radio CB scribatur circulus. III. Ex A per centrum ducatur recta AV. IV. Fiat AD = AE: erit AB : AD = AD : BD.

DEMONST. Quia radio CB perpendicularis est AB (59) erit hæc tangens (266) unde AV : AB = AB : AE (297) & *dividendo* AV − AB : AB = AB − AE : AE (195) sed AB = EV, & AE = AD *ex constr.*; ergo AV − EV : AB = AE − AD : AD (22) id est, AE seu AD : AB = BD : AD, & *invertendo* AB : AD = AD : BD (191) q. e. d.

ELEMENTUM IX.

De Figuris ordinatis Circulo inscriptis, & circumscriptis.

301. DEF. Figura dicitur *ordinata*, si omnia habeat latera æqualia, & omnes angulos æquales. *Inscripta* est circulo, si omnes angulos habeat in circumferentia : *circumscripta*, si singula ejus latera circulum tangant.

302. THEOR. *Quævis figura ordinata potest inscribi circulo.*

DEMONST. Anguli A & B æquales (301) dividantur bifariam ductis rectis AC & BC : in triangulo ABC erit angulus CBA = CAB (53) est ergo ABC æquicrurum (128) proinde AC F. 49.

F = BC

= BC (127) jam ex C in reliquos angulos ducantur rectæ: quia in triangulis ABC & ADC angulus BAC = DAC *ex constr.*, & BA = DA (301) & AC = AC; erunt & reliqui anguli mutuò æquales, & reliqua latera æqualia (36) quod cùm eodem modo de reliquis triangulis ostendi possit; erit BC = AC = DC &c. Igitur centro C per angulum A scripta circumferentia transit per omnes angulos B, D &c. (11) unde patet (301) q. e. d.

303. COROL. Latera figuræ ordinatæ sunt chordæ (275) arcuum æqualium (284)

304. DEF. *Polygonum* est superficies plana, cujus perimeter pluribus, quàm quatuor, rectis lineis constat: si latera fuerint 5, *Pentagonum* dicitur: si 6, *Hexagonum* &c.

305. DEF. Angulus, quem duo figuræ ordinatæ latera efficiunt, dicitur *angulus Polygoni*: quem verò duo radii ex centro ad duos angulos vicinos ducti efficiunt, *angulus ad centrum* vocatur.

306. PROBL. *In quavis figura ordinata angulum ad centrum invenire.*

SOLUTIO. Gradus 360 divide per numerum laterum: quotus exhibebit angulum ad centrum.

DEMONST. Singulorum ad centrum angulorum mensuræ sunt (28) arcus æquales (303) quorum summa continet 360 gr. (12) singulorum ergo arcuum, adeóque & angulorum ad centrum (28) valor prodit, dividendo 360 per numerum arcuum, adeóque & laterum. q. e. d.

307. COROL. In figura ordinata anguli ad centrum omnes æquales sunt. Quilibet autem in triangulo æquilatero continet gr. 120 : in quadrato 90 : in pentagono 72 : in hexagono 60 &c.

308. THEOR. *In quavis figura ordinata angulus polygoni cum angulo ad centrum duos rectos efficit.*

DEMONST. CAD†ADC†ACD = 180 gr. (103) ADC = BAC (35) ergo CAD†BAC†ACD = 180 gr. (22) CAD†BAC = BAD (20) igitur BAD† ACD = 180 gr. (22) q. e. d.

309. COROL. Igitur BAD = 180 gr. – ACD (21) id est, si ex 180 gr. subtrahitur angulus ad centrum, prodit angulus polygoni. Itaque angulus polygoni in triangulo æquilatero continet gr. 60 : in quadrato 90 : in pentagono 108 : in hexagono 1 0 &c.

310. THEOR. *Latus hexagoni ordinati æquale est radio illius circuli, cui inscribi potest.*

DEMONST. Ductis ex centro radiis AC & BC, in triangulo ABC angulus C = 60 gr. (307) unde A†B = 120 gr. (105) quia ergo AC = BC (9) erit A = B (127) ergo A = B = $\frac{120}{2}$ = 60 = C.

 Itaque

Itaque AC = BC = AB (127) q. e. d.

311. COROL. I. Si ergo radium circuli ſexies in circumferentiam tranferas, erit ea diviſa in 6 partes æquales (303) quibus ſi chordas ſubtendis, inſcriptum erit circulo hexagonum ordinatum.

312. COROL. II. Si verò duobus ſimul arcubus unam ſubtendis chordam; hæc erit latus trianguli æquilateri circulo inſcribendi.

313. PROBL. *Circulo Decagonum ordinatum inſcribere.*

F. 50. SOLUTIO. I. Radium BC divide in media & extrema ratione (300) II. Duc chordam BO æqualem majori ſegmento AC: hæc erit latus decagoni huic circulo inſcribendi.

DEMONST. BC : AC = AC : AB (299) BO = AC *ex conſtr.*, ergo BC : BO = BO : AB (22) ſunt ergo in triangulis ACO & BAO latera circa communem angulum B proportionalia, ideóque & reliqua latera proportionalia ſunt (218) ſicut ergo OC = BC (9) ità etiam AO = BO = AC. Igitur tria triangula BCO, BAO, & CAO ſunt æquicrura (115) unde C = V, V † O = B, & BAO = B (116) ſed BAO = C † V (112) ergo angulus BAO duplus eſt anguli C. Et quia BAO = B & B = V † O *ex demonſtratis*; erit tam B, quàm V † O duplus anguli C (22) itaque quia tres anguli B, C, V † O ſimul ſumpti valent

180 gr. (103) si 180 gr. seu semicirculum in quinque partes æquales dividas, pars una conveniet angulo C, adeoque & arcui OB (28) hic ergo est semicirculi pars 5ta, seu pars 10ma totius circumferentiæ: est ergo OB latus decagoni ordinati. q. e. d.

314. COROL. Divisâ jam circumferentiâ in 10 partes æquales, si duobus arcubus unam subtendas chordam, habebis latus pentagoni ordinati eidem circulo inscribendi.

315. SCHOL. *Quoniam dedimus modum circumferentiam dividendi in partes æquales tres* (312) *quinque* (314) *sex* (311) *decem* (313) *& aliunde arcus quilibet bifariam dividi potest* (292) *facilè circulo inscribes figuram ordinatam laterum* 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. 16. 20. 24. &c. *At in partes quasvis æquales circumferentiam geometricè dividendi modus nondum repertus est: proinde circumferentiam, aut arcum quemvis divisurus in partes* v.g. *æquales septem, tentando id efficias oportet. Porrò si circulus in* 360 *gr. dividendus sit, quemlibet quadrantem divide in* 90 *gr., cui divisioni memoriæ causâ hic versus serviet:*

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

316. PROBL. *Dato uno latere AB, polygonum quodvis ordinatum describere.*

SOLUTIO. I. Quære angulum po-

F. 49. lygoni. (309) II. Huic fac æqualem BAD, ductâ rectâ AD = AB (96) III. Per puncta B, A, D duc circulum (290) cujus circumferentiæ latus AB, quoties fieri poteſt, applicatum dabit polygonum, quod conſtruendum erat.

DEMONST. Ductis radiis AC & BC, erit angulus BAC = ADC (35) quia ergo ADC † DAC † ACD = 180 gr. (103) erit etiam BAC † DAC † ACD = 180 gr. (22) ſed BAC † DAC = BAD (20) ergo BAD † ACD = 180 gr. (22) id eſt angulus polygoni BAD cum angulo ACD efficit duos rectos: ergo ACD æqualis eſt angulo ad centrum (308) igitur circumferentiâ per numerum laterum divisâ prodit angulus ACD (306) ſeu arcus AD (28) hìc ergo toties in circumferentia continetur, quot eſſe debent polygoni latera : adeóque patet. q. e. d.

317. PROBL. *Polygoni ordinati centrum invenire.*

SOUTIO. Quoniam latera ſunt chordæ circuli (303) operare juxta N. 291.

318. PROBL. *Polygonum ordinatum circulo circumſcribere.*

SOLUTIO. I. Simile polygonum circulo inſcribe. II. Ductis ad ſingulos angulos radiis, per extrema horum puncta duc perpendiculares, ſeu (267) tangentes LE, EF &c. hæ ubi coierint, poly-

gonum

gonum circumſcriptum (301) ordinatum efficient.

DEMONST. I. Quia LE, EF &c. ſunt radiis perpendiculares, erit angulus CDF = CBE = CAE = CAF &c. (56 & 41) ſubductis ergo CDA = CBA = CAB = CAD &c. (36) relinquitur FDA = EBA = EAB = FAD &c. (21) itaque in triangulis BLS, BEA &c. reliqui etiam anguli L, E, F, O &c. æquales ſunt (110) polygonum ergo habet omnes angulos æquales. q. e. 1.

II. Quia *ex demonſtratis* triangula BLS, FAD &c. ſunt mutuò æquiangula; habebunt latera proportionalia (214) ſicut ergo AD = BS (301) ità AF = LB, ſed & BE = AE (298) ergo LB † BE = AF † AE (21) hoc eſt LE = EF (20) Eodem modo oſtendam reliqua etiam latera eſſe æqualia. q. e. 2. Eſt ergo polygonum ordinatum (301) q. e. d.

319. THEOR. *Polygonum ordinatum æquale eſt triangulo, cujus baſis eſt æqualis toti perimetro polygoni, & cujus altitudo æqualis eſt perpendiculari* CR *ex centro in unum latus ductæ.*

DEMONST. Ductis in ſingulos angulos ex centro radiis dividitur polygonum ordinatum in triangula tot æqualia (35) quot ſunt polygoni latera. Unde horum triangulorum ſumma, ſeu ipſum polygonum eſt ad unum triangulum CXZ, uti

 omnium

omnium laterum ſumma, ſeu tota perimeter, ad unum latus X Z: ſed triangulum habens pro baſi totam perimetrum, & pro altitudine perpendicularem C R, eſt etiam ad triangulum C X Z, ſicut tota perimeter ad latus X Z (206) illud ergo triangulum eandem rationem habet ad triangulum C X Z, quam ad idem habet ipſum polygonum: hoc ergo illi æquale eſt (188) q. e. d.

320. COROL. Polygoni ordinati magnitudo invenitur, multiplicando ſemiſſem perimetri per perpendicularem C R; vel hujus ſemiſſem per perimetrum (167)

321. AXIOMA. *Si duarum magnitudinum inæqualium exceſſus ultra dimidium minuatur, ídque, quoad aliquis exceſſus fuerit, in infinitum continuetur; erit tandem exceſſus quâvis datâ quantitate minor, id eſt nullus.*

322. DEF. *Segmentum* circuli vocatur circuli portio comprehenſa arcu & chordâ: *ſector* circuli eſt circuli pars contenta arcu, & duobus radiis.

323. THEOR. *Si circulo inſcriptum ſit polygonum ordinatum, & ſingulis deinde arcubus biſectis inſcribatur aliud duplò plura habens latera, atque ità procedatur in infinitum; polygonum habens latera numero infinita circulo, & perimeter circumferentiæ congruet.*

DEMONST. Latus polygoni inſcripti ſit A B, quòd à radio C O perpendiculari bifariam ſecetur unà cum arcu A O B (289) Ductâ in O tangente D O E ad radium C O perpendiculari (267) erigantur perpendiculares, A D & B E : erunt tum hæ, tum A B & E D parallelæ (76) hinc ABDE parallelogrammum eſt (135) cujus cùm dimidium ſit triangulum A O B (161) hoc triangulum erit plus, quàm dimidium ſegmenti A O B. Quod cùm eodem modo oſtendatur de omnibus aliis ſegmentis, patet, quòd, lateribus polygoni inſcripti duplicatis, ultra dimidium minuatur exceſſus, quo circulus polygonum ſuperat. Igitur duplicatione laterum in infinitum continuatâ nullus relinquetur exceſſus circuli & polygoni (321) ambo ergo congruent. q. e. 1. F. 51.

Congruere autem nequeunt, nisì & perimeter congruat circumferentiæ (14) igitur & hæ congruent. q. e. 2.

324. COROL. I. Circulus eſt polygonum ordinatum, cujus latera ſunt numero infinita, & quantitate infinitè parva. Perpendicularis verò ex centro ducta erit ipſe circuli radius.

325. COROL. II. Igitur magnitudo circuli habetur, multiplicando ſmiſſem circumferentiæ per radium (320)

326. COROL. III. Magnitudo ſemicirculi obtinetur arcu quadrantis, magnitudo quadrantis arcu octantis per radium multiplicato : & univerſim quilibet

sector habetur, si sui arcûs dimidium in radium multiplicetur.

327. SCHOL. *At verò, qui docuerit modum circumferentiam circuli geometricè metiendi, seu inveniendi rectam lineam circumferentiæ æqualem, hactenus nemo fuit. Circumferentiam tamen veræ satis propinquam invenit* Archimedes *in hunc modum : circulo polygonum ordinatum 96 laterum inscripsit, & circumscripsit : tum ostendit perimetrum* inscripti *minorem,* circumscripti *verò majorem esse circumferentiá circuli. Denique demonstrat, quòd perimeter* circumscripti (*adeóque & cicumferentia*) *contineat diametrum minùs quàm ter & partem ejus septimam, seu* $\frac{1}{7}$ *aut* $\frac{10}{70}$ *: perimeter verò* inscripti (*adeóque & circumferentia*) *contineat diametrum plus quàm ter &* $\frac{10}{71}$. *Quare si diameter ponatur* = 7, *erit circumferentia* = 22 *justò major : si verò diameter ponatur* = 71 ; *circumferentia* = 223 *erit justò minor. In praxi ergo ratio diametri ad circumferentiam assumi potest velut* 7 *ad* 22, *aut sicut* 71 *ad* 223 *: ratio paulò propinquior, quam invenit* Metius, *est sicut* 113 *ad* 355, *quæ est inter duas* Archimedis *media. Demonstratio hujus rei prolixior est, quàm ut hîsce in Elementis locum inveniat.*

328. PROBL. *Datâ circuli diametro, invenire circumferentiam propè veram.*

SOLUTIO. Diameter esto = 100: fac (186) $7:22 = 100:314\frac{2}{7}$ quæ justò major, $71:223 = 100:314\frac{6}{71}$ quæ justò minor, $113:355 = 100:314\frac{18}{113}$, quæ erit inter duas priores media (327)

329. COROL. Datâ circumferentiâ simili modo diametrum invenies, majorem terminum pro antecedente rationis sumpto.

330. PROBL. *Circuli segmentum quodvis* AOB *metiri.*

SOLUTIO. Ductis radiis AC & BC metire primò sectorem CAOB (326) deinde & triangulum ABC (175) triangulum à sectore subtrahe, & relinquetur segmentum AOB, ùtpote quod cum triangulo sectorem efficit (20)

ELEMENTUM X.

De Figuris similibus, eárumque Perimetris.

331. THEOR. *Figuræ quævis planæ similes rectilineæ ductis lineis rectis in singulos*