Einiges über die durch den Durchschnittspunkt der drei Höhen eines Dreiecks beschriebene Curve.

Ist in dem Dreieck ABF die Summe zweier Seiten $AF+BF=S$ und die Grundlienie $AB=2c$ unveränderlich gegeben, so beschreibt bekanntlich der Durchschnittspunkt dieser Seiten eine Ellipse, deren halbe große Axe $=\frac{AF+BF}{2}=a$ sein soll, die Endpunkte der Grundlinie des Dreiecks sind die Brennpunkte und die Grundlinie selbst die Excentricität. Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen für die Ellipse im Mittelpunkt der großen Axe und nennt die Ordinannte $FO=z$, die Abscisse aber x, so ist die Ordinatengleichung der Ellipse

$$1.\ z=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)(a^2-x^2)}.$$

Während nach den angenommenen Bedingungen der Punkt F eine Ellipse beschreibt, durchläuft P der Durchschnittspunkt der drei Höhen des gegebenen Dreiecks eine Curve, für welche die allgemeine Gleichung entwickelt werden soll, um dadurch die Eigenschaften dieser Curve feststellen zu können. Nimmt man auch hier, wie bei der Ellipse, übereinstimmend den Anfangspunkt der Abscissen in C dem Halbirungspunkte der Grundlinie AB des Dreiecks ABF, setzt die Abscisse $CO = x$, die Ordinate $OP = y$ und den Winkel $FAB = \gamma$, so ist

$$2.\quad \text{tang. } \gamma = \frac{z}{c + x}$$

Um aber die Ordinaten und Abscissen der zu untersuchenden Curve einzuführen, betrachte man das Dreieck OPB; darin ist

$$3.\quad \text{tang. } OPB = \frac{c - x}{y},$$

aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke OPB und ABH ist der Winkel $OPB = \gamma$, folglich ist

$$4.\quad \text{tang. } OPB = \text{tang. } \gamma = \frac{c - x}{y}$$

Gleichung 2 und 4 verbunden ist

$$5.\quad \frac{c - x}{y} = \frac{z}{c + x}.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung y, so ergiebt sich

$$6.\quad y = \frac{c^2 - x^2}{z}.$$

Es fällt aber die Ordinate der zu bestimmenden Curve mit der Ordinate der Ellipse wegen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der Dreiecks-höhen in dieselbe grade Linie. Substituirt man nun den für die Ordinate z aufgestellten Werth, so ergiebt sich für die zubestimmende Curve folgende allgemeine Ordinatengleichung:

$$7.\quad y = \frac{c^2 - x^2}{\sqrt{\frac{(a^2 - c^2)\,(a^2 - x^2)}{a^2}}} \quad \text{oder}$$

$$8.\quad y^2 = \frac{(c^2 - x^2)^2\, a^2}{(a^2 - c^2) \cdot (a^2 - x^2)}$$

folglich

$$9.\quad y = \pm \sqrt{\frac{(c^2 - x^2)^2\, a^2}{(a^2 - c^2)\,(a^2 - x^2)}}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich wegen der beiden gleichen, aber entgegengesetzten Werthe für die Ordinate y, daß der Durchschnittspunkt der Dreieckshöhen eine Curve mit gleicher Lage zu beiden Seiten der Absciſſenaxe beschreibt; denn setzt man $x = \pm c$, so wird für beide Werthe die Ordinate Null; es schneidet also die Curve die Grundlinie in ihrem Anfangs- und Endpunkte.

Bringt man die Gleichung für y auf die Form ohne Bruch, so ist

$$10.\quad a^4 y^2 - a^2 c^2 y^2 - a^2 x^2 y^2 + c^2 x^2 y^2 = a^2 c^4 - 2a^2 c^2 x^2 + a^2 x^4.$$

Der Durchschnittspunkt der Dreieckshöhen beschreibt also eine Curve der vierten Ordnung.

Jede Curve des zweiten oder höheren Grades aber wird entweder in einen endlichen Raum eingeschlossen oder hat unendliche Aeste. Dies zu erfahren, betrachte man in der gefundenen Gleichung nur die Glieder, in denen die Summen der Exponenten der Variablen gleich sind, setze die so erhaltene Gleichung $= 0$ und suche diese algebraische Summe in ihre Faktoren zu zerlegen, um darnach den von der Curve eigenommenen Raum zu bestimmen.

Aus 10. ergiebt sich nach Uebergehung aller jener Glieder, in denen die Summen der Exponente der Variablen $= 2$ ist,

$$11.\quad c^2 x^2 y^2 - a^2 x^2 y^2 - a^2 x^4 = 0,$$

woraus sich die Faktoren

$x \cdot x\ (yb + ax)\ (yb - ax)$, ergeben, wenn $(c^2 - a^2) = b^2$ gesetzt wird.—

Eine wichtigere Betrachtung bei Curven höherer Ordnung bietet die

Tangente, welche gleich ist dem Differenzialquotienten der Ordinate und Abscisse oder wenn man den Winkel, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, gleich φ setzt,

$$12.\quad \text{tang. } \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Setzt man, um für die Tangente für einen in der Curve angenommenen Punkt einen reellen Werth zu finden, die Gleichung 10 gleich Null und die konstante Größe $a^2 - c^2 = b^2$, vermehrt zugleich die Veränderlichen um ihr Differenzial und bestimmt die trigonometrische Tangente, so ist

$$13.\quad (y+dy)^2 a^2 b^2 - (y+dy)^2 (x+dx)^2 b^2 - a^2 c^4 + 2a^2 c^2 (x+dx)^2 - a^2 (x+dx)^4 = 0.$$

Werden nun die einzelnen Theile in die entsprechenden Reihen aufgelöst, so erhält man:

$$14.\quad a^2 b^2 (y+dy)^2 = a^2 b^2 y^2 + 2a^2 b^2 ydy + a^2 b^2 dy^2.$$

$$15.\quad -b^2 (y+dy.)^2 (x+dx)^2 = -b^2 y^2 x^2 - 2bx^2 ydy - b^2 x^2 dy^2 - 2b^2 y^2 xdx - 4b^2 xydxdy - 2b^2 xdxdy^2 - b^2 y^2 dx^2 - 2b^2 y\, dydx^2 - b^2 dx^2 dy^2.$$

$$16.\quad 2a^2 c^2 (x+dx)^2 = 2a^2 c^2 x^2 + 4a^2 c^2 xdx + 2a^2 c^2 dx^2.$$

$$17.\quad -a^2 (x+dx)^4 = -a^2 x^4 - 4a^2 x^3 dx - 6a^2 x^2 dx^2 - 4a^2 xdx^3 - a^2 dx^4.$$

Weil aber die Glieder der Gleichung 10 gleich Null gesetzt sind, so erhält man durch Summirung vorstehender Gleichungen:

$$18.\quad 2a^2 b^2 ydy + a^2 b^2 dy^2 - 2b^2 x^2 ydy - b^2 x^2 dy^2 - 2b^2 y^2 xdx - 4b^2 xydxdy - 2b^2 xdxdy^2 - b^2 y^2 dx^2 - 2b^2 ydydx^2 - b^2 dx^2 dy^2 + 4a^2 c^2 xdx + 2a^2 c^2 dx^2 - 4a^2 x^3 dx - 6a^2 x^2 dx^2 - 4a^2 x^3 dx - a^2 dx^4 = 0$$

Betrachtet man in vorstehender Gleichung nur diejenigen Glieder, welche mit einem Differenzial in der ersten Potenz verbunden sind und setzt, weil das Differenzial der ersten Ordnung die Summe aller folgenden Differenziale der höheren Ordnungen an Größe übertrifft, letztere $=0$, ohne bedeutenden Fehler, so ist

$$19.\quad 2a^2 b^2 y dy - 2b^2 x^2 y dy - 2b^2 y^2 x dx + 4a^2 c^2 x dx - 4a^2 x^3 dx = 0$$

Da tang φ, wie oben gesagt wurde $= \frac{dy}{dx}$, so ist

$$20.\quad \frac{2a^2 b^2 y dy}{dx} - \frac{2b^2 x^2 y dy}{dx} - \frac{2b^2 y^2 x dx}{dx} + \frac{4a^2 c^2 x dx}{dx} - \frac{4a^2 x^3 dx}{dx} = 0$$

folglich ein Werth für die trigonometische Tangente

$$21.\quad \frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\varphi = \frac{2b^2 y^2 x - 4a^2 c^2 x + 4a^2 x^3}{(2a^2 b^2 - 2b^2 x^2)\, y}$$

Da aber die Ordinate y, wenn man $x = \pm c$ setzt, nothwendig Null werden muß, so ergiebt sich für die trigonometrische Tangente in dem Null punkt der Ordinate

$$25.\quad \text{tang.}\ \varphi = \frac{\mp 4\, a^3 c \pm a^3 c}{0} = 0$$

ein unbestimmter oder viel mehr kein Werth.

Setzt man aber die Abscisse $=0$, so findet man für den Anfangspunkt der Coordinaten

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{0}{2a^2 b^2 y} = 0.$$

Um jedoch für die Tangente dieser Curve im Nullpunkt der Ordinate einen bestimmten reellen Werth zu erhalten, so muß man, da das erste Differenzial keinen Werth giebt, die Glieder der Gleichung, welche das Differenzial in der zweiten Potenz oder mit zwei Dimensionen enthalten, betrachten, woraus sich ergiebt

$$23. \quad a^2 b^2 dy^2 - b^2 x^2 dy^2 - 4b^2 xydxdy$$
$$- b^2 y^2 dx^2 + 2a^2 c^2 dx^2 - 6a^2 x^2 dx^2 = 0.$$

Setzt man auch in dieser Gleichung $x = \pm c$, so wird die Ordinate Null und man erhält für die trigonometrische Tangente im Nullpunkt der Ordinate folgenden reellen Werth:

$$24. \quad \frac{dy^2}{dx^2} = \text{tang.}^2 \varphi = \frac{4a^2 c^2}{(a^2 - c^2) b^2}$$

und weil $b^2 = a^2 - c^2$, so ist

$$\text{tang. } \varphi = \pm \frac{2ac}{a^2 - c^2}$$

Es fragt sich nun, ob für jede Größe von a und c die trigonometrische Tangente diesen reellen Werth habe; es mag $a = c$, $a > c$ und $a < c$ sein.

In vorstehender Untersuchung ist $a > c$ unbedingt nothwendig, weil ein Dreieck unterstellt und die Summe zweier Dreiecksseiten größer ist als die dritte; ferner ist a gleich gesetzt der halben großen Axe der durch den Durchschnittspunkt F der Schenkel des Dreiecks beschriebenen Ellipse, mithin $2a = S$, folglich $2a > 2c$ oder $a > c$. Die andern beiden Annahmen $a = c$ oder gar $a < c$ sind unmöglich, weil aus Linien solcher Beschaffenheit kein Dreieck gezeichnet, mithin keine der beiden hier erwähnten Curven beschrieben werden kann. Die trigonometrische Tangente kann also keinen andern als den entwickelten Werth haben und wegen

$$\text{tang. } \varphi = \pm \frac{2ac}{a^2 - c^2}$$

durchschneiden sich in A und B, den Endpunkten des unterstellten Dreiecks, zwei Aeste der Curve unter dem Neigungswinkel φ gegen die Abscissenaxe. Die Curve hat also zwei Knoten und vier unendliche Aeste.

Was endlich die Asymptoten betrifft, welche oben erwähnt wurden, so hat die Untersuchung gezeigt, daß die Ordinate y in dem Punkte, in welchem die Abscisse $x = \pm c$ wird, verschwindet. Läßt man aber die Abscisse x über diesen Punkt hinaus noch zunehmen, so findet sich für die Ordinate y noch immer ein bestimmter Werth. Setzt man aber endlich $x = \pm a$, so wird die Ordinate y unendlich, nähert sich dem anschmiegenden Aste der Curve, ohne je in einem Punkte mit derselben zusammen zu treffen; sie bildet also die Asymptoten. Denn setzt man in die Ordinatengleichung für x den Werth a, so ist

$$y^2 = \frac{(c^2 - a^2)\ a^2}{(a^2 - a^2)(a^2 - a^2)} =$$

$$\frac{(c^2 - a^2)\ a^2}{0} = \infty.$$

Es bewegen sich demnach die vier Curvenäste zwischen den beiden Senkrechten, welche in den Endpunkten der großen Axe derjenigen Ellipse errichtet sind, welche durch die unveränderliche Summe der beiden Seiten des unterstellten Dreiecks beschrieben wird.

Bei vorstehender Untersuchung war meine Absicht vorzüglich darauf gerichtet, den in der höheren Analysis weniger bewanderten Schülern einen Fingerzeig zu geben, algebraische Formen und Ausdrücke auf geometrische Construktionen anzuwenden. Deshalb habe ich Differenzial- und Integralformen gänzlich vermieden und das Differenzial nur da eingeführt, wo ohne dasselbe die Durchführung der vorstehenden Untersuchung unmöglich wurde. Aus diesem Gesichtspunkt möge man die Arbeit ansehen und beurtheilen, welche, wie jeder der Wissenschaft Kundige leicht zugestehen wird, unter solchen Bedingungen in mancher Beziehung den Anforderungen der streng wissenschaftlichen Entwickelung weder vollkommen entsprechen wird noch kann.

Mothill.