201. THEOR. *Si proportio fuerit continua, erit quadratum primi termini ad quadratum secundi, ùt primus ad tertium.* Sit A : B = B : C, dico, quòd AA : BB = A : C.

DEMONST. AC = BB (185) ergo productum extremorum AAC = ABB producto mediorum (181) adeóque AA : BB = A : C (187) q. e. d.

ELEMENTUM VI.
De Triangulis similibus.

202. DEF. Figuræ dicuntur *similes*, quæ, si differant, solâ differunt quantitate. Figurarum similium latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, *homologa* dicimus.

203. COROL. I. Ut figuræ sint similes, requiritur, & sufficit I., ut in utraque idem sit laterum & angulorum numerus. II. Ut latera unius omnia sint proportionalia lateribus homologis alterius. III. Ut singuli anguli unius æquales sint singulis alterius.

204. COROL. II. Ut triangula sint similia, requiritur, & sufficit, omnes angulos esse *mutuò* æquales, & omnia latera homologa esse proportionalia.

205. THEOR. *Parallelogramma, quæ bases æquales habent, sunt inter se, ùt altitudines:*

titudines: & quæ altitudines æquales habent, sunt inter se, ùt bases.

DEMONST. I. Sint altitudines A & a: basis utriusque sit B: erunt parallelogramma AB, & aB (165) sed AB:aB = A:a (196) sunt ergo æqualium basium parallelogramma, ùt altitudines. q. e. 1.

II. Bases sint B & b: altitudo utriusque sit A: erunt parallelogramma AB & Ab (165) sed AB:Ab = B:b (196) sunt ergo æqualium altitudinum parallelogramma, ùt bases. q. e. 2.

206. COROL. Quia triangula sunt parallelogrammorum dimidia (162) erunt etiam æqualium basium triangula inter se, ùt altitudines: & triangula æqualium altitudinum, ùt bases (53)

207. PROBL. *Triangulum dividere in quotcunque, & qualescunque partes.*

SOLUTIO. I. In eadem ratione, in qua dividendum est triangulum, dividatur F. 24. basis AB. II. Ex vertice C ad puncta divisionum ductæ rectæ CO &c. divident triangulum ABC in tot triangula AOC, BOC &c., in quot partes secta est basis AB: dico, ea triangula esse inter se, ut partes basis AO, BO &c.

DEMONST. Omnium enim eadem est altitudo (152) sunt ergo inter se, ùt bases AO, BO &c. (206) q. e. d.

208. COROL. I. Eodem modo parallelogrammum divides in quotvis &

quasvis

quasvis partes, hoc uno diſcrimine, quòd lineæ dividentes lateribus eſſe debeant parallelæ: ità fient totidem parallelogramma habentia inter ſe rationem baſium (205)

209. COROL. II. Parallelogrammum, item triangulum duplicabis, triplicabis &c., duplicando, triplicando &c. baſin eàdem relictà altitudine.

210. THEOR. *In quovis triangulo* ABC, *ſi uni lateri* AB *ducatur parallela* DE; *hæc reliqua latera dividit proportionaliter, nempe ut ſit* CD : DA = CE : EB. F. 25.

DEMONST. Ductis rectis AE & BD, habebunt triangula CDE & ADE eandem altitudinem (152) ideóque CDE : ADE = CD : DA (206) ex eadem ratione CDE : BDE = CE : EB. Jam quia triangula ADE, & BDE ſunt *ex hyp.* inter easdem parallelas, & ſuper eadem baſi DE; erit ADE = BDE (163) in ſecunda igitur proportione illo huic ſubſtituto (22) erit CDE : ADE = CE : EB. Quia ergo ex demonſtratis CDE : ADE = CD : DA; erit CD : DA = CE : EB (51) q. e. d.

211. COROL. Alia quævis recta DI, quæ lateri AB parallela non eſt, non dividet reliqua latera proportionaliter. Quia enim CD : DA = CE : EB (210) & CE : EB > CI : IB (180) erit etiam

CD : DA > CI : IB (52) Itaque recta dividens duo latera trianguli in partes proportionales, est lateri tertio parallela.

212. POSTULATUM. *Cuivis rationi finitæ fieri potest alia æqualis.*

F. 213. THEOR. *Rectæ* AC & OE, *in*
26. *eodem plano ductæ, si parallelæ non sint, productæ tandem concurrunt.*

DEMONST. Ducatur AE, & ex quovis rectæ AC puncto B ducatur BD ipsi OE parallela (73) producatur autem AC, donec sit AD : DE = AB : BC (212) dico, AC, & OE concursuras in C. Si negas, ex C rectæ BD duci poterit alia parallela CX (73) erítque AD : DX = AB : BC (210) sed *ex constr.* etiam AD : DE = AB : BC. Igitur AD : DX = AD : DE (51) adeóque DX = DE (189) quod quia repugnat (20) necesse est AC & OE in C concurrere. q. e. d.

214. THEOR. *Si duo triangula* ABC & DEC *habeant omnes angulos mutuò*
F. *æquales* (A = D, B = E, C = C) *habent*
25. *etiam omnia latera homologa proportionalia.*

DEMONST. Anguli æquales C & C sibi imponantur: lateribus AC & BC incumbent latera DC & EC (31) jam *ex hyp.* A = D : itaque AB & DE sunt parallelæ (88) unde CD : DA = CE : EB : (210) & *componendo* CD + DA :

CD

CD = CE + EB : CE (193) hoc est CA : CD = CB : CE. Et *alternando* CA : CB = CD : CE (191) simili modo, si agulii E & B sibi mutuò imponantur, ostendam, quòd AB : CB = DE : CE. Omnia ergo homologa latera sunt proportionalia. q. e. d.

215. COROL. I. Triangula mutuò æquiangula similia sunt (204)

216. COROL. II. Quia si duo triangulorum anguli sunt *mutuò* æquales, etiam tertius est tertio æqualis (110) triangula hoc ipso, quòd duos angulos *mutuò* æquales habeant, latera quoque homologa omnia habent proportionalia, súntque similia.

217. COROL. III. Dato triangulo aliud simile construes, si duos angulos hujus duobus illius facias æquales.

218. THEOR. *Triangula* ABC & DEC, *si habuerint unum angulum uni æqualem, & latera circa hos angulos proportionalia* (nempe si C = C, & AC : BC = DC : EC) *reliquos etiam angulos mutuò æquales, & reliqua etiam latera proportionalia habent, súntque similia.*

DEMONST. Æquales anguli sibi imponantur : latera DC & EC lateribus AC & BC incumbent (31) jam AC : BC = DC : EC *ex hyp.*, & *alternando* AC : DC = BC : EC (191) & *dividendo* AC − DC : DC = BC − EC : EC (195)

 id

id est AD : DC = BE : EC. Igitur latus DE latera AC & BC dividit proportionaliter : unde AB & DE sunt parallelæ (211) ideoque A = D, & B = E (87) igitur & reliqua latera sunt proportionalia, & ipsa triangula similia (216) q. e. d.

219. THEOR. *Similium triangulo-*
F. *rum* ABC *&* DEF *altitudines* CO *&*
24. FV *sunt inter se, ùt bases homologæ* AB *&* DE.

DEMONST. Quia A = D (204) & O = V (44) in triangulis AOC & DVF erit AC : DF = CO : FV (216) & quia triangula ABC & DEF sunt *ex hyp.* similia, erit AC : DF = AB : DE (204) ac proinde CO : FV = AB : DE (51) q. e. d.

220. COROL. I. Quia bases homologæ reliquis lateribus homologis proportionales sunt (204) etiam similium triangulorum altitudines in bases homologas ductæ reliquis homologis lateribus proportionales sunt. Nempe CO : FV = AB : DE = BC : EF = AC : DF.

221. COROL. II. Quia A = D, B = F (204) O = V (44) patet triangula similia ABC & DEF à perpendicularibus CO, & FV dividi in triangula AOC & DVF, OBC & VEF, quorum latera omnia sint proportionalia (216) Itaque basium segmenta AO & DV, BO

&

& EV, in quæ baſes à perpendicularibus dividuntur, proportionalia ſunt tum altitudinibus, tum reliquis lateribus homologis.

222. PROBL. *Datis in uno ſimilium triangulorum duobus lateribus* AB *&* AC: *in altero autem dato uno latere* DE, *quod lateri* AB *homologum ſit, invenire homologum alterum* DF.

SOLUTIO. I. Multiplica AC per DE. II. Productum divide per AB: quotus erit latus DF.

DEMONST. $AB : AC = DE : DF$ (204) ergo $\frac{AC \times DE}{AB} = DF$. (186) q. e. d.

223. COROL. Eodem modo invenire licet trianguli alterius altitudinem, & ſegmentum baſis quodlibet; ſi in primo triangulo dentur duo termini, & in altero unus homologus, qui cum inveniendo proportionem conſtituant.

224. THEOR. *In quovis triangulo* ABC *ſi ductam uni lateri parallelam ſecat recta* CV *ex angulo oppoſito ducta, ea baſin* AB, *eique parallelam* DE, *proportionaliter ſecat, ut nempe ſit* $AV : VB = DO : OE$. F. 27.

DEMONST. $A = D$, $V = O$, $B = E$ (87) igitur $AV : DO = CV : CO$, & $VB : OE = CV : CO$ (216) adeóque AV:

 DO

DO = VB : OE (51) & *alternando* (191) AV : VB = DO : OE. q. e. d.

225. COROL. I. Eodem modo oſtendam, ſi ex vertice C plures rectæ ducantur, à ſingulis in partes proportionales ſecari parallelas AB & DE.

226. COROL. II. Et ſi parallelæ fuerint quotcunque, omnes proportionaliter ſecabuntur.

227. PROBL. *Rectam quamlibet* DE *dividere in eadem ratione, in qua diviſa eſt alia quævis* AB.

SOLUTIO. Diviſæ AB dividendam DE conſtitue parallelam. II. Per puncta earum extrema duc rectas AC, BC. III. Ex C, ubi illæ concurrunt, per puncta diviſionum V &c. ductæ rectæ CV &c. ſecabunt utramque in eadem ratione.

DEMONST. Quia AB & DE parallelæ ſunt, ſed inæquales *ex hyp.*, non erit ADEB parallelogrammum (136) ideóque AD, & BE non ſunt parallelæ (135) productæ ergo concurrunt (213) igitur ex puncto concurſûs C rectæ utramque parallelam in eadem ratione ſecant (225) q. e. d.

228. COROL. Habes ergo modum dividendi rectam quamlibet in quotlibet partes æquales : ſufficiet enim totidem partes æquales in alia quavis recta deſignare, & juxta problema præcedens operari.

probl.

229. PROBL. *Datis tribus rectis* AV, VB, DO, *quartam proportionalem invenire.*

SOLUTIO. I. Duc parallelas indefinitas AB & DE. II. In unam transfer duas ex datis primas AV & VB: in alteram verò transfer tertiam DO. III. Per puncta A & D, V & O duc rectas concurrentes in C. IV. Ex C ducta in B recta CB dabit quartam proportionalem OE. *Demonstrationem* habes N. 227.

230. COROL. Si duabus AV & VB quærenda sit tertia *continuè* proportionalis; eodem modo operaberis, secundam VB transferendo in utramque parallelam.

231. THEOR. *Si unus cujusvis trianguli* ABC *angulus* C *bifariam dividatur, ductâ in latus oppositum* AB *rectâ* CD; *erunt inter se ejus lateris segmenta, uti latera reliqua.* Nempe AC : BC = AD : BD. F. 28.

DEMONST. Latere BC producto, fiat OC = AC, & ducatur recta AO: erit angulus AOC = OAC (116) quibus simul sumptis cùm æqualis sit ACB (112) erit hujus dimidium DCB = AOC. Sunt ergo AO & CD parallelæ (88) unde OC : BC = AD : BD (210) sed *ex constr.* OC = AC; ergo AC : BC = AD : BD (22) q. e. d.

Theor.

232. THEOR. *Si in triangulo rectan-*
F. *gulo* ABC *ex angulo recto* C *in hypotenu-*
29. *sam ducatur perpendicularis* CD; *hæc il-*
lud dividit in duo triangula ACD, *&*
BCD, *& toti, & inter se similia.*

DEMONST. I. Triangulis ABC & ADC communis est angulus A, & angulus ACB = ADC (44) est ergo triangulum ADC simile toti ABC (216) q. e. 1.

II. Triangulis ABC & BCD communis est angulus B, & angulus ACB = BDC (44) igitur & triangulum BCD toti ABC simile est (216) q. e. 2.

III. Quia ADC & BDC sunt eidem ABC *ex demonstratis* similia, adeóque æquiangula (204) inter se etiam erunt æquiangula (51) ac proinde inter se similia (215) q. e. 3.

233. COROL. Quia ADC & BDC similia sunt; erit AD : CD = CD : DB (204) id est, perpendicularis est media proportionalis inter duo segmenta hypotenusæ.

234. DEF. *Scala geometrica* est regula exhibens lineam aliquam rectam divisam in mille partes æquales, ex qua prout inde capi possunt quotlibet illius lineæ partes decimæ, centesimæ, millesimæ.

235. SCHOL. *Quoniam per numeros decimales facillimè absolvuntur operationes arithmeticæ, solent Geometræ perticam*
(quot-

(quotcunque ea pedibus vulgaribus constet) dividere in partes æquales decem, quas vocant pedes decimales: *pedem quoque decimalem in decem* pollices, *pollicem in decem* lineas *partiuntur. Proinde si scalæ pars decima perticam designet; exhibebit pars centesima pedem decimalem, & pars millesima decimalem pollicem.*

236. PROBL. *Scalam geometricam construere.*

SOLUTIO. I. Ducatur recta arbitrariæ longitudinis, quam in partes mille partiri oporteat: eaque dividatur in partes æquales decem (228) quarum hic duas duntaxat BR, & RH exhibemus. II. In punctis B, R, H &c. erigantur perpendiculares BA, RE, HX, &c. ex quibus prima & ultima in partes decem æquales (228) dividatur. III. Per puncta divisionum ducantur decem lineæ rectæ, lineæ BH (90) & inter se (89) parallelæ, quæ omnes à perpendicularibus RE, HX &c. in decem partes æquales secabuntur (78) IV. Pars decima AE, item BR subdividatur in decem partes æquales (228) & divisionum puncta jungantur, ductis obliquis AC &c. dico scalam esse paratam. *F.* 30.

DEMONTS. I. BR, RH &c. sunt partes decimæ *ex constr.* II. BC, CD &c. sunt decimæ partis partes decimæ, adeóque totius scalæ partes cencesimæ: unde si BR perticam designet; BC pedem decimalem notabit. III. In triangulo ABC basi BC ductæ sunt decem parallelæ, adeóque totidem sunt æquiangula triangula (87) itaque AO : AB = OI : BC (214) sicut ergo AO est pars decima lateris AB; sic etiam OI est pars decima lateris BC: quòd cùm sit scalæ pars centesima, & pedem decimalem designet; patet OI esse partem decimam partis centesimæ, adeóque totius scalæ partem millesimam, quæ proinde pollicem decimalem designabit. Similiter ostendam, quòd SV quinque pollices decimales designet &c. Porrò, quæ de triangulo ABC diximus, triangulo ZER pariter applicabis. Exhibet igitur scala partes desideratas q. e. d.

237. PROBL. *Partes quotvis ex scala desumere.*

SOLUTIO. *Accipienda sit pertica una, pedes decimales tres, & pollices decimales quinque.* Pede uno circini posito in puncto Q quintæ parallelæ (nempe propter quinque pollices) alterum extende in Y. Intervallum QY continebit partes desideratas. Etenim Qn designat perticam unam; nm pollices quinque: my pedes tres.

238. SCHOL. Ex hoc exemplo disces quotvis & quasvis ex scala partes desumere, & quot scalæ, qualésque partes

linea

linea quævis recta contineat, circino explorare. Id universim nota, quod circini pes uterque in una eadémque semper parallela sit constituendus.

ELEMENTUM VII.

Distantiarum Dimensio.

239. DEF. *Mensulam geometricam* voco tabulam planam, in qua extensum & pauculâ cerâ affixum est folium chartæ albæ. Chartæ imponitur regula dioptris instructa, juxta quam plumbagine ductis rectis lineis angulus quilibet opticus facillimè delineatur. Baculo tripodi mensula imponitur, ut homo erectus dioptris uti possit.

240. PROBL. *Metiri distantiam* BR, *ad cujus solum punctum* R *accedere liceat.* F. 31.

SOLUTIO. I. *Per mensulam.* I. In quovis puncto S baculo fixo, positáque in R mensulâ, chartæ imprime punctum A respondens terræ puncto R. II. Huic puncto A applica unam regulæ extremitatem, & alteram verte, donec per dioptras appareat punctum B: juxta regulam sic positam duc rectam Ad. Tum versâ versus baculum in S defixum regulâ (simul tamen puncto A applicatâ) eodem modo duces rectam AC: ità delineatus