primò metiendi ſint, ità aſtrolabii diametro collocatâ, ut horizonti ſit parallela: quibus deinde in charta delineatis demiſſa ex ſectione E perpendicularis EI indicabit quantitatem partis AB.

ELEMENTUM VIII.

Proprietates Circuli.

262. DEF. Linea recta circulum *tangere* dicitur, quæ in uno duntaxat puncto, quod punctum *contactûs* dicimus, circulo occurrit, licèt producatur in infinitum.

263. THEOR. *Si recta* AB *circulum tangit, radius* CD *ductus ad punctum contactûs tangenti perpendicularis eſt.* F. 41.

DEMONST. Quia tangens in ſolo contactûs puncto D circulo occurrit (262) quodvis aliud tangentis punctum extra circulum eſt: unde recta quævis alia CA ex centro C ad tangentem ducta circumferentiam ſecat in V, adeóque CA > CV, ſed CV = CD (9) ergo CA > CD (52) Igitur CD brevior eſt aliâ quâvis rectâ ex centro ad tangentem ducta: proinde illi perpendicularis eſt (63) q. e. d.

264. COROL. I. Per idem contactûs punctum D una tantùm recta tangens duci poteſt. Sit enim tam DL, quàm DB tangens: erit radius CD perpendi-

cularis utrique (263) quare anguli CDL & CDB recti (57) & æquales ſunt (44) quod repugnat (20)

265. COROL. II. Quia radius CD tangenti in puncto contactûs perpendicularis eſt; alia quævis recta ex puncto contactûs ducta eidem perpendicularis non erit (60) Itaque quæ per punctum contactûs ducitur ad tangentem perpendicularis, per centrum tranſit.

266. COROL. III. Recta AB, quæ radio in extremo puncto D perpendicularis eſt, tangit circulum in unico puncto D. Hoc ipſo enim radius ipſi etiam AB perpendicularis eſt (59) unde quævis alia ex centro ad rectam AB ducta major eſt radio (62) ergo quodvis aliud rectæ AB punctum extra circulum eſt: in ſolo igitur puncto D hæc circulum tangit.

267. PROBL. *rectam tangentem ducere per datum circumferentiæ punctum* D.

SOLUTIO. Ducatur radius CD, eique per D perpendicularis AB (64) hæc erit tangens (266) q. e. d.

268. PROBL. *In recta tangente* AB *punctum contactûs determinare.*

SOLUTIO. Ex centro C ducatur ad tangentem perpendicularis CD (65) D erit punctum contactûs (266)

269. DEF. Circulus circulum tangere dicitur, quando circumferentiæ ſibi ità occurrunt, ut tamen ſe non ſecent.

270. THEOR. *In quocunque puncto*

se tangant duo circuli, recta per utriusque F.
centrum producta transit per illud pun- 42.
ctum contactûs.

DEMONST. I. *Si se intrinsecus tangant in* A, sint, si fieri potest, ità posita centra O & C, ut recta OCL non transeat per punctum A. Erit $AC = VC$ (9) & utrimque additâ CO erit $AC + CO = VC + CO$ (21) sed $AC + CO > AO$ (114) & $AO = OL$ (9) ergo $AC + CO > OL$ (52) *ex demonstratis* autem $AC + CO = VC + CO = OV$: ergo $OV > OL$ (22) quod repugnat (20)

II. *Si se extrinsecus tangant in* B, sint, si fieri potest, sic posita centra O & D, ut ea connectens recta OD non transeat per punctum B. Erit $OB = OS$, & $DB = DI$ (9) unde $OB + DB = OS + DI$ (21) quod iterum repugnat (114)

In utroque igitur casu recta connectens centra transire debet per punctum contactûs q. e. d.

271. COROL. I. Duo circuli in uno duntaxat puncto se tangere possunt. Si enim in duobus A & L se tangerent, recta per centra O & X producta tam per A, quàm per L transiret (270) quod repugnat (5)

272. COROL. II. Duobus circulis se tangentibus, facilè determinatur punctum contactûs, ductâ scilicet per utriusque centrum rectâ.

273. COROL. III. In recta AE sump-

tis quotcunque centris, ſcribi poterunt circuli quotcunque, qui omnes in unico puncto A ſeſe tangant.

274. SCHOL. *Variæ lineæ curvæ ſpirales, ſerpentinæ, ellipticæ &c. non alio artificio feliciùs deſcribuntur, quàm ſi, ſumptis in una recta duobus ſemper centris duorum arcuum ſe tangentium, curva ex pluribus hujusmodi arcubus componatur.*

275. DEF. Angulus *ad centrum* eſt, cujus vertex eſt in ipſo circuli centro: angulus *ad circumferentiam*, cujus vertex eſt in ipſa circuli circumferentia. *Chorda* circuli eſt quævis recta linea ducta ab uno circumferentiæ puncto ad aliud.

276. THEOR. *Angulus ad circumferentiam formatus vel à duabus chordis, vel à chorda & tangente, pro menſura habet ſemiſſem arcûs, quem crura intercipiunt.*

DEMONST. CASUS I. *Si crus unum per centrum C tranſeat*, I. Sit angulus
F. 43. BAD formatus à chordis AB & AD: ducto radio CB erit ABC æquicrurum (115) in quo angulus ABC = BAD (116) ſed angulus BCD = ABC + BAD (112) igitur BCD duplus eſt anguli BAD. Quia ergo BCD pro menſura habet totum arcum BD (29) BAD pro menſura habebit ſemiſſem arcûs BD. q. e. d.

F. 44. II. Sit angulus DAL formatus à tangente AL, & chorda AD per centrum tranſeunte, quæ proinde erit diameter

(9) ideoque tangenti perpendicularis (263) hinc DAL rectus est (57) ejus ergo mensura est quadrans (43) sed AED est arcus semicirculi (18) hujus ergo dimidium erit mensura anguli DAL. q. e. d.

CASUS II. *Si centrum* C *contineatur* F.
inter crura anguli BAL. Ductâ diame- 43.
tro AD erit angulus BAL divisus in duos &
BAD, & DAL, quorum uterque cum 44.
pro mensura habeat semissem arcûs inter sua crura intercepti *per casum* I.; uterque simul, id est, totus BAL (20) pro mensura habebit arcuum illorum simul sumptorum semissem, id est, semissem arcûs inter crura intercepti. q. e. d.

CASUS III. *Si centrum nec in uno crure, nec inter crura anguli* EAL *existat.* Ductâ diametro AD, mensura anguli DAL est $\frac{1}{2}$ DL (*F.* 43) vel $\frac{1}{2}$ DA (*F.* 44) & anguli DAE mensura est $\frac{1}{2}$ DE *per casum* I.: ergo anguli DAL — DAE mensura est $\frac{1}{2}$ DL — $\frac{1}{2}$ DE (fig. 43) aut $\frac{1}{2}$ DA — $\frac{1}{2}$ DE (fig. 44) id est, anguli EAL mensura est dimidium arcûs EL aut EA inter sua crura intercepti. q. e. d.

277. COROL. I. Omnes ad circumferentiam anguli à duabus chordis, aut à

chorda & tangente formati, qui suis cruribus intercipiunt arcus numero graduum æquales, sunt inter se æquales (29)

278. COROL. II. Angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, si uterque eundem arcum, vel arcus æquales suis cruribus intercipiat.

279. COROL. III. Rectus est angulus ad circumferentiam, cujus crura arcum semicirculi intercipiunt. Proinde si ab extremis diametri punctis ad idem circumferentiæ punctum quodcunque duæ chordæ ducantur, eæ rectum angulum efficient.

280. COROL. IV. Acutus est angulus ad circumferentiam, si crura intercipiant arcum arcu semicirculi minorem: obtusus verò, si majorem.

281. PROBL. *Angulum examinare, sitne rectus, acutus, vel obtusus.*

SOLUTIO. Crura connecte recta AB, quâ in C bifariam divisâ (66) radio AC
F. describe semicirculum. Si circumferen-
45. tia per verticem O transeat; erit AOB rectus (279) si infra verticem D; erit ADB < AOB (130) adeóque ADB acutus (41) si verò supra verticem E circumferentia ducta sit, erit AEB > AOB (130) adeóque AEB obtusus (41)

282. COROL. Hinc alterum erues normæ examinandæ modum.

283. PROBL. *Ex puncto quovis* A *ex-*

tra

tra circulum dato ducere rectam tangentem AB.

SOLUTIO. I. Ex A ad centrum C duc rectam AC. II. Hac in I bifariam divisâ, centro I super diametro AC describe semicirculum CDA. III. Per punctum D, in quo circumferentiæ se secant, duc ex A rectam ADB: hæc erit tangens. F. 41.

DEMONST. Chordæ CD & AD efficiunt angulum ADC rectum (279) unde AD radio CD perpendicularis est (58) ergo AD tangens est (266) q. e. d.

284. THEOR. *In eodem circulo si æquales fuerint chordæ* AB & AE, *æquales etiam erunt arcus* AB & AE: *& si hi arcus æquales sint, sunt & chordæ illæ æquales.* F. 43.

DEMONST. Ductis ad extrema chordarum puncta radiis erunt I. in triangulis ABC & AEC omnia latera mutuò æqualia (9) adeóque anguli in C æquales (35) igitur arcus AB = AE (29) q. e. 1.

II. Si illi arcus æquales sint, anguli etiam in C æquales sunt (29) circa quos cùm sint latera mutuò æqualia (9) erit & latus AB = AE (36) q. e. 2.

285. THEOR. *Si ab uno circumferentiæ puncto* A *ad alia quævis circumferentiæ puncta* B, D, E, L, *ducantur rectæ*; I. *Maxima est* AD, *quæ per centrum ducitur.*

ducitur. II. *Ex aliis illa major eſt, quæ maximæ* AD *propinquior.* III. *Quæ à maxima* AD *diſtant æqualiter, æquales ſunt.*

DEMONST. I. Angulus AED rectus eſt (279) ergo ADE acutus (107) hinc AED > ADE (41) igitur AD > AE (126) eodem modo id de alia quavis recta, quæ per centrum non ducitur, oſtendam. q. e. 1.

II. Quia ABD ſemicirculus eſt (18) erit ABDE major, & AL minor arcu ſemicirculi: proinde ALE obtuſus, & AEL acutus eſt angulus (280) igitur AE > AL (126) q. e. 2.

III. Quia *ex hyp.* arcus BD = ED, & arcus ABD = AED (18) erit etiam arcus AB = AE (21) proinde angulus ACB = ACE (29) ſunt autem latera circa hos angulos mutuò æqualia (9) igitur & latus AB = AE (36) q. e. 3.

286. COROL. Diameter maxima eſt omnium rectarum linearum, quæ in eodem circulo duci poſſunt.

287. THEOR. *Chordæ parallelæ* AL *&* SE *intercipiunt arcus* AS *&* LE *æquales: & ſi arcus inter duas chordas intercepti æquales ſint, ſunt eæ chordæ parallelæ.*

DEMONST. I. Si AL & SE ſint parallelæ, erit SEA = EAL (81) quorum menſuræ cùm ſint ſemiſſes arcuum AS, & LE (276) dimidia horum arcuum

æqualia

æqualia erunt (29) igitur & toti arcus æquales (53) q. e. 1.

II. Si arcus AS = LE, etiam dimidia eorum ſunt æqualia (53) unde angulorum SEA & EAL menſuræ æquales ſunt (276) adeóque & hi anguli æquales (29) igitur AL & SE parallelæ (82) q. e. 2.

288. COROL. Hinc modum erues expeditum, rectæ SE per datum punctum A ducendi parallelam AL.

289. THEOR. *Perpendicularis radius* CD *in chordam* AB *ductus bifariam ſecat* I. *chordam.* II. *Tum etiam arcum* ADB. III. *Perpendicularis* FD *bifariam ſecans chordam* AB *tranſit per centrum* C. IV. *Radius* CD *chordam* AB *bifariam ſecans, eidem chordæ perpendicularis eſt.* F. 46.

DEMONST. I. Ductis radiis AC & BC, in triangulis AOC & BOC erunt anguli in O æquales (56) & quia ABC æquicrurum eſt (115) erit etiam A = B (116) proinde & reliqui in C æquales ſunt (110) igitur cùm CO = CO, erit etiam AO = BO (37) q. e. 1.

II. Quia *ex demonſtratis* ſunt anguli in C æquales, erit & arcus AD = BD (29) q. e. 2.

III. Quia radius perpendicularis CD tranſit per medium chordæ punctum O *per partem* I., nequit ex puncto medio

O duci

O duci alia perpendicularis (60) quævis ergo perpendicularis chordam ſecans bifariam tranſit per centrum. q. e. 3.

IV. *Ex hyp.* AO = BO, AC = BC (9) CO = CO, itaque anguli in O æquales ſunt (35) & recti (41) quare CD perpendicularis eſt (58) q. e. 4.

290. PROBL. *Per data tria puncta* A, B, F, *quæ non ſint in eadem recta linea, circulum deſcribere.*

SOLUTIO. I. Conjunge data puncta rectis AB & AF. II. Utramque hanc rectam ſeca bifariam, ductis perpendicularibus DF & VB (66) eæ ſe ſecabunt in centro C, ex quo ſcripti radio AC circuli circumferentia tranſibit per data puncta.

DEMONST. AB & AF ſunt chordæ circuli deſcribendi (175) quare perpendiculares, à quibus bifariam ſecantur, per centrum tranſeunt (289) adeóque in centro ſe ſecant. q. e. d.

291. COROL. Eodem modo circuli dati centrum invenies, & inchoatam circuli circumferentiam perficies: ductis enim, & perpendiculariter bifariam ſectis duabus chordis centrum prodibit.

292. PROBL. *Quemvis circuli arcum bifariam dividere.*

SOLUTIO. Arcui ſubtende chordam: in hanc ducta ex centro perpendicularis (65) arcum bifariam ſecabit (289) q. e. f.

Theor.

293. THEOR. *Ex quocunque circumferentiæ puncto O in diametrum AB ducatur perpendicularis OS, hæc est media proportionalis inter diametri segmenta: seu* AS : OS = OS : BS. F. 45.

DEMONST. Ductis chordis AO & BO, erit AOB angulus rectus (279) in triangulo ergo rectangulo AOB diameter AB est hypotenusa (168) patet igitur (233) q. e. d.

294. COROL. Inter duas rectas AS & BS facilè invenitur media proportionalis. Nempe jungo eas in unam rectam AB, quâ in C bifariam divisâ centro C scribo semicirculum: ex S erigo perpendicularem SO circumferentiæ occurrentem: hæc erit media quæsita (293)

295. PROBL. *Dato parallelogrammo facere æquale quadratum.*

SOLUTIO. Inter altitudinem AS, & basin BS dati parallelogrammi, quære mediam proportionalem OS (294) hæc erit latus construendi quadrati.

DEMONST. Valor parallelogrammi dati est $AS \times BS$ (165) & $AS \times BS = \overline{OS}^2$ (185) patet ergo. q. e. d.

296. COROL. Ut quadratum facias æquale triangulo, inter basin, & semissem altitudinis quærenda erit media proportionalis (167)

297. THEOR. *Si ex quovis puncto* A

extra

F. *extra circulum dato ducatur tangens* AC,
48. *& secans* AB *; erit tangens* AC *media proportionalis inter totam secantem* AB, *& ejus partem exteriorem* AO, *seu* AB : AC = AC : AO.

DEMONST. Ductis chordis CB & CO, erit dimidium arcus CO mensura tum anguli ACO, tum anguli CBO (276) unde ACO = CBO (29) quia ergo A communis est angulus triangulis AOC & ABC erunt homologa horum latera proportionalia (216) igitur AB : AC = AC : AO. q. e. d.

298. COROL. Si ab eodem puncto A extra circulum dato ducantur duæ tangentes AC & AD; erunt eæ æquales. Nam AB : AC = AC : AO, & AB : AD = AD : AO (297) unde AB × AO = $\overline{AC}^2$, & AB × AO = $\overline{AD}^2$ (185) ergo $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2$ (51) adeóque AC = AD (148)

299. DEF. Linea recta AB dicitur dividi *in media, & extrema ratione*, si
F. ità dividitur in D, ut tota AB sit ad par-
47. tem majorem AD, sicut hæc pars major AD ad minorem BD.

300. PROBL. *Lineam rectam* AB *dividere in media & extrema ratione.*

SOLUTIO. I. in B ducatur perpendicularis BC = $\frac{1}{2}$ AB. II. Centro C

radio

radio CB scribatur circulus. III. Ex A per centrum ducatur recta AV. IV. Fiat AD = AE: erit AB : AD = AD : BD.

DEMONST. Quia radio CB perpendicularis est AB (59) erit hæc tangens (266) unde AV : AB = AB : AE (297) & *dividendo* AV – AB : AB = AB – AE : AE (195) sed AB = EV, & AE = AD *ex constr.*; ergo AV – EV : AB = AE – AD : AD (22) id est, AE seu AD : AB = BD : AD, & *invertendo* AB : AD = AD : BD (191) q. e. d.

ELEMENTUM IX.

De Figuris ordinatis Circulo inscriptis, & circumscriptis.

301. DEF. Figura dicitur *ordinata*, si omnia habeat latera æqualia, & omnes angulos æquales. *Inscripta* est circulo, si omnes angulos habeat in circumferentia: *circumscripta*, si singula ejus latera circulum tangant.

302. THEOR. *Quævis figura ordinata potest inscribi circulo.*

DEMONST. Anguli A & B æquales (301) dividantur bifariam ductis rectis AC & BC: in triangulo ABC erit angulus CBA = CAB (53) est ergo ABC æquicrurum (128) proinde AC F. 49.