ELEMENTUM II.

De Lineis perpendicularibus, obliquis, parallelis, & qui ab his formantur Angulis.

38. DEF. Si anguli ACO crus unum AC producatur in B, ità, ut ACB sit recta linea; dicuntur anguli ACO & OCB *deinceps positi.* F. 1

39. THEOR. *Anguli deinceps positi simul sumpti pro mensura habent arcum semicirculi.*

DEMONST. Centro C scripto circulo, erit AB diameter (9) unde AO † OB arcus semicirculi (18) jam anguli ACO & OCB pro suis mensuris habent arcus AO & BO (28) utriusque ergo mensuræ conjunctæ arcum semicirculi efficiunt, q. e. d.

40. COROL. Anguli deinceps positi simul sumpti continent 180 gradus (12)

41. DEF. Angulus *rectus* ACS dicitur, cui æqualis est deinceps positus SCB. Angulus *obliquus* est, cui deinceps positus inæqualis est. Obliquus ACO, qui recto minor est, vocatur *acutus* : obliquus OCB, qui recto major est, *obtusus* dicitur.

42. COROL. I. Si ex angulis deinceps positis unus rectus est, rectus erit & alter.

43. Cor-

43. COROL. II. Et quoniam ambo ſimul pro menſura habent arcum ſemicirculi (39) ſeu 180 gr.; cùm ſint æquales (41) quilibet rectus pro menſura habebit quadrantem, ſeu 90 gr. (29) ac porrò integra circuli circumferentia menſura eſt 4 rectorum.

44. COROL. III. Omnes ergo recti anguli ſunt inter ſe æquales (29.)

45. COROL. IV. Anguli deinceps poſiti ſimul ſumpti valent duos rectos (40) adeóque duo deinceps poſiti duobus aliis deinceps poſitis æquales ſunt.

46. COROL. V. Si ex angulis deinceps poſitis unus *acutus* eſt; erit alter *obtuſus*, & contra (41)

47. COROL. VI. Etiamſi ſupra rectam AB in puncto C quotcunque convenerint lineæ OC, SC &c. omnes anguli in C formati duos rectos ſimul ſumpti adæquant: omnium enim menſuræ conjunctæ arcum ſemicirculi complent.

48. COROL. VII. Etſi ex eodem puncto C ſupra & infra rectam AB ducantur lineæ quotlibet; omnes ſimul anguli adæquant 4 rectos: omnium enim menſuræ implent circumferentiam circuli, quæ metitur 4 rectos (43)

49. COROL. VIII. Si in uno puncto C tres lineæ rectæ AC, OC, BC conjungantur, ità, ut duo anguli contigui ACO & OCB ſimul ſumpti duobus

rectis

rectis æqnales sint; extremæ AC & BC unam efficient rectam lineam ACB. Cùm enim anguli recti mensura sit quadrans (43) duorum illorum angulorum mensuræ AO & OB semicirculi arcum complebunt: unde ACB diameter est (19) adeóque recta linea (9)

50. DEF. Si duæ rectæ AB & OD se secant in C, quatuor fiunt anguli, ex quibus ii dicuntur *ad verticem oppositi*, qui sibi non sunt deinceps positi, nimirum ACO & DCB, ACD & OCB.

51. AXIOMA. *Quæ eidem, vel æqualibus æqualia sunt, inter se quoque æqualia sunt.*

52. AXIOMA. *Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero majus vel minus est.*

53. AXIOMA. *Utì inter se sunt tota, ità & dimidia: partes tertiæ: quartæ: & quævis partes similes*

54. THEOR. *Anguli ad verticem oppositi æquales sunt.*

DEMONST. ACO † OCB = 180 gr., & DCB † OCB = 180. gr. (40) hinc ACO † OCB = DCB † OCB (51) proinde ACO = DCB (21) Eodem modo ostendam, quòd ACD = OCB q. e. d.

55. DEF. Recta CO alteri rectæ AB ità insistens, ut in neutram partem magìs inclinetur, dicitur *perpendicularis* ad lineam F. 4. AB.

AB. Recta SO, quæ in partem alterutram magis inclinatur, ad lineam AB *obliqua* dicitur.

56. COROL. I. Perpendicularis CO facit angulos AOC & BOC æquales (25) adeóque rectos (41)

57. COROL. II. Perpendicularis non est, quæ cum altera angulum efficit obliquum (41)

58. COROL. III. Recta linea alteri perpendicularis est, si cum illa faciat duos rectos angulos, imò si unum rectum (42)

59. COROL. IV. Si linea una ad alteram perpendicularis est; etiam hæc ad illam perpendicularis erit.

60. THEOR. *Supra rectam* AB *ex puncto quovis una tantùm perpendicularis duci potest.*

DEMONST. I. Ex puncto C extra rectam dato ducta sit perpendicularis CO: dico quamlibet aliam CV esse obliquam. Nam utrâque in D & F productâ, fiat DO = CO & ducatur recta DV. Quoniam COV rectus est (57) etiam DOV rectus erit (42) unde COV = DOV (44) igitur cum DO = CO, & VO = VO; erit angulus CVO = DVO (36) Jam si CV sit perpendicularis; erit CVO rectus (57) igitur & DVO rectus erit: & AVF pariter rectus (54) itaque AVF + DVO = 180. gr., proinde AVF + DVO + DVF > 180 gr., quod cùm repugnet

pugnet (47) nequit CV esse perpendicularis. q. e. 1.

II. Ex puncto O in recta AB dato ducta sit OC perpendicularis: dico quamvis aliam OS obliquam esse. Nam COB rectus est (57) adeóque SOB acutus (41) igitur OS obliqua (57) q. e. 2.

61. COROL. Duæ perpendiculares ad eandem rectam ductæ nequeunt in uno puncto concurrere.

62. THEOR. *Perpendicularis* CO *brevior est, quàm alia quævis* CV *ab eodem puncto* C *ad eandem rectam* AB *ducta.*

DEMONST. Producatur CO, & fiat DO = CO: denique ducatur DV. Quoniam DO = CO, VO = VO, & anguli in O recti (57 & 42) adeóque æquales (44) erit DV = CV (36) sicut DO = CO, sed CV † DV > CO † DO (4) igitur & CV > CO (53) q. e. d.

63. COROL. Hoc ipso linea perpendicularis est, quòd sit brevissima omnium, quæ ab eodem puncto ad eandem rectam duci possunt.

64. PROBLEMA. *Ex puncto* O *in recta* AB *dato perpendicularem erigere.*

SOLUTIO I. Nota partes hinc inde æquales AO & BO. II. Centris A & B radiis æqualibus scribe duos arcus se in aliquo puncto C secantes. III. Per C & O ducta recta CO erit perpendicularis. *F. 5.*

DEMONST. AO = BO & AC = BC *ex constructione* : dein CO = CO : igitur angulus AOC = BOC (35) uterque ergo rectus est (41) ideóque CO perpendicularis (58) q. e. d.

65. PROBL. *Ex puncto* C *extra rectam* AB *dato perpendicularem ducere.*

SOLUTIO. I. Centro C scribe arcum, qui rectam AB secet in duobus quibuscunque punctis A & B. II. Centris A & B, radiis æqualibus scribe duos arcus in puncto quovis D se secantes. III. Per C & D ducta recta CO perpendicularis est.

DEMONST. AC = BC, & AD = BD *ex constr.* : dein CD = CD : igitur anguli in C æquales sunt (35) Quare cùm in triangulis AOC & BOC sit AC = BC, & CO = CO, & anguli in C æquales, erit etiam angulus AOC = BOC (36) uterque ergo rectus est (41) unde CO perpendicularis (58)) q. e. d.

66. PROBL. *Rectam* AB *bifariam dividere, ductâ per punctum ejus medium perpendiculari.*

SOLUTIO. I. Punctis extremis A & B velut centris, radiis æqualibus, scribe duos arcus se secantes in aliquo puncto C. II. Iisdem centris, radiis pariter æqualibus scribe duos alios arcus se secantes in alio puncto D. III. Producta per C & D recta secabit AB in O bifariam, erítque perpendicularis.

Dem.

DEMONST. In triangulis AOC & BOC, utì ex *demonst.* præcedente patet, duo sunt latera mutuò æqualia comprehendentia in C æquales angulos: igitur AO = BO (36) q. e. 1. Hinc porrò angulus AOC = BOC (35) uterque ergo rectus est (41) ergo CO perpendicularis (58) q. e. 2.

67. SCHOL. *Si normam, id est, duas regulas* EC & CD *ad angulum rectum conjunctas, habueris; faciliùs datæ rectæ* AB *ex quovis puncto perpendicularem duces. Porrò sítne accuratè constructa norma, sic invenies: latere* CD *rectæ* AB *applicato, juxta latus* EC *duc rectam* OC: *tum normam circà latus* EC *converte: si angulus normæ* ECD *congruat angulo* ECA, *norma accurata est, quia* ECD = ECB = ECA, *adeóque singuli recti sunt* (41) F. 64.

68. DEF. Distantia duorum terminorum est linea omnium, quæ ab uno ad alterum duci possunt, brevissima.

69. COROL. Distantia unius lineæ rectæ ab altera est perpendicularis ab una ad alteram ducta (62)

70. DEF. Duæ lineæ vocantur *parallelæ*, quarum, quousque etiam producantur, æqualis semper est à se mutuò distantia.

71. COROL. I. Parallelæ, etiam in infinitum productæ, nunquam concurrunt.

72. Cor.

72. COROL. II. Omnes perpendiculares, quæ ab una parallela ad alteram duci possunt, sunt æquales (69)

73. POSTULAT. *Ex quovis puncto datæ rectæ indefinitæ duci potest tum perpendicularis, tum parallela.*

74. THEOR. *Quæ uni parallelarum perpendicularis est, etiam alteri perpendicularis est.*

DEMONST. Sit AC perpendicularis uni parallelæ CD: dico, erit talis &
F.7. alteri AB. Si negas, poterit ex A ad AB alia duci perpendicularis (73) sit illa AE: hæc ipsi CD perpendicularis esse nequit (61) proinde AE > AC (62) quod quia repugnat (72) patet q. e. d.

75. THEOR *Eidem rectæ* AB *per idem punctum* C *duci nequeunt duæ parallelæ* CD & CO.

DEMONST. Si tam CO, quàm CD sit rectæ AB parallela; ducta ex C ad AB perpendicularis CA erit quoque perpendicularis tum ipsi CD, tum ipsi CO (74) quare ACD & ACO sunt recti anguli (57) adeoque ACD = ACO (44) quod quia repugnat (20) patet. q. e. d.

76. THEOR. *Si recta* AC *perpendicularis sit ad duas* AB & CD, *vel, quod idem est* (59) *si duæ* AB & CD *perpendiculares sint ad eandem* AC, *illæ erunt parallelæ.*

DEMONST. Secus enim ex puncto

C duci

C duci poterit alia C O rectæ AB parallela (73) cui pariter A C perpendicularis erit (74) iterum ergo A C D & A C O erunt anguli recti (57) & æquales (44) quod quia repugnat (20) oportet A B & C D esse parallelas. q. e. d.

77. COROL. I. Perpendiculares A C & B D inter duas parallelas interceptæ sunt inter se parallelæ: utraque enim utrique parallelarum est perpendicularis (74)

78. COROL. II. Parallelarum partes A B & C D interceptæ inter perpendiculares A C & B D, sunt inter se æquales. Nam quia perpendiculares A C & B D sunt inter se parallelæ (77) iisque vicissim perpendiculares sunt A B & C D (59) has necesse est esse æquales (72)

79. PROBL. *Rectæ* C D *parallelam ducere per punctum* A.

SOLUTIO. I. Ex A in C D duc perpendicularem A C (65) II. Huic ex A duc perpendicularem A B (64) hæc erit rectæ C D parallela.

DEMONST. A C perpendicularis est tum rectæ C D *per constr.*, tum rectæ A B (59) ergo A B & C D sunt parallelæ (76) q. e. d.

80. DEF. Si duas rectas A B & C D secat recta E L, *alterni* anguli vocantur A O V & O V D, C V O & V O B, quorum nempe uterque *intra* lineas sectas *F. 8.*

 continetur,

continetur, ſed ad diverſa ſecantis latera, nec alter alteri deinceps ponitur.

81. THEOR. *Si parallelas* AB *&* CD *ſecat recta* EL; *anguli alterni æquales ſunt.*

DEMONST. Perpendiculares SV & OI æquales ſunt (72) & SO = VI (78) dein VO = VO : igitur angulus SOV = OVI (35) q. e. 1. Jam SOV † VOB = OVI † OVC (45) ablatis ergo SOV & OVI per part. I. æqualibus, relinquetur VOB = OVC (21) q. e. 2.

82. THEOR. *Si alterni anguli* OVC *&* VOB *æquales fuerint; erunt rectæ* AB *&* CD *parallelæ.*

DEMONST. Secus enim per punctum O ducta ſit alia OR rectæ CD parallela (73) erit OVC = VOR (81) ſed *ex hypotheſi* OVC = VOB: igitur VOR = VOB (51) quod cùm repugnet (20) neceſſe eſt AB & CD eſſe parallelas. q.e.d

83. DEF. Si rectas AB & CD ſecat recta EL, anguli AOV & CVO, item BOV & OVD vocantur *interni ad eandem partem*, quorum nempe uterque intra lineas ſectas, & ad idem ſecantis latus exiſtit.

84. THEOR. *Si parallelas* AB *&* CD *ſecat recta* EL; *anguli ad eandem partem interni ſimul ſumpti duos adæquant rectos.*

DEMONST. AOV † VOB = 180 gr.

gr. (40) AOV = OVD (81) ergo OVD † VOB = 180 gr. (22) q. e. 1. Jam AOV † VOB = 180. gr. (40) VOB = OVC (81) igitur AOV † OVC = 180 gr. (22) q. e. 2.

85. THEOR. *Si duo ad eandem partem interni anguli* AOV † OVC *duos adæquant rectos; sunt* AB & CD *parallelæ.*

DEMONST. OVD † OVC = 180 gr. (40) igitur si AOV † OVC = 180 gr., erit OVD † OVC = AOV † OVC (51) adeóque OVD = AOV (21) proinde sunt AB & CD parallelæ (82) q. e. d.

86. DEF. Si rectas AB & CD secat recta EL, *externi* anguli vocantur EOB, EOA, LVC, LVD, qui nempe formantur *extra* lineas sectas. Ex his quilibet *opponi* dicitur interno illi, cui non est deinceps positus, & qui ad idem secantis latus existit. Nimirum *externus* LVD *interno* VOB ad idem latus opponitur &c.

87. THEOR. *Si parallelas* AB & CD *secat recta* EL; *angulus externus æqualis est interno ad idem latus opposito.*

DEMONST. LVD † OVD = 180 gr. (40) VOB † OVD = 180 gr. (84) ergo LVD † OVD = VOB † OVD (51) adeóque LVD = VOB (21) Eodem modo idem ostendam de quovis alio externo & opposito interno. q. e. d.

88. THEOR. *Si angulus externus* LVD *æqualis est interno* VOB *ad idem latus opposito; sunt* AB *&* CD *parallelæ.*

DEMONST. LVD†OVD = 180 gr. (40) si igitur sit LVD = VOB; erit VOB†OVD = 180 gr. (22) adeóque AB & CD sunt parallelæ (85) q. e. d.

89. THEOR. *Si* AB *&* LZ *parallelæ sint eidem tertiæ* CD; *inter se quoque sunt parallelæ.*

DEMONST. Ductâ secante EL erit EOB = EVD, & ELZ = EVD (87) hinc EOB = ELZ (51) igitur AB & LZ sunt parallelæ (88) q. e. d.

90. THEOR. *Si super recta* CD *erigantur duæ perpendiculares æquales* VS *&* IO; *per extrema harum puncta ducta recta* AB *rectæ* CD *parallela est.*

DEMONST. VS & IO parallelæ sunt (76) ductâ ergo secante EL erit angulus SVO = VOI (81) quia ergo VS = IO *ex hyp.*, & VO = VO, erit etiam angulus SOV = OVI (36) hinc AB & CD parallelæ (82) q. e. d.

91. PROBL. *Angulo* B *alium æqualem facere.*

SOLUTIO. I. Centro B intra dati crura radio quovis BA scribe arcum AC. II.
F. 9. Eodem radio centro quovis O scribe alium arcum. III. Circino cape intervallum AC, ídque in arcum secundum transfer ex D in L, ut sit recta DL = AC.

IV. Ex

IV. Ex D & L in O duc rectas : erit angulus D O L = A B C.

DEMONST. In triangulis A B C & D O L *ex constr.* sunt omnia latera mutuò æqualia : ergo O = B (35) q. e. d.

92. COROL. Hinc ducitur modus facilior rectæ A B per datum punctum O ducendi parallelam O L : nam ductâ rectâ B O fiat angulus O = B (91) & erit crus O L cruri A B parallelum (82)

93. SCHOL. *Faciliùs in charta rectæ* B E *parallela* C D *per datum punctum* O *ducitur ope regulæ* A B, *& cujusvis trianguli ex solida materia confecti* A C O. *Nempe rectæ* B E *applico trianguli latus* C O : *lateri* A C *apprimo regulam* A B : *tum regulâ immotâ promoveo triangulum (ità tamen, ut latus* A C *semper regulæ congruat) donec latus* C O *transeat per datum punctum* O : *ducta* C D *erit rectæ* B E *parallela. Nam angulus* A C O = A C D, *&* A C O = A B E (15) *proinde* A C D = A B E (51) *itaque* C D *&* B E *sunt parallelæ* (88) F. 10.

94. DEF. Semicirculus A I B ex materia solida confectus, cujus circumferentia in 180 gr. divisa est, vocatur *Transportator.* F. 11.

95. PROBL. *Angulum* D C E *in charta descriptum metiri.*

SOLUTIO. I. Vertici C impone transportatoris centrum C, ità, ut diameter A B incumbat cruri D C. II. Nota punctum I, in quo crus alterum CE circumferentiam quasi secat. III. Numera gradus in arcu AI contentos; tot enim graduum est angulus DCE (28)

96. PROBL. *In charta angulum quotlibet graduum describere.*

SOLUTIO. *Sit faciendus angulus 60 graduum.* I. Duc rectam DC, eique applica transportatorem, ità, ut diameter AB ei incumbat, & centrum C puncto extremo congruat. II. In circumferentia quære gradum 60.mum, è regione cujus chartæ imprimes punctum I. III. Ductâ per C & I rectâ erit DCE = 60 gr. (28)

97. DEF. Si transportatoris diame-
F. trum AB duabus *dioptris* (id est, lami-
12. nis perpendiculariter erectis, & exiguo foramine pertusis) instruas: & præterea addas regulam SO circa centrum C mobilem, & dioptris pariter instructam; instrumentum habebis, quod *astrolabium* dicimus, baculo tripodi imponendum, ut erectus per dioptras collimare possis.

98. PROBL. *In campo angulum* DCR *metiri.*

SOLUTIO. I. Positis, aut designatis in utroque crure signis D & R, ità astrolabium statue, ut ejus centrum C vertici C respondeat. II. Ità astrolabium verte, ut per dioptras diametri conspicias signum D. III. Regulam SO ità con-

verte,

verte, ut per ejus dioptras appareat signum R. IV. Numera gradus in arcu A O contentos : totidem gradus continet angulus D C R (28)

99. PROBL. *Angulum quotvis graduum in campo designare.*

SOLUTIO. I. In vertice anguli designandi posito astrolabio, colloca signum D ità, ut per dioptras diametri conspiciatur. II. Astrolabio immoto dirigatur regula mobilis ad gradum datum O. III. Per dioptras regulæ respiciens jube collocari signum R ità, ut per dioptras tibi appareat. IV. Ductæ ex loco astrolabii C in D & R rectæ angulum efficient desideratum D C R (28)

100. COROL. Patet igitur modus in campo ducendi parallelas (92) perpendicularem verò duxeris, si angulum designaveris *rectum* (58)

101. PROBL. *Quemvis angulum* A C B *bifariam dividere.*

SOLUTIO. I. Centro C duc arcum A B. II. Centris A & B radiis A D & B D æqualibus scribe duos arcus se in aliquo puncto D secantes (34) III. Ex D in C ducta recta faciet A C D = B C D. F. 13.

DEMONST. A C = B C (9) A D = B D *ex constr.*, & D C = D C : igitur angulus A C D = B C D (35) q. e. d.

102. COROL. Eâdem operâ etiam arcus A B divisus est in partes A O & B O æquales (29)