SOLUTIO. I. In O fixo baculo, continuetur recta BO versus C (6) II. Per O duc rectam AD, & fac AO = DO. III. Fixis in A & D baculis, metire angulum A (98) eique fac æqualem D (99) cujus crus DC, ubi rectam BC secat in C, fige baculum. IV. Metire rectam OC: hæc enim distantiæ BO æqualis est. *F. 17.*

DEMONST. A = D *ex constr.*, AOB = COD (54) & AO = DO *ex constr.*, ergo BO = OC (37) q. e. d.

132. PROBL. *Metiri angulum inaccessum* AOB.

SOLUTIO. I. Crura AO & BO continuentur versus C & D (6) II. Fixis in C & D baculis, metire angulos C & D (98) III. Horum summam subtrahe ex 180: relinquetur angulus COD (105) cui æqualis est AOB (54) q. e. i.

ELEMENTUM IV.

De Quadrilateris, & Triangulis.

133. DEF. *Quadrilaterum* dicitur superficies plana, cujus perimeter quatuor duntaxat rectis lineis ad quatuor angulos conjunctis constat. Recta ab uno angulo ad angulum oppositum ducta *diagonalis* appellatur.

134. THEOR. *Omnis quadrilateri quatuor anguli simul sumpti valent quatuor rectos.*

Demonst.

F. DEMONST. Ductâ diagonali erit
18. C†B†V = 180 gr., & A†O†I = 180 gr. (103) omnes ergo simul valent 360 gr., seu quatuor rectos. q. e. d.

135. DEF. Quadrilaterum, cujus bina quævis opposita latera AI & BV, AO & BC, parallela sunt, dicitur *parallelogrammum* : quadrilaterum, quod parallelogrammum non est, vocatur trapezium.

136. THEOR. *Opposita parallelogrammi latera sunt æqualia.*

DEMONST. Ductâ diagonali erit O = C, & I = V (81) quia ergo IO = IO, erit AO = BC, & AI = BV (37) q. e. d.

137. THEOR. *Oppositi in parallelogrammo anguli æquales sunt.*

DEMONST. Ductâ diagonali erit O = C, & I = V (81) ideóque tum O† V = C†I (21) q. e. 1. Tum etiam O†I = C†V (21) ac proinde A = B (110) q. e. 2.

138. THEOR. *Quadrilaterum habens bina quævis opposita latera æqualia, est parallelogrammum.*

DEMONST. Si AO = BC, & AI = BV; ductâ diagonali erit etiam IO = IO, ideóque I. O = C (35) proinde AO & BC sunt parallelæ (82) II. V = I (35) ideóque AI & BV sunt parallelæ (82) itaque quadrilaterum illud est parallelogrammum (135) q. e. d.

Theor.

139. THEOR. *Quadrilaterum duo habens latera* AO & BC *æqualia simul, & parallela, est parallelogrammum.*

DEMONST. Ductâ diagonali est C = O (81) quia ergo AO = BC *ex hyp.*, & IO = IO; erit etiam AI = BV (36) adeóque quadrilaterum illud est parallelogrammum (138) q. e. d.

140. THEOR. *Diagonalis parallelogrammum dividit in duo triangula æqualia.*

DEMONST. AO = BC, & AI = BV (136) dein IO = IO : sunt ergo triangula æqualia (35) q. e. d.

141. DEF. Parallelogrammum si omnes angulos habuerit rectos, *rectangulum*: secus *obliquangulum* vocatur. Rectangulum si omnia latera habet æqualia, *quadratum*: secus *oblongum* appellatur. Obliquangulum si omnia latera æqualia habet, *Rhombus*: secus *Rhomboides* dicitur.

142. DEF. Magnitudinem aliquam *metiri* est invenire, quoties ea contineat aliam magnitudinem jam notam, quam *mensuram* dicimus.

143. COROL. Mensura mensurando homogenea sit oportet: id est, lineæ lineis, superficies superficiebus, & corpora corporibus metienda sunt.

144, DEF. Mensura, quâ lineas metimur, *simplex* appellatur, éstque pro cujusvis loci consuetudine certa quædam

longi-

longitudo. Solet adhiberi *pertica*, quæ exhibet lineam aliquam rectam in certas partes æquales divisam. Hìc Aquisgrani pertica simplex continet *pedes* 16: pes *pollices* 12 : pollex 12 *lineas*. At superficies metimur mensurâ *quadratâ*, id est, quovis quadrato. Nempe quadratum, cujus quodlibet latus perticam simplicem adæquat, *pertica quadrata* dicitur : & quadratum, cujus latus pedem simplicem adæquat, *pes quadratus* appellatur &c. Metiri itaque superficiem aliquam nihil est aliud, quàm invenire, quot perticas quadratas, aut quot pedes quadratos &c. illa contineat. Hìc Aquisgrani, ùt audio, 150 perticæ quadratæ efficiunt *Jugerum*.

145. THEOR. *Parallelogrammi rectanguli magnitudo habetur, multiplicando inter se duo latera contigua.*

F. 19. DEMONST. Latus BC dividatur in quotvis partes æquales BS, SV &c., & per puncta divisionum ducantur rectæ SX &c. lateri AB, adeóque & inter se (89) parallelæ. Dein latus AB dividatur in partes BE, EI &c. partibus BS &c. æquales, ductis itidem rectis EL, IR &c. lateri BC & inter se parallelis. Jam cùm anguli A, B, C, D recti sint (141) lineæ jam ductæ ad angulos rectos se secabunt (87) sive altera alteri perpendicularis erit (58) Cellulæ igitur, in quas to-

tum

tum parallelogrammum divisum est, sunt mera quadrata; quoniam & angulos omnes rectos habent, & latera omnia æqualia (72) si ergo E B aut B S sit pes simplex, erit cellula E B S O (idem dic de reliquis) pes quadratus (144) Jam verò patet, quòd rectangulum E B C L cellulas contineat tot, in quot partes divisum est latus B C: bis verò tot cellulas habeat rectangulum I B C R, ter tot rectangulum A B C D &c. & generatim quot partes habet latus B C, tot cellulas continet totum rectangulum toties, quot partes habet latus alterum contiguum A B. Totus ergo cellularum, seu pedum quadratorum numerus, seu totius rectanguli magnitudo (20) obtinetur, sumendo partes lateris B C toties, quot ejusmodi partes habet latus A B: id est, multiplicando omnes simul partes unius per omnes simul alterius, seu (20) totum latus B C per totum latus contiguum A B. q. e. d.

146. COROL. I. Quia quadratum est rectangulum, & omnia latera æqualia habet (141) quadrati magnitudo obtinetur, latus unum per se ipsum multiplicando.

147. COROL. II. Hinc noto latere, seu *radice* quadrati innotescet ipsum quadratum.

148. COROL. III. Quadratorum æqualium mutuò æqualia sunt latera: &

ſi quadratorum latera mutuò æqualia ſint; ipſa quoque quadrata ſunt æqualia.

149. COROL. IV. Noti quadrati latus innoteſcet per extractionem *radicis quadratæ.*

150. SCHOL. *Ex dato numero extrahere radicem quadratam eſt invenire alium numerum, qui per ſe ipſum multiplicatus producit numerum datum. Ità ex 16 extrahitur radix 4 : ex 9 radix 3 &c. Regulas pro extractione radicum tradit Arithmetica.*

151. DEF. *Baſis* figuræ eſt quodvis ejus latus, cui figura inſiſtere concipitur: *vertex* eſt punctum figuræ à baſi remotiſſimum: *altitudo* eſt perpendicularis ducta ex vertice in baſin, ſi opus eſt, productam.

152. COROL. Duo triangula ADC,
F. & BDC, quorum communis eſt vertex
15. C, & baſes in eadem ſunt recta AB, habent eandem altitudinem (60)

153. DEF. Duæ figuræ dicuntur *poſitæ inter easdem parallelas*, ſi vertices in una, & baſes in altera exiſtant parallela linea.

154. COROL. I. Figurarum inter easdem parallelas poſitarum altitudines ſunt perpendiculares (151) inter duas parallelas comprehenſæ.

155. COROL. II. Figurarum ergo inter easdem parallelas poſitarum æquales ſunt altitudines (72)

Corol.

156. COROL. III. Et quoniam super una recta ductis duabus perpendicularibus æqualibus, quæ per harum terminos ducitur recta linea priori rectæ parallela est (90) poterunt figuræ, quæ æquales habent altitudines, constitui inter easdem parallelas.

157. COROL. IV. Quæ ergo de figuris inter easdem parallelas positis dicemus, intelligi etiam debent de figuris æquales altitudines habentibus.

158. THEOR. *Parallelogramma quævis* ABCD, *&* OSCD *super eadem basi* CD *posita inter easdem parallelas* AS *&* CL, *sunt æqualia.* F. 20.

DEMONST. AC = BD, & OC = SD, AB = CD, CD = OS (136), quare AB = OS (51) adde utrimque BO: erit etiam AO = BS (21) æqualia ergo sunt triangula ACO & BDS (35) utrique ergo si demas partem communem BOV, & ejus loco addas utrique partem CDV, prodibunt ABCD & OSCD parallelogramma æqualia (21) q. e. d.

159. COROL. Æqualia sunt parallelogramma, quorum æquales sunt bases, & æquales altitudines (157)

160. AXIOMA. *Quæ sunt æqualium dupla, tripla &c.: vel dimidia, partes tertiæ &c. æqualia sunt.*

161. THEOR. *Si inter easdem parallelas fuerit parallelogrammum* ABCD,

F. 21. *& triangulum* DOL, *quorum bases* CD *&* DL *æquales sint ; erit parallelogrammum trianguli duplum.*

DEMONST. Lateri DO ductâ parallelâ LS, erit OSDL parallelogrammum (135) æquale parallelogrammo ABCD (155 & 159) eorum ergo etiam dimidia æqualia erunt (53) Jam triangulum DOL est dimidium parallelogrammi OSDL (140) ergo triangulum DOL dimidio parallelogrammi ABCD æquale est : hoc ergo illius duplum est. q. e. d.

162. COROL. Parallelogrammum trianguli duplum est, si & bases æquales fuerint, & altitudines (157)

163. THEOR. *Triangula* CBD *&* DOL *inter easdem parallelas posita, si bases* CD *&* DL *æquales habent, sunt æqualia.*

DEMONST. Lateri BD ducatur parallela AC : erit ABCD parallelogrammum (135) duplum utriusque trianguli (161) utrumque ergo est ejusdem parallelogrammi dimidium : sunt ergo æqualia (160) q. e. d.

164. COROL. Æqualia sunt triangula, quorum & bases, & altitudines æquales sunt (157)

F. 20. 165. THEOR. *Cujusvis parallelogrammi* OSCD *magnitudo producitur, multiplicando basin* CD *per altitudinem* SL.

Demonst.

DEMONST. Super eadem basi CD inter easdem parallelas positum sit rectangulum ABCD : erit $ABCD = CD \times AC$ (145) sed $AC = SL$ (72) ergo $ABCD = CD \times SL$ (22) jam $OSCD = ABCD$ (158) igitur $OSCD = CD \times SL$ (51) q. e. d.

166. COROL. I. Si ergo basis multiplicetur per semissem altitudinis, vel altitudo per semissem basis; prodibit parallelogrammi dimidium: id est, triangulum cum parallelogrammo & basin & altitudinem habens æqualem (162)

167. COROL. II. Cujusvis ergo trianguli magnitudo habetur, multiplicando vel basin per semissem altitudinis: vel altitudinem per semissem basis: vel totâ basi per totam altitudinem multiplicatâ sumendo producti dimidium.

168. DEF. Triangulum *rectangulum* ABC est, cujus unus angulus C rectus est: F.
latus AB angulo recto oppositum vocatur *Hypotenusa*. 22.

169. THEOR. Dato quovis triangulo rectangulo, quadratum hypotenusæ æquale est quadratis laterum reliquorum simul sumptis.

DEMONST. Ducantur rectæ AL, CI, lateribúsque AD & BI ex angulo recto parallela CE, quæ quadratum hypotenusæ dividet in duo parallelogramma ADER, & ERBI, ex quibus hoc quadrato C O L B, illud quadrato A S V C ostendam esse æquale. Nam quia quadrata angulos in B rectos (141) ideóque æquales (44) habent, addito utrimque angulo A B C erit angulus A B L = C B I (21) quia ergo C B = L B, & B I = B A (141) æqualia sunt triangula A B L & C B I (36) Porro quia angulus C tam in quadrato (141) quàm in triangulo rectus est, efficient A C & C O unam rectam (49) lateri B L parallelam (135) unde triangulum A B L cum quadrato C O L B super eadem basi B L positum est inter easdem parallelas A O & B L: igitur triangulum A B L est dimidium quadrati C O L B (161) Ex eadem ratione triangulum C B I est dimidium parallelogrammi E R B I. Igitur C O L B, & E R B I sunt æqualium triangulorum dupla: sunt ergo æqualia (160) q. e. 1. Eodem modo, ductis ex B in S, & ex C in D, rectis, ostendam, quòd A D E R = A S V C. q. e. 2. Igitur C O L B † A S V C = E R B I † A D E R (21) q. e. d.

170. SCHOL. *Brevitatis causâ quadratum cujusvis lineæ designaturi, post lineolam supra literas ductam numerum binarium scribimus: sic* $\overline{AB}^{2}$ *indicat quadratum lineæ* A B.

171. COROL. I. Si in triangulo rectangulo nota sint duorum laterum quadrata;

drata; innotescet quadratum tertii vel additione, vel subtractione. Quia enim $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ (169) etiam $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$, & $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$ (21)

172. COROL. II. Si duo trianguli rectanguli latera nota sint; facilè invenitur tertium. Nota enim sunt duorum quadrata (147) adeóque innotescet quadratum tertii (171) & hinc ipsum latus tertium (149)

173. SCHOL. *Quâ ratione parallelogrammum quodvis describendum sit, facilè intelliget, qui modum ducendæ per datum punctum parallelæ, & perpendicularis non ignoraverit.*

174. PROBL. *Facere quadratum duobus, tribus, & quotcunque aliis æquale.*

SOLUTIO. I. Latera duorum datorum junge ad angulum rectum: his subtensa hypotenusa erit latus quadrati, quod duobus primis simul sumptis æquale est (169)

II. Huic hypotenusæ ad angulum rectum junge latus quadrati tertii dati: ducta hypotenusa altera erit latus quadrati, quod æquale est quadratis reliquorum laterum, id est tribus datis. Ità porrò pergendo quotcunque datis quadratis facies unum æquale, illud nempe, cujus latus est hypotenusa ultima.

175. PROBL. *Agrum, aut superfi-*

ciem quamlibet planam rectilineam metiri.

SOLUTIO. Si fuerit metiendum triangulum ABC, perticâ metire latus unum AB, in quod ex angulo opposito ducta perpendicularis CO (100) erit trianguli altitudo (151) per cujus dimidium multiplica basin AB: & prodibit trianguli magnitudo (167)

F. 23.

II. Si superficies non fuerit triangularis; divide eam in mera triangula, ductis ex uno angulo in reliquos lineis rectis: singula hæc triangula metire modo jam dicto, iísque in unam summam collectis nota erit totius superficiei magnitudo (20)

176. SCHOL. *Compendium aliquod laboris facies, si quoties fieri potest, unam sumas duorum triangulorum communem basin* AB, *in quam ex angulis* C *&* D *perpendiculares* CO *&* DV *duci possint.*

ELEMENTUM V.

De Ratione, & Proportione Geometrica.

177. DEF. Dum quærimus, quænam sit *ratio* magnitudinis unius ad aliam, nihil aliud quærimus, quàm quoties prima contineat secundam. Itaque *Geometrica ratio* est modus, quo magnitudo prima