GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTA

THEORICO-PRACTICA

Methodo breviore conſcripta
& Prælectionibus publicis
In Gymnaſio Aquiſgranenſi
EXPLANATA
à

R. P. HENRICO ARBOSCH S. J.
Matheſeos Profeſſore.

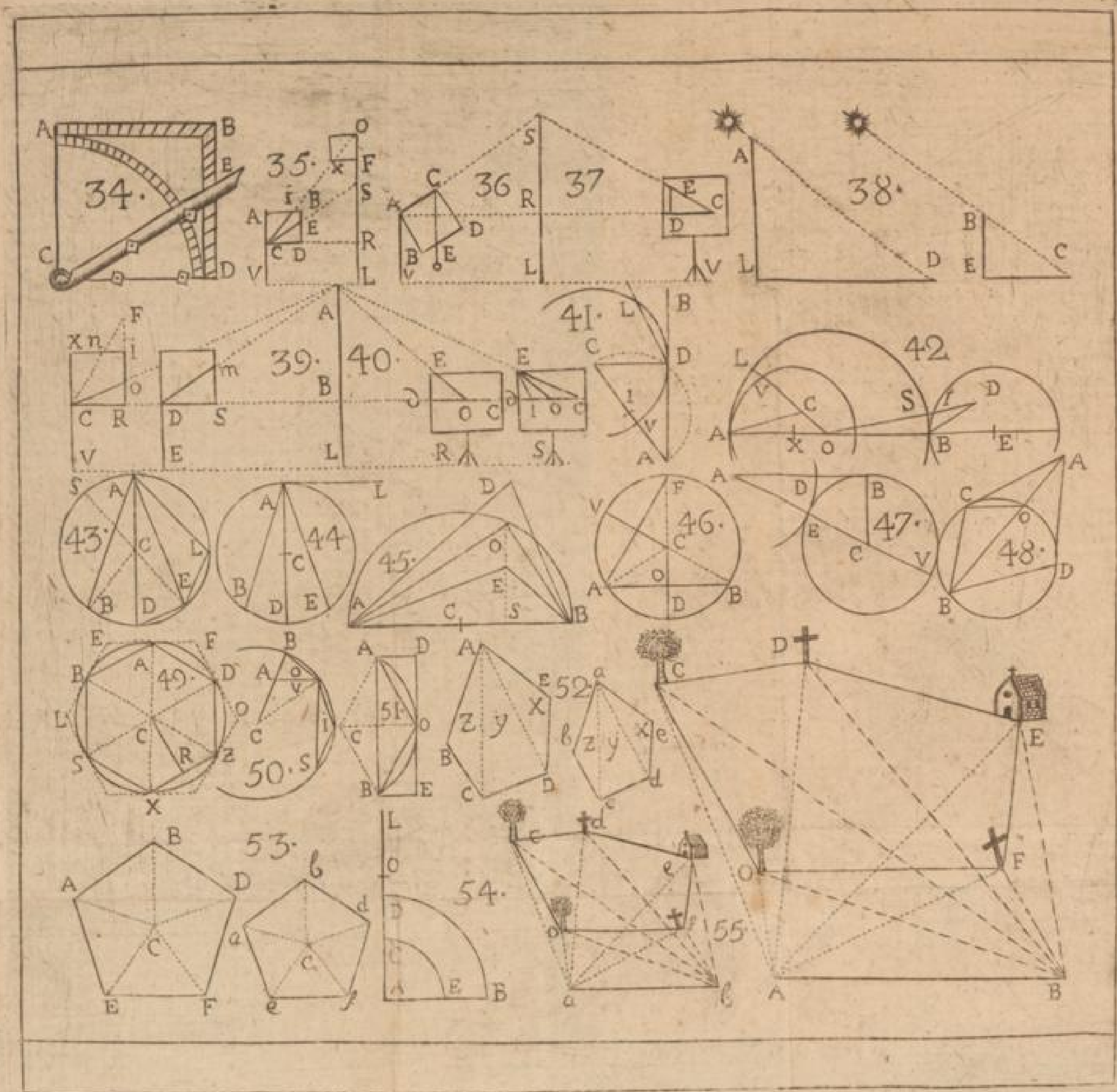
Typis J. W. Müller Typographi Aquisgr.
A. MDCCLXIII.

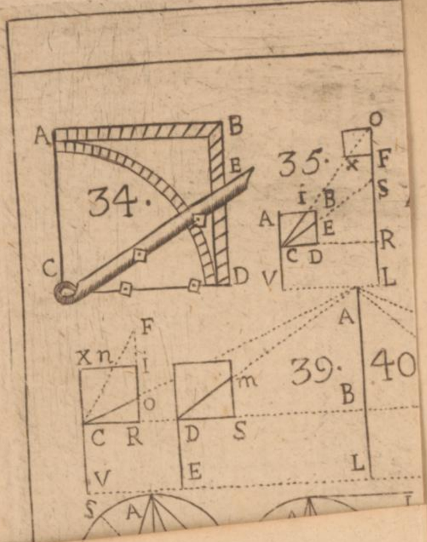
bre…

Et *plana* superficies est omnium inter eosdem terminos minima : *curva*, quâ minor est alia inter eosdem terminos.

5. COROLL. I. Quoniam inter duo

quævis


34.
35.
36
37
38.
39.
40
41.
42
43.
44
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51
52
53.
54.
55.



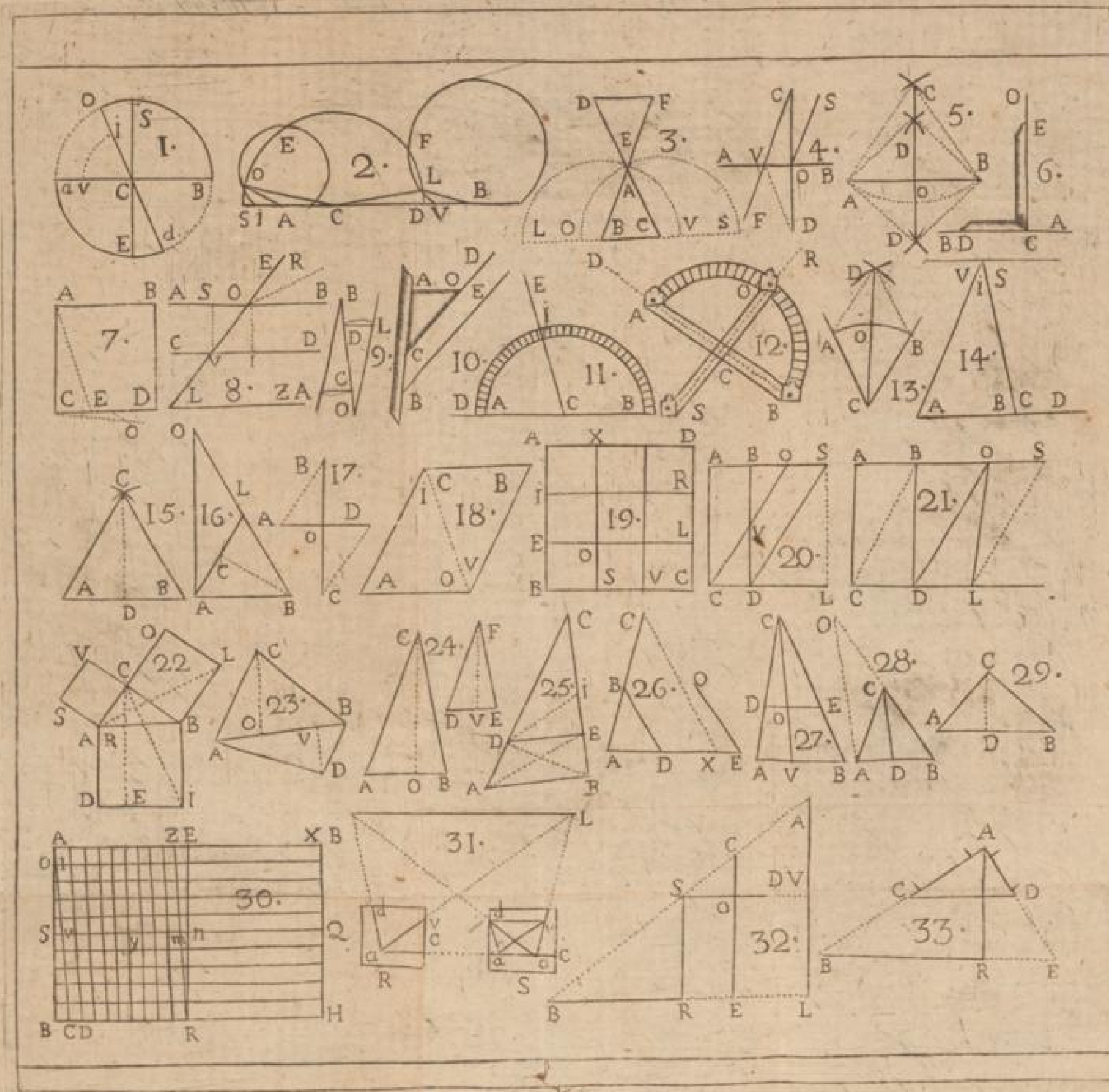
eo
br
Et
de
no

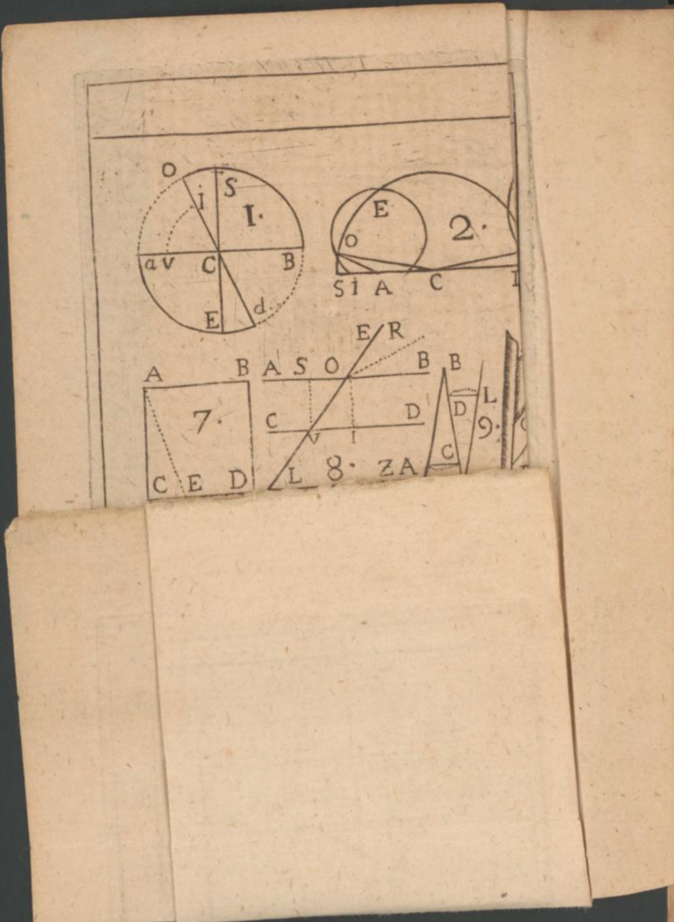
eosd

brevior est alia inter eosdem terminos. Et *plana* superficies est omnium inter eosdem terminos minima: *curva*, quâ minor est alia inter eosdem terminos.

5. COROLL. I. Quoniam inter duo

quævis


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.



P
r
tia
Tri
lati
exte
nen
gitu
quo
altu
mus
2
line
tu li
perfi
3.
neæ
pori
4.
eosd
brev
Et pl
dem
nor
5.

ELEMENTUM PROLEGOMENON.

1. DEFINITIO. Geometria est scientia extensorum, quatenus extensa sunt. Triplex autem est extensio: *longitudo*, *latitudo*, *altitudo*. Quod unicam habet extensionem, solam nempe longitudinem, *linea* dicitur: quod duas, cum longitudine scilicet latitudinem, *superficies*: quod tres, seu quod longum, latum, & altum est, *corpus* vocatur. *Punctum* dicimus, quod omnis extensionis expers est.

2. SCHOLION. *Generari concipimus lineam ex motu puncti: superficiem ex motu lineæ transverso: corpus ex motu superficiei in altum.*

3. COROLLARIUM. Terminus lineæ punctum est: superficiei linea: corporis superficies.

4. DEF. *Recta* linea est omnium inter eosdem terminos brevissima: *curva*, quâ brevior est alia inter eosdem terminos. Et *plana* superficies est omnium inter eosdem terminos minima: *curva*, quâ minor est alia inter eosdem terminos.

5. COROLL. I. Quoniam inter duo

quævis

quævis puncta via brevissima tantùm una est; datis duobus lineæ rectæ punctis tota linea determinata est.

6. SCHOL. *In charta datis punctis applicata Regula rectam designabit. In campo fixis in data puncta baculis, plures dein le baculi in terram figuntur ità, ut oculo in primum directo reliqui non appareant.*

7. COROLL. II. Duæ lineæ rectæ nequeunt in duobus punctis concurrere: & dum linea lineam secat, sectio punctum est.

8. DEF. *Perimeter* superficiei est linea, quæ totam claudit superficiem.

9. DEF. *Circulus* est superficies pla-
F. 1. na, in qua unum est punctum C (*centrum* dicimus) à quo, quotquot ad perimetrum (*circumferentia* vocari hæc solet) duci possunt lineæ rectæ CA, CO, &c. (*radii* vocantur) omnes inter se æquales sunt. *Diameter* circuli est linea quævis recta AB per centrum ducta, utrimque desinens in circumferentia.

10. SCHOL. *Generari concipitur circulus, si radius* AC *centro affixus in orbem ducatur, donec ad punctum* A *redeat: ità enim punctum ejus extremum* A *circumferentiam, ipséque radius superficiem circuli describet.*

11. COROL. Duæ quævis lineæ rectæ æquales considerari possunt velut radii ejusdem circuli: & si utraque punctum

ctum extremum in centro habeat positum; utriusque terminus alter in circumferentia erit.

12. DEF. *Arcus* circuli est quævis circumferentiæ pars: *gradus* est circumferentiæ pars 360.ma : *minutum primum* est pars 60.ma unius gradûs : *minutum secundum* pars 60.ma primi, & ità porrò.

13. COROL. Circuli majoris majores, non plures, sunt gradus, quàm circuli minoris.

14. DEF. Duæ magnitudines dicuntur *congruere*, si altera alteri imponi ità possit, ut altera ultra alteram nullâ parte promineat, sed se mutuò omnino tegant.

15. AXIOMA. *Quæ congruunt, æqualia sunt.*

16. AXIOMA. *Quorum omnes simul termini congruunt, ea & ipsa congruunt.*

17. AXIOMA. *Rectæ lineæ, quæ non congruunt, sunt inæquales.*

18. THEOREMA. *Quævis diameter* AB *bifariam dividit & circumferentiam circuli, & ipsum circulum.*

DEMONSTRATIO. Intelligatur circulus circa diametrum AB complicatus, ut pars AEB incumbat parti AOB. Quoniam CE = CS (9) debebit, radio CE supra CS collocato, punctum E incumbere puncto S (17) eodem modo ostendam, quodvis aliud punctum arcûs AEB incumbere alicui puncto arcûs

ASB : toti ergò arcus congruunt (14) proinde æquales sunt (15) q. e. 1. Jam quoniam his arcubus, & communi diametro AB tanquam terminis (3) circuli partes AOBC & AEBC concluduntur; his terminis congruentibus ipsæ etiam congruent (16) igitur æquales sunt (15) q. e. 2.

19. COROL. Alia quævis recta linea, quæ per centrum non ducitur, nec circulum, nec circumferentiam bifariam dividit.

20. AXIOMA. *Totum parte majus est, & æquale omnibus partibus simul sumptis.*

21. AXIOMA. *Si æqualibus æqualia addas, vel demas; summæ æquales, & residua æqualia erunt.*

22. AXIOMA. *Æqualibus æqualia substituuntur salvâ quantitate.*

23. THEOR. *Si, duobus centris in recta* SB *assumptis, duo semicirculi super ea describantur; nequeunt horum circumferentiæ in duobus punctis se secare.*

F. 2. DEMONST. I. *Si unius centrum* A *contineatur in altero, cujus centrum* C. secent se in E & O, si fieri potest : erit OA † AC > OC (4) sed OA = IA, & SC = OC (9) igitur IA † AC > SC (22) quod quia repugnat (20) nequit in O fieri secunda sectio. q. e. d.

II. *Si unius centrum* B *sit extra alterum, cujus centrum* C. secent se in F & L, si fieri si fieri potest. Erit CL = CD, & LB = VB (9) unde CL + LB = CD + VB (21) quare CL + LB < CD + DV + VB id est, CL + LB < CB. Quod quia repugnat (4) nequit in L fieri secunda sectio. q. e. d.

24. COROL. Si circuli compleantur, idem eodem modo de reliquis semicirculis ostendam. Integrorum ergo circulorum circumferentiæ in duobus duntaxat punctis se secant.

25. DEF. Angulus est duarum linearum in uno puncto conjunctarum mutua inclinatio. Lineas illas *crura*, punctum conjunctionis *verticem* dicimus.

26. SCHOL. *De solis angulis rectilineis loquimur, quorum nempe crura sunt rectæ lineæ. Porrò cum in uno puncto plures junguntur anguli, ut unum ab altero distinguamus, tribus literis utimur, eâ medio loco positâ, quæ vertici adscripta est. Sic angulus* ACO *ille est, quem in* C *efficiunt rectæ* AC *&* OC. F. 1.

27. SCHOL. *Anguli cujusvis* ACO *vertex* C *considerari potest velut centrum circuli, cujus arcum aliquem* AO *intercipiant crura* AC *&* OC. *Hic arcus quò plures gradus continet, eò major dicitur angulus.* Itaque

28. DEF. Mensura cujusvis anguli ACO est arcus circuli ex vertice velut centro ab uno crure ad aliud descriptus,

ità, ut tot graduum & minutorum dicatur angulus, quot graduum eſt ille arcus.

29. COROL. Angulorum æqualium menſuræ æquales ſunt: & quorum menſuræ æquales ſunt, anguli æquales ſunt: & anguli majoris menſura major eſt, & minoris minor, & V. V.

30. AXIOMA. *Anguli congruunt, ſi, dum vertex vertici, & crus cruri imponitur, crus quoque alterum alteri incumbat.*

31. AXIOMA. *Anguli æquales congruunt.*

32. COROL. Quoniam anguli ACO & VCI congruunt (30) adeóque æquales ſunt (15) continebunt arcus AO & VI eundem graduum numerum (29) nihil ergo ad magnitudinem anguli confert longitudo linearum, nec refert, majore radio AC, an minore VC, intra crura arcus deſcribatur.

33. DEF. Superficies plana, cujus perimeter tribus tantùm lineis rectis (*latera* dicimus) ad tres angulos conjunctis conſtat, *triangulum* rectilineum appellatur.

34. POSTULATUM. *Ex quovis centro quovis radio deſcribi poteſt circulus: & ex duobus quibuslibet centris deſcribi poſſunt duo circulorum arcus ſe interſecantes in puncto quovis, quod non in eadem cum centris recta linea exiſtit.*

35. THEOR. *Si duorum triangulorum* ABC & DEF *omnia latera mutuò*

æqualia

æqualia fuerint (nempe AB = DE, AC = EF, BC = DF) *erunt omnes anguli æqualibus lateribus oppositi æquales* (*nempe* A = E, B = D, C = F) *ipsáque triangula æqualia.* F. 3.

DEMONST. Centris B & C radiis BA & CA scribantur arcus LAV & OAS se in A secantes (34) & imponatur triangulum DEF triangulo ABC, ità, ut lateribus BC & DF sibi congruentibus (17) punctum D puncto B, & F puncto C incumbat. Jam quia DE = BA; existet punctum E in arcu LAV (11) & quia FE = AC; existet idem punctum E in arcu OAS (11) erit ergo punctum E in aliquo puncto, in quo se secant duo illi arcus: sed hi in uno puncto A se secant (23) igitur punctum E incumbet puncto A. Congruunt ergo omnia latera (16) anguli proinde ab his formati congruunt (30) adeóque æquales sunt (15) q. e. 1. Jam congruentibus lateribus ipsa congruunt triangula (16) sunt ergo & illa æqualia (15) q. e. 2.

36. THEOR. *Si duorum triangulorum duo fuerint latera mutuò æqualia* (*nempe* AB = DE, AC = EF) *& anguli* A *&* E *iis lateribus comprehensi æquales; erit quoque tertium latus* BC *æquale tertio* DF, *angulíque reliqui lateribus æqualibus oppositi æquales erunt, ipsáque triangula æqualia.*

Demonst.

DEMONST. Imponantur ſibi triangula ità, ut anguli A & E congruant (31) incumbent ſibi mutuò crura DE & AB, EF & AC (30) quæ, cùm ſint æqualia, planè congruent (17) igitur puncta D & B, F & C ſibi incumbunt (14) & hinc latera DF & BC congruunt (16) igitur ea æqualia ſunt (15) q. e. 1. Jam quoniam omnia latera ſunt mutuò æqualia, neceſſe eſt & omnes angulos mutuò æquales eſſe, & ipſa triangula eſſe æqualia (35) q. e. 2.

37. THEOR. *Si duo triangula habuerint unum latus* BC *uni* DF *æquale, & angulos iis lateribus adjacentes æquales (nempe* B = D, C = F) *erunt & reliqua latera æqualibus angulis oppoſita æqualia (nempe* AB = DE, AC = EF) *& reliqui anguli æquales, ipſáque triangula æqualia.*

DEMONST. Alterum alteri imponatur, ut congruant BC & DF (17) jam quia B = D, & C = F, incumbent ſibi latera DE & AB, EF & AC (30 & 31) proinde punctum E incumbet alicui puncto tum lateris AB, tum lateris AC: id eſt, incumbet puncto A. Congruunt ergo omnia latera (16) quæ proinde mutuò æqualia ſunt (15) q. e. 1. Unde ſequitur & alterum (35) q. e. d.

Elementum

ELEMENTUM II.

De Lineis perpendicularibus, obliquis, parallelis, & qui ab his formantur Angulis.

38. DEF. Si anguli ACO crus unum AC producatur in B, ità, ut ACB sit recta linea; dicuntur anguli ACO & OCB *deinceps positi.* F. 1

39. THEOR. *Anguli deinceps positi simul sumpti pro mensura habent arcum semicirculi.*

DEMONST. Centro C scripto circulo, erit AB diameter (9) unde AO † OB arcus semicirculi (18) jam anguli ACO & OCB pro suis mensuris habent arcus AO & BO (28) utriusque ergo mensuræ conjunctæ arcum semicirculi efficiunt, q. e. d.

40. COROL. Anguli deinceps positi simul sumpti continent 180 gradus (12)

41. DEF. Angulus *rectus* ACS dicitur, cui æqualis est deinceps positus SCB. Angulus *obliquus* est, cui deinceps positus inæqualis est. Obliquus ACO, qui recto minor est, vocatur *acutus* : obliquus OCB, qui recto major est, *obtusus* dicitur.

42. COROL. I. Si ex angulis deinceps positis unus rectus est, rectus erit & alter.

43. Cor-

43. COROL. II. Et quoniam ambo ſimul pro menſura habent arcum ſemicirculi (39) ſeu 180 gr. ; cùm ſint æquales (41) quilibet rectus pro menſura habebit quadrantem , ſeu 90 gr. (29) ac porrò integra circuli circumferentia menſura eſt 4 rectorum.

44. COROL. III. Omnes ergo recti anguli ſunt inter ſe æquales (29.)

45. COROL. IV. Anguli deinceps poſiti ſimul ſumpti valent duos rectos (40) adeóque duo deinceps poſiti duobus aliis deinceps poſitis æquales ſunt.

46. COROL. V. Si ex angulis deinceps poſitis unus *acutus* eſt ; erit alter *obtuſus*, & contra (41)

47. COROL. VI. Etiamſi ſupra rectam AB in puncto C quotcunque convenerint lineæ OC, SC &c. omnes anguli in C formati duos rectos ſimul ſumpti adæquant : omnium enim menſuræ conjunctæ arcum ſemicirculi complent.

48. COROL. VII. Etſi ex eodem puncto C ſupra & infra rectam AB ducantur lineæ quotlibet ; omnes ſimul anguli adæquant 4 rectos : omnium enim menſuræ implent circumferentiam circuli, quæ metitur 4 rectos (43)

49. COROL. VIII. Si in uno puncto C tres lineæ rectæ AC, OC, BC conjungantur , ità , ut duo anguli contigui ACO & OCB ſimul ſumpti duobus

rectis

rectis æqnales sint; extremæ AC & BC unam efficient rectam lineam ACB. Cùm enim anguli recti mensura sit quadrans (43) duorum illorum angulorum mensuræ AO & OB semicirculi arcum complebunt: unde ACB diameter est (19) adeóque recta linea (9)

50. DEF. Si duæ rectæ AB & OD se secant in C, quatuor fiunt anguli, ex quibus ii dicuntur *ad verticem oppositi*, qui sibi non sunt deinceps positi, nimirum ACO & DCB, ACD & OCB.

51. AXIOMA. *Quæ eidem, vel æqualibus æqualia sunt, inter se quoque æqualia sunt.*

52. AXIOMA. *Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero majus vel minus est.*

53. AXIOMA. *Utì inter se sunt tota, ità & dimidia: partes tertiæ: quartæ: & quævis partes similes*

54. THEOR. *Anguli ad verticem oppositi æquales sunt.*

DEMONST. ACO † OCB = 180 gr., & DCB † OCB = 180. gr. (40) hinc ACO † OCB = DCB † OCB (51) proinde ACO = DCB (21) Eodem modo ostendam, quòd ACD = OCB q. e. d.

55. DEF. Recta CO alteri rectæ AB ità insistens, ut in neutram partem magìs inclinetur, dicitur *perpendicularis* ad lineam F. 4. AB.

AB. Recta SO, quæ in partem alterutram magis inclinatur, ad lineam AB *obliqua* dicitur.

56. COROL. I. Perpendicularis CO facit angulos AOC & BOC æquales (25) adeóque rectos (41)

57. COROL. II. Perpendicularis non est, quæ cum altera angulum efficit obliquum (41)

58. COROL. III. Recta linea alteri perpendicularis est, si cum illa faciat duos rectos angulos, imò si unum rectum (42)

59. COROL. IV. Si linea una ad alteram perpendicularis est; etiam hæc ad illam perpendicularis erit.

60. THEOR. *Supra rectam* AB *ex puncto quovis una tantùm perpendicularis duci potest.*

DEMONST. I. Ex puncto C extra rectam dato ducta sit perpendicularis CO: dico quamlibet aliam CV esse obliquam. Nam utrâque in D & F productâ, fiat DO = CO & ducatur recta DV. Quoniam COV rectus est (57) etiam DOV rectus erit (42) unde COV = DOV (44) igitur cum DO = CO, & VO = VO; erit angulus CVO = DVO (36) Jam si CV sit perpendicularis; erit CVO rectus (57) igitur & DVO rectus erit: & AVF pariter rectus (54) itaque AVF † DVO = 180. gr., proinde AVF † DVO † DVF > 180 gr., quod cùm re-

pugnet

pugnet (47) nequit CV esse perpendicularis. q. e. 1.

II. Ex puncto O in recta AB dato ducta sit OC perpendicularis: dico quamvis aliam OS obliquam esse. Nam COB rectus est (57) adeóque SOB acutus (41) igitur OS obliqua (57) q. e. 2.

61. COROL. Duæ perpendiculares ad eandem rectam ductæ nequeunt in uno puncto concurrere.

62. THEOR. *Perpendicularis CO brevior est, quàm alia quævis CV ab eodem puncto C ad eandem rectam AB ducta.*

DEMONST. Producatur CO, & fiat DO = CO: denique ducatur DV. Quoniam DO = CO, VO = VO, & anguli in O recti (57 & 42) adeóque æquales (44) erit DV = CV (36) sicut DO = CO, sed CV + DV > CO + DO (4) igitur & CV > CO (53) q. e. d.

63. COROL. Hoc ipso linea perpendicularis est, quòd sit brevissima omnium, quæ ab eodem puncto ad eandem rectam duci possunt.

64. PROBLEMA. *Ex puncto O in recta AB dato perpendicularem erigere.*

SOLUTIO I. Nota partes hinc inde æquales AO & BO. II. Centris A & B radiis æqualibus scribe duos arcus se in aliquo puncto C secantes. III. Per C & O ducta recta CO erit perpendicularis. F. 5.

Demonst.

DEMONST. AO = BO & AC = BC *ex constructione* : dein CO = CO : igitur angulus AOC = BOC (35) uterque ergo rectus est (41) ideóque CO perpendicularis (58) q. e. d.

65. PROBL. *Ex puncto C extra rectam AB dato perpendicularem ducere.*

SOLUTIO. I. Centro C scribe arcum, qui rectam AB secet in duobus quibuscunque punctis A & B. II. Centris A & B, radiis æqualibus scribe duos arcus in puncto quovis D se secantes. III. Per C & D ducta recta CO perpendicularis est.

DEMONST. AC = BC, & AD = BD *ex constr.* : dein CD = CD : igitur anguli in C æquales sunt (35) Quare cùm in triangulis AOC & BOC sit AC = BC, & CO = CO, & anguli in C æquales, erit etiam angulus AOC = BOC (36) uterque ergo rectus est (41) unde CO perpendicularis (58)) q. e. d.

66. PROBL. *Rectam AB bifariam dividere, ductâ per punctum ejus medium perpendiculari.*

SOLUTIO. I. Punctis extremis A & B velut centris, radiis æqualibus, scribe duos arcus se secantes in aliquo puncto C. II. Iisdem centris, radiis pariter æqualibus scribe duos alios arcus se secantes in alio puncto D. III. Producta per C & D recta secabit AB in O bifariam, erítque perpendicularis.

Dem.

DEMONST. In triangulis AOC & BOC, uti ex *demonst.* præcedente patet, duo sunt latera mutuò æqualia comprehendentia in C æquales angulos : igitur AO = BO (36) q. e. 1. Hinc porrò angulus AOC = BOC (35) uterque ergo rectus est (41) ergo CO perpendicularis (58) q. e. 2.

67. SCHOL. *Si normam, id est, duas regulas* EC & CD *ad angulum rectum conjunctas, habueris ; faciliùs datæ rectæ* AB *ex quovis puncto perpendicularem duces. Porrò sítne accuratè constructa norma, sic invenies : latere* CD *rectæ* AB *applicato, juxta latus* EC *duc rectam* OC : *tum normam circà latus* EC *converte : si angulus normæ* ECD *congruat angulo* ECA, *norma accurata est, quia* ECD = ECB = ECA, *adeóque singuli recti sunt* (41) F.64.

68. DEF. Distantia duorum terminorum est linea omnium, quæ ab uno ad alterum duci possunt, brevissima.

69. COROL. Distantia unius lineæ rectæ ab altera est perpendicularis ab una ad alteram ducta (62)

70. DEF. Duæ lineæ vocantur *parallelæ*, quarum, quousque etiam producantur, æqualis semper est à se mutuò distantia.

71. COROL. I. Parallelæ, etiam in infinitum productæ, nunquam concurrunt.

72. Cor.

72. COROL. II. Omnes perpendiculares, quæ ab una parallela ad alteram duci possunt, sunt æquales (69)

73. POSTULAT. *Ex quovis puncto datæ rectæ indefinitæ duci potest tum perpendicularis, tum parallela.*

74. THEOR. *Quæ uni parallelarum perpendicularis est, etiam alteri perpendicularis est.*

DEMONST. Sit AC perpendicularis uni parallelæ CD: dico, erit talis &
F.7. alteri AB. Si negas, poterit ex A ad AB alia duci perpendicularis (73) sit illa AE: hæc ipsi CD perpendicularis esse nequit (61) proinde AE > AC (62) quod quia repugnat (72) patet q. e. d.

75. THEOR *Eidem rectæ* AB *per idem punctum* C *duci nequeunt duæ parallelæ* CD & CO.

DEMONST. Si tam CO, quàm CD sit rectæ AB parallela; ducta ex C ad AB perpendicularis CA erit quoque perpendicularis tum ipsi CD, tum ipsi CO (74) quare ACD & ACO sunt recti anguli (57) adeoque ACD = ACO (44) quod quia repugnat (20) patet. q. e. d.

76. THEOR. *Si recta* AC *perpendicularis sit ad duas* AB & CD, *vel, quod idem est* (59) *si duæ* AB & CD *perpendiculares sint ad eandem* AC, *illæ erunt parallelæ.*

DEMONST. Secus enim ex puncto

C duci

C duci poterit alia C O rectæ AB parallela (73) cui pariter A C perpendicularis erit (74) iterum ergo A C D & A C O erunt anguli recti (57) & æquales (44) quod quia repugnat (20) oportet A B & C D esse parallelas. q. e. d.

77. COROL. I. Perpendiculares A C & B D inter duas parallelas interceptæ sunt inter se parallelæ: utraque enim utrique parallelarum est perpendicularis (74)

78. COROL. II. Parallelarum partes A B & C D interceptæ inter perpendiculares A C & B D, sunt inter se æquales. Nam quia perpendiculares A C & B D sunt inter se parallelæ (77) iisque vicissim perpendiculares sunt A B & C D (59) has necesse est esse æquales (72)

79. PROBL. *Rectæ* C D *parallelam ducere per punctum* A.

SOLUTIO. I. Ex A in C D duc perpendicularem A C (65) II. Huic ex A duc perpendicularem A B (64) hæc erit rectæ C D parallela.

DEMONST. A C perpendicularis est tum rectæ C D *per constr.*, tum rectæ A B (59) ergo A B & C D sunt parallelæ (76) q. e. d.

80. DEF. Si duas rectas A B & C D secat recta E L, *alterni* anguli vocantur A O V & O V D, C V O & V O B, quorum nempe uterque *intra* lineas sectas *F.8.*

 continetur,

continetur, ſed ad diverſa ſecantis latera, nec alter alteri deinceps ponitur.

81. THEOR. *Si parallelas* AB *&* CD *ſecat recta* EL; *anguli alterni æquales ſunt.*

DEMONST. Perpendiculares SV & OI æquales ſunt (72) & SO = VI (78) dein VO = VO: igitur angulus SOV = OVI (35) q. e. 1. Jam SOV † VOB = OVI † OVC (45) ablatis ergo SOV & OVI per part. I. æqualibus, relinquetur VOB = OVC (21) q. e. 2.

82. THEOR. *Si alterni anguli* OVC *&* VOB *æquales fuerint; erunt rectæ* AB *&* CD *parallelæ.*

DEMONST. Secus enim per punctum O ducta ſit alia OR rectæ CD parallela (73) erit OVC = VOR (81) ſed *ex hypotheſi* OVC = VOB: igitur VOR = VOB (51) quòd cùm repugnet (20) neceſſe eſt AB & CD eſſe parallelas. q.e.d

83. DEF. Si rectas AB & CD ſecat recta EL, anguli AOV & CVO, item BOV & OVD vocantur *interni ad eandem partem*, quorum nempe uterque intra lineas ſectas, & ad idem ſecantis latus exiſtit.

84. THEOR. *Si parallelas* AB *&* CD *ſecat recta* EL; *anguli ad eandem partem interni ſimul ſumpti duos adæquant rectos.*

DEMONST. AOV † VOB = 180 gr.

gr. (40) AOV = OVD (81) ergo OVD † VOB = 180 gr. (22) q. e. 1. Jam AOV † VOB = 180. gr. (40) VOB = OVC (81) igitur AOV † OVC = 180 gr. (22) q. e. 2.

85. THEOR. *Si duo ad eandem partem interni anguli* AOV † OVC *duos adæquant rectos; sunt* AB & CD *parallelæ.*

DEMONST. OVD † OVC = 180 gr. (40) igitur si AOV † OVC = 180 gr., erit OVD † OVC = AOV † OVC (51) adeóque OVD = AOV (21) proinde sunt AB & CD parallelæ (82) q. e. d.

86. DEF. Si rectas AB & CD secat recta EL, *externi* anguli vocantur EOB, EOA, LVC, LVD, qui nempe formantur *extra* lineas sectas. Ex his quilibet *opponi* dicitur interno illi, cui non est deinceps positus, & qui ad idem secantis latus exiſtit. Nimirum *externus* LVD *interno* VOB ad idem latus opponitur &c.

87. THEOR. *Si parallelas* AB & CD *secat recta* EL; *angulus externus æqualis est interno ad idem latus opposito.*

DEMONST. LVD † OVD = 180 gr. (40) VOB † OVD = 180 gr. (84) ergo LVD † OVD = VOB † OVD (51) adeóque LVD = VOB (21) Eodem modo idem oſtendam de quovis alio externo & opposito interno. q. e. d.

88. THEOR. *Si angulus externus* LVD *æqualis est interno* VOB *ad idem latus opposito; sunt* AB *&* CD *parallelæ.*

DEMONST. LVD+OVD = 180 gr. (40) si igitur sit LVD = VOB; erit VOB+OVD = 180 gr. (22) adeóque AB & CD sunt parallelæ (85) q. e. d.

89. THEOR. *Si* AB *&* LZ *parallelæ sint eidem tertiæ* CD; *inter se quoque sunt parallelæ.*

DEMONST. Ductâ secante EL erit EOB = EVD, & ELZ = EVD (87) hinc EOB = ELZ (51) igitur AB & LZ sunt parallelæ (88) q. e. d.

90. THEOR. *Si super recta* CD *erigantur duæ perpendiculares æquales* VS *&* IO; *per extrema harum puncta ducta recta* AB *rectæ* CD *parallela est.*

DEMONST. VS & IO parallelæ sunt (76) ductâ ergo secante EL erit angulus SVO = VOI (81) quia ergo VS = IO *ex hyp.*, & VO = VO, erit etiam angulus SOV = OVI (36) hinc AB & CD parallelæ (82) q. e. d.

91. PROBL. *Angulo* B *alium æqualem facere.*

SOLUTIO. I. Centro B intra dati crura radio quovis BA scribe arcum AC. II.
F. 9. Eodem radio centro quovis O scribe alium arcum. III. Circino cape intervallum AC, ídque in arcum secundum transfer ex D in L, ut sit recta DL = AC.

IV. Ex

IV. Ex D & L in O duc rectas : erit angulus DOL = ABC.

DEMONST. In triangulis ABC & DOL *ex constr.* sunt omnia latera mutuò æqualia : ergo O = B (35) q. e. d.

92. COROL. Hinc ducitur modus facilior rectæ AB per datum punctum O ducendi parallelam OL : nam ductâ rectâ BO fiat angulus O = B (91) & erit crus OL cruri AB parallelum (82)

93. SCHOL. *Faciliùs in charta rectæ* BE *parallela* CD *per datum punctum* O *ducitur ope regulæ* AB, *& cujusvis trianguli ex solida materia confecti* ACO. *Nempe rectæ* BE *applico trianguli latus* CO : *lateri* AC *apprimo regulam* AB : *tum regulâ immotâ promoveo triangulum (ità tamen, ut latus* AC *semper regulæ congruat) donec latus* CO *transeat per datum punctum* O : *ducta* CD *erit rectæ* BE *parallela. Nam angulus* ACO = ACD, *&* ACO = ABE (15) *proinde* ACD = ABE (51) *itaque* CD *&* BE *sunt parallelæ* (88) *F.* 10.

94. DEF. Semicirculus AIB ex materia solida confectus, cujus circumferentia in 180 gr. divisa est, vocatur *Transportator*. *F.* 11.

95. PROBL. *Angulum* DCE *in charta descriptum metiri.*

SOLUTIO. I. Vertici C impone transportatoris centrum C, ità, ut diameter AB incumbat cruri DC. II. Nota punctum I, in quo crus alterum CE circumferentiam quasi secat. III. Numera gradus in arcu AI contentos; tot enim graduum est angulus DCE (28)

96. PROBL. *In charta angulum quotlibet graduum describere.*

SOLUTIO. *Sit faciendus angulus 60 graduum.* I. Duc rectam DC, eique applica transportatorem, ità, ut diameter AB ei incumbat, & centrum C puncto extremo congruat. II. In circumferentia quære gradum 60.mum, è regione cujus chartæ imprimes punctum I. III. Ductâ per C & I rectâ erit DCE = 60 gr. (28)

97. DEF. Si transportatoris diame-
F. trum AB duabus *dioptris* (id est, lami-
12. nis perpendiculariter erectis, & exiguo foramine pertusis) instruas: & præterea addas regulam SO circa centrum C mobilem, & dioptris pariter instructam; instrumentum habebis, quod *astrolabium* dicimus, baculo tripodi imponendum, ut erectus per dioptras collimare possis.

98. PROBL. *In campo angulum* DCR *metiri.*

SOLUTIO. I. Positis, aut designatis in utroque crure signis D & R, ità astrolabium statue, ut ejus centrum C vertici C respondeat. II. Ità astrolabium verte, ut per dioptras diametri conspicias signum D. III. Regulam SO ità converte,

verte, ut per ejus dioptras appareat signum R. IV. Numera gradus in arcu A O contentos : totidem gradus continet angulus D C R (28)

99. PROBL. *Angulum quotvis graduum in campo designare.*

SOLUTIO. I. In vertice anguli designandi posito astrolabio, colloca signum D ità, ut per dioptras diametri conspiciatur. II. Astrolabio immoto dirigatur regula mobilis ad gradum datum O. III. Per dioptras regulæ respiciens jube collocari signum R ità, ut per dioptras tibi appareat. IV. Ductæ ex loco astrolabii C in D & R rectæ angulum efficient desideratum D C R (28)

100. COROL. Patet igitur modus in campo ducendi parallelas (92) perpendicularem verò duxeris, si angulum designaveris *rectum* (58)

101. PROBL. *Quemvis angulum* A C B *bifariam dividere.*

SOLUTIO. I. Centro C duc arcum A B. II. Centris A & B radiis A D & B D æqualibus scribe duos arcus se in aliquo puncto D secantes (34) III. Ex D in C ducta recta faciet A C D = B C D. F. 13.

DEMONST. A C = B C (9) A D = B D *ex constr.*, & D C = D C : igitur angulus A C D = B C D (35) q. e. d.

102. COROL. Eàdem operà etiam arcus A B divisus est in partes A O & B O æquales (29)

ELEMENTUM III.

De Angulis, & Lateribus Triangulorum.

103. THEOR. *Cujusvis trianguli tres simul anguli duos efficiunt rectos.*

F. 14. DEMONST. Cuivis lateri AB per angulum oppositum I ducatur parallela VS: erit V † I † S = 180 gr. (47) jam V = A, & S = B (81) ergo A † I † B = 180 gr. (22) q. e. d.

104. COROL. I. Summa angulorum unius trianguli æqualis est summæ angulorum alterius trianguli.

105. COROL. II. Si nota est summa duorum angulorum; tertius invenitur summam duorum subtrahendo ex 180 gr.: simili modo, si unus innotescat, invenitur summa duorum reliquorum.

106. COROL. III. In quovis triangulo duorum quorumvis angulorum summa minor est duobus rectis.

107. COROLL. IV. Si unus trianguli angulus *rectus* est, duo reliqui sunt acuti, & simul sumpti unum rectum efficiunt.

108. COROL. V. Si unus trianguli angulus *obtusus* est; duo reliqui sunt acuti, & simul sumpti uno recto minores.

109. COROL. VI. Si unus trianguli angulus æqualis est summæ reliquorum; is rectus est.

Corol.

110. COROL. VII. Si summa duorum in uno æqualis est summæ duorum in altero triangulo; etiam tertius est tertio æqualis : & si unus in uno æqualis fuerit uni in altero triangulo ; summæ etiam reliquorum æquales erunt.

111. DEF. *Externus* figuræ angulus est, qui uno latere producto oritur extra figuram : *interni* huic *oppositi* sunt illi, quibus non est *deinceps positus*.

112. THEOR. *Quovis trianguli latere producto, externus angulus* C *æqualis est summæ duorum internorum oppositorum* A†I.

DEMONST. A†I†B = 180gr.(103) & B†C = 180. gr. (40) ergo A†I†B = B†C(51) itaque A†I = C(21) q. e. d.

113. COROL. Externus angulus major est quovis interno opposito seorsim sumpto.

114. THEOR. *Duorum quorumvis trianguli laterum summa* AC†BC *major est latere tertio* AB.

DEMONST. AB recta est linea (33)
proinde AC†BC recta non est (7) igi- F.
tur AC†BC > AB (4) q. e. d. 15.

115. DEF. Triangulum, cujus duo sunt latera æqualia, *æquicrurum*, græcè *Isosceles*, vocatur.

116. THEOR. *In triangulo æquicruro anguli, qui æqualibus lateribus opponuntur, æquales sunt.*

DEMONST. Sit AC = BC : dico, erit A = B. Angulum enim tertium C bifariam dividat recta DC : in triangulis ACD & BCD erit AC = BC, DC = DC, & angulus ACD = BCD : ergo A = B (36) q. e. d.

117. DEF. Triangulum *æquilaterum* eſt, cujus omnia latera ſunt æqualia.

118. COROL. I. Triangulum, quod æquilaterum eſt, eſt quoque æquicrurum: adeóque in æquilatero etiam triangulo, qui æqualibus lateribus opponuntur anguli, æquales ſunt (116)

119. COROL. Omnes ergo in æquilatero triangulo anguli ſunt æquales.

120. COROL. III. Et quia trium angulorum ſumma continet duos rectos, ſeu 180 gr., his triſariam diviſis patet, quemlibet trianguli æquilateri angulum continere 60. gr.

121. PROBL. *Super data recta* AB *triangulum æquicrurum conſtruere.*

SOLUTIO I. Centris A & B radiis quibusvis, ſed æqualibus, AC & BC, ſcribe duos arcus ſe ſecantes. II. Ex A & B ad punctum ſectionis C ductæ rectæ AC & BC facient ABC æquicrurum (115)

122. COROL. I. Æquilaterum triangulum eodem modo feceris, ſi arcus duxeris radiis rectæ AB æqualibus.

123. COROL. II. Quia quilibet trianguli

guli æquilateri angulus continet 60 gr. (120) patet, quâ ratione solo circino & regulâ fieri queat angulus 60 graduum.

124. PROBL. *In extremo puncto re- F.*
ctæ AB (*quæ defectu spatii produci ne-* 16.
queat) *perpendicularem ducere.*

SOLUTIO I. Super AB fac triangulum æquilaterum ABL (122) II. Latere BL producto fac OL = AL. III. Ducta ex O in A recta OA est perpendicularis.

DEMONST. Quia quilibet æquilateri angulus = 60 gr. (120) erit LAB † LBA = 120 gr. : sed OLA = LAB † LBA (112) ergo OLA = 120 gr. (22) jam quia OL = AL *ex constr.*, erit AOL æquicrurum (115) unde angulus AOL = OAL (116) sed AOL † OAL † OLA = 180 gr. (103) ex his ergo si subtrahatur OLA = 120 gr., relinquentur AOL † OAL = 60 gr., adeóque OAL = 30 gr., cui si addis LAB = 60 gr. (120) erit OAL † LAB = OAB = 90 gr., qui proinde rectus est (43) & hinc OA perpendicularis (58) q. e. d.

125. THEOR. *Cujusvis trianguli ille angulus major est, qui opponitur majori lateri.*

DEMONST. Sit OB > AB : dico, erit etiam angulus OAB > AOB, Nam ex OB abscindatur pars BL = AB : ductâ AL erit ABL æquicrurum (115) & angulus

angulus LAB = ALB (116) ſed ALB > AOB (113) ergo etiam LAB > AOB, (22) à fortiore igitur LAB † LAO > AOB, id eſt OAB > AOB. q. e. d.

126. COROL. I. Viciſſim illud trianguli latus erit majus, quod majori opponitur angulo.

127. COROL. II. In quovis igitur triangulo æqualia latera æqualibus opponuntur angulis, & vice verſà.

128. COROL. III. Triangulum, quod duos habet æquales angulos, æquicrurum eſt: quod tres, æquilaterum.

129. AXIOMA. *Quod majus eſt majore, etiam majus eſt minore.*

130. THEOR. *Si ab extremis punctis unius lateris ducantur rectæ* AC *&* BC *intra triangulum concurrentes ; erit* I. *reliquorum laterum ſumma* AO † OB *major, quàm illarum ſumma* AC † CB. II. *Angulus verò* ACB > AOB.

DEMONST. AC in L productâ erit CL † LB > CB (114) ergo additâ utrimque AC, fiet AL † LB > CB † AC. Rurſus AO † OL > AL (114) ergo additâ utrimque LB, fiet AO † OB > AL † LB. Igitur à fortiore AO † OB > CB † AC (129) q. e. 1. Deinde angulus ACB > ALB, & ALB > AOB (113) igitur ACB > AOB (129) q. e. 2.

131. PROBL. *Metiri diſtantiam* BO, *ſi ad ſolum punctum* O *liceat accedere.*

Solutio

SOLUTIO. I. In O fixo baculo, continuetur recta BO versus C (6) II. Per O duc rectam AD, & fac AO = DO. III. Fixis in A & D baculis, metire angulum A (98) eique fac æqualem D (99) cujus crus DC, ubi rectam BC secat in C, fige baculum. IV. Metire rectam OC: hæc enim distantiæ BO æqualis est. F. 17.

DEMONST. A = D *ex constr.*, AOB = COD (54) & AO = DO *ex constr.*, ergo BO = OC (37) q. e. d.

132. PROBL. *Metiri angulum inaccessum* AOB.

SOLUTIO. I. Crura AO & BO continuentur versus C & D (6) II. Fixis in C & D baculis, metire angulos C & D (98) III. Horum summam subtrahe ex 180: relinquetur angulus COD (105) cui æqualis est AOB (54) q. e. i.

ELEMENTUM IV.

De Quadrilateris, & Triangulis.

133. DEF. *Quadrilaterum* dicitur superficies plana, cujus perimeter quatuor duntaxat rectis lineis ad quatuor angulos conjunctis constat. Recta ab uno angulo ad angulum oppositum ducta *diagonalis* appellatur.

134. THEOR. *Omnis quadrilateri quatuor anguli simul sumpti valent quatuor rectos.*

Demonst.

F. 18. DEMONST. Ductâ diagonali erit $G \dagger B \dagger V = 180$ gr., & $A \dagger O \dagger I = 180$ gr. (103) omnes ergo simul valent 360 gr., seu quatuor rectos. q. e. d.

135. DEF. Quadrilaterum, cujus bina quævis opposita latera AI & BV, AO & BC, parallela sunt, dicitur *parallelogrammum* : quadrilaterum, quod parallelogrammum non est, vocatur trapezium.

136. THEOR. *Opposita parallelogrammi latera sunt æqualia.*

DEMONST. Ductâ diagonali erit $O = C$, & $I = V$ (81) quia ergo $IO = IO$, erit $AO = BC$, & $AI = BV$ (37) q. e. d.

137. THEOR. *Oppositi in parallelogrammo anguli æquales sunt.*

DEMONST. Ductâ diagonali erit $O = C$, & $I = V$ (81) ideóque tum $O \dagger V = C \dagger I$ (21) q. e. 1. Tum etiam $O \dagger I = C \dagger V$ (21) ac proinde $A = B$ (110) q. e. 2.

138. THEOR. *Quadrilaterum habens bina quævis opposita latera æqualia, est parallelogrammum.*

DEMONST. Si $AO = BC$, & $AI = BV$; ductâ diagonali erit etiam $IO = IO$, ideóque I. $O = C$ (35) proinde AO & BC sunt parallelæ (82) II. $V = I$ (35) ideóque AI & BV sunt parallelæ (82) itaque quadrilaterum illud est parallelogrammum (135) q. e. d.

Theor.

139. THEOR. *Quadrilaterum duo habens latera* AO & BC *æqualia ſimul, & parallela, eſt parallelogrammum.*

DEMONST. Ductâ diagonali eſt C = O (81) quia ergo AO = BC *ex hyp.*, & IO = IO; erit etiam AI = BV (36) adeóque quadrilaterum illud eſt parallelogrammum (138) q. e. d.

140. THEOR. *Diagonalis parallelogrammum dividit in duo triangula æqualia.*

DEMONST. AO = BC, & AI = BV (136) dein IO = IO : ſunt ergo triangula æqualia (35) q. e. d.

141. DEF. Parallelogrammum ſi omnes angulos habuerit rectos, *rectangulum*: ſecus *obliquangulum* vocatur. Rectangulum ſi omnia latera habet æqualia, *quadratum* : ſecus *oblongum* appellatur. Obliquangulum ſi omnia latera æqualia habet, *Rhombus*: ſecus *Rhomboides* dicitur.

142. DEF. Magnitudinem aliquam *metiri* eſt invenire, quoties ea contineat aliam magnitudinem jam notam, quam *menſuram* dicimus.

143. COROL. Menſura menſurando homogenea ſit oportet : id eſt, lineæ lineis, ſuperficies ſuperficiebus, & corpora corporibus metienda ſunt.

144, DEF. Menſura, quâ lineas metimur, *ſimplex* appellatur, éſtque pro cujusvis loci conſuetudine certa quædam

longi-

longitudo. Solet adhiberi *pertica*, quæ exhibet lineam aliquam rectam in certas partes æquales divisam. Hìc Aquisgrani pertica simplex continet *pedes* 16: pes *pollices* 12 : pollex 12 *lineas*. At superficies metimur mensurà *quadratâ*, id est, quovis quadrato. Nempe quadratum, cujus quodlibet latus perticam simplicem adæquat, *pertica quadrata* dicitur : & quadratum, cujus latus pedem simplicem adæquat, *pes quadratus* appellatur &c. Metiri itaque superficiem aliquam nihil est aliud, quàm invenire, quot perticas quadratas, aut quot pedes quadratos &c. illa contineat. Hìc Aquisgrani, ùt audio, 150 perticæ quadratæ efficiunt *Jugerum*.

145. THEOR. *Parallelogrammi rectanguli magnitudo habetur, multiplicando inter se duo latera contigua.*

DEMONST. Latus BC dividatur in
F. 19. quotvis partes æquales BS, SV &c., & per puncta divisionum ducantur rectæ SX &c. lateri AB, adeóque & inter se (89) parallelæ. Dein latus AB dividatur in partes BE, EI &c. partibus BS &c. æquales, ductis itidem rectis EL, IR &c. lateri BC & inter se parallelis. Jam cùm anguli A, B, C, D recti sint (141) lineæ jam ductæ ad angulos rectos se secabunt (87) sive altera alteri perpendicularis erit (58) Cellulæ igitur, in quas to-

tum

tum parallelogrammum divisum est, sunt mera quadrata; quoniam & angulos omnes rectos habent, & latera omnia æqualia (72) si ergo E B aut B S sit pes simplex, erit cellula E B S O (idem dic de reliquis) pes quadratus (144) Jam verò patet, quòd rectangulum E B C L cellulas contineat tot, in quot partes divisum est latus B C: bis verò tot cellulas habeat rectangulum I B C R, ter tot rectangulum A B C D &c. & generatim quot partes habet latus B C, tot cellulas continet totum rectangulum toties, quot partes habet latus alterum contiguum A B. Totus ergo cellularum, seu pedum quadratorum numerus, seu totius rectanguli magnitudo (20) obtinetur, sumendo partes lateris B C toties, quot ejusmodi partes habet latus A B: id est, multiplicando omnes simul partes unius per omnes simul alterius, seu (20) totum latus B C per totum latus contiguum A B. q. e. d.

146. COROL. I. Quia quadratum est rectangulum, & omnia latera æqualia habet (141) quadrati magnitudo obtinetur, latus unum per se ipsum multiplicando.

147. COROL. II. Hinc noto latere, seu *radice* quadrati innotescet ipsum quadratum.

148. COROL. III. Quadratorum æqualium mutuò æqualia sunt latera: &

si quadratorum latera mutuò æqualia sint; ipsa quoque quadrata sunt æqualia.

149. COROL. IV. Noti quadrati latus innotescet per extractionem *radicis qua ratæ.*

150. SCHOL. *Ex dato numero extrahere radicem quadratam est invenire alium numerum, qui per se ipsum multiplicatus producit numerum datum. Ità ex 16 extrahitur radix 4 : ex 9 radix 3 &c. Regulas pro extractione radicum tradit Arithmetica.*

151. DEF. *Basis* figuræ est quodvis ejus latus, cui figura insistere concipitur: *vertex* est punctum figuræ à basi remotissimum: *altitudo* est perpendicularis ducta ex vertice in basin, si opus est, productam.

152. COROL. Duo triangula ADC,
F. & BDC, quorum communis est vertex
15. C, & bases in eadem sunt recta AB, habent eandem altitudinem (60)

153. DEF. Duæ figuræ dicuntur *positæ inter easdem parallelas*, si vertices in una, & bases in altera existant parallela linea.

154. COROL. I. Figurarum inter easdem parallelas positarum altitudines sunt perpendiculares (151) inter duas parallelas comprehensæ.

155. COROL. II. Figurarum ergo inter easdem parallelas positarum æquales sunt altitudines (72)

Corol.

156. COROL. III. Et quoniam ſuper una recta ductis duabus perpendicularibus æqualibus, quæ per harum terminos ducitur recta linea priori rectæ parallela eſt (90) poterunt figuræ, quæ æquales habent altitudines, conſtitui inter easdem parallelas.

157. COROL. IV. Quæ ergo de figuris inter easdem parallelas poſitis dicemus, intelligi etiam debent de figuris æquales altitudines habentibus.

158. THEOR. *Parallelogramma quævis* ABCD, *&* OSCD *ſuper eadem baſi* CD *poſita inter easdem parallelas* AS *&* CL, *ſunt æqualia.* F. 20.

DEMONST. AC = BD, & OC = SD, AB = CD, CD = OS (136), quare AB = OS (51) adde utrimque BO: erit etiam AO = BS (21) æqualia ergo ſunt triangula ACO & BDS (35) utrique ergo ſi demas partem communem BOV, & ejus loco addas utrique partem CDV, prodibunt ABCD & OSCD parallelogramma æqualia (21) q. e. d.

159. COROL. Æqualia ſunt parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, & æquales altitudines (157)

160. AXIOMA. *Quæ ſunt æqualium dupla, tripla &c.: vel dimidia, partes tertiæ &c. æqualia ſunt.*

161. THEOR. *Si inter easdem parallelas fuerit parallelogrammum* ABCD,

F. 21. *& triangulum* DOL, *quorum bases* CD *&* DL *æquales sint ; erit parallelogrammum trianguli duplum.*

DEMONST. Lateri DO ductâ parallelâ LS, erit OSDL parallelogrammum (135) æquale parallelogrammo ABCD (155 & 159) eorum ergo etiam dimidia æqualia erunt (53) Jam triangulum DOL est dimidium parallelogrammi OSDL (140) ergo triangulum DOL dimidio parallelogrammi ABCD æquale est : hoc ergo illius duplum est. q. e. d.

162. COROL. Parallelogrammum trianguli duplum est, si & bases æquales fuerint, & altitudines (157)

163. THEOR. *Triangula* CBD *&* DOL *inter easdem parallelas posita, si bases* CD *&* DL *æquales habent, sunt æqualia.*

DEMONST. Lateri BD ducatur parallela AC : erit ABCD parallelogrammum (135) duplum utriusque trianguli (161) utrumque ergo est ejusdem parallelogrammi dimidium : sunt ergo æqualia (160) q. e. d.

164. COROL. Æqualia sunt triangula, quorum & bases, & altitudines æquales sunt (157)

F. 20. 165. THEOR. *Cujusvis parallelogrammi* OSCD *magnitudo producitur, multiplicando basin* CD *per altitudinem* SL.

Demonst.

DEMONST. Super eadem basi CD inter easdem parallelas positum sit rectangulum ABCD : erit ABCD = CD × AC (145) sed AC = SL (72) ergo ABCD = CD × SL (22) jam OSCD = ABCD (158) igitur OSCD = CD × SL (51) q. e. d.

166. COROL. I. Si ergo basis multiplicetur per semissem altitudinis, vel altitudo per semissem basis; prodibit parallelogrammi dimidium: id est, triangulum cum parallelogrammo & basin & altitudinem habens æqualem (162)

167. COROL. II. Cujusvis ergo trianguli magnitudo habetur, multiplicando vel basin per semissem altitudinis: vel altitudinem per semissem basis: vel totâ basi per totam altitudinem multiplicatâ sumendo producti dimidium.

168. DEF. Triangulum *rectangulum* ABC est, cujus unus angulus C rectus est: F.
latus AB angulo recto oppositum vocatur *Hypotenusa*. 22.

169. THEOR. Dato quovis triangulo rectangulo, quadratum hypotenusæ æquale est quadratis laterum reliquorum simul sumptis.

DEMONST. Ducantur rectæ AL, CI, lateribúsque AD & BI ex angulo recto parallela CE, quæ quadratum hypotenusæ dividet in duo parallelogramma ADER, & ERBI, ex quibus hoc quadrato COLB, illud quadrato ASVC ostendam esse æquale. Nam quia quadrata angulos in B rectos (141) ideóque æquales (44) habent, addito utrimque angulo ABC erit angulus ABL = CBI (21) quia ergo CB = LB, & BI = BA (141) æqualia sunt triangula ABL & CBI (36) Porro quia angulus C tam in quadrato (141) quàm in triangulo rectus est, efficient AC & CO unam rectam (49) lateri BL parallelam (135) unde triangulum ABL cum quadrato COLB super eadem basi BL positum est inter easdem parallelas AO & BL: igitur triangulum ABL est dimidium quadrati COLB (161) Ex eadem ratione triangulum CBI est dimidium parallelogrammi ERBI. Igitur COLB, & ERBI sunt æqualium triangulorum dupla: sunt ergo æqualia (160) q. e. 1. Eodem modo, ductis ex B in S, & ex C in D, rectis, ostendam, quòd ADER = ASVC. q. e. 2. Igitur COLB † ASVC = ERBI † ADER (21) q. e. d.

170. SCHOL. *Brevitatis causâ quadratum cujusvis lineæ designaturi, post lineolam supra literas ductam numerum binarium scribimus: sic* $\overline{AB}^2$ *indicat quadratum lineæ* AB.

171. COROL. I. Si in triangulo rectangulo nota sint duorum laterum quadrata;

drata; innoteſcet quadratum tertii vel additione, vel ſubtractione. Quia enim

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \ (169) \text{ etiam } BC^2 = AB^2 - AC^2, \ \& \ AC^2 = AB^2 - BC^2 \ (21)$$

172. COROL. II. Si duo trianguli rectanguli latera nota ſint; facilè invenitur tertium. Nota enim ſunt duorum quadrata (147) adeóque innoteſcet quadratum tertii (171) & hinc ipſum latus tertium (149)

173. SCHOL. *Quâ ratione parallelogrammum quodvis deſcribendum ſit, facilè intelliget, qui modum ducendæ per datum punctum parallelæ, & perpendicularis non ignoraverit.*

174. PROBL. *Facere quadratum duobus, tribus, & quotcunque aliis æquale.*

SOLUTIO. I. Latera duorum datorum junge ad angulum rectum: his ſubtenſa hypotenuſa erit latus quadrati, quod duobus primis ſimul ſumptis æquale eſt (169)

II. Huic hypotenuſæ ad angulum rectum junge latus quadrati tertii dati: ducta hypotenuſa altera erit latus quadrati, quod æquale eſt quadratis reliquorum laterum, id eſt tribus datis. Ità porrò pergendo quotcunque datis quadratis facies unum æquale, illud nempe, cujus latus eſt hypotenuſa ultima.

175. PROBL. *Agrum, aut ſuperfi-*

ciem quamlibet planam rectilineam metiri.

SOLUTIO. Si fuerit metiendum triangulum ABC, perticâ metire latus unum AB, in quod ex angulo opposito ducta perpendicularis CO (100) erit trian-
F. guli altitudo (151) per cujus dimidium
23. multiplica basin AB: & prodibit trianguli magnitudo (167)

II. Si superficies non fuerit triangularis; divide eam in mera triangula, ductis ex uno angulo in reliquos lineis rectis: singula hæc triangula metire modo jam dicto, iisque in unam summam collectis nota erit totius superficiei magnitudo (20)

176. SCHOL. *Compendium aliquod laboris facies, si quoties fieri potest, unam sumas duorum triangulorum communem basin* AB, *in quam ex angulis* C *&* D *perpendiculares* CO *&* DV *duci possint.*

ELEMENTUM V.

De Ratione, & Proportione Geometrica.

177. DEF. Dum quærimus, quænam sit *ratio* magnitudinis unius ad aliam, nihil aliud quærimus, quàm quoties prima contineat secundam. Itaque *Geometrica ratio* est modus, quo magnitudo prima

ma (*antecedens*) continet secundam (*consequentem*)

178. COROL. I. Innotescit ratio duarum magnitudinum, si terminus antecedens dividatur per consequentem: hinc rationem scribimus per modum divisionis: nempe A : B, vel $\frac{A}{B}$ indicat rationem antecedentis A ad consequentem B, & *quotum* ex illa divisione provenientem vocamus *exponentem* rationis.

179. COROL. II. Duæ rationes æquales sunt, quorum exponentes æquales sunt, seu quorum antecedentes suos consequentes, aut consequentium partes *similes similiter* continent: secus illa ratio major est, cujus exponens major: vel cujus antecedens suum consequentem continet sæpiùs, aut partem ejus *respectivè* majorem. Nempe $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, & $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$. At $\frac{8}{2} > \frac{6}{3}$, & $\frac{5}{6} > \frac{4}{8}$.

180. COROL. III. Augetur ratio, si vel augeatur antecedens, vel minuatur consequens: minuitur autem ratio, si vel minuatur antecedens, vel augeatur consequens.

181. AXIOMA. *Si æqualia per æqualia dividantur, & multiplicentur, quoti, & producta æqualia sunt.*

182. THEOR. *Si consequens cujusvis*

rationis multiplicetur per exponentem; productum æquale est antecedenti.

DEMONST. Rationis cujusvis A : B exponens. Sit X : erit $\frac{A}{B} = X$ (178) adeóque $A = BX$ (181) q. e. d.

183. DEF. Duarum rationum æqualitas dicitur *proportio*: magnitudines æqualem inter se rationem habentes vocantur *proportionales*: prima & ultima *extremi*, reliqui verò *medii* proportionis termini vocantur. Proportio *discreta* est, quæ quatuor distinctos habet terminos, ùt $A : B = C : D$, vel $2 : 3 = 4 : 6$. *Continua* dicitur, quæ tribus duntaxat terminis constat, ex quibus secundus vices duorum gerit, ùt $A : B = B : C$, vel $8 : 4 = 4 : 2$.

184. THEOR. *In omni proportione productum extremorum æquale est producto mediorum terminorum.* Sit $A : B = C : D$, dico, quod $AD = BC$.

DEMONST. Quia rationes æquales sunt (183) idem erit utriusque exponens (179) sit ille X: erit $A = BX$, & $C = DX$ (182) unde $AD = BDX$, & $BC = BDX$ (22) sed $BDX = BDX$, ergo etiam $AD = BC$ (22) q. e. d.

185. COROL. I. In proportione *continua* productum extremorum æquale est medii termini *quadrato*.

Corol.

186. COROL. II. Si productum mediorum dividatur per extremum unum, quotus est extremus alter. Quia enim $AD = BC$, erit $D = \frac{BC}{A}$, & $A = \frac{BC}{D}$ (181)

187. THEOR. *Si quatuor magnitudines ità disponantur, ut productum extremarum æquale sit producto mediarum; sic dispositæ proportionem constituunt.*

DEMONST. Sit $AD = BC$: dico, $A : B = C : D$. Nam dividatur utrumque productum per BD: erit $\frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD}$ (181) id est $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ seu $A:B = C:D$ (178) q. e. d.

188. THEOR. *Si duæ magnitudines eandem rationem habent ad idem; æquales sunt.* Sit $A : C = B : C$, dico, quòd $A = B$.

DEMONST. $AC = BC$ (184) ergo $A = B$ (181) q. e. d.

189. THEOR. *Siqua magnitudo eandem rationem habet ad duas alias; hæ æquales sunt.* Sit $A : B = A : C$, dico, quòd $B = C$.

DEMONST. $AC = AB$ (184) ergo $C = B$ (181) q. e. d.

190. DEF. Termini proportionis *inverti* dicuntur, si ex antecedentibus fiant

Conse-

consequentes, & ex consequentibus antecedentes. *Alternari* autem dicuntur, si primus consequens cum secundo antecedente locum permutet.

191. THEOR. *Seu invertantur termini, seu alternentur, servant proportionem.* Sit A:B=C:D, dico: erit invertendo B:A=D:C, & alternando A:C=B:D.

DEMONST. Ob datam proportionem est AD=BC (184) in utraque autem variatione manent eadem producta: manet ergo proportio (187) q. e. d.

192. DEF. Termini proportionis *componuntur*, si antecedentibus addantur consequentes, & summæ scribantur loco antecedentium: consequentes verò vel invariati serventur, vel eorum loco ponantur priores antecedentes.

193. THEOR. *Si componantur termini, proportionem servant.* Sit A:B=C:D, dico, erit componendo tum A†B:B=C†D:D, tum A†B:A=C†D:C.

DEMONST. AD=BC (184) ergo tum AD†BD=BC†BD, tum AC†BC=AC†AD (21) quæ cùm sint producta extremorum, & mediorum, utraque subsistit proportio (187) q. e. d.

194. DEF. Termini proportionis *dividuntur*, si ex antecedentibus subtrahantur consequentes, & residua loco antecedentium statuantur: consequentes verò

inva-

invariati serventur, vel eorum loco statuantur priores antecedentes.

195. THEOR. *Si dividuntur termini, proportionem servant.* Sit $A:B = C:D$, dico, dividendo erit tum $A - B : B = C - D : D$, tum $A - B : A = C - D : C$.

DEMONST. $AD = BC$ (184) ergo tum $AD - BD = BC - BD$, tum $AC - BC = AC - AD$ (21) quæ cùm sint producta extremorum & mediorum, proportiones subsistunt (187) q. e. d.

196. THEOR. *Si duæ magnitudines per idem multiplicentur, vel dividantur, producta, & quoti eandem rationem inter se habent, quam magnitudines multiplicatæ, vel divisæ.* A & B multiplicentur, & dividantur per X: dico, quod $AX : BX = A:B$. Item $\frac{A}{X} : \frac{B}{X} = A:B$.

DEMONST. $ABX = ABX$, & $\frac{AB}{X} = \frac{AB}{X}$ in utroque igitur casu subsistit proportio (187) q. e. d.

197. THEOR. *Datis quotcunque rationibus æqualibus, est summa antecedentium ad summam consequentium, ùt quilibet antecedens ad suum consequentem.* Sit $A:B = C:D = E:F$, dico, erit etiam $A + C + E : B + D + F = A:B$.

DEMONST. $AD = BC$, & $AF = BE$ (184) adeóque $BC + BE = AD +$

AB

AF (21) & addito utrimque AB erit productum extremorum AB†BC†BE = AB†AD†AF producto mediorum (21) itaque A†C†E:B†D†F = A:B (187) q. e. d.

198. THEOR. *Datâ quâvis proportione, est differentia antecedentium ad differentiam consequentium, ùt quilibet antecedens ad suum consequentem.* Sit A:B = C:D, dico, quòd A – C:B – D = A:B.

DEMONST. AD = BC (184) unde productum extremorum AB – BC = AB – AD producto mediorum (21) igitur A – C : B – D = A:B (187) q. e. d. Eodem modo ostendam, quòd C – A : D – B = A:B.

199. THEOR. *Datis quotcunque proportionibus, erunt producta antecedentium & consequentium proportionalia.* Sit A: B = C:D, & E:F = G:H, dico, quòd AE:BF = CG:DH.

DEMONST. AD = BC, & EH = FG (184) ergo productum extremorum AEDH = BCFG producto mediorum (181) igitur AE:BF = CG:DH (187) q.e.d.

200. THEOR. *Magnitudinum proportionalium proportionalia sunt quadrata.* Sit A:B = C:D, dico, quòd AA: BB = CC:DD.

DEMONST. AD = BC (184) ergo productum extremorum AADD = BBCC producto mediorum (181) igitur AA:BB = CC:DD (187) q. e. d.

201. THEOR. *Si proportio fuerit continua, erit quadratum primi termini ad quadratum secundi, ùt primus ad tertium.* Sit A : B = B : C, dico, quòd AA : BB = A : C.

DEMONST. AC = BB (185) ergo productum extremorum AAC = ABB producto mediorum (181) adeóque AA : BB = A : C (187) q. e. d.

ELEMENTUM VI.
De Triangulis similibus.

202. DEF. Figuræ dicuntur *similes*, quæ, si differant, solâ differunt quantitate. Figurarum similium latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, *homologa* dicimus.

203. COROL. I. Ut figuræ sint similes, requiritur, & sufficit I., ut in utraque idem sit laterum & angulorum numerus. II. Ut latera unius omnia sint proportionalia lateribus homologis alterius. III. Ut singuli anguli unius æquales sint singulis alterius.

204. COROL. II. Ut triangula sint similia, requiritur, & sufficit, omnes angulos esse *mutuò* æquales, & omnia latera homologa esse proportionalia.

205. THEOR. *Parallelogramma, quæ bases æquales habent, sunt inter se, ùt altitudines:*

titudines: & quæ altitudines æquales habent, sunt inter se, ùt bases.

DEMONST. I. Sint altitudines A & a: basis utriusque sit B: erunt parallelogramma AB, & aB (165) sed AB:aB = A:a (196) sunt ergo æqualium basium parallelogramma, ùt altitudines. q. e. 1.

II. Bases sint B & b: altitudo utriusque sit A: erunt parallelogramma AB & Ab (165) sed AB:Ab = B:b (196) sunt ergo æqualium altitudinum parallelogramma, ùt bases. q. e. 2.

206. COROL. Quia triangula sunt parallelogrammorum dimidia (162) erunt etiam æqualium basium triangula inter se, ùt altitudines: & triangula æqualium altitudinum, ùt bases (53)

207. PROBL. *Triangulum dividere in quotcunque, & qualescunque partes.*

SOLUTIO. I. In eadem ratione, in qua dividendum est triangulum, dividatur basis AB. II. Ex vertice C ad puncta divisionum ductæ rectæ CO &c. divident triangulum ABC in tot triangula AOC, BOC &c., in quot partes secta est basis AB: dico, ea triangula esse inter se, ut partes basis AO, BO &c.

F. 24.

DEMONST. Omnium enim eadem est altitudo (152) sunt ergo inter se, ùt bases AO, BO &c. (206) q. e. d.

208. COROL. I. Eodem modo parallelogrammum divides in quotvis &

quasvis

quasvis partes, hoc uno discrimine, quòd lineæ dividentes lateribus esse debeant parallelæ: ità fient totidem parallelogramma habentia inter se rationem basium (205)

209. COROL. II. Parallelogrammum, item triangulum duplicabis, triplicabis &c., duplicando, triplicando &c. basin eàdem relictà altitudine.

210. THEOR. *In quovis triangulo* ABC, *si uni lateri* AB *ducatur parallela* DE; *hæc reliqua latera dividit proportionaliter, nempe ut sit* CD : DA = CE : EB. F. 25.

DEMONST. Ductis rectis AE & BD, habebunt triangula CDE & ADE eandem altitudinem (152) ideóque CDE : ADE = CD : DA (206) ex eadem ratione CDE : BDE = CE : EB. Jam quia triangula ADE, & BDE sunt *ex hyp.* inter easdem parallelas, & super eadem basi DE; erit ADE = BDE (163) in secunda igitur proportione illo huic substituto (22) erit CDE : ADE = CE : EB. Quia ergo ex demonstratis CDE : ADE = CD : DA; erit CD : DA = CE : EB (51) q. e. d.

211. COROL. Alia quævis recta DI, quæ lateri AB parallela non est, non dividet reliqua latera proportionaliter. Quia enim CD : DA = CE : EB (210) & CE : EB > CI : IB (180) erit etiam

CD : DA > CI : IB (52) Itaque recta dividens duo latera trianguli in partes proportionales, est lateri tertio parallela.

212. POSTULATUM. *Cuivis rationi finitæ fieri potest alia æqualis.*

F. 26. 213. THEOR. *Rectæ* AC & OE, *in eodem plano ductæ, si parallelæ non sint, productæ tandem concurrunt.*

DEMONST. Ducatur AE, & ex quovis rectæ AC puncto B ducatur BD ipsi OE parallela (73) producatur autem AC, donec sit AD : DE = AB : BC (212) dico, AC, & OE concursuras in C. Si negas, ex C rectæ BD duci poterit alia parallela CX (73) erítque AD : DX = AB : BC (210) sed *ex constr.* etiam AD : DE = AB : BC. Igitur AD : DX = AD : DE (51) adeóque DX = DE (189) quod quia repugnat (20) necesse est AC & OE in C concurrere. q. e. d.

F. 25. 214. THEOR. *Si duo triangula* ABC & DEC *habeant omnes angulos mutuò æquales* (A = D, B = E, C = C) *habent etiam omnia latera homologa proportionalia.*

DEMONST. Anguli æquales C & C sibi imponantur: lateribus AC & BC incumbent latera DC & EC (31) jam *ex hyp.* A = D : itaque AB & DE sunt parallelæ (88) unde CD : DA = CE : EB : (210) & *componendo* CD † DA :

CD

CD=CE+EB:CE(193) hoc est CA: CD=CB:CE. Et *alternando* CA: CB=CD : CE(191) simili modo, si anguli E & B sibi mutuò imponantur, ostendam, quòd AB : CB=DE : CE. Omnia ergo homologa latera sunt proportionalia. q. e. d.

215. COROL. I. Triangula mutuò æquiangula similia sunt (204)

216. COROL. II. Quia si duo triangulorum anguli sunt *mutuò* æquales, etiam tertius est tertio æqualis (110) triangula hoc ipso, quòd duos angulos *mutuò* æquales habeant, latera quoque homologa omnia habent proportionalia, súntque similia.

217. COROL. III. Dato triangulo aliud simile construes, si duos angulos hujus duobus illius facias æquales.

218. THEOR. *Triangula* ABC & DEC, *si habuerint unum angulum uni æqualem, & latera circa hos angulos proportionalia* (nempe si C=C, & AC: BC=DC:EC) *reliquos etiam angulos mutuò æquales, & reliqua etiam latera proportionalia habent, súntque similia.*

DEMONST. Æquales anguli sibi imponantur: latera DC & EC lateribus AC & BC incumbent (31) jam AC: BC=DC: EC *ex hyp.*, & *alternando* AC:DC=BC:EC(191) & *dividendo* AC−DC:DC=BC−EC:EC(195)

 id

id est AD : DC = BE : EC. Igitur la-
tus DE latera AC & BC dividit pro-
portionaliter : unde AB & DE sunt pa-
rallelæ (211) ideoque A = D, & B = E
(87) igitur & reliqua latera sunt propor-
tionalia, & ipsa triangula similia (216)
q. e. d.

219. THEOR. *Similium triangulo-*
F. *rum* ABC *&* DEF *altitudines* CO *&*
24. FV *sunt inter se, ùt bases homologæ* AB
& DE.

DEMONST. Quia A = D (204) &
O = V (44) in triangulis AOC & DVF
erit AC : DF = CO : FV (216) & quia
triangula ABC & DEF sunt *ex hyp.* si-
milia, erit AC : DF = AB : DE (204)
ac proinde CO : FV = AB : DE (51)
q. e. d.

220. COROL. I. Quia bases homo-
logæ reliquis lateribus homologis pro-
portionales sunt (204) etiam similium
triangulorum altitudines in bases homo-
logas ductæ reliquis homologis lateribus
proportionales sunt. Nempe CO : FV
= AB : DE = BC : EF = AC : DF.

221. COROL. II. Quia A = D, B = F
(204) O = V (44) patet triangula simi-
lia ABC & DEF à perpendicularibus
CO, & FV dividi in triangula AOC
& DVF, OBC & VEF, quorum la-
tera omnia sint proportionalia (216) Ita-
que basium segmenta AO & DV, BO
&

& EV, in quæ bases à perpendicularibus dividuntur, proportionalia sunt tum altitudinibus, tum reliquis lateribus homologis.

222. PROBL. *Datis in uno similium triangulorum duobus lateribus* AB & AC : *in altero autem dato uno latere* DE, *quod lateri* AB *homologum sit, invenire homologum alterum* DF.

SOLUTIO. I. Multiplica AC per DE. II. Productum divide per AB: quotus erit latus DF.

DEMONST. $AB : AC = DE : DF$

(204) ergo $\frac{AC \times DE}{AB} = DF$. (186)

q. e. d.

223. COROL. Eodem modo invenire licet trianguli alterius altitudinem, & segmentum basis quodlibet; si in primo triangulo dentur duo termini, & in altero unus homologus, qui cum inveniendo proportionem constituant.

224. THEOR. *In quovis triangulo* ABC *si ductam uni lateri parallelam secat recta* CV *ex angulo opposito ducta, ea basin* AB, *eique parallelam* DE, *proportionaliter secat, ut nempe sit* $AV : VB = DO : OE$. F. 27.

DEMONST. $A = D$, $V = O$, $B = E$ (87) igitur $AV : DO = CV : CO$, & $VB : OE = CV : CO$ (216) adeóque AV :

 DO

DO = VB : OE (51) *& alternando* (191) AV : VB = DO : OE. q. e. d.

225. COROL. I. Eodem modo oſtendam, ſi ex vertice C plures rectæ ducantur, à ſingulis in partes proportionales ſecari parallelas AB & DE.

226. COROL. II. Et ſi parallelæ fuerint quotcunque, omnes proportionaliter ſecabuntur.

227. PROBL. *Rectam quamlibet* DE *dividere in eadem ratione, in qua diviſa eſt alia quævis* AB.

SOLUTIO. Diviſæ AB dividendam DE conſtitue parallelam. II. Per puncta earum extrema duc rectas AC, BC. III. Ex C, ubi illæ concurrunt, per puncta diviſionum V &c. ductæ rectæ CV &c. ſecabunt utramque in eadem ratione.

DEMONST. Quia AB & DE parallelæ ſunt, ſed inæquales *ex hyp.*, non erit ADEB parallelogrammum (136) ideóque AD, & BE non ſunt parallelæ (135) productæ ergo concurrunt (213) igitur ex puncto concurſûs C rectæ utramque parallelam in eadem ratione ſecant (225) q. e. d.

228. COROL. Habes ergo modum dividendi rectam quamlibet in quotlibet partes æquales : ſufficiet enim totidem partes æquales in alia quavis recta deſignare, & juxta problema præcedens operari.

probl.

229. PROBL. *Datis tribus rectis* AV, VB, DO, *quartam proportionalem invenire.*

SOLUTIO. I. Duc parallelas indefinitas AB & DE. II. In unam transfer duas ex datis primas AV & VB: in alteram verò transfer tertiam DO. III. Per puncta A & D, V & O duc rectas concurrentes in C. IV. Ex C ducta in B recta CB dabit quartam proportionalem OE. *Demonstrationem* habes N. 227.

230. COROL. Si duabus AV & VB quærenda sit tertia *continuè* proportionalis; eodem modo operaberis, secundam VB transferendo in utramque parallelam.

231. THEOR. *Si unus cujusvis trianguli* ABC *angulus* C *bifariam dividatur, ductâ in latus oppositum* AB *rectâ* CD; *erunt inter se ejus lateris segmenta, uti latera reliqua.* Nempe AC : BC = AD : BD. F. 28.

DEMONST. Latere BC producto, fiat OC = AC, & ducatur recta AO: erit angulus AOC = OAC (116) quibus simul sumptis cùm æqualis sit ACB (112) erit hujus dimidium DCB = AOC. Sunt ergo AO & CD parallelæ (88) unde OC : BC = AD : BD (210) sed *ex constr.* OC = AC; ergo AC : BC = AD : BD (22) q. e. d.

Theor.

232. THEOR. *Si in triangulo rectan-*
F. *gulo* ABC *ex angulo recto* C *in hypotenu-*
29. *sam ducatur perpendicularis* CD; *hæc il-*
lud dividit in duo triangula ACD, *&* BCD, *& toti, & inter se similia.*

DEMONST. I. Triangulis ABC & ADC communis est angulus A, & angulus ACB = ADC (44) est ergo triangulum ADC simile toti ABC (216) q. e. 1.

II. Triangulis ABC & BCD communis est angulus B, & angulus ACB = BDC (44) igitur & triangulum BCD toti ABC simile est (216) q. e. 2.

III. Quia ADC & BDC sunt eidem ABC *ex demonstratis* similia, adeóque æquiangula (204) inter se etiam erunt æquiangula (51) ac proinde inter se similia (215) q. e. 3.

233. COROL. Quia ADC & BDC similia sunt; erit AD : CD = CD : DB (204) id est, perpendicularis est media proportionalis inter duo segmenta hypotenusæ.

234. DEF. *Scala geometrica* est regula exhibens lineam aliquam rectam divisam in mille partes æquales, ex qua provide capi possunt quotlibet illius lineæ partes decimæ, centesimæ, millesimæ.

235. SCHOL. *Quoniam per numeros decimales facillimè absolvuntur operationes arithmeticæ, solent Geometræ perticam*
(quot-

(quotcunque ea pedibus vulgaribus constet) dividere in partes æquales decem, quas vocant pedes decimales: *pedem quoque decimalem in decem* pollices, *pollicem in decem* lineas *partiuntur. Proinde si scalæ pars decima perticam designet; exhibebit pars centesima pedem decimalem, & pars millesima decimalem pollicem.*

236. PROBL. *Scalam geometricam construere.*

SOLUTIO. I. Ducatur recta arbitrariæ longitudinis, quam in partes mille partiri oporteat: eaque dividatur in partes æquales decem (228) quarum hic duas duntaxat BR, & RH exhibemus. II. In punctis B, R, H &c. erigantur perpendiculares BA, RE, HX, &c. ex quibus prima & ultima in partes decem æquales (228) dividatur. III. Per puncta divisionum ducantur decem lineæ rectæ, lineæ BH (90) & inter se (89) parallelæ, quæ omnes à perpendicularibus RE, HX &c. in decem partes æquales secabuntur (78) IV. Pars decima AE, item BR subdividatur in decem partes æquales (228) & divisionum puncta jungantur, ductis obliquis AC &c. dico scalam esse paratam. *F. 30.*

DEMONTS. I. BR, RH &c. sunt partes decimæ *ex constr.* II. BC, CD &c. sunt decimæ partis partes decimæ, adeóque totius scalæ partes centesimæ:

tesimæ: unde si BR perticam designet; BC pedem decimalem notabit. III. In triangulo ABC basi BC ductæ sunt decem parallelæ, adeóque totidem sunt æquiangula triangula (87) itaque AO : AB = OI : BC (214) sicut ergo AO est pars decima lateris AB; sic etiam OI est pars decima lateris BC : quòd cùm sit scalæ pars centesima, & pedem decimalem designet; patet OI esse partem decimam partis centesimæ, adeóque totius scalæ partem millesimam, quæ proinde pollicem decimalem designabit. Similiter ostendam, quòd SV quinque pollices decimales designet &c. Porrò, quæ de triangulo ABC diximus, triangulo ZER pariter applicabis. Exhibet igitur scala partes desideratas q. e. d.

237. PROBL. *Partes quotvis ex scala desumere.*

SOLUTIO. *Accipienda sit pertica una, pedes decimales tres, & pollices decimales quinque.* Pede uno circini posito in puncto Q quintæ parallelæ (nempe propter quinque pollices) alterum extende in Y. Intervallum QY continebit partes desideratas. Etenim Qn designat perticam unam; nm pollices quinque: my pedes tres.

238. SCHOL. Ex hoc exemplo disces quotvis & quasvis ex scala partes desumere, & quot scalæ, qualésque partes

linea

linea quævis recta contineat, circino explorare. Id universim nota, quod circini pes uterque in una eadémque semper parallela sit constituendus.

ELEMENTUM VII.
Distantiarum Dimensio.

239. DEF. *Mensulam geometricam* voco tabulam planam, in qua extensum & pauculâ cerâ affixum est folium chartæ albæ. Chartæ imponitur regula dioptris instructa, juxta quam plumbagine ductis rectis lineis angulus quilibet opticus facillimè delineatur. Baculo tripodi mensula imponitur, ut homo erectus dioptris uti possit.

240. PROBL. *Metiri distantiam* BR, *ad cujus solum punctum* R *accedere liceat.* F. 31.

SOLUTIO. I. *Per mensulam.* I. In quovis puncto S baculo fixo, positáque in R mensulâ, chartæ imprime punctum A respondens terræ puncto R. II. Huic puncto A applica unam regulæ extremitatem, & alteram verte, donec per dioptras appareat punctum B: juxta regulam sic positam duc rectam Ad. Tum versâ versus baculum in S defixum regulâ (simul tamen puncto A applicatâ) eodem modo duces rectam AC: ità delineatus

lineatus erit angulus d A C = B R S. III. Tansfer mensulam ex R in in S, & simul perticâ metire intervallum R S, quod secundùm proportionem scalæ (238) transferes in rectam A C ex A in O (nempe quot perticarum &c. est R S, tot partes decimas &c. transferes ex A in O.) IV. Mensulam in S sic statue, ut regulâ rectæ A C applicatâ punctum R per dioptras appareat: quo facto, ùt anteà puncto A, sic nunc puncto O, applicabis regulam, & per dioptras collimans in punctum B duces rectam O d: hæc secabit in d rectam A d in prima statione ductam. Jam V. rectam A d circino interceptam scalæ applica, & vide (238) quot ea complectatur partes decimas, centesimas, millesimas: totidem enim perticas, pedes decimales, pollices decimales continet quæsita distantia B R.

DEMONST. Angulus d A O = B R S, & d O A = B S R (15) ergo in triangulis A d O & B S R erit A d : B R = A O : R S (216 sicut ergo *ex conſt.* R S tot perticas &c., quot A O partes decimas &c. continet; ità B R tot continebit perticas &c., quot partes scalæ decimas &c. continet A d. q. e. d.

241. SOLUTIO. II. *Per astrolabium.* I. Metire angulos B R S, & B S R (98) & intervallum R S. II. In charta duc rectam A Q, quæ in partibus scalæ exhibeat

beat intervallum RS. III. In punctis A & O fac angulos dAO, & dOA æquales angulis BRS & BSR (96) istorum crura concurrent in d. Reliqua fiant ùt suprà.

242. SOLUTIO. III. *Per baculos.* I. In puncto R perpendiculariter figatur baculus minor RS, & alius deinde major CE in eadem linea recta BRE: baculum alterutrum tam diu intra terram compelle, donec oculus in una recta linea videat tria puncta C, S, B. II. Nota altitudinum differentiam CO, & baculorum intervallum RE = SO (72) III. Fac CO : SO = RS : BR (186) F. 32.

DEMONST. RS & CE *ex constr.* ipsi BE perpendiculares sunt, adeóque inter se parallelæ (76) hinc angulus SCO = BSR (87) & quia SO & BE parallelæ sunt (90) erit etiam angulus CSO = SBR (87) igitur in triangulis COS & BRS erit CO : SO = RS : BR (216) q. e. d.

244. SCHOL. Baculo Jacobæo, *seu cruce rectangulâ* CEDS, *cujus brachium* SO *prolongari ad libitum possit, eandem distantiam eodem modo explorabis, ùt consideranti patebit.*

244. SOLUTIO. IV. *Per quadrantem, aut normam.* I. Quadrans, vel norma, cujus latera dioptris instructa, baculo ità affigatur, ut circa angulum rectum F. 33.

A veluti circa centrum converti, & quolibet in situ firmari possit. Hoc baculo AR in R perpendiculariter fixo, eleva, aut deprime normæ vel quadrantis latus AC, donec per ejus dioptras appareat punctum B. II. In hoc situ instrumento firmato respiciens per dioptras lateris AD, nota punctum E visui occurrens. III. Baculi altitudinem AR in se multiplica, & productum divide per intervallum RE: quotus erit BR distantia quæsita.

DEMONST. Quia A rectus est (67) & AR perpendicularis hypotenusæ BE *ex constr.*, erit RE : AR = AR : BR

$$(233) \text{ unde } \frac{\overline{AR}^2}{\overline{RE}} = BR \ (186) \text{ q. e. d.}$$

245. SCHOL. *Si* BR *fuerit distantia valdè longa, juvat in arbore instrumentum collocare, ut ratio* AR *ad* BR *fiat sensibilior.*

246. DEF. *Quadratum geometricum* est quadratum quodvis ABCD in tabula plana descriptum, cujus duo latera contigua AB & BD in partes æquales 100 vel 1000. divisa sunt. Latus tertium CD dioptris instruitur, & circa angulum C vel mobilis est regula CE dioptris pariter instructa, & dicitur quadratum *stabile*: vel loco regulæ ex angulo C filum dependet plumbo onustum, & dicetur quadratum *pendulum*.

F. 34.

Corol.

247. COROL. Ope quadrati distantiam, ad cujus unum punctum accessus datur, reperies, ùt N. 244.

248. PROBL. *Metiri distantiam* BL *planè inaccessam.* F. 31.

SOLUTIO. I. *Per mensulam.* Electis duabus stationibus R & S, ex quibus extrema puncta B & L conspici queant, I. Mensulâ in R positâ, delinea angulos BRL & LRS, ductis rectis A d, A V, A C, ùt dictum suprà (240) II. Mensulam transfer ex R in S : intervallum verò RS in rectam A C transfer ex A in O secundùm scalæ proportionem, mensuláque ritè collocatâ (240) delinea quoque angulum LSB, ductis rectis O V & O d : hæ secabunt rectas in prima statione ductas. Quare III. sectionum puncta d & V connecte rectâ d V, eámque circino interceptam scalæ applica : quot ea partes decimas &c. continet, tot perticas &c. complectitur BL.

DEMONST. Quoniam in triangulis BRS & d A O, item L R S, & V A O, *ex constr.* duo sunt anguli mutuò æquales; erit RS : AO = BS : dO, & RS : AO = LS : VO (216) adeóque BS : dO = LS : VO (51) quia ergo angulus BSL = dOV ex constr., erit BS : dO = BL : dV (218) *Ex demonstratis* autem BS : dO = RS : AO, ergo BL : dV = RS : AO (51) quia ergo *ex constr.* RS tot conti-

net

net perticas &c., quot AO partes decimas; etiam BL tot habet perticas &c., quot dV partes decimas &c. q. e. d.

249. SOLUTIO. II. *Per astrolabium* eodem modo fiet, nisi quòd anguli priùs metiendi sint, & dein delineandi.

250. PROBL. *Metiri altitudinem* LS, *ad cujus punctum* L *licet accedere.*

F. 35. SOLUTIO. I. *Per Quadratum stabile.* I. Quadratum pedi AV affixum statue in nota distantia VL ità, ut latus CD sit horizonti VL parallelum (id obtinebis perpendiculo ad latus BD applicato) tum eleva regulam, donec per ejus dioptras appareat vertex S. II. Attende, quot partes regula in hoc situ abscindat, seu quot partes contineat DE. III. Fac CD : DE = VL : RS (186) cui si addis instrumenti altitudinem CV = RL (72) nota erit LS.

DEMONST. LS horizonti VL perpendicularis est (68) ergo & rectæ CR, quæ horizonti parallela est, eadem LS perpendicularis est (74) sed & BD ipsi CR est perpendicularis (58) igitur BD & LS sunt parallelæ (76) unde in triangulis CDE & CRS est D = R, & E = S (87) quare CD : DE = CR : RS (216) sed CR = VL (78) ergo CD : DE = VL : RS (22) q. e. d.

251. SCHOL. *Si altitudo* OL *major sit, quàm distantia* VL; *regula in* altero

altero latere AB *abſcindet partem* AI: *quo caſu fiat* AI : AC = CR : RO. *Nam in triangulis* AIC & CRO *eſt* A = R (44) & C = O (81) *adeóque latera proportionalia* (216) *id quod ſemel monuiſſe ſufficiat tam pro pendulo quadrato, quàm pro ſtabili.*

252. SOLUT. II. *Per quadratum pendulum.* I. Quadratum baculo AV affixum ità, ut elevari, ac deprimi poſſit, colloca in nota diſtantia VL, & eleva, donec per dioptras lateris AC appareat vertex S: quo facto vide, quot partes DE abſcindat filum CE. II. Fac CD : DE = VL : RS (186) cui ſi addas inſtrumenti altitudinem AV = RL (72) nota erit tota LS. *F. 36.*

DEMONST. Angulus ACE = CED (81) ACE = ASR (87) ergo CED = ASR (51) & CDE = SRA (44) quare in triangulis CDE & RSA erit CD : DE = AR : RS (216) ſed AR = VL (78) ergo CD : DE = VL : RS (22) q. e. d.

253. SOLUTIO. III. *Per menſulam.* I. in nota diſtantia VL ſtatue menſulam in ſitu verticali. II. Ductâ rectâ CD horizonti parallelâ tot partium ſcalæ, quot perticarum &c. eſt VL, puncto C applica regulam, & collimans in verticem S juxta regulam duc rectam CE. III. Ex puncto D erige perpendicularem DE occurrentem rectæ CE in E. IV. Perpendicularis DE ſcalæ applicata pro- *F. 37.*

det altitudinis partem RS: cui si addatur altitudo instrumenti CV = RL (72) nota erit LS.

DEMONST. D = R (44) C = C. Igitur in triangulis CDE & CSR est CD: CR = DE: RS (216) sed CR = VL (78) ergo CD: VL = DE: RS (22) q. e. d.

254. SOLUTIO. IV. *Per astrolabium* fiet eodem modo, nisì quòd astrolabii diametro horizontaliter constitutâ metiendus sit primò angulus SCR, & dein delineandus.

255 SOLUTIO. V. *Per baculos, aut*
F. *crucem rectangulam.* Oculo ad S posi-
32. to altitudinis AL partem AV habebìs, dicendo SO: OC = SV: AV (186) additáque oculi altitudine SR = VL (72) nota erit tota AL.

DEMONST. jam sæpe data est.

256. SOLUTIO. VI. *Per umbram.* I. Lucente sole, aut lunâ, terræ perpen-
F. dicularitet infige baculum BE, & nota,
38. quantam ille projiciat umbram EC. II. Metire etiam umbram LD, quam eodem tempore projicit altitudo quæsita AL. III. Fac EC: BC = LD: AL (186)

DEMONST. AL & BE cùm *ex constr.* perpendiculares sint horizonti LC, erit L = E (44) & cùm sideris eadem sit eodem tempore supra horizontem altitudo, quam metitur angulus D vel C, quem cum horizonte efficit radius AD

vel

vel B C, erit quoque D = C. Itaque E C : BE = L D : AL (216) q. e. d.

257. SCHOL. *Per ſe patet, quòd ex nota altitudine iisdem modis inveniri poſſit diſtantia. Porrò ex dictis facilè erues modum, quo in ipſa altitudine conſtitutus invenias ex nota altitudine diſtantiam, aut ex nota diſtantia altitudinem. Quadrato* e. g. *in* O *collocato dices* OF : FX = OR : RC, vel FX : OF = RC : OR. F. 35.

258. PROBL. *Metiri altitudinem* AL *planè inacceſſam, cujus ſaltem vertex* A *videri poſſit.*

SOLUTIO. I. *Per quadratum.* I. In una recta linea LEV elige duas ſtationes E & V. II. In ſingulis poſito, ùt ſupra, quadrato nota partes abſciſſas Sm, & RO. III. Ex partibus Sm ſubtrahe partes RO, & fac Sm − RO : RO = VE : EL. (186) IV. Inventâ jam diſtantiâ EL, operare, ùt ſuprà (250 & 252) F. 39.

DEMONST. Ut jam ſæpe oſtendidimus, eſt CR : RO = CB : AB, ſed CR = DS, ergo DS : RO = CB : AB (22) unde DS × AB = RO × CB (184) ſimili modo ex ſæpe dictis DS : Sm = DB : AB, unde DS × AB = Sm × DB (184) quare RO × CB = Sm × DB (51) adeóque Sm . RO = CB : DB (187) & Sm − RO : RO = CB − DB : DB (195) hoc eſt Sm − RO : RO = CD : DB, ſed CD = VE, & DB = EL (78) igitur

Sm—RO : RO = VE : EL (22) q.e.d.

259. SCHOL. *Si regula in una statione abscindat partes in latere* Sm, *in altera verò in latere* xi, *fac* nx : xc = ni : iF (*nam* cxn *&* niF *similia esse triangula facilè ostendes*) *additáque lateri* iR *inventâ jam particulâ* iF, *exhibebit* FR *partes in illa statione abscissas.*

260. SOLUTIO. II. *Per mensulam.* Electarum, ùt antè, stationum R & S intervallum RS ex scala transferatur, in
F. rectam Cd ex C in O. Tum I. in R
40. mensula verticaliter statuatur ità, ut recta Cd sit horizonti LS parallela : & regulâ puncto O applicatâ, & in verticem A directâ ducatur OE. II. Similiter positâ in S mensulâ regula puncto C applicetur, & in verticem A dirigatur : ducta juxta hunc regulæ situm recta CE secabit rectam OE in aliquo puncto E, ex quo III. demissa in Cd perpendicularis Ei ad scalam examinata exhibebit altitudinis partem AB, cui si addis OS = OR = BL (72) nota est tota AL.

DEMONST. Propter angulos *ex constr.* æquales, triangulorum COE & CAO, OIE & OAB latera proportionalia sunt (216) unde ex sæpe dictis patet, q. e. d.

261. SOLUTIO. III. *Per astrolabium* eodem modo, quo per mensulam, absolvitur, nisì quòd in statione utraque anguli

primò

primò metiendi ſint, ità aſtrolabii diametro collocatâ, ut horizonti ſit parallela: quibus deinde in charta delineatis demiſſa ex ſectione E perpendicularis EI indicabit quantitatem partis AB.

ELEMENTUM VIII.

Proprietates Circuli.

262. DEF. Linea recta circulum *tangere* dicitur, quæ in uno duntaxat puncto, quod punctum *contactûs* dicimus, circulo occurrit, licèt producatur in infinitum.

263. THEOR. *Si recta* AB *circulum tangit, radius* CD *ductus ad punctum contactûs tangenti perpendicularis eſt.* F. 41.

DEMONST. Quia tangens in ſolo contactûs puncto D circulo occurrit (262) quodvis aliud tangentis punctum extra circulum eſt: unde recta quævis alia CA ex centro C ad tangentem ducta circumferentiam ſecat in V, adeóque CA > CV, ſed CV = CD (9) ergo CA > CD (52) Igitur CD brevior eſt aliâ quâvis rectâ ex centro ad tangentem ducta: proinde illi perpendicularis eſt (63) q. e. d.

264. COROL. I. Per idem contactûs punctum D una tantùm recta tangens duci poteſt. Sit enim tam DL, quàm DB tangens: erit radius CD perpendi-

 cularis

cularis utrique (263) quare anguli CDL & CDB recti (57) & æquales ſunt (44) quod repugnat (20)

265. COROL. II. Quia radius CD tangenti in puncto contactûs perpendicularis eſt; alia quævis recta ex puncto contactûs ducta eidem perpendicularis non erit (60) Itaque quæ per punctum contactûs ducitur ad tangentem perpendicularis, per centrum tranſit.

266. COROL. III. Recta AB, quæ radio in extremo puncto D perpendicularis eſt, tangit circulum in unico puncto D. Hoc ipſo enim radius ipſi etiam AB perpendicularis eſt (59) unde quævis alia ex centro ad rectam AB ducta major eſt radio (62) ergo quodvis aliud rectæ AB punctum extra circulum eſt: in ſolo igitur puncto D hæc circulum tangit.

267. PROBL. *rectam tangentem ducere per datum circumferentiæ punctum* D.

SOLUTIO. Ducatur radius CD, eique per D perpendicularis AB (64) hæc erit tangens (266) q. e. d.

268. PROBL. *In recta tangente* AB *punctum contactûs determinare.*

SOLUTIO. Ex centro C ducatur ad tangentem perpendicularis CD (65) D erit punctum contactûs (266)

269. DEF. Circulus circulum tangere dicitur, quando circumferentiæ ſibi ità occurrunt, ut tamen ſe non ſecent.

270. THEOR. *In quocunque puncto*

se tangant duo circuli, recta per utriusque F.
centrum producta transit per illud pun- 42.
ctum contactûs.

DEMONST. I. *Si se intrinsecus tangant in* A, sint, si fieri potest, ità posita centra O & C, ut recta OCL non transeat per punctum A. Erit $AC = VC$ (9) & utrimque additâ CO erit $AC + CO = VC + CO$ (21) sed $AC + CO > AO$ (114) & $AO = OL$ (9) ergo $AC + CO > OL$ (52) *ex demonstratis* autem $AC + CO = VC + CO = OV$: ergo $OV > OL$ (22) quod repugnat (20)

II. *Si se extrinsecus tangant in* B, sint, si fieri potest, sic posita centra O & D, ut ea connectens recta OD non transeat per punctum B. Erit $OB = OS$, & $DB = DI$ (9) unde $OB + DB = OS + DI$ (21) quod iterum repugnat (114)

In utroque igitur casu recta connectens centra transire debet per punctum contactûs q. e. d.

271. COROL. I. Duo circuli in uno duntaxat puncto se tangere possunt. Si enim in duobus A & L se tangerent, recta per centra O & X producta tam per A, quàm per L transiret (270) quod repugnat (5)

272. COROL. II. Duobus circulis se tangentibus, facilè determinatur punctum contactûs, ductâ scilicet per utriusque centrum rectâ.

273. COROL. III. In recta AE sump-

tis quotcunque centris, ſcribi poterunt circuli quotcunque, qui omnes in unico puncto A ſeſe tangant.

274. SCHOL. *Variæ lineæ curvæ ſpirales, ſerpentinæ, ellipticæ &c. non alio artificio feliciùs deſcribuntur, quàm ſi, ſumptis in una recta duobus ſemper centris duorum arcuum ſe tangentium, curva ex pluribus hujusmodi arcubus componatur.*

275. DEF. Angulus *ad centrum* eſt, cujus vertex eſt in ipſo circuli centro: angulus *ad circumferentiam*, cujus vertex eſt in ipſa circuli circumferentia. *Chorda* circuli eſt quævis recta linea ducta ab uno circumferentiæ puncto ad aliud.

276. THEOR. *Angulus ad circumferentiam formatus vel à duabus chordis, vel à chorda & tangente, pro menſura habet ſemiſſem arcûs, quem crura intercipiunt.*

DEMONST. CASUS I. *Si crus unum per centrum C tranſeat*, I. Sit angulus
F. 43. BAD formatus à chordis AB & AD: ducto radio CB erit ABC æquicrurum (115) in quo angulus ABC = BAD (116) ſed angulus BCD = ABC + BAD (112) igitur BCD duplus eſt anguli BAD. Quia ergo BCD pro menſura habet totum arcum BD (29) BAD pro menſura habebit ſemiſſem arcûs BD. q. e. d.

F. 44. II. Sit angulus DAL formatus à tangente AL, & chorda AD per centrum tranſeunte, quæ proinde erit diameter

(9) ideoque tangenti perpendicularis (263) hinc DAL rectus est (57) ejus ergo mensura est quadrans (43) sed AED est arcus semicirculi (18) hujus ergo dimidium erit mensura anguli DAL. q. e. d.

CASUS II. *Si centrum C contineatur inter crura anguli* BAL. Ductâ diametro AD erit angulus BAL divisus in duos BAD, & DAL, quorum uterque cum pro mensura habeat semissem arcûs inter sua crura intercepti *per casum* I.; uterque simul, id est, totus BAL (20) pro mensura habebit arcuum illorum simul sumptorum semissem, id est, semissem arcûs inter crura intercepti. q. e. d. *F.* 43. & 44.

CASUS III. *Si centrum nec in uno crure, nec inter crura anguli* EAL *existat*. Ductâ diametro AD, mensura anguli DAL est $\frac{1}{2}$ DL (*F.* 43) vel $\frac{1}{2}$ DA (*F.* 44) & anguli DAE mensura est $\frac{1}{2}$ DE *per casum* I.: ergo anguli DAL − DAE mensura est $\frac{1}{2}$ DL − $\frac{1}{2}$ DE (fig. 43) aut $\frac{1}{2}$ DA − $\frac{1}{2}$ DE (fig. 44) id est, anguli EAL mensura est dimidium arcûs EL aut EA inter sua crura intercepti. q. e. d.

277. COROL. I. Omnes ad circumferentiam anguli à duabus chordis, aut à

chorda & tangente formati, qui ſuis cruribus intercipiunt arcus numero graduum æquales, ſunt inter ſe æquales (29)

278. COROL. II. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad circumferentiam, ſi uterque eundem arcum, vel arcus æquales ſuis cruribus intercipiat.

279. COROL. III. Rectus eſt angulus ad circumferentiam, cujus crura arcum ſemicirculi intercipiunt. Proinde ſi ab extremis diametri punctis ad idem circumferentiæ punctum quodcunque duæ chordæ ducantur, eæ rectum angulum efficient.

280. COROL. IV. Acutus eſt angulus ad circumferentiam, ſi crura intercipiant arcum arcu ſemicirculi minorem: obtuſus verò, ſi majorem.

281. PROBL. *Angulum examinare, ſitne rectus, acutus, vel obtuſus.*

SOLUTIO. Crura connecte recta AB, quâ in C bifariam diviſâ (66) radio AC
F. deſcribe ſemicirculum. Si circumferen-
45. tia per verticem O tranſeat; erit AOB rectus (279) ſi infra verticem D; erit ADB < AOB (130) adeóque ADB acutus (41) ſi verò ſupra verticem E circumferentia ducta ſit, erit AEB > AOB (130) adeóque AEB obtuſus (41)

282. COROL. Hinc alterum erues normæ examinandæ modum.

283. PROBL. *Ex puncto quovis* A *ex-*

tra

tra circulum dato ducere rectam tangentem AB.

SOLUTIO. I. Ex A ad centrum C duc rectam AC. II. Hac in I bifariam divisâ, centro I super diametro AC describe semicirculum CDA. III. Per punctum D, in quo circumferentiæ se secant, duc ex A rectam ADB: hæc erit tangens. F. 41.

DEMONST. Chordæ CD & AD efficiunt angulum ADC rectum (279) unde AD radio CD perpendicularis est (58) ergo AD tangens est (266) q. e. d.

284. THEOR. *In eodem circulo si æquales fuerint chordæ* AB & AE, *æquales etiam erunt arcus* AB & AE: *& si arcus æquales sint, sunt & chordæ illæ æquales.* F. 43.

DEMONST. Ductis ad extrema chordarum puncta radiis erunt I. in triangulis ABC & AEC omnia latera mutuò æqualia (9) adeóque anguli in C æquales (35) igitur arcus AB = AE (29) q. e. 1.

II. Si illi arcus æquales sint, anguli etiam in C æquales sunt (29) circa quos cùm sint latera mutuò æqualia (9) erit & latus AB = AE (36) q. e. 2.

285. THEOR. *Si ab uno circumferentiæ puncto* A *ad alia quævis circumferentiæ puncta* B, D, E, L, *ducantur rectæ*; I. *Maxima est* AD, *quæ per centrum ducitur.*

ducitur. II. *Ex aliis illa major eſt, quæ maximæ* AD *propinquior.* III. *Quæ à maxima* AD *diſtant æqualiter, æquales ſunt.*

DEMONST. I. Angulus AED rectus eſt (279) ergo ADE acutus (107) hinc AED > ADE (41) igitur AD > AE (126) eodem modo id de alia quavis recta, quæ per centrum non ducitur, oſtendam. q. e. 1.

II. Quia ABD ſemicirculus eſt (18) erit ABDE major, & AL minor arcu ſemicirculi: proinde ALE obtuſus, & AEL acutus eſt angulus (280) igitur AE > AL (126) q. e. 2.

III. Quia *ex hyp.* arcus BD = ED, & arcus ABD = AED (18) erit etiam arcus AB = AE (21) proinde angulus ACB = ACE (29) ſunt autem latera circa hos angulos mutuò æqualia (9) igitur & latus AB = AE (36) q. e. 3.

286. COROL. Diameter maxima eſt omnium rectarum linearum, quæ in eodem circulo duci poſſunt.

287. THEOR. *Chordæ parallelæ* AL *&* SE *intercipiunt arcus* AS *&* LE *æquales: & ſi arcus inter duas chordas intercepti æquales ſint, ſunt eæ chordæ parallelæ.*

DEMONST. I. Si AL & SE ſint parallelæ, erit SEA = EAL (81) quorum menſuræ cùm ſint ſemiſſes arcuum AS, & LE (276) dimidia horum arcuum

æqualia

æqualia erunt (29) igitur & toti arcus æquales (53) q. e. 1.

II. Si arcus AS = LE, etiam dimidia eorum sunt æqualia (53) unde angulorum SEA & EAL mensuræ æquales sunt (276) adeóque & hi anguli æquales (29) igitur AL & SE parallelæ (82) q. e. 2.

288. COROL. Hinc modum erues expeditum, rectæ SE per datum punctum A ducendi parallelam AL.

289. THEOR. *Perpendicularis radius* CD *in chordam* AB *ductus bifariam secat* I. *chordam.* II. *Tum etiam arcum* ADB. III. *Perpendicularis* FD *bifariam secans chordam* AB *transit per centrum* C. IV. *Radius* CD *chordam* AB *bifariam secans, eidem chordæ perpendicularis est.* F. 46.

DEMONST. I. Ductis radiis AC & BC, in triangulis AOC & BOC erunt anguli in O æquales (56) & quia ABC æquicrurum est (115) erit etiam A = B (116) proinde & reliqui in C æquales sunt (110) igitur cùm CO = CO, erit etiam AO = BO (37) q. e. 1.

II. Quia *ex demonstratis* sunt anguli in C æquales, erit & arcus AD = BD (29) q. e. 2.

III. Quia radius perpendicularis CD transit per medium chordæ punctum O *per partem* I., nequit ex puncto medio

O duci

O duci alia perpendicularis (60) quævis ergo perpendicularis chordam ſecans bifariam tranſit per centrum. q. e. 3.

IV. *Ex hyp.* AO = BO, AC = BC (9) CO = CO, itaque anguli in O æquales ſunt (35) & recti (41) quare CD perpendicularis eſt (58) q. e. 4.

290. PROBL. *Per data tria puncta* A, B, F, *quæ non ſint in eadem recta linea, circulum deſcribere.*

SOLUTIO. I. Conjunge data puncta rectis AB & AF. II. Utramque hanc rectam ſeca bifariam, ductis perpendicularibus DF & VB (66) eæ ſe ſecabunt in centro C, ex quo ſcripti radio AC circuli circumferentia tranſibit per data puncta.

DEMONST. AB & AF ſunt chordæ circuli deſcribendi (175) quare perpendiculares, à quibus bifariam ſecantur, per centrum tranſeunt (289) adeóque in centro ſe ſecant. q. e. d.

291. COROL. Eodem modo circuli dati centrum invenies, & inchoatam circuli circumferentiam perficies: ductis enim, & perpendiculariter bifariam ſectis duabus chordis centrum prodibit.

292. PROBL. *Quemvis circuli arcum bifariam dividere.*

SOLUTIO. Arcui ſubtende chordam: in hanc ducta ex centro perpendicularis (65) arcum bifariam ſecabit (289) q. e. f.

Theor.

293. THEOR. *Ex quocunque circum-*
ferentiæ puncto O in diametrum AB du- F.
catur perpendicularis OS, hæc est media 45.
proportionalis inter diametri segmenta:
seu $AS : OS = OS : BS$.

DEMONST. Ductis chordis AO & BO, erit AOB angulus rectus (279) in triangulo ergo rectangulo AOB diameter AB est hypotenusa (168) patet igitur (233) q. e. d.

294. COROL. Inter duas rectas AS & BS facilè invenitur media proportionalis. Nempe jungo eas in unam rectam AB, quâ in C bifariam divisâ centro C scribo semicirculum: ex S erigo perpendicularem SO circumferentiæ occurrentem: hæc erit media quæsita (293)

295. PROBL. *Dato parallelogrammo facere æquale quadratum.*

SOLUTIO. Inter altitudinem AS, & basin BS dati parallelogrammi, quære mediam proportionalem OS (294) hæc erit latus construendi quadrati.

DEMONST. Valor parallelogrammi dati est $AS \times BS$ (165) & $AS \times BS = \overline{OS}^2$ (185) patet ergo. q. e. d.

296. COROL. Ut quadratum facias æquale triangulo, inter basin, & semissem altitudinis quærenda erit media proportionalis (167)

297. THEOR. *Si ex quovis puncto A*

extra

F. *extra circulum dato ducatur tangens* AC,
48. *& secans* AB ; *erit tangens* AC *media*
proportionalis inter totam secantem AB,
& ejus partem exteriorem AO, *seu* AB :
AC = AC : AO.

DEMONST. Ductis chordis CB & CO, erit dimidium arcus CO mensura tum anguli ACO, tum anguli CBO (276) unde ACO = CBO (29) quia ergo A communis est angulus triangulis AOC & ABC erunt homologa horum latera proportionalia (216) igitur AB : AC = AC : AO. q. e. d.

298. COROL. Si ab eodem puncto A extra circulum dato ducantur duæ tangentes AC & AD ; erunt eæ æquales. Nam AB : AC = AC : AO, & AB : AD = AD : AO (297) unde AB × AO = $\overline{AC}^2$, & AB × AO = $\overline{AD}^2$ (185) ergo $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2$ (51) adeóque AC = AD (148)

299. DEF. Linea recta AB dicitur
dividi *in media, & extrema ratione*, si
F. ità dividitur in D, ut tota AB sit ad par-
47. tem majorem AD, sicut hæc pars ma-
jor AD ad minorem BD.

300. PROBL. *Lineam rectam* AB *dividere in media & extrema ratione.*

SOLUTIO. I. in B ducatur perpendicularis BC = $\frac{1}{2}$ AB. II. Centro C

radio

radio CB scribatur circulus. III. Ex A per centrum ducatur recta AV. IV. Fiat AD = AE: erit AB : AD = AD : BD.

DEMONST. Quia radio CB perpendicularis est AB (59) erit hæc tangens (266) unde AV : AB = AB : AE (297) & *dividendo* AV − AB : AB = AB − AE : AE (195) sed AB = EV, & AE = AD *ex constr.*; ergo AV − EV : AB = AE − AD : AD (22) id est, AE seu AD : AB = BD : AD, & *invertendo* AB : AD = AD : BD (191) q. e. d.

ELEMENTUM IX.

De Figuris ordinatis Circulo inscriptis, & circumscriptis.

301. DEF. Figura dicitur *ordinata*, si omnia habeat latera æqualia, & omnes angulos æquales. *Inscripta* est circulo, si omnes angulos habeat in circumferentia : *circumscripta*, si singula ejus latera circulum tangant.

302. THEOR. *Quævis figura ordinata potest inscribi circulo.*

DEMONST. Anguli A & B æquales (301) dividantur bifariam ductis rectis AC & BC : in triangulo ABC erit angulus CBA = CAB (53) est ergo ABC æquicrurum (128) proinde AC

F. 49.

= BC (127) jam ex C in reliquos angulos ducantur rectæ : quia in triangulis ABC & ADC angulus BAC = DAC *ex constr.*, & BA = DA (301) & AC = AC ; erunt & reliqui anguli mutuò æquales, & reliqua latera æqualia (36) quod cùm eodem modo de reliquis triangulis ostendi possit ; erit BC = AC = DC &c. Igitur centro C per angulum A scripta circumferentia transit per omnes angulos B, D &c. (11) unde patet (301) q. e. d.

303. COROL. Latera figuræ ordinatæ sunt chordæ (275) arcuum æqualium (284)

304. DEF. *Polygonum* est superficies plana, cujus perimeter pluribus, quàm quatuor, rectis lineis constat : si latera fuerint 5, *Pentagonum* dicitur : si 6, *Hexagonum* &c.

305. DEF. Angulus, quem duo figuræ ordinatæ latera efficiunt, dicitur *angulus Polygoni* : quem verò duo radii ex centro ad duos angulos vicinos ducti efficiunt, *angulus ad centrum* vocatur.

306. PROBL. *In quavis figura ordinata angulum ad centrum invenire.*

SOLUTIO. Gradus 360 divide per numerum laterum : quotus exhibebit angulum ad centrum.

DEMONST. Singulorum ad centrum angulorum mensuræ sunt (28) arcus æquales (303) quorum summa continet 360 gr. (12) singulorum ergo arcuum, adeóque & angulorum ad centrum (28) valor prodit, dividendo 360 per numerum arcuum, adeóque & laterum. q. e. d.

307. COROL. In figura ordinata anguli ad centrum omnes æquales sunt. Quilibet autem in triangulo æquilatero continet gr. 120 : in quadrato 90 : in pentagono 72 : in hexagono 60 &c.

308. THEOR. *In quavis figura ordinata angulus polygoni cum angulo ad centrum duos rectos efficit.*

DEMONST. CAD†ADC†ACD = 180 gr. (103) ADC = BAC (35) ergo CAD†BAC†ACD = 180 gr. (22) CAD†BAC = BAD (20) igitur BAD† ACD = 180 gr. (22) q. e. d.

309. COROL. Igitur BAD = 180 gr. – ACD (21) id est, si ex 180 gr. subtrahitur angulus ad centrum, prodit angulus polygoni. Itaque angulus polygoni in triangulo æquilatero continet gr. 60 : in quadrato 90 : in pentagono 108 : in hexagono 1 0 &c.

310. THEOR. *Latus hexagoni ordinati æquale est radio illius circuli, cui inscribi potest.*

DEMONST. Ductis ex centro radiis AC & BC, in triangulo ABC angulus C = 60 gr. (307) unde A†B = 120 gr. (105) quia ergo AC = BC (9) erit A = B (127) ergo $A = B = \frac{120}{2} = 60 = C$.

 Itaque

Itaque AC = BC = AB (127) q. e. d.

311. COROL. I. Si ergo radium circuli ſexies in circumferentiam tranferas, erit ea diviſa in 6 partes æquales (303) quibus ſi chordas ſubtendis, inſcriptum erit circulo hexagonum ordinatum.

312. COROL. II. Si verò duobus ſimul arcubus unam ſubtendis chordam; hæc erit latus trianguli æquilateri circulo inſcribendi.

313. PROBL. *Circulo Decagonum ordinatum inſcribere.*

F. 50. SOLUTIO. I. Radium BC divide in media & extrema ratione (300) II. Duc chordam BO æqualem majori ſegmento AC: hæc erit latus decagoni huic circulo inſcribendi.

DEMONST. BC : AC = AC : AB (299) BO = AC *ex conſtr.*, ergo BC : BO = BO : AB (22) ſunt ergo in triangulis ACO & BAO latera circa communem angulum B proportionalia, ideóque & reliqua latera proportionalia ſunt (218) ſicut ergo OC = BC (9) ità etiam AO = BO = AC. Igitur tria triangula BCO, BAO, & CAO ſunt æquicrura (115) unde C = V, V † O = B, & BAO = B (116) ſed BAO = C † V (112) ergo angulus BAO duplus eſt anguli C. Et quia BAO = B & B = V † O *ex demonſtratis*; erit tam B, quàm V † O duplus anguli C (22) itaque quia tres anguli B, C, V † O ſimul ſumpti valent

180 gr. (103) si 180 gr. seu semicirculum in quinque partes æquales dividas, pars una conveniet angulo C, adeoque & arcui OB (28) hic ergo est semicirculi pars 5ta, seu pars 10ma totius circumferentiæ; est ergo OB latus decagoni ordinati. q. e. d.

314. COROL. Divisâ jam circumferentiâ in 10 partes æquales, si duobus arcubus unam subtendas chordam, habebis latus pentagoni ordinati eidem circulo inscribendi.

315. SCHOL. *Quoniam dedimus modum circumferentiam dividendi in partes æquales tres* (312) *quinque* (314) *sex* (311) *decem* (313) *& aliunde arcus quilibet bifariam dividi potest* (292) *facilè circulo inscribes figuram ordinatam laterum* 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. 16. 20. 24. &c. *At in partes quasvis æquales circumferentiam geometricè dividendi modus nondum repertus est: proinde circumferentiam, aut arcum quemvis divisurus in partes* v.g. *æquales septem, tentando id efficias oportet. Porrò si circulus in* 360 *gr. dividendus sit, quemlibet quadrantem divide in* 90 *gr., cui divisioni memoriæ causâ hic versus serviet:*

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

316. PROBL. *Dato uno latere* AB, *polygonum quodvis ordinatum describere.*

SOLUTIO. I. Quære angulum po-

F. 49. lygoni. (309) II. Huic fac æqualem BAD, ductâ rectâ AD = AB (96) III. Per puncta B, A, D duc circulum (290) cujus circumferentiæ latus AB, quoties fieri potest, applicatum dabit polygonum, quod construendum erat.

DEMONST. Ductis radiis AC & BC, erit angulus BAC = ADC (35) quia ergo ADC † DAC † ACD = 180 gr. (103) erit etiam BAC † DAC † ACD = 180 gr. (22) sed BAC † DAC = BAD (20) ergo BAD † ACD = 180 gr. (22) id est angulus polygoni BAD cum angulo ACD efficit duos rectos: ergo ACD æqualis est angulo ad centrum (308) igitur circumferentiâ per numerum laterum divisâ prodit angulus ACD (306) seu arcus AD (28) hìc ergo toties in circumferentia continetur, quot esse debent polygoni latera: adeóque patet. q. e. d.

317. PROBL. *Polygoni ordinati centrum invenire.*

SOUTIO. Quoniam latera sunt chordæ circuli (303) operare juxta N. 291.

318. PROBL. *Polygonum ordinatum circulo circumscribere.*

SOLUTIO. I. Simile polygonum circulo inscribe. II. Ductis ad singulos angulos radiis, per extrema horum puncta duc perpendiculares, seu (267) tangentes LE, EF &c. hæ ubi coierint, polygonum

gonum circumscriptum (301) ordinatum efficient.

DEMONST. I. Quia LE, EF &c. sunt radiis perpendiculares, erit angulus CDF = CBE = CAE = CAF &c. (56 & 41) subductis ergo CDA = CBA = CAB = CAD &c. (36) relinquitur FDA = EBA = EAB = FAD &c. (21) itaque in triangulis BLS, BEA &c. reliqui etiam anguli L, E, F, O &c. æquales sunt (110) polygonum ergo habet omnes angulos æquales. q. e. 1.

II. Quia *ex demonstratis* triangula BLS, FAD &c. sunt mutuò æquiangula; habebunt latera proportionalia (214) sicut ergo AD = BS (301) ità AF = LB, sed & BE = AE (298) ergo LB † BE = AF † AE (21) hoc est LE = EF (20) Eodem modo ostendam reliqua etiam latera esse æqualia. q. e. 2. Est ergo polygonum ordinatum (301) q. e. d.

319. THEOR. *Polygonum ordinatum æquale est triangulo, cujus basis est æqualis toti perimetro polygoni, & cujus altitudo æqualis est perpendiculari* CR *ex centro in unum latus ductæ.*

DEMONST. Ductis in singulos angulos ex centro radiis dividitur polygonum ordinatum in triangula tot æqualia (35) quot sunt polygoni latera. Unde horum triangulorum summa, seu ipsum polygonum est ad unum triangulum CXZ, uti omnium laterum summa, seu tota perimeter, ad unum latus X Z : sed triangulum habens pro basi totam perimetrum, & pro altitudine perpendicularem C R, est etiam ad triangulum C X Z, sicut tota perimeter ad latus X Z (206) illud ergo triangulum eandem rationem habet ad triangulum C X Z, quam ad idem habet ipsum polygonum : hoc ergo illi æquale est (188) q. e. d.

320. COROL. Polygoni ordinati magnitudo invenitur, multiplicando semissem perimetri per perpendicularem C R; vel hujus semissem per perimetrum (167)

321. AXIOMA. *Si duarum magnitudinum inæqualium excessus ultra dimidium minuatur, ídque, quoad aliquis excessus fuerit, in infinitum continuetur; erit tandem excessus quâvis datâ quantitate minor, id est nullus.*

322. DEF. *Segmentum* circuli vocatur circuli portio comprehensa arcu & chordâ : *sector* circuli est circuli pars contenta arcu, & duobus radiis.

323. THEOR. *Si circulo inscriptum sit polygonum ordinatum, & singulis deinde arcubus bisectis inscribatur aliud duplò plura habens latera, atque ità procedatur in infinitum; polygonum habens latera numero infinita circulo, & perimeter circumferentiæ congruet.*

DEMONST. Latus polygoni inscripti sit A B, quòd à radio C O perpendiculari bifariam secetur unà cum arcu A O B (289) Ductâ in O tangente D O E ad radium C O perpendiculari (267) erigantur perpendiculares, A D & B E : erunt tum hæ, tum A B & E D parallelæ (76) hinc ABDE parallelogrammum est (135) cujus cùm dimidium sit triangulum A O B (161) hoc triangulum erit plus, quàm dimidium segmenti A O B. Quod cùm eodem modo ostendatur de omnibus aliis segmentis, patet, quòd, lateribus polygoni inscripti duplicatis, ultra dimidium minuatur excessus, quo circulus polygonum superat. Igitur duplicatione laterum in infinitum continuatâ nullus relinquetur excessus circuli & polygoni (321) ambo ergo congruent. q. e. 1. F. 51.

Congruere autem nequeunt, nisì & perimeter congruat circumferentiæ (14) igitur & hæ congruent. q. e. 2.

324. COROL. I. Circulus est polygonum ordinatum, cujus latera sunt numero infinita, & quantitate infinitè parva. Perpendicularis verò ex centro ducta erit ipse circuli radius.

325. COROL. II. Igitur magnitudo circuli habetur, multiplicando semissem circumferentiæ per radium (320)

326. COROL. III. Magnitudo semicirculi obtinetur arcu quadrantis, magnitudo quadrantis arcu octantis per radium multiplicato: & universim quilibet

ſector habetur, ſi ſui arcûs dimidium in radium multiplicetur.

327. SCHOL. *At verò, qui docuerit modum circumferentiam circuli geometricè metiendi, ſeu inveniendi rectam lineam circumferentiæ æqualem, hactenus nemo fuit. Circumferentiam tamen veræ ſatis propinquam invenit* Archimedes *in hunc modum : circulo polygonum ordinatum 96 laterum inſcripſit, & circumſcripſit : tum oſtendit perimetrum* inſcripti *minorem,* circumſcripti *verò majorem eſſe circumferentiá circuli. Denique demonſtrat, quòd perimeter* circumſcripti (*adeóque & cicumferentia*) *contineat diametrum minùs quàm ter & partem ejus ſeptimam, ſeu* $\frac{1}{7}$ *aut* $\frac{10}{70}$ *: perimeter verò* inſcripti (*adeóque &* circumferentia) *contineat diametrum plus quàm ter &* $\frac{10}{71}$. *Quare ſi diameter ponatur* $= 7$, *erit circumferentia* $= 22$ *juſtò major : ſi verò diameter ponatur* $= 71$; *circumferentia* $= 223$ *erit juſtò minor. In praxi ergo ratio diametri ad circumferentiam aſſumi poteſt velut 7 ad 22, aut ſicut 71 ad 223 : ratio paulò propinquior, quam invenit* Metius, *eſt ſicut 113 ad 355, quæ eſt inter duas* Archimedis *media. Demonſtratio hujus rei prolixior eſt, quàm ut híſce in Elementis locum inveniat.*

328. PROBL. *Datâ circuli diametro, invenire circumferentiam propè veram.*

SOLUTIO. Diameter esto = 100: fac (186) $7:22 = 100:314\frac{2}{7}$ quæ justò major, $71:223 = 100:314\frac{6}{71}$ quæ justò minor, $113:355 = 100:314\frac{18}{113}$, quæ erit inter duas priores media (327)

329. COROL. Datâ circumferentiâ simili modo diametrum invenies, majorem terminum pro antecedente rationis sumpto.

330. PROBL. *Circuli segmentum quodvis* AOB *metiri.*

SOLUTIO. Ductis radiis AC & BC metire primò sectorem CAOB (326) deinde & triangulum ABC (175) triangulum à sectore subtrahe, & relinquetur segmentum AOB, ùtpote quod cum triangulo sectorem efficit (20)

ELEMENTUM X.

De Figuris similibus, eárumque Perimetris.

331. THEOR. *Figuræ quævis planæ similes rectilineæ ductis lineis rectis in singulos*

gulos angulos ex angulis A *&* a *æqualibus, dividuntur in triangula mutuò similia, & numero æqualia.*

DEMONST. E = e, & AE:ED = ae : e d (203) igitur *primò* X & x sunt triangula similia, & angulus ADE = ade (218) qui si auferantur ab angulis CDE & c d e æqualibus (203) relinquitur ADC = adc (21) Porrò propter triangula X & x *ex demonstratis* similia est AD : ad = DE : de, & ob similitudinem figurarum est CD : cd = DE : de (203) igitur AD : ad = CD : cd (51) sunt ergo *secundò* etiam Y & y triangula similia (218) Idem eodem modo ostendam de reliquis quotcunque triangulis. q. e. 1.

F. 52.

Jam cùm figuræ similes eundem habeant angulorum numerum (203) in utraque ex angulis A & a in reliquos angulos æquè multæ ductæ sunt lineæ rectæ: unde idem utrimque prodibit numerus triangulorum. q. e. 2.

332. THEOR. *Figuræ planæ rectilineæ ordinatæ similes, ductis ex centro in omnes angulos lineis rectis, dividuntur in triangula mutuò similia, & numero æqualia.*

F. 53.

DEMONST. Quia utrimque idem est laterum numerus (203) anguli ad centrum æquales sunt (306) & quia utraque inscribi potest circulo (302) erit AC = BC, & ac = bc (9) sunt ergo triangula ABC & abc æquicrura (115) unde

A = B

A = B, a = b (116) *ex demonstratis* autem C = c: ergo A † B = a † b (110) adeóque A = a, & B = b (53) sunt ergo A B C, a b c triangula similia (215) Eodem modo reliqua ostendam esse similia. q. e. 1.

Jam tot sunt utrimque triangula, quot figuræ latera: latera autem numero æqualia (203) ergo & idem utrimque triangulorum numerus. q. e. 2.

333. COROL. I. Similium figurarum rectilinearum perimetri sunt inter se, utì duo quævis earundem latera homologa. Quia enim AE : ae = ED : ed = DC : dc = CB : cb = BA : ba (203) erit etiam AE † ED † DC † CB † BA : ae † ed † dc † cb † ba = AE : ae (197) F. 52.

334. COROL. II. Quia in similibus triangulis eadem est ratio homologarum altitudinum, quæ homologorum laterum (220) perimetri figurarum similium rectilinearum erunt inter se, utì altitudines homologæ similium triangulorum, in quæ dividuntur ipsæ figuræ.

335. COROL. III. Quia BD : bd = BC : b c (332) erunt figurarum similium rectilinearum & ordinatarum perimetri inter se, ùt radii. F. 53.

336. COROL. IV. Quia circuli omnes sunt similes (202) circulus autem est polygonum ordinatum (324) circumferentiæ circulorum erunt inter se, ùt radii, vel (53) ùt diametri.

337. THEOR. *Triangula similia sunt inter se, utì quadrata laterum homologorum.*

F. DEMONST. Ab angulis C & F du-
24. cantur altitudines CO & FV:

erit $CO : FV = AC : DF$ (220)

& $AB : DE = AC : DF$ (203)

adeóque $CO \times AB : FV \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2$ (199)

& hinc $\frac{CO \times AB}{2} : \frac{FV \times DE}{2} = \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2$ (53) id est (167) similia triangula ABC & DEF sunt inter se, utì quadrata homologorum laterum AC & DF. Cùm ergo hæc latera reliquis homologis (203) adeóque & horum quadrata istorum quadratis sint proportionalia (200) patet. q. e. d.

338. COROL. Quia altitudines homologæ homologis lateribus proportionales sunt (220) adeóque & illarum quadrata horum quadratis proportionalia (200) triangula similia erunt inter se, utì altitudinum homologarum quadrata.

339. THEOR. *Figuræ similes rectilineæ sunt inter se, utì quadrata laterum homologorum.*

DEMONST. Dividuntur enim in triangula mutuò similia, & numero æqualia (331) Itaque

$X:x = ED^2 : ed^2$ F. 52.

& $Y:y = DC^2 : dc^2$

& $Z:z = BC^2 : bc^2$ (337)

Quia ergo $ED:ed = DC:dc = BC:bc$ (203) & hinc $ED^2:ed^2 = DC^2:dc^2 = BC^2:bc^2$ (200) erit utique $X:x = Y:y = Z:z$ (51) adeóque $X+Y+Z:x+y+z = X:x$ (197)

Quia ergo $X:x = ED^2:ed^2$ (337) erit $X+Y+Z:x+y+z = ED^2:ed^2$ (51) id est, totæ figuræ (20) sunt inter se, utì quadrata homologorum laterum ED & ed, quibus cùm reliquorum etiam homologorum quadrata sint proportionalia (200) patet figuras quasvis rectilineas similes esse inter se, uti quadrata laterum quorumvis homologorum. q. e. d.

340. COROL. I Quia $BD:bd = BC:bc$ (332) & ideo $BD^2:bd^2 = BC^2:bc^2$ (200) patet ordinatas figuras similes rectilineas esse inter se, utì quadrata radiorum. F. 53.

341. COROL. II. Cùm ergo circuli sint polygona ordinata (324) erunt circuli inter se, utì quadrata radiorum.

342. COROL. II. Quia diametri radiis (53) & ipsis circumferentiis (336) proportionales sunt, ideóque & horum

proportionalia quadrata (200) erunt quoque circuli inter ſe, utì quadrata tum diametrorum tum circumferentiarum.

343. COROL. IV. Si ſuper ſingula trianguli rectanguli latera tanquam ſuper latera homologa (aut diametros) conſtruantur figuræ ſimiles; erit ea, quæ ſuper hypotenuſa conſtruitur, æqualis duabus reliquis ſimul ſumptis (169)

344. PROBL. *Datâ ratione, quam inter ſe habent duo latera homologa duarum figurarum ſimilium (vel circulorum diametri) invenire rationem ſuperficierum.*

SOLUTIO. Tam antecedentem rationis, quám conſequentem in ſe ipſum multiplica : exhibebunt quadrata antecedentis & conſequentis rationem quæſitam.

DEMONST. Quia dati rationis termini ſunt inter ſe, utì latera homologa, vel diametri ; illorum etiam quadrata erunt inter ſe, utì horum quadrata (200) horum autem quadrata rationem ſuperficierum exhibent (339 & 342) ergo & quadrata iſtorum. q. e. d.

345. COROL. Datâ ratione, quam inter ſe habent figurarum ſimilium ſuperficies, invenitur ratio laterum homologorum, ſi ex terminis datæ rationis extrahantur radices quadratæ. Idem dic de circulis, eorúmque diametris.

346. SCHOL. *Itaque ſi latera homologa, vel diametri fuerint, utì* 1. 2. 3. 4. 5. &c.

erunt superficies 1. 4. 9. 16. 25. &c.

347. PROBL. *Figuram datam pro libitu multiplicare: seu aliam similem construere, quæ datæ sit dupla, tripla, quadrupla &c.*

SOLUTIO. Esto circulus, cujus radius F.
AC, triplicandus. I. Sume rectam AL 54.
radii AC triplam. II. Inter AC & AL quære mediam proportionalem AD (294) III. Radio AD scriptus circulus erit dati triplus.

DEMONST. *Ex constr.* AC:AD = AD:AL, adeóque $\overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$ = AC:AL (201) atqui circulus primus est ad secundum, ùt $\overline{AC}^2$ ad $\overline{AD}^2$ (341) sicut ergo radius AL est radii AC triplus, ità & circulus secundus triplus est primi. q. e. d.

348. SCHOL. *Quæ jam de circulis, eorúmque radiis dicta sunt, eodem modo applica quibuslibet figuris similibus, earúmque lateribus homologis: & quod de ratione tripla diximus, simili modo de dupla, quadrupla &c. intelligendum est. Nempe, si circulus sit quadruplicandus, sumenda est recta radii quadrupla, inter quam & ipsum radium inventa media proportionalis erit radius circuli quadrupli.*

349. COROL. Eâdem methodo figuram datam minues in qualibet ratione, seu aliam similem construes, quæ sit da-

tæ dimidium, pars tertia &c. Nempe rationem datam primùm exprimes lateribus homologis, inter quæ inventa media proportionalis erit latus homologum figuræ desideratæ.

350. PROBL. *Figuram rectilineam inaccessam* OCDEF *eminus delineare.*

F. 55. SOLUTIO. I. Elige duas stationes A & B, è quibus singuli figuræ anguli, aliáque intra eam posita notabiliora objecta, conspici queant. II. Metire stationum lineam, seu intervallum AB, illúdque secundùm scalæ geometricæ proportionem in chartam transfer: nimirum intervallum AB exhibeatur per rectam ab. III. In utraque statione, adhibitâ vel mensulâ, vel astrolabio, capiantur anguli CAO, CAD &c. EBF, EBD &c. iísque in extremis rectæ ab punctis fiant æquales cao, cad &c., ebf, ebd &c. IV. Puncta c. d. e. f. o. &c., in quibus horum angulorum crura se intersecant, connecte rectis lineis cd, de &c. ità fiet figura ocdef similis figuræ OCDEF.

DEMONST. Propter duos angulos *ex constr.* mutuò æquales similia sunt (216) triangula ABC & abc, ABD & abd, & reliqua omnia super AB & ab posita. Itaque AB : ab = AC : ac, & AB : ab = AD : ad (204) ac proinde AC : ac = AD : ad (51) igitur in triangulis ACD & acd sunt duo latera mutuò proportionalia

circa

circa angulos A & a *ex constr.* æquales: adeóque CD:cd = AC:ac(218) sed *ex demonstratis* AB:ab = AC:ac; ergo CD: cd = AB:ab(51) simili modo ex reliquis triangulis ostendam, quòd reliqua latera rectis AB & ab proportionalia sint. Sunt ergo etiam inter se(51) omnia figurarum latera homologa proportionalia. q. e. 1.

Porrò sicut ostendimus triangula ACD & acd esse similia; ità ostendam & reliqua esse talia: unde fit, singulos in D angulos singulis in d æquales esse(204) adeóque totus CDE toti cde æqualis erit(21) Eodem modo loquere de reliquis angulis E & e, F & f &c. sunt ergo & omnes figurarum anguli mutuò æquales. q. e. 2.

Denique in utraque figura in singulos angulos ex statione utraque unus ducitur radius opticus: hi proinde radii, seu rectæ lineæ, in totidem punctis in utraque figura se secant: unde consurgit idem angulorum, ac proinde laterum numerus. q. e. 3.

Sunt ergo figuræ similes(203) q. e. d.

351. COROL. Sicut hìc ex duabus stationibus figuram OCDEF delineavimus; ità omnes, quotquot ex A & B conspici possunt, delineabis. Patet ergo, quâ ratione integrarum regionum mappæ conficiendæ sint, si ex duabus v.g. turri-

 bus

bus notabiliora regionum objecta conspici possint.

352. SCHOL. *Si ex stationibus duabus tota regio videri non possit; post partem unam ex duabus stationibus A & B delineatam eligenda est statio tertia, ùt E, & pro linea stationum assumenda BE, quam repræsentat jam ducta be. Denique, si opus fuerit, addatur statio 4ta, 5ta &c., donec delineata sint omnia.*

353. COROL. II. Quoniam rectis AB & ab proportionalia sunt quælibet homologa figurarum latera; quovis latere figuræ minoris ad scalam examinato innotescet magnitudo laterishomologi in figura majore.

354. COROL. III. Quia figura utraque dividi potest in triangula mutuò similia (331) quorum proinde latera sunt proportionalia (204) distantia duorum quorumvis angulorum in figura majore obtinebitur, si in figura minore anguli iis respondentes connectantur recta lineâ, eáque ad scalam applicetur.

355. COROL. IV. Denique hinc erues modum figuram inaccessam eminus metiendi. Si enim delineata fuerit, & in triangula dividatur; ope scalæ geometricæ reperies omnia, quæ ad ejus dimensionem requiruntur: puta singulorum triangulorum bases & altitudines.

O. A. M. D. G.

con-

s dua-
ſt par-
& B
ùt E,
BE,
Deni-
a, ſta

is AB
et ho-
latere
to in-
ogi in

utra-
uò ſi-
a ſunt
orum
ajore
nguli
cta li-

c eru-
minus
t, &
eome-
s di-
gulo-
ines.