in Atmosphären ausgedrückten Elasticitäten, wobei 4 Constanten in Rechnung kommen. Die demnächst den vorhandenen Beobachtungen am genauesten entsprechende Formel ist von August, mitgetheilt in dessen Bearbeitung des Lehrbuchs der mechanischen

*) Tractat. de lumine, pag. 42 u. 54. Opuscul. posth. Tom. I. Amstel. 1728.

**) Repertorium der Physik von Moser u. Dove B. 1. S. 46.

Naturlehre von Fischer.*) Bezeichnet e die Elasticität des Wasserdampfes in Atmosphären, t die Temperatur desselben in Réaumurschen Graden, so findet sich an der angezeigten Stelle

$$e = \left[\frac{8019\,(826{,}7 + t)}{1000000000}\right]^{\frac{80 - t}{80 + \frac{3}{4}t}}$$

Beide Formeln, sowohl die Egensche als die von August gegebene, gestatten nicht die Auflösung der umgekehrten Aufgabe; die folgende, welche ich hier mittheile, beruht auf der früher von August angenommenen Form

$$e = a m^{\frac{t}{1 + \beta t}}$$

und gestattet eine doppelte Benutzung. Indem ich $a = 2,'''242$ annehme, und die von den französischen Akademikern als die genauesten bezeichneten 11 Beobachtungen zum Grunde lege, so finde ich als wahrscheinlichste Werthe $\log m = 0{,}03868508$ und $\beta = 0{,}00529709$, wodurch e in Pariser Linien bei 0° gemessen gefunden wird. Die Temperatur t in Réaumurschen Graden wird durch die Formel

$$t = \frac{1}{-\beta + \frac{\log m}{\log e - \log a}}$$

gefunden.

Da diese Formel, wie aus der Vergleichung der beobachteten und berechneten Werthe der Elasticität hervorgeht, nicht nur die oben bezeichneten Beobachtungen der französischen Akademiker, sondern auch die Beobachtungen, welche gar nicht zur Bestimmung der Constanten beigetragen haben, zunächst der Egenschen Formel am genauesten darstellt, so verlohnte es sich wohl der Mühe, auch diese letztern zur Berechnung der Constanten mitstimmen zu lassen und noch für die dritte Constante a, welche zu 2,'''242 angenommen ist, den wahrscheinlichsten Werth zu ermitteln.

№	Beobachtete Temper. R.	Beobachtete Elasticität in Pariser Linien bei 0°.	Berechnete Elasticität.	Differenz.
1.	980,° 96	722,'''2	728,'''3	— 6,'''1
2.	106, 64	967, 1	970, 5	— 3, 4
3.	119, 76	1540, 9	1532, 2	+ 8, 7
4.	130, 72	2189, 1	2180, 7	+ 8, 4
5.	134, 80	2484, 8	2472, 1	+ 12, 7
6.	150, 80	3918, 7	3924, 2	— 5, 5
7.	165, 44	5790, 0	5775, 0	+ 15, 0
8.	165, 92	5823, 5	5845, 5	— 22, 0
9.	168, 40	6234, 1	6220, 9	+ 13, 2
10.	174, 72	7262, 0	7259, 5	+ 2, 5
11.	179, 32	8063, 0	8095, 7	— 32, 7

*) Th. 1. S. 596.

№	Beobachtete Temper. R.	Beobachtete Elasticität in Pariser Linien bei 0°.	Berechnete Elasticität.	Differenz.
	179,° 10	8063,‴0	8055,‴8	+ 7,‴2*)
12.	79, 11	325, 2	321, 6	+ 3, 6
13.	74, 66	265, 7	263, 2	+ 2, 5
14.	70, 22	213, 9	214, 1	— 0, 2
15.	61, 34	135, 6	138, 5	— 2, 9
16.	48, 00	64, 8	67, 8	— 3, 0
17.	39, 11	37, 2	40, 2	— 3, 0
18.	30, 22	21, 0	22, 8	— 1, 8
19.	25, 78	15, 3	16, 9	— 1, 6
20.	23, 55	13, 2	14, 5	— 1, 3
21.	16, 89	8, 1	8, 9	— 0, 8
22.	12, 45	5, 9	6, 4	— 0, 5
23.	8, 00	4, 1	4, 4	— 0, 3
24.	3, 55	3, 0	3, 1	— 0, 1
25.	— 3, 55	1, 8	1, 6	+ 0, 2
26.	— 5, 30	1, 5	1, 4	+ 0, 1
27.	— 10, 00	1, 1	0, 9	+ 0, 2
28.	— 15, 67	0, 6	0, 5	+ 0, 1

Ich bemerke noch, daß die ersten 11 Beobachtungen aus Poggendorff's Annalen, Band XVIII., Seite 471, die folgenden aus Dove's Repertorium Th. 1. S. 46 genommen und in Pariser Linien ausgedrückt sind.

3. Es läßt sich leicht zeigen, daß der nte Näherungswerth des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{2\cos\theta - \cfrac{1}{2\cos\theta - }} = \frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta}.$$

Denn der Zähler des nten Näherungswerthes im Kettenbruche $\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - }}$ hat folgenden Werth:

$$a^{n-1} - (n-2)\,a^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\,a^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-7} + - \ldots$$

*) Wenn man diese Temperatur des in Poggendorff's Annalen B. XVIII. S. 462 erwähnten kleinern Thermometers zum Grunde legt, so ist in diesem Falle die Uebereinstimmung mit der Beobachtung sehr befriedigend.

Der Nenner dieses Näherungswerthes wird erhalten, indem man n um 1 vermehrt. Setzt man aber $2 \cos \theta$ für a und multiplicirt mit $\sin \theta$, so erhält man $\sin n \theta$. Wird im Nenner für a ebenfalls $2 \cos \theta$ gesetzt und mit $\sin \theta$ multiplicirt, so erhält man $\sin (n+1) \theta \cdot \sin \theta$, woraus sich dann der oben ausgesprochene Satz ergiebt.

4. Wenn man in einem Kegelschnitte an die 3 Seiten der durch die beiden Brennpunkte und einen Punkt der Curve bestimmten Dreiecke Berührungskreise construirt, so ist der geometrische Ort der Mittelpunkte dieser Kreise bei der Ellipse eine concentrische Ellipse, bei der Hyperbel ein Paar gerader Linien, welche in den Scheitelpunkten auf der großen Axe normal stehen. Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem bekannten Ausdrucke für den Radius des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises durch die aus den Spitzen des Dreiecks an den Berührungskreis gelegten Tangenten. Bekanntlich ist das Quadrat dieses Radius gleich dem Produkte jener 3 Tangenten dividirt durch die halbe Summe der 3 Seiten des Dreiecks. Nennt man nun den senkrechten Abstand des Radius y von der kleinen Halbaxe $= x$, so sind die 3 Tangenten bei dem Dreiecke in der Ellipse $c+x$, $c-x$ und $a-c$, die halbe Summe der 3 Seiten $a+c$, folglich

$$y^2 = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)(c+x)\ (c-x)$$

Für das Dreieck der Hyperbel hat man, wenn x und y dieselbe Bedeutung behalten, die Tangenten $c+x$, $c-x$, und wenn die dritte mit t bezeichnet wird, so ist die Differenz der beiden Radii Vectores $c+x+t-(c-x+t)=2a$, folglich $x=a$.

5. Die Flächen der in denselben Kreis beschriebenen Dreiecke verhalten sich wie die Produkte der 3 Seiten, die Flächen der um denselben Kreis beschriebenen Dreiecke wie die Summen der 3 Seiten.

6. Den ältesten empirischen Beleg für das von ihm bewiesene Drehungsgesetz des Windes findet Dove*) bei Baco von Verulam. Indessen ist schon von Aristoteles**) und Plinius***) mit bestimmten Worten ausgesprochen, daß die Drehung des Windes in der Richtung des täglichen Laufes der Sonne erfolge. Die Stelle beim Plinius lautet: Omnes venti vicibus suis spirant majore ex parte, aut ut contrarius desinenti incipiat. Cum proximi cadentibus surgunt, a laevo latere in dextrum, ut Sol ambiunt.

Bei der ersten erschienenen Beurtheilung der Doveschen Untersuchungen im Jahre 1837 hatte ich Gelegenheit, auf die bezeichneten Stellen aufmerksam zu machen.

7. In Tac. Vit. Agric. cap. 12 liest man folgende Stelle über das nördliche Britannien: Dierum spatia ultra nostri orbis mensuram, et nox clara et extrema Britanniae parte brevis, ut finem atque initium lucis exiguo discrimine internoscas. Quodsi nubes non officiant, adspici per noctem solis fulgorem, nec occidere et exsurgere, sed transire adfirmant. Scilicet extrema et plana terrarum humili umbra non erigunt tenebras, infraque coelum et sidera nox cadit.

Ich übersetze diese Stelle in folgender Art: Die Länge der Tage geht über das Maaß unserer Länder, die Nacht ist hell und im äußersten Theile von Britannien kurz, so daß Ende und Anfang der Tageshelle

*) Dove's Meteorologische Untersuchungen S. 132.
**) Meteor. Lib. II. cap. 6.
***) Histor. Natur. Lib. II. cap. 48.

um geringe Zeit von einander entfernt sind. Hindern nicht Wolken, so kann man, wie versichert wird, die Nacht hindurch den Glanz der Sonne schauen, der nicht unter noch aufgeht, sondern ab und zunimmt. Der Grund ist dieser: Der äußerste ebene Rand der Erde richtet hier mit seinem niedrigen Schatten kein Nachtdunkel auf, und die Nacht fällt unter den Himmel und die Gestirne.

Zur Erläuterung dieser Stelle denken wir uns einen runden ebenen Tisch, in einiger Entfernung davon am Boden des Zimmers ein Licht und die Decke des Zimmers mit Figuren verziert. Es ist klar, daß die senkrecht über dem Tischrande befindlichen Figuren der Decke noch erhellt sein werden, während die vom Rande entfernteren Figuren schon im Schatten des Tisches liegen. Die Höhe des Schattens über dem Tische wächst mit der Entfernung vom Rande, so daß die an den Rand des Tisches gestellten Bücher noch auf der Lichtseite ganz beleuchtet erscheinen, je weiter sie abgerückt werden, desto mehr mit ihrem untern Theile in den Schatten kommen, bis sie zuletzt gar nicht mehr daraus hervorsehen. Der Tisch ist die Erdscheibe, der Tischrand das äußerste Britannien, das Licht die Sonne, die Decke des Zimmers mit ihren Figuren der Himmel mit seinen Gestirnen, der Schatten des Tisches die Nacht der Erde.

An Britanniens Küste ist der Beobachter nahe dem Rande der Erdscheibe. Die Gestirne stehen in nicht gar großer Entfernung von der Erde, andere über Italien und Griechenland, welche näher der Mitte der Erdscheibe liegen, als über der nördlichen Küste Britanniens. Da nun die Sonne die Erdscheibe von unten beleuchtet, so wird der Beobachter unmittelbar am Rande derselben stehend hier keinen Erdschatten erblicken, aber je weiter er vom Rande zurücktritt nach Italien hin, desto höher erhebt sich der Schatten über ihn; denn um so größer ist die Winkelöffnung, in welcher kein Licht vorhanden ist. So kommt es, daß gegen die Mitte der Erdscheibe der Erdschatten schon über den Himmel und die Gestirne hinaus reicht, während der Schatten in der Nähe des Randes, wo die Winkelöffnung beginnt, niedrig bleibt und unter den Himmel und die Gestirne fällt.

Bei der Erläuterung dieser bekanntlich schwierigen Stelle scheint es, wie so häufig, darauf anzukommen, die Ansicht des Schriftstellers über die Gestalt der Erde, nicht die Ansicht der Astronomen jener Zeit zur Erklärung anzuwenden.

8. Wenn man an die Punkte $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ und $(a\cos\theta', b\sin\theta')$ einer Ellipse Tangenten zieht, so sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Tangenten folgende: $X = \frac{a\cos\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}{\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}$, $Y = \frac{b\sin\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}{\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}$. In der Hyperbel ist für die beiden gegebenen Punkte $\left(\frac{a}{\cos\theta}, b\,\mathrm{tang}\,\theta\right)$ und $\left(\frac{a}{\cos\theta'}, b\,\mathrm{tang}\,\theta'\right)$ $X = \frac{a\cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\cos\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}$ und $Y = b\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\theta'+\theta)$. Man beweiset die Richtigkeit der Ausdrücke für die Ellipse leicht, wenn man dieselbe als Projection des Kreises ansieht und für diesen die Gerade vom Durchschnittspunkte der Tangenten nach dem Mittelpunkte zieht, welche auf der Berührungssehne normal ist.

9. Durch Hülfe der in 8. gegebenen Ausdrücke für X und Y kann man auch folgenden Satz beweisen: Man lege an zwei Punkte der Ellipse Tangenten und Normalen, bis diese letztern die große Axe schneiden; verbindet man nun diese Punkte mit dem Durchschnittspunkte der Tangenten durch Gerade, so sind die

Winkel einander gleich, welche jede dieser Geraden mit der nächsten Tangente einschließt. Denn die Länge der Tangente vom Berührungspunkte ($a \cos \theta$, $b \sin \theta$) bis zum Durchschnittspunkte der Tangenten ist $= \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\theta' - \theta) \,.\, \sqrt{(a^2 \sin \theta^2 + b^2 \cos \theta^2)} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\theta' - \theta) N$. Bezeichnet nun n die Länge der Normale für denselben Punkt, so ist bekanntlich $n = \frac{b}{a} \,.\, N$, folglich $a \,.\, \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\theta' - \theta) N}{b N} = \frac{a}{b} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\theta' - \theta)$ $= \operatorname{cotg} \lambda$, wenn λ den Winkel bezeichnet, den die erwähnte Gerade mit der nächsten Berührenden einschließt. u. s. w.

Anmerk. Ueber den Zweck der diesem Programme beigegebenen wissenschaftlichen Bemerkungen habe ich mich im vorjährigen Programme ausgesprochen.

F. Strehlke.