ELEMENTUM PROLEGOMENON.

1. DEFINITIO. Geometria est scientia extensorum, quatenus extensa sunt. Triplex autem est extensio : *longitudo, latitudo, altitudo.* Quod unicam habet extensionem, solam nempe longitudinem, *linea* dicitur : quod duas, cum longitudine scilicet latitudinem, *superficies* : quod tres, seu quod longum, latum, & altum est, *corpus* vocatur. *Punctum* dicimus, quod omnis extensionis expers est.

2. SCHOLION. *Generari concipimus lineam ex motu puncti : superficiem ex motu lineæ transverso : corpus ex motu superficiei in altum.*

3. COROLLARIUM. Terminus lineæ punctum est : superficiei linea : corporis superficies.

4. DEF. *Recta* linea est omnium inter eosdem terminos brevissima : *curva*, quâ brevior est alia inter eosdem terminos. Et *plana* superficies est omnium inter eosdem terminos minima : *curva*, quâ minor est alia inter eosdem terminos.

5. COROLL. I. Quoniam inter duo quævis

quævis puncta via brevissima tantùm una est; datis duobus lineæ rectæ punctis tota linea determinata est.

6. SCHOL. *In charta datis punctis applicata Regula rectam designabit. In campo fixis in data puncta baculis, plures deinde baculi in terram figuntur ità, ut oculo in primum directo reliqui non appareant.*

7. COROLL. II. Duæ lineæ rectæ nequeunt in duobus punctis concurrere: & dum linea lineam secat, sectio punctum est.

8. DEF. *Perimeter* superficiei est linea, quæ totam claudit superficiem.

9. DEF. *Circulus* est superficies pla-
F. 1. na, in qua unum est punctum C (*centrum* dicimus) à quo, quotquot ad perimetrum (*circumferentia* vocari hæc solet) duci possunt lineæ rectæ C A, C O, &c. (*radii* vocantur) omnes inter se æquales sunt. *Diameter* circuli est linea quævis recta A B per centrum ducta, utrimque desinens in circumferentia.

10. SCHOL. *Generari concipitur circulus, si radius* A C *centro affixus in orbem ducatur, donec ad punctum* A *redeat: ità enim punctum ejus extremum* A *circumferentiam, ipséque radius superficiem circuli describet.*

11. COROL. Duæ quævis lineæ rectæ æquales considerari possunt velut radii ejusdem circuli: & si utraque pun-

ctum

ctum extremum in centro habeat positum; utriusque terminus alter in circumferentia erit.

12. DEF. *Arcus* circuli est quævis circumferentiæ pars: *gradus* est circumferentiæ pars 360.ma : *minutum primum* est pars 60.ma unius gradûs : *minutum secundum* pars 60.ma primi, & ità porrò.

13. COROL. Circuli majoris majores, non plures, sunt gradus, quàm circuli minoris.

14. DEF. Duæ magnitudines dicuntur *congruere*, si altera alteri imponi ità possit, ut altera ultra alteram nullâ parte promineat, sed se mutuò omnino tegant.

15. AXIOMA. *Quæ congruunt, æqualia sunt.*

16. AXIOMA. *Quorum omnes simul termini congruunt, ea & ipsa congruunt.*

17. AXIOMA. *Rectæ lineæ, quæ non congruunt, sunt inæquales.*

18. THEOREMA. *Quævis diameter* AB *bifariam dividit & circumferentiam circuli, & ipsum circulum.*

DEMONSTRATIO. Intelligatur circulus circa diametrum AB complicatus, ut pars AEB incumbat parti AOB. Quoniam CE = CS (9) debebit, radio CE supra CS collocato, punctum E incumbere puncto S (17) eodem modo ostendam, quodvis aliud punctum arcûs AEB incumbere alicui puncto arcûs

ASB : toti ergò arcus congruunt (14) proinde æquales sunt (15) q. e. 1. Jam quoniam his arcubus, & communi diametro AB tanquam terminis (3) circuli partes AOBC & AEBC concluduntur ; his terminis congruentibus ipsæ etiam congruent (16) igitur æquales sunt (15) q. e. 2.

19. COROL. Alia quævis recta linea, quæ per centrum non ducitur, nec circulum, nec circumferentiam bifariam dividit.

20. AXIOMA. *Totum parte majus est, & æquale omnibus partibus simul sumptis.*

21. AXIOMA. *Si æqualibus æqualia addas, vel demas ; summæ æquales, & residua æqualia erunt.*

22. AXIOMA. *Æqualibus æqualia substituuntur salvâ quantitate.*

23. THEOR. *Si, duobus centris in recta* SB *assumptis, duo semicirculi super ea describantur ; nequeunt horum circumferentiæ in duobus punctis se secare.*

F. 2. DEMONST. I. *Si unius centrum* A *contineatur in altero, cujus centrum* C. secent se in E & O, si fieri potest : erit $OA + AC > OC$ (4) sed $OA = IA$, & $SC = OC$ (9) igitur $IA + AC > SC$ (22) quod quia repugnat (20) nequit in O fieri secunda sectio. q. e. d.

II. *Si unius centrum* B *sit extra alterum, cujus centrum* C. secent se in F & L, si fieri ſi fieri poteſt. Erit $CL = CD$, & $LB = VB$ (9) unde $CL + LB = CD + VB$ (21) quare $CL + LB < CD + DV + VB$ id eſt, $CL + LB < CB$. Quod quia repugnat (4) nequit in L fieri ſecunda ſectio. q. e. d.

24. COROL. Si circuli compleantur, idem eodem modo de reliquis ſemicirculis oſtendam. Integrorum ergo circulorum circumferentiæ in duobus duntaxat punctis ſe ſecant.

25. DEF. Angulus eſt duarum linearum in uno puncto conjunctarum mutua inclinatio. Lineas illas *crura*, punctum conjunctionis *verticem* dicimus.

26. SCHOL. *De ſolis angulis rectilineis loquimur, quorum nempe crura ſunt rectæ lineæ. Porrò cum in uno puncto plures junguntur anguli, ut unum ab altero* F. 1.
diſtinguamus, tribus literis utimur, eâ medio loco poſitâ, quæ vertici adſcripta eſt. Sic angulus ACO *ille eſt, quem in* C *efficiunt rectæ* AC *&* OC.

27. SCHOL. *Anguli cujusvis* ACO *vertex* C *conſiderari poteſt velut centrum circuli, cujus arcum aliquem* AO *intercipiant crura* AC *&* OC. *Hic arcus quò plures gradus continet, eò major dicitur angulus.* Itaque

28. DEF. Menſura cujusvis anguli ACO eſt arcus circuli ex vertice velut centro ab uno crure ad aliud deſcriptus,

ità, ut tot graduum & minutorum dicatur angulus, quot graduum eſt ille arcus.

29. COROL. Angulorum æqualium menſuræ æquales ſunt: & quorum menſuræ æquales ſunt, anguli æquales ſunt: & anguli majoris menſura major eſt, & minoris minor, & V. V.

30. AXIOMA. *Anguli congruunt, ſi, dum vertex vertici, & crus cruri imponitur, crus quoque alterum alteri incumbat.*

31. AXIOMA. *Anguli æquales congruunt.*

32. COROL. Quoniam anguli ACO & VCI congruunt (30) adeóque æquales ſunt (15) continebunt arcus AO & VI eundem graduum numerum (29) nihil ergo ad magnitudinem anguli confert longitudo linearum, nec refert, majore radio AC, an minore VC, intra crura arcus deſcribatur.

33. DEF. Superficies plana, cujus perimeter tribus tantùm lineis rectis (*latera* dicimus) ad tres angulos conjunctis conſtat, *triangulum* rectilineum appellatur.

34. POSTULATUM. *Ex quovis centro quovis radio deſcribi poteſt circulus: & ex duobus quibuslibet centris deſcribi poſſunt duo circulorum arcus ſe interſecantes in puncto quovis, quod non in eadem cum centris recta linea exiſtit.*

35. THEOR. *Si duorum triangulorum* ABC *&* DEF *omnia latera mutuò*

æqualia

æqualia fuerint (nempe AB = DE, AC = EF, BC = DF) *erunt omnes anguli æqualibus lateribus oppoſiti æquales* (*nempe* A = E, B = D, C = F) *ipſáque triangula æqualia.* F. 3.

DEMONST. Centris B & C radiis BA & CA ſcribantur arcus LAV & OAS ſe in A ſecantes (34) & imponatur triangulum DEF triangulo ABC, ità, ut lateribus BC & DF ſibi congruentibus (17) punctum D puncto B, & F puncto C incumbat. Jam quia DE = BA; exiſtet punctum E in arcu LAV (11) & quia FE = AC; exiſtet idem punctum E in arcu OAS (11) erit ergo punctum E in aliquo puncto, in quo ſe ſecant duo illi arcus: ſed hi in uno puncto A ſe ſecant (23) igitur punctum E incumbet puncto A. Congruunt ergo omnia latera (16) anguli proinde ab his formati congruunt (30) adeóque æquales ſunt (15) q. e. 1. Jam congruentibus lateribus ipſa congruunt triangula (16) ſunt ergo & illa æqualia (15) q. e. 2.

36. THEOR. *Si duorum triangulorum duo fuerint latera mutuò æqualia* (*nempe* AB = DE, AC = EF) *& anguli* A *&* E *iis lateribus comprehenſi æquales; erit quoque tertium latus* BC *æquale tertio* DF, *angulíque reliqui lateribus æqualibus oppoſiti æquales erunt, ipſáque triangula æqualia.*

Demonſt.

DEMONST. Imponantur sibi triangula ità, ut anguli A & E congruant (31) incumbent sibi mutuò crura DE & AB, EF & AC (30) quæ, cùm sint æqualia, planè congruent (17) igitur puncta D & B, F & C sibi incumbunt (14) & hinc latera DF & BC congruunt (16) igitur ea æqualia sunt (15) q. e. 1. Jam quoniam omnia latera sunt mutuò æqualia, necesse est & omnes angulos mutuò æquales esse, & ipsa triangula esse æqualia (35) q. e. 2.

37. THEOR. *Si duo triangula habuerint unum latus* BC *uni* DF *æquale, & & angulos iis lateribus adjacentes æquales (nempe* B = D, C = F) *erunt & reliqua latera æqualibus angulis opposita æqualia (nempe* AB = DE, AC = EF) *& reliqui anguli æquales, ipsáque triangula æqualia.*

DEMONST. Alterum alteri imponatur, ut congruant BC & DF (17) jam quia B = D, & C = F, incumbent sibi latera DE & AB, EF & AC (30 & 31) proinde punctum E incumbet alicui puncto tum lateris AB, tum lateris AC: id est, incumbet puncto A. Congruunt ergo omnia latera (16) quæ proinde mutuò æqualia sunt (15) q. e. 1. Unde sequitur & alterum (35) q. e. d.

Elementum